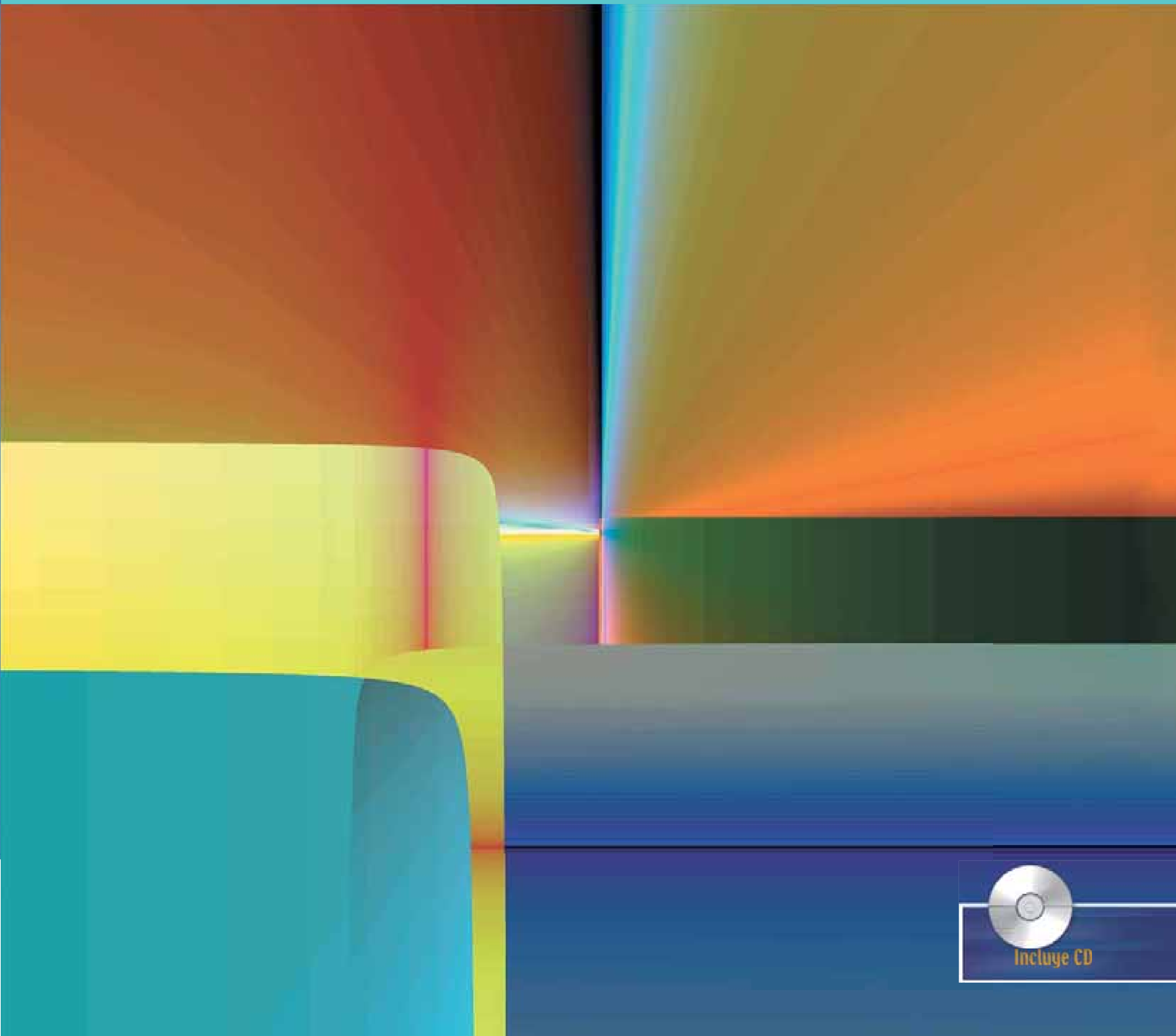
CENGAGE Learning

James Stewart ▪ Lothar Redlin ▪ Saleem Watson

Precálculo QUINTA EDICIÓN

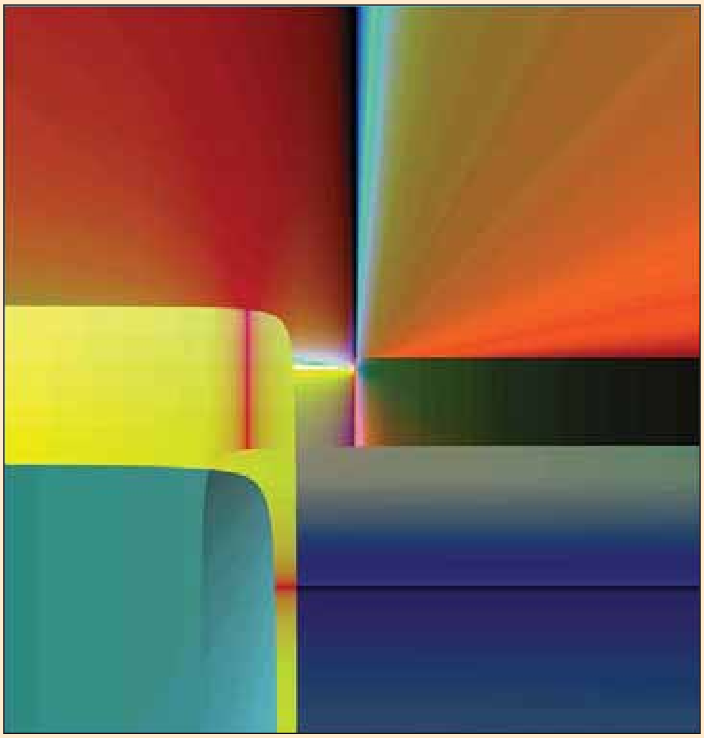
Matemáticas para el cálculo



PRECÁLCULO

Matemáticas para el cálculo

QUINTA EDICIÓN



Acerca de la portada

La portada es una creación de Bill Ralph, un matemático que se apoya en las matemáticas modernas para producir representaciones visuales de “sistemas dinámicos”. Algunos ejemplos de sistemas dinámicos que se pueden observar en la naturaleza son el clima, la presión sanguínea, los movimientos de los planetas y otros fenómenos en los que hay cambios continuos. Dichos sistemas, los cuales tienden a ser impredecibles y hasta caóticos algunas veces, se modelan matemáticamente usando los conceptos de composición e iteración de funciones. La idea básica es iniciar con una función particular y evaluarla en algún punto de su dominio, lo que produce un nuevo número. La función se evalúa con el nuevo número. Al repetir este proceso se genera una sucesión de números que recibe el nombre de *iteraciones* de la función. El dominio original “se pinta”; se asigna un color a cada punto de inicio. El color se determina por medio de ciertas propiedades de la sucesión de iteraciones y el concepto matemático de “dimensión”. El resultado es una imagen que revela los patrones complejos del sistema dinámico. En este sentido, estas imágenes nos permiten ver, a través de los lentes de las matemáticas, pequeños universos externos que nunca antes han sido observados.

El profesor Ralph imparte cátedra en la Brock University de Canadá. Se le puede contactar por medio del correo electrónico en bralph@spartan.ac.brocku.ca.

Acerca de los autores

James Stewart estudió en la University of Toronto y en la Stanford University, dio clases en la University of London y ahora es maestro de la McMaster University. Su campo de investigación es el análisis armónico.

Es autor de la serie mejor vendida de libros de texto de cálculo. La serie está publicada por Brooks/Cole y comprende *Calculus, 5th Ed.*, *Calculus: Early Transcendentals, 5th Ed.* y *Calculus: Concepts and Contexts, 3rd Ed.*, así como una serie de libros de texto para matemáticas de bachillerato.

Lothar Redlin creció en la isla de Vancouver, estudió y obtuvo el grado de licenciatura en Ciencias en la University of Victoria y el grado de doctor de la McMaster University en 1978. Después hizo algunas investigaciones y dio clases en la University of Washington, University of Waterloo y en la California State University, Long Beach.

En la actualidad es profesor de matemáticas en The Pennsylvania State University, Abington College. Su campo de investigación es la topología.

Saleem Watson obtuvo la licenciatura en Ciencias en la Andrews University en Michigan. Continuó sus estudios de posgrado en Dalhousie University y en la McMaster University, en donde obtuvo un doctorado en 1978. Después se dedicó a la investigación en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Varsovia en Polonia. Además, también dio clases en The Pennsylvania State University.

Actualmente es profesor de Matemáticas en la California State University, Long Beach. Su campo de investigación es el análisis funcional.

Los autores también han publicado *College Algebra*, *Fourth Edition* (Brooks/Cole, 2004), *Algebra and Trigonometry*, *Second Edition* (Brooks/Cole, 2007) y *Trigonometry* (Brooks/Cole, 2003).

PRECÁLCULO
Matemáticas para el cálculo

QUINTA EDICIÓN

James Stewart
McMaster University

Lothar Redlin
The Pennsylvania State University

Saleem Watson
California State University, Long Beach

Revisión técnica
Héctor Vidaurri
Instituto Tecnológico y de
Estudios Superiores de Occidente (ITESO)

Alejandro Alfaro
Instituto Tecnológico Autónomo de
México (ITAM)

CENGAGE Learning

Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur

Precálculo. Matemáticas para el cálculo.
Quinta edición
James Stewart, Lothar Redlin
y Saleem Watson

Presidente de Cengage Learning Latinoamérica:
Javier Arellano Gutiérrez

Director general México y Centroamérica:
Pedro Turbay Garrido

Director Editorial Latinoamérica:
José Tomás Pérez Bonilla

Director de producción:
Raúl D. Zendejas Espejel

Coordinadora editorial:
María Rosas López

Editor de desarrollo:
Pedro de la Garza Rosales

Editora de producción:
Abril Vega Orozco

Diseño de portada:
Roy E. Neuhaus

Corporativo Santa Fe
Av. Santa Fe, núm. 505, piso 12
Col. Cruz Manca, Santa Fe
C.P. 05349, México, D.F.

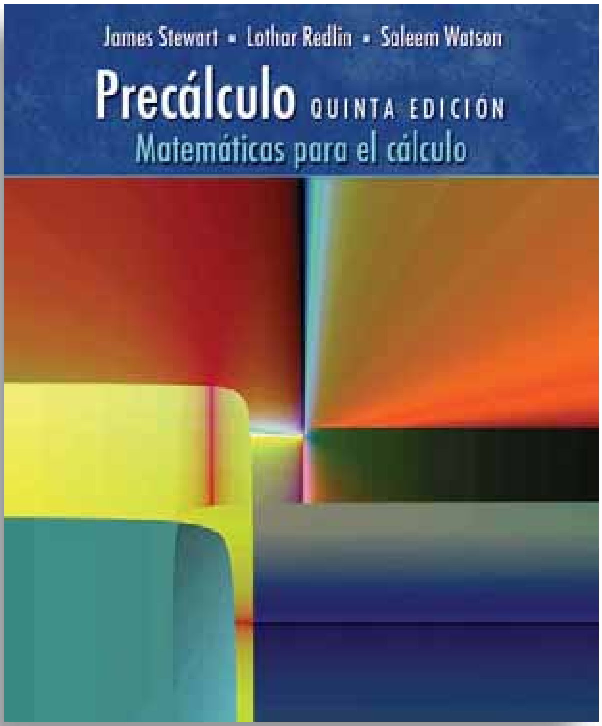
Traducido del libro *Precalculus. Mathematics for Calculus*, 5th ed. Publicado en inglés por Thomson/Brooks Cole © 2006
ISBN: 0-534-49277-0

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James, Lothar Redlin
y Saleem Watson
Precálculo. Matemáticas para el cálculo
Quinta edición
ISBN-13: 978-607-481-406-4
ISBN-10: 607-481-406-6

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Habilidades y conceptos que necesita el estudiante para lograr buenos resultados en matemáticas

¡Descubra un enfoque, probado y accesible, sobre la importancia del precálculo matemático en el mundo cotidiano! Con la guía experta y cuidadosa de los autores James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson, cuya obra ***Precálculo: Matemáticas para el cálculo,*** quinta edición es la más vendida, el estudiante adquiere no sólo habilidades técnicas, sino entiende los conceptos, lo cual es esencial para obtener resultados satisfactorios en los cursos siguientes de matemáticas y ciencias. Esta obra tiene una presentación que se adecua a una amplia gama de enfoques de la enseñanza, ya que guía al estudiante hacia un entendimiento rico de la fuerza que las matemáticas tienen en la práctica. Las explicaciones claras proporcionan confianza y dan ánimo, sin que por ello se dejen de tratar las cuestiones difíciles. La atención al detalle y a la claridad, como en la obra líder en el mercado ***Cálculo*** de James Stewart, es lo que hace que ***Precálculo*** sea el texto más vendido para este curso.



“Las explicaciones claras del autor, así como la buena organización determinan la pauta para los nuevos profesores.”
William Cherry,
University of North Texas

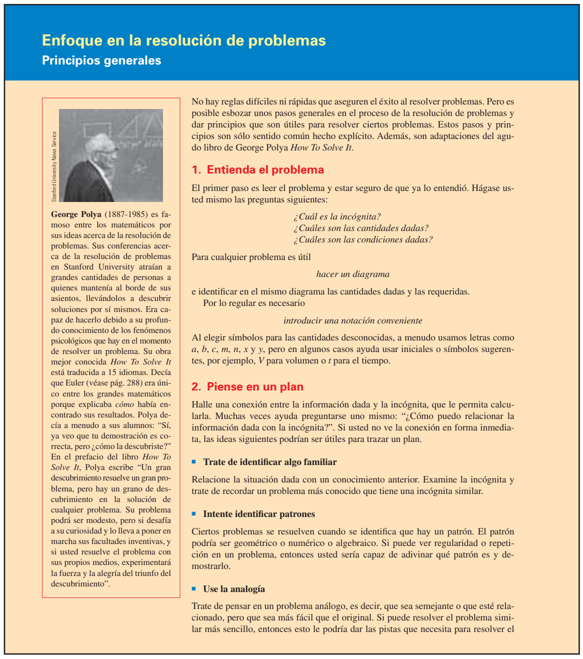
“El nivel es perfecto. Es desafiante sin ser difícil.”
Amy Elizabeth,
Bowman University of Alabama Huntsville

AVANCE

PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO, QUINTA EDICIÓN

Las matemáticas como un esfuerzo para resolver problemas

La resolución de problemas y el modelado matemático se presentan casi al inicio del libro y se refuerzan a través de todo el contenido, de modo que cuando los estudiantes terminan el curso poseen bases firmes de los principios del pensamiento matemático.



Enfoque en la resolución de problemas

Principios generales

No hay reglas difíciles ni rápidas que aseguren el éxito al resolver problemas. Pero es posible esbozar unos pasos generales en el proceso de la resolución de problemas y dar principios que son útiles para resolver ciertos problemas. Estos pasos y principios son sólo sentido común hecho explícito. Además, son adaptaciones del agudo libro de George Polya *How To Solve It*.

George Polya (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas acerca de la resolución de problemas. Sus conferencias acerca de la resolución de problemas en Stanford University atraían a grandes cantidades de personas a quienes mantenía al borde de sus asientos, llevándolos a descubrir soluciones por sí mismos. Era capaz de hacerlo debido a su profundo conocimiento de los fenómenos psicológicos que hay en el momento de resolver un problema. Su obra mejor conocida *How To Solve It* está traducida a 15 idiomas. Decía que Euler (véase pág. 288) era único entre los grandes matemáticos porque explicaba *cómo* había encontrado sus resultados. Polya decía a menudo a sus alumnos: "Sí, ya veo que tu demostración es correcta, pero ¿cómo la descubriste?" En el prefacio del libro *How To Solve It*, Polya escribe "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Su problema podrá ser modesto, pero si desafía a su curiosidad y lo lleva a poner en marcha sus facultades inventivas, y si usted resuelve el problema con sus propios medios, experimentará la fuerza y la alegría del triunfo del descubrimiento".

1. Entienda el problema

El primer paso es leer el problema y estar seguro de que ya lo entendió. Hágase usted mismo las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para cualquier problema es útil

hacer un diagrama

e identificar en el mismo diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo regular es necesario

introducir una notación conveniente

Al elegir símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x y y, pero en algunos casos ayuda usar iniciales o símbolos sugerentes, por ejemplo, V para volumen o t para el tiempo.

2. Piense en un plan

Halle una conexión entre la información dada y la incógnita, que le permita calcularla. Muchas veces ayuda preguntarse uno mismo: "¿Cómo puedo relacionar la información dada con la incógnita?". Si usted no ve la conexión en forma inmediata, las ideas siguientes podrían ser útiles para trazar un plan.

■ **Trate de identificar algo familiar**

Relacione la situación dada con un conocimiento anterior. Examine la incógnita y trate de recordar un problema más conocido que tiene una incógnita similar.

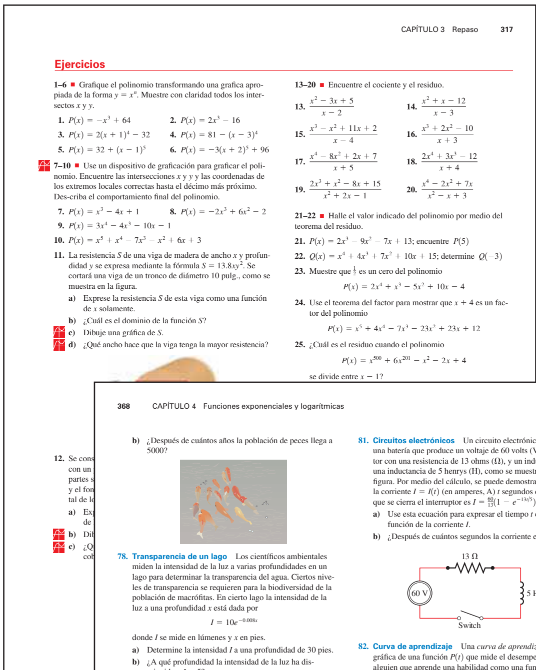
■ **Intente identificar patrones**

Ciertos problemas se resuelven cuando se identifica que hay un patrón. El patrón podría ser geométrico o numérico o algebraico. Si puede ver regularidad o repetición en un problema, entonces usted sería capaz de adivinar qué patrón es y demostrarlo.

■ **Use la analogía**

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, que sea semejante o que esté relacionado, pero que sea más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar más sencillo, entonces esto le podría dar las pistas que necesita para resolver el

Stewart, Redlin y Watson se enfocan en la solución de problemas y hacen énfasis en que los estudiantes desarrollen un pensamiento matemático en vez de que memoricen "reglas". El capítulo 1 termina con la sección *Enfoque en la resolución de problemas*, en la cual se esbozan los pasos generales del proceso que lleva a la solución de un problema y se proporcionan principios útiles al resolver cierto tipo de problemas. Dichos pasos y principios son adaptaciones de ***How To Solve It*** de George Polya.



CAPÍTULO 3 Repaso 317

Ejercicios

1–6 ■ Grafique el polinomio transformando una grafica apropiada de la forma $y = x^n$. Muestre con claridad todos los intersectos x y y.

1. $P(x) = -x^3 + 64$
2. $P(x) = 2x^3 - 16$
3. $P(x) = 2(x + 1)^4 - 32$
4. $P(x) = 81 - (x - 3)^4$
5. $P(x) = 32 + (x - 1)^5$
6. $P(x) = -3(x + 2)^5 + 96$

7–10 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar el polinomio. Encuentre las intersecciones x y y y las coordenadas de los extremos locales correctas hasta el décimo más próximo. Des-criba el comportamiento final del polinomio.

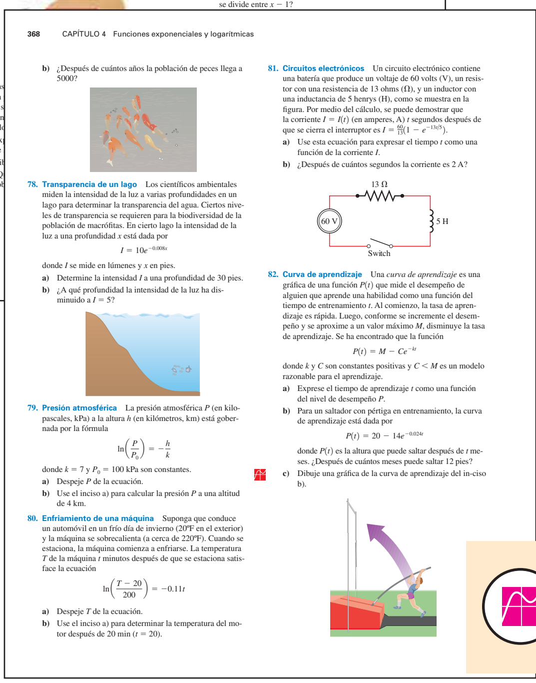
7. $P(x) = x^3 - 4x + 1$
8. $P(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$
9. $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 10x - 1$
10. $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x + 3$
11. La resistencia S de una viga de madera de ancho x y profundidad y se expresa mediante la fórmula $S = 13.8xy^2$. Se cortará una viga de un tronco de diámetro 10 pulg., como se muestra en la figura.
 a) Exprese la resistencia S de esta viga como una función de x solamente.
 b) ¿Cuál es el dominio de la función S?
 c) Dibuje una gráfica de S.
 d) ¿Qué ancho hace que la viga tenga la mayor resistencia?

13–20 ■ Encuentre el cociente y el residuo.

13. $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$
14. $\dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$
15. $\dfrac{x^3 - x^2 + 11x + 2}{x - 4}$
16. $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 10}{x + 3}$
17. $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 2x + 7}{x + 5}$
18. $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 12}{x + 4}$
19. $\dfrac{2x^3 + x^2 - 8x + 15}{x^2 + 2x - 1}$
20. $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 7x}{x^2 - x + 3}$

21–22 ■ Halle el valor indicado del polinomio por medio del teorema del residuo.

21. $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 13$; encuentre $P(5)$
22. $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 15$; determine $Q(-3)$
23. Muestre que $\frac{1}{2}$ es un cero del polinomio
$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 10x - 4$$
24. Use el teorema del factor para mostrar que $x + 4$ es un factor del polinomio
$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 23x^2 + 23x + 12$$
25. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio
$$P(x) = x^{500} + 6x^{201} - x^2 - 2x + 4$$
se divide entre $x - 1$?



368 CAPÍTULO 4 Funciones exponenciales y logarítmicas

b) ¿Después de cuántos años la población de peces llega a 5000?

78. Transparencia de un lago Los científicos ambientales miden la intensidad de la luz a varias profundidades en un lago para determinar la transparencia del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población de macrófitas. En cierto lago la intensidad de la luz a una profundidad x está dada por
$$I = 10e^{-0.008x}$$
donde I se mide en lúmenes y x en pies.
a) Determine la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
b) ¿A qué profundidad la intensidad de la luz ha disminuido a $I = 5$?

79. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascales, kPa) a la altura h (en kilómetros, km) está gobernada por la fórmula
$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$
donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.
a) Despeje P de la ecuación.
b) Use el inciso a) para calcular la presión P a una altitud de 4 km.

80. Enfriamiento de una máquina Suponga que conduce un automóvil en un frío día de invierno (20°F en el exterior) y la máquina se sobrecalienta (a cerca de 220°F). Cuando se estaciona, la máquina comienza a enfriarse. La temperatura T de la máquina t minutos después de que se estaciona satisface la ecuación
$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$
a) Despeje T de la ecuación.
b) Use el inciso a) para determinar la temperatura del motor después de 20 min ($t = 20$).

81. Circuitos electrónicos Un circuito electrónico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Por medio del cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de que se cierra el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.
a) Use esta ecuación para expresar el tiempo t como una función de la corriente I.
b) ¿Después de cuántos segundos la corriente es 2 A?

13 Ω
60 V
5 H
Switch

82. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de entrenamiento t. Al comienzo, la tasa de aprendizaje es rápida. Luego, conforme se incremente el desempeño y se aproxime a un valor máximo M, disminuye la tasa de aprendizaje. Se ha encontrado que la función
$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$
donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para el aprendizaje.
a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como una función del nivel de desempeño P.
b) Para un saltador con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por
$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$
donde $P(t)$ es la altura que puede saltar después de t meses. ¿Después de cuántos meses puede saltar 12 pies?
c) Dibuje una gráfica de la curva de aprendizaje del in-ciso b).

Más del 20% de los ejercicios del texto es material *nuevo* en esta edición, así como los ejercicios de aplicación. Una gran cantidad de ejercicios clasificados con todo cuidado impulsan a que el estudiante entienda los conceptos y desarrolle sus habilidades para resolver problemas. Los ejercicios van desde el desarrollo de habilidades elementales hasta los problemas más complicados. En esta edición, cada conjunto de ejercicios incluye un grupo de ejercicios de *Aplicaciones*. Este diseño confiere importancia a las *aplicaciones* de los problemas, a la vez que los hace más fáciles de asignar.

El icono de calculadora para graficar señala los ejercicios que se resuelven idealmente por medio de la calculadora o la computadora. En la página viii de este prefacio ilustrado se encuentra más información acerca del uso de la calculadora para graficar en este libro.

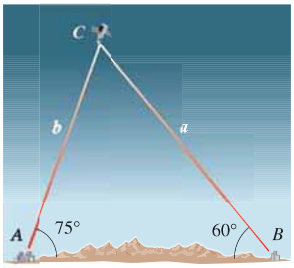


Figura 4

Ejemplo 1 Rastreo de un satélite (LAA)

Un satélite que orbita la Tierra pasa directamente arriba de las estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, apartadas 340 millas. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, su ángulo de elevación es observado de manera simultánea como 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿Qué tan lejos está el satélite de Los Ángeles? En otras palabras, encuentre la distancia AC en la figura 4.

Solución Siempre que dos ángulos en un triángulo se conocen, el tercer ángulo se puede determinar de inmediato porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En este caso, $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (véase la figura 4), por lo tanto se tiene

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\frac{\text{sen } 60°}{b} = \frac{\text{sen } 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \text{ sen } 60°}{\text{sen } 45°} \approx 416 \qquad \text{Resuelva por } b$$

La distancia del satélite desde Los Ángeles es aproximadamente 416 millas. ■

Ejemplo 2 Método de sustitución

Calcule todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & \text{Ecuación 1} \\ 3x - y = 10 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Iniciamos despejando y de la segunda ecuación.

Despejar una variable

$$y = 3x - 10 \qquad \text{Despeje y de la ecuación 2}$$

Luego se sustituye el valor de y en la primera ecuación y se determina el valor de x:

Sustitución

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 && \text{Sustitución de } y = 3x - 10 \text{ en la ecuación 1} \\ x^2 + (9x^2 - 60x + 100) &= 100 && \text{Desarrollo} \\ 10x^2 - 60x &= 0 && \text{Simplificación} \\ 10x(x - 6) &= 0 && \text{Factorización} \\ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x &= 6 && \text{Determinación de } x \end{aligned}$$

Ahora se sustituyen estos valores de x en la ecuación $y = 3x - 10$.

Sustitución en la variable despejada

Para $x = 0$: $\quad y = 3(0) - 10 = -10 \qquad$ Sustitución

Para $x = 6$: $\quad y = 3(6) - 10 = 8 \qquad$ Sustitución

Entonces tenemos dos soluciones: $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda ecuación es una recta; en la figura 3 se ilustra que las gráficas se cortan en los dos puntos $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

Compruebe su respuesta

$x = 0, y = -10$:

$$\begin{cases} (0)^2 + (-10)^2 = 100 \\ 3(0) - (-10) = 10 \end{cases} \checkmark$$

$x = 6, y = 8$:

$$\begin{cases} (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \\ 3(6) - (8) = 18 - 8 = 10 \end{cases} \checkmark$$

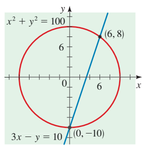


Figura 3 ■

Método de eliminación

Para resolver un sistema por medio del método de eliminación, se trata de combinar las ecuaciones usando sumas o diferencias para eliminar una de las variables.

▲ Muchos de los *Ejemplos* ilustrativos del libro incluyen una sección *Revise su respuesta* para remarcar la importancia de revisar y comprobar si una respuesta es razonable. Además, la mayor parte de los ejemplos ilustrativos contienen notas del autor, lo cual constituye una guía paso a paso para llegar a la solución.

"Otra característica notable de esta obra son las preguntas capciosas que a menudo se presentan al final de un grupo de ejercicios. Estoy impresionado por la variedad y profundidad de muchas de estas preguntas, y creo que los ejemplos prácticos, los enunciados de los problemas y las preguntas de la sección "Descubrimiento • Debate" . . . son recursos excelentes."

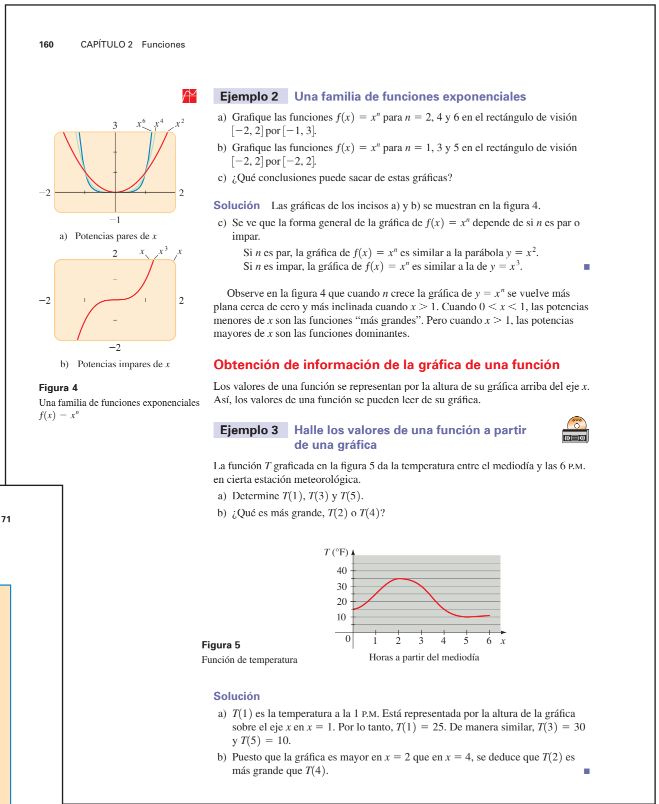
Donald Robertson,
Olympic College

AVANCE

PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO, QUINTA EDICIÓN

Matemáticas para el éxito futuro

Precálculo es un libro completo, muy bien dosificado que proporciona exploración detallada de conceptos, y contiene una gran cantidad de material para graficar en la calculadora con el fin de ayudar a que el estudiante reflexione en las ideas matemáticas.



160 CAPÍTULO 2 Funciones

Ejemplo 2 Una familia de funciones exponenciales

a) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2, 4$ y 6 en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

b) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1, 3$ y 5 en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

c) ¿Qué conclusiones puede sacar de estas gráficas?

Solución Las gráficas de los incisos a) y b) se muestran en la figura 4.

c) Se ve que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.
Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$.

Observe en la figura 4 que cuando n crece la gráfica de $y = x^n$ se vuelve más plana cerca de cero y más inclinada cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias menores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias mayores de x son las funciones dominantes.

a) Potencias pares de x

b) Potencias impares de x

Figura 4 Una familia de funciones exponenciales $f(x) = x^n$

Obtención de información de la gráfica de una función

Los valores de una función se representan por la altura de su gráfica arriba del eje x. Así, los valores de una función se pueden leer de su gráfica.

Ejemplo 3 Halle los valores de una función a partir de una gráfica

La función T graficada en la figura 5 da la temperatura entre el mediodía y las 6 P.M. en cierta estación meteorológica.

a) Determine $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

b) ¿Qué es más grande, $T(2)$ o $T(4)$?

Figura 5 Función de temperatura

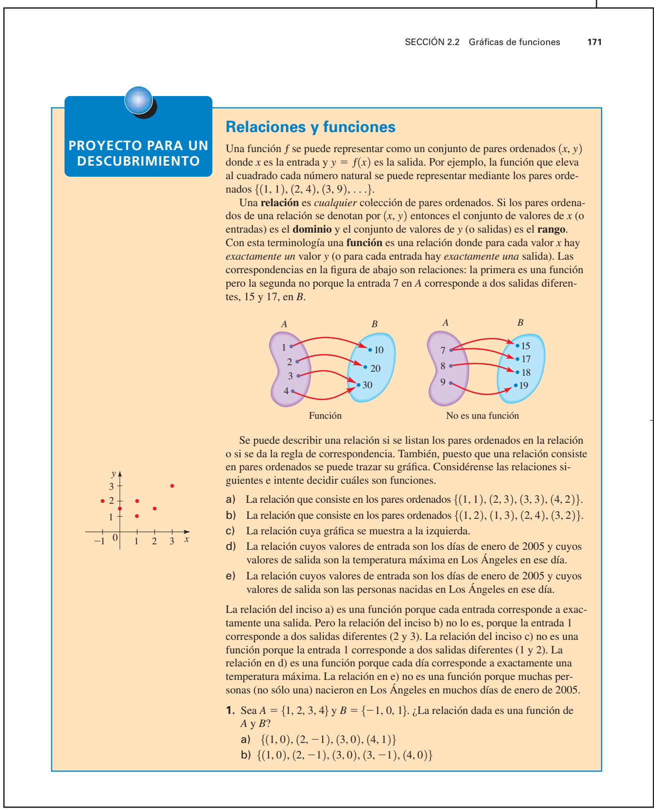
Horas a partir del mediodía

Solución

a) $T(1)$ es la temperatura a la 1 P.M. Está representada por la altura de la gráfica sobre el eje x en $x = 1$. Por lo tanto, $T(1) = 25$. De manera similar, $T(3) = 30$ y $T(5) = 10$.

b) Puesto que la gráfica es mayor en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es más grande que $T(4)$.

Los amplios *Proyecto para un descubrimiento* ayudan al estudiante a que aprenda en forma activa, estimulándolo a utilizar sus habilidades matemáticas de una manera más provechosa. En esta edición se incluyen varias secciones nuevas de *Proyecto para un descubrimiento*, como la del capítulo 2, Funciones. Este proyecto se añadió para los maestros que necesitan material sobre relaciones.



SECCIÓN 2.2 Gráficas de funciones 171

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Relaciones y funciones

Una función f se puede representar como un conjunto de pares ordenados (x, y) donde x es la entrada y $y = f(x)$ es la salida. Por ejemplo, la función que eleva al cuadrado cada número natural se puede representar mediante los pares ordenados $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\}$.

Una **relación** es *cualquier* colección de pares ordenados. Si los pares ordenados de una relación se denotan por (x, y) entonces el conjunto de valores de x (o entradas) es el **dominio** y el conjunto de valores de y (o salidas) es el **rango**. Con esta terminología una **función** es una relación donde para cada valor x hay *exactamente un* valor y (o para cada entrada hay *exactamente una* salida). Las correspondencias en la figura de abajo son relaciones: la primera es una función pero la segunda no porque la entrada 7 en A corresponde a dos salidas diferentes, 15 y 17, en B.

Función — No es una función

Se puede describir una relación si se listan los pares ordenados en la relación o si se da la regla de correspondencia. También, puesto que una relación consiste en pares ordenados se puede trazar su gráfica. Considérense las relaciones siguientes e intente decidir cuáles son funciones.

a) La relación que consiste en los pares ordenados $\{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$.
b) La relación que consiste en los pares ordenados $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$.
c) La relación cuya gráfica se muestra a la izquierda.
d) La relación cuyos valores de entrada son los días de enero de 2005 y cuyos valores de salida son la temperatura máxima en Los Ángeles en ese día.
e) La relación cuyos valores de entrada son los días de enero de 2005 y cuyos valores de salida son las personas nacidas en Los Ángeles en ese día.

La relación del inciso a) es una función porque cada entrada corresponde a exactamente una salida. Pero la relación del inciso b) no lo es, porque la entrada 1 corresponde a dos salidas diferentes (2 y 3). La relación del inciso c) no es una función porque la entrada 1 corresponde a dos salidas diferentes (1 y 2). La relación en d) es una función porque cada día corresponde a exactamente una temperatura máxima. La relación en e) no es una función porque muchas personas (no sólo una) nacieron en Los Ángeles en muchos días de enero de 2005.

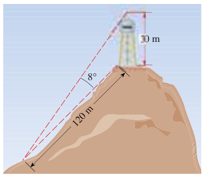
1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$. ¿La relación dada es una función de A y B?
   a) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (4, 1)\}$
   b) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (3, -1), (4, 0)\}$

Como una opción más en la solución de problemas, desde los primeros capítulos los autores aportan el uso de la calculadora graficadora como una herramienta importante que amplía la habilidad del estudiante para calcular y visualizar las matemáticas. Los autores utilizan en todo el libro la calculadora con el objeto de elaborar gráficas de funciones, familias de funciones y sucesiones; para calcular y obtener las gráficas de las curvas de regresión; resolver pasos del álgebra de matrices; graficar desigualdades lineales, y aún más. Las secciones, ejemplos y ejercicios en los que se utiliza la calculadora para hacer gráficas están marcados con un símbolo, lo cual permite identificarlos con facilidad. Éstos se pueden omitir sin que se pierda la continuidad.

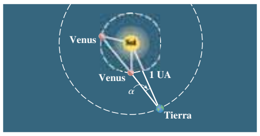
AVANCE

PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO, QUINTA EDICIÓN

40. Cálculo de un ángulo Una torre de agua de 30 m de alto se localiza en la cima de una colina. Desde una distancia de 120 m colina abajo, se observa que el ángulo entre la parte superior y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación de la colina.



41. Distancias a Venus La *elongación* α de un planeta es el ángulo que forman el planeta, la Tierra y el Sol (véase la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es de 0.723 UA (véase el ejercicio 65 de la sección 6.2). En cierto momento se encuentra que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las distancias posibles de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).



42. Burbujas de jabón Cuando dos burbujas se adhieren en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro *D* yace sobre una línea que pasa por los centros de las burbujas (véase la figura). También, los ángulos *ACB* y *ACD* miden cada uno 60°.

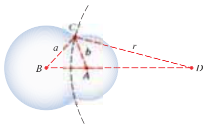
a) Muestre que el radio *r* de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia*: use la ley de los senos junto con el hecho de que un ángulo θ y su complemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

b) Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 y 3 cm.

c) ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?



Descubrimiento • Debate

43. Número de soluciones en el caso ambiguo Se ha visto que al usar la ley de los senos para resolver un triángulo en el caso LLA, puede haber dos soluciones, una o ninguna. Bosqueje triángulos como los de la figura 6 para comprobar los criterios de la tabla para varias soluciones si se tiene $\angle A$ y los lados a y b.

Criterio	Número de soluciones
$a \geq b$	1
$b > a > b \operatorname{sen} A$	2
$a = b \operatorname{sen} A$	1
$a < b \operatorname{sen} A$	0

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$, use estos criterios para hallar el intervalo de valores de a para los cuales el triángulo *ABC* tiene dos soluciones, una solución o ninguna.

6.5 Ley de los cosenos

La ley de los senos no se puede usar de manera directa para resolver triángulos si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados (éstos son los casos 3 y 4 de la sección anterior). En estos dos casos, se aplica la **ley de los cosenos.**

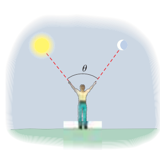
Cada uno de los grupos de ejercicios termina con preguntas sobre *Descubrimiento • Debate* que estimulan a los estudiantes a experimentar con los conceptos desarrollados en esa sección. Estas preguntas se pueden resolver por grupos y ayudan a que el estudiante aprenda a comunicar el pensamiento matemático por medio de la escritura.

Si usted está enseñando trigonometría a partir del enfoque del triángulo rectángulo (capítulo 6) o con el sistema del círculo unitario (capítulo 5), ***Precálculo*** proporciona una solución flexible. Los capítulos sobre trigonometría de este libro están escritos de modo que se pueda analizar primero cualquier enfoque. Cada método está acompañado de aplicaciones adecuadas, que aclaran la razón de los diferentes enfoques de la trigonometría. En el caso de esta quinta edición, el capítulo 7, Trigonometría analítica, se ha acortado, y el material adicional se pasó a un capítulo 8 *nuevo* y estructurado más lógicamente, Coordenadas polares y vectores.

Esquema del capítulo

Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras distintas pero equivalentes: como funciones de números reales (capítulo 5) o como funciones de ángulos (capítulo 6). Los dos enfoques a la trigonometría son independientes entre sí, así que se puede estudiar primero el capítulo 5 o el capítulo 6. Se estudian ambos métodos porque distintas aplicaciones requieren que sean consideradas desde un punto de vista distinto. El enfoque en este capítulo lleva a problemas geométricos en los que se requiere hallar ángulos y distancias.

Suponga que se quiere hallar la distancia al Sol. Usar una cinta métrica es por supuesto impráctico, así que se necesita algo más que la medición simple para enfrentar este problema. Los ángulos son fáciles de medir; por ejemplo, se puede hallar el ángulo formado entre el Sol, la Tierra y la Luna apuntando simplemente al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar una relación entre ángulos y distancias. Así que si se tiene una manera de determinar distancias a partir de ángulos, se podría hallar la distancia al Sol sin ir allá. Las funciones trigonométricas proporcionan las herramientas necesarias.

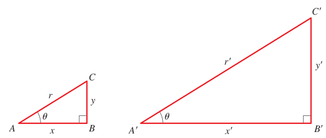


Gregory D. Dimijian M.D.

Si *ABC* es un ángulo recto con ángulo agudo θ como en la figura, entonces se define sen θ como la relación y/r. El triángulo $A'B'C'$ es similar al triángulo *ABC*, por lo tanto

$$\frac{y}{r} = \frac{y}{r}$$

Aunque las distancias y' y r' son diferentes de y y r, la relación dada es la misma. Así, en *cualquier* ángulo recto con ángulo agudo θ, la relación del ángulo opuesto θ a la hipotenusa es la misma y se llama sen θ. Las otras relaciones trigonométricas se definen de manera similar.



En este capítulo se aprende cómo se pueden usar las funciones trigonométricas para medir distancias sobre la tierra y el espacio. En los ejercicios 61 y 62 de la página 487, se determina en realidad la distancia al Sol por medio de trigonometría.

“Mi propósito al enseñar los conceptos matemáticos necesarios para comprender el cálculo infinitesimal es conformar las bases algebraicas y las habilidades para manejar la trigonometría . . . [*Precálculo*] me ayuda ciertamente a lograr esta meta.”

Jude T. Socrates,
Pasadena City College

AVANCE

PRECÁLCULO. MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO, QUINTA EDICIÓN

Matemáticas para situaciones cotidianas

Los estudiantes encontrarán un gran acervo de aplicaciones del mundo real y ejemplos de ingeniería, física, química, negocios, biología, estudios ambientales y de otros campos. Mediante el *Enfoque en el modelado*, los autores señalan continuamente la pertinencia del pensamiento matemático para modelar situaciones de la vida cotidiana.

SECCIÓN 7.5 Ecuaciones trigonométricas 565

$\cos x = 0$ o $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ Cada factor se iguala a 0

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ Determinación de sen x

$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ o $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ Determinación

El periodo tanto del seno como del coseno es 2π, de modo soluciones de la ecuación mediante la adición de un múltip 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera.

Ejemplo 7 Elevación al cuadrado y uso de

Resuelva la ecuación $\cos x + 1 = \operatorname{sen} x$ en el intervalo [0,

Solución Para obtener una ecuación que contenga sólo vamos ambos miembros y aplicamos la identidad pitagóric

$$\cos x + 1 = \operatorname{sen} x$$
$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \operatorname{sen}^2 x$$
$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$$
$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$
$$2\cos x(\cos x + 1) = 0$$
$$2\cos x = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos x + 1 = 0$$
$$\cos x = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos x = -1$$
$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \pi$$

Puesto que elevamos al cuadrado ambos lados, necesitamo ciones extrañas. De acuerdo con *Compruebe su respuesta* ob nes de la ecuación dada son $\pi/2$ y π.

Compruebe su respuesta

$x = \frac{\pi}{2}$: $\cos\frac{\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$; $0 + 1 = 1$ ✓

$x = \frac{3\pi}{2}$: $\cos\frac{3\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$; $0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$ ✗

Si ejecutamos una operación en una ecuación que podrí tal como elevar al cuadrado ambos miembros, entonces soluciones que se obtienen no son extrañas; es decir, es cumplen con la ecuación original, como en el ejemplo 7.

The National Academy of Sciences

Julia Robinson (1919-1985) nació en San Luis Missouri, y creció en Point Loma, California. Debido a una enfermedad, no asistió a la escuela dos años, pero después con ayuda de un tutor, terminó el quinto, sexto, séptimo y octavo grados en solo un año. Más tarde, en la San Diego State University, al leer las biografías de matemáticos en *Men of Mathematics* de E. T. Bell se despertó en ella lo que llegó a ser una pasión de toda su vida por las matemáticas. Decía "No creo exagerar al destacar la importancia de esos libros... en la vida intelectual de un estudiante." Robinson es famosa por su trabajo sobre el décimo problema de Hilbert (página 708), el cual pide un procedimiento general para determinar si una ecuación tiene soluciones con números enteros. Sus ideas dieron origen a una respuesta completa al problema. Es interesante hacer notar que la respuesta se relacionaba con ciertas propiedades de los números de Fibonacci (página 826) descubiertas por el entonces matemático ruso de 22 años Yuri Matijasevič. Como resultado de su brillante trabajo sobre el décimo problema de Hilbert, le ofrecieron una cátedra en la Universidad de California, Berkeley, y se convirtió en la primera mujer matemática elegida a la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos. También fue presidenta de la American Mathematical Society.

▲ Las viñetas de *Matemáticas en el mundo moderno* revelan la importancia de las matemáticas como una ciencia viva, decisiva para el progreso científico y técnico de los tiempos recientes, pero también para las ciencias sociales, de la conducta y de la vida. Los estudiantes encontrarán también viñetas biográficas que presentan reflexiones de varios matemáticos relativas a los conceptos preliminares del cálculo.

▶ Todos los capítulos comienzan con un *Esquema del capítulo*, en el que se presentan las ideas principales y se indican cómo aplicarlas en contextos reales.

Enfoque en el modelado

Mapeo del mundo

El método usado para medir y elaborar un mapa (página 522) funciona bien para áreas pequeñas. Pero trazar el mapa del mundo entero introduciría una nueva dificultad: ¿cómo se representa el mundo *esférico* mediante un mapa *plano*? Se han desarrollado varios métodos ingeniosos.

Figura 1
El punto P sobre la Tierra se proyecta sobre el punto P' sobre el cilindro mediante un rayo desde el centro de la Tierra C.

Proyección cilíndrica

Un método es la **proyección cilíndrica.** En este método se imagina un cilindro que envuelve a la Tierra en el ecuador como en la figura 1. Cada punto sobre la tierra se proyecta sobre el cilindro mediante un rayo que emana del centro de la Tierra. El cilindro extendido es el mapa plano deseado del mundo. El proceso se ilustra en la figura 2.

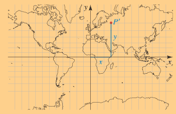


Figura 2 a) Proyección cilíndrica b) Mapa de proyección cilíndrica

Por supuesto, en realidad no se puede envolver una gran pieza de papel alrededor del mundo, de modo que este proceso completo se debe hacer matemáticamente, y la herramienta que se necesita es trigonometría. En el cilindro extendido se toma el eje x para que corresponda con el ecuador y el eje y con el meridiano de Greenwich, Inglaterra (longitud 0º). Sea R el radio de la Tierra y P el punto sobre la Tierra en longitud $\alpha°$ E y latitud $\beta°$ N. El punto P se proyecta hasta el punto $P'(x, y)$ sobre el cilindro (visto como parte del plano coordenado) donde

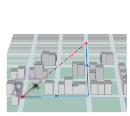
$$x = \left(\frac{\pi}{180}\right)\alpha R \quad \text{Fórmula para la longitud de un arco circular}$$

$$y = R \tan \beta \quad \text{Definición de tangente}$$

Véase la figura 2a). Estas fórmulas se pueden usar entonces para trazar el mapa. (Observe que la longitud oeste y la latitud sur corresponden a valores negativos de α y β, respectivamente.) Por supuesto, usar R como el radio de la Tierra produciría un mapa enorme, así que se remplaza R por un valor más pequeño para obtener un mapa a una escala apropiada como en la figura 2b).

▲ Los capítulos 2 al 12 cuentan con una sección *Enfoque en el modelado*, en la que se ilustran técnicas para modelar, así como la manera en la que los conceptos preliminares del cálculo se pueden aplicar en situaciones de la vida real. Seis de dichas secciones de esta edición son nuevas, y cuentan con aplicaciones de gran interés que van desde la topografía hasta la agricultura. Además de estas secciones se incluyen muchos problemas aplicados, que dan al estudiante un modelo para analizar, así como problemas en los cuales se pide a los estudiantes que construyan modelos para situaciones de la vida cotidiana.

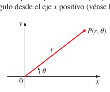
Esquema del capítulo



Courtesy of NASA

En este capítulo se estudian las coordenadas polares, una nueva forma de describir la ubicación de puntos en un plano.

Un sistema coordenado es un método para especificar la ubicación de un punto en el plano. Estamos familiarizados con coordenadas rectangulares (o cartesianas). En las coordenadas rectangulares la ubicación de un punto está dada por un par ordenado (x, y), que da la distancia del punto a dos ejes perpendiculares. Usar coordenadas rectangulares es como describir una ubicación en una ciudad diciendo que está en la esquina de la calle 2 y la cuarta avenida. Pero se podría describir también este mismo lugar diciendo que está una y media millas al noreste del City Hall. Por lo tanto, en vez de especificar el lugar con respecto a una cuadrícula de calles y avenidas, se especifica dando su distancia y dirección a partir de un punto de referencia fijo. Eso es lo que se hace en el sistema de coordenadas polares. En coordenadas polares la ubicación de un punto está dado por un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia del origen (o polo) y θ es el ángulo desde el eje x positivo (véase la figura a continuación).



¿Por qué se estudian diferentes sistemas coordenados? Porque ciertas curvas se describen de manera más natural en un sistema coordenado que en otro. En coordenadas rectangulares se pueden dar ecuaciones simples para líneas, parábolas o curvas cúbicas, pero la ecuación de un círculo es bastante complicada (y no es una función). En coordenadas polares, se pueden dar ecuaciones simples para círculos, elipses, rosas y figuras de números 8: curvas que es difícil describir en coordenadas rectangulares. Así, por ejemplo, es más natural describir la trayectoria de un planeta alrededor del Sol en términos de distancia a partir de este astro y el ángulo de desplazamiento, en otras palabras, en coordenadas polares. También proporcionaremos representaciones en coordenadas polares de números complejos. Como se verá, es fácil multiplicar números complejos si se escriben en forma polar.

En este capítulo también se utilizan coordenadas para describir cantidades dirigidas o *vectores*. Cuando se habla de temperatura, masa o área, se necesita sólo un número. Por ejemplo, podemos expresar que la temperatura es de 70ºF. Pero cantidades como la velocidad o la fuerza son *cantidades dirigidas*, porque se relacionan con dirección así como con magnitud. Así, se dice que un bote navega a 10 nudos al noreste. Esto

581

A nuestros estudiantes,
de quienes hemos aprendido tanto.

Contenido

Prefacio

El arte de enseñar es el arte de ayudar a descubrir.
MARK VAN DOREN

¿Qué es lo que los estudiantes realmente necesitan saber antes de estudiar cálculo? ¿Con qué herramientas deben contar los maestros para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas son el motivo por el cual hemos escrito este libro.

Para estar preparado para el cálculo, el estudiante requiere no sólo habilidad técnica, sino también entender con claridad los conceptos. De hecho, la *comprensión conceptual* y la *habilidad técnica* van de la mano, y se refuerzan entre sí. Un estudiante también necesita poder apreciar la fuerza y la utilidad de las matemáticas para *modelar* el mundo real. Todas las características de este libro de texto están enfocadas para lograr estas metas.

Estamos convencidos de que la buena enseñanza llega de maneras muy diferentes, y que cada maestro aporta brío e imaginación únicos en el salón de clases. Algunos maestros se apoyan en la *tecnología* para ayudar a que los estudiantes aprendan en forma activa; otros aplican *la regla del cuatro*: "los temas se tienen que presentar en forma geométrica, numérica, algebraica y verbal" para impulsar el razonamiento conceptual; unos más hacen gran énfasis en las *aplicaciones* para hacer que se aprecie la presencia de las matemáticas en la vida diaria. Hay otros que recurren al *aprendizaje en grupo, proyectos ampliados* o *ejercicios de escritura* como una forma de animar a los alumnos a explorar su propia comprensión de un concepto dado, y todas las matemáticas presentes como un esfuerzo para *resolver un problema.* En este libro hemos incluido todos estos métodos para enseñar los conceptos preliminares del cálculo con el fin de mejorar el eje de las habilidades fundamentales. Estos métodos son herramientas que pueden utilizar los profesores y sus alumnos para trazar su propio curso de acción en la preparación para el cálculo.

Al escribir esta quinta edición nuestro objetivo era mejorar aún más la utilidad del libro como herramienta de instrucción. El cambio principal de esta edición es un mayor énfasis en el modelado y las aplicaciones: en cada sección se han ampliado los ejercicios de aplicación y se agrupan todos bajo el encabezado de *Aplicaciones*, y todos los capítulos, excepto el 1, finalizan con una sección llamada *Enfoque en el modelado*. También hemos efectuado algunos cambios en la organización del material, como la división del capítulo sobre trigonometría analítica en dos capítulos, cada uno de un tamaño más accesible. Hay numerosos cambios pequeños: a medida que trabajábamos en el libro nos dábamos cuenta que hacía falta un ejemplo, o que se debía ampliar una explicación, o que quedaría mejor una sección con tipos diferentes de ejercicios. Sin embargo, en todos estos cambios hemos conservado la estructura y las características principales que han contribuido al éxito del libro.

Muchos de los cambios de esta edición tuvieron origen en nuestra propia experiencia en la enseñanza, pero lo más importante es que hemos escuchado con mucha atención a quienes han usado este libro, entre ellos, a muchos de nuestros colegas más cercanos. Agradecemos la gran cantidad de cartas y de mensajes electrónicos que hemos recibido de maestros y de estudiantes, en los que nos recomendaban cambios o sugerían adiciones. Muchos de ellos nos ayudaron enormemente a hacer que esta edición sea más accesible para el estudiante.

Características especiales

GRUPOS DE EJERCICIOS La manera más importante de reforzar el entendimiento de los conceptos y perfeccionar la habilidad técnica se da mediante los problemas que asigna el maestro. Con este fin proporcionamos una amplia variedad de ejercicios.

- **Ejercicios** Cada grupo de ejercicios está cuidadosamente clasificado según el grado de dificultad, desde los ejercicios conceptuales básicos y los problemas para el desarrollo de las habilidades, hasta los problemas más capciosos que requieren sintetizar el material que se aprendió anteriormente junto con nuevos conceptos.
- **Ejercicios de aplicación** Están incluidos problemas aplicados reales que, según nuestra opinión, captarán la atención de los estudiantes. Están incorporados en todo el libro tanto en los ejemplos como en los ejercicios. En los grupos de ejercicios, los problemas aplicados están reunidos bajo el encabezado de *Aplicaciones*.
- **Descubrimientos, escritura y aprendizaje en grupo** Cada uno de los grupos de ejercicios finaliza con un conjunto de ejercicios llamado *Descubrimiento • Debate*. Éstos se diseñaron para estimular al estudiante a experimentar, de preferencia en grupos, con los conceptos analizados en la sección, y luego a escribir lo que aprendieron, en lugar de simplemente a buscar “la respuesta”.

UN CAPÍTULO DE REPASO COMPLETO Se incluye un capítulo de repaso a fin de que el estudiante repase los conceptos básicos de álgebra y geometría analítica y a su vez los tenga siempre a la mano.

- **Capítulo 1** Es un capítulo de repaso; contiene los conceptos fundamentales que el estudiante requiere para iniciar un curso sobre los temas preliminares del cálculo. Lo mucho o lo poco que este capítulo sea cubierto en clase depende de los elementos con que cuenten los alumnos.
- **Examen del capítulo 1** Se pretende que la prueba que se encuentra al finalizar el capítulo 1 sea un diagnóstico para determinar qué partes de este capítulo de repaso es necesario retomar. También ayuda al estudiante a evaluar con exactitud qué temas necesita repasar.

ENFOQUE FLEXIBLE DE TRIGONOMETRÍA Los capítulos sobre trigonometría están escritos de modo que se pueda abordar primero el enfoque del triángulo rectángulo o el del círculo unitario. Al colocar estos dos enfoques en distintos capítulos, cada cual con sus aplicaciones pertinentes, ayudamos a dilucidar el objetivo de cada método. Los capítulos introductorios a la trigonometría son los siguientes:

- **Capítulo 5: Funciones trigonométricas de números reales** Presenta la trigonometría por medio del método del círculo unitario. Este enfoque destaca que las funciones trigonométricas son funciones de números reales, justo como las funciones polinomiales y exponenciales con las cuales los estudiantes ya están familiarizados.

- **Capítulo 6: Funciones trigonométricas de los ángulos.** Aquí se presenta la trigonometría por medio del enfoque del triángulo rectángulo. Este método se basa en los principios de un curso ordinario de trigonometría para bachillerato.

Otra manera de enseñar trigonometría es entrelazar los dos métodos. Algunos maestros enseñan este material en el siguiente orden: secciones 5.1, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3, 5.3, 5.4, 6.4, 6.5. La organización facilita hacerlo sin ocultar el hecho de que los dos métodos requieren distintas representaciones de las mismas funciones.

CALCULADORAS GRAFICADORAS Y COMPUTADORAS El avance tecnológico que se ha dado en calculadoras y computadoras amplía de manera impresionante nuestra capacidad para calcular y representar las matemáticas. La disponibilidad de calculadoras graficadoras no les resta importancia, lo más importante es entender los conceptos en los que se basan las calculadoras. Así, todas las subsecciones en las que se requiere el uso de las calculadoras están precedidas por secciones en las cuales los estudiantes tienen que graficar o calcular a mano, de modo que puedan entender exactamente lo que la calculadora hace cuando más tarde la utilicen para simplificar la rutina. Las secciones, subsecciones, ejemplos y ejercicios para calculadora que están señaladas con el símbolo son optativas y se podrían omitir sin que haya pérdida de continuidad. Se utilizan las siguientes capacidades de la calculadora:

- **Calculadoras graficadoras** El uso de este tipo de calculadora está incorporado en todo el libro para graficar y analizar funciones y sucesiones, para calcular y graficar curvas de regresión, operar con álgebra matricial, graficar desigualdades lineales y otros usos importantes.
- **Programas sencillos** Aprovechamos las capacidades de programación de la calculadora para simular situaciones de la vida cotidiana, sumar series o calcular los términos de una sucesión recursiva.

ENFOQUE EN EL MODELADO El tema del modelado se usa en todo el libro para uniformar y aclarar las diversas aplicaciones de los conceptos preliminares del cálculo. En estas secciones y subsecciones de modelado realizamos un esfuerzo especial para aclarar el proceso esencial de pasar los enunciados de los problemas al lenguaje matemático.

- **Modelos de construcción** Hay numerosos problemas aplicados en los cuales se proporciona al alumno un modelo para que lo analice. Pero el material sobre modelado, donde a los estudiantes se les pide que *construyan* modelos matemáticos está organizado en secciones y subsecciones muy bien definidas.
- **Enfoque en el modelado** Todos los capítulos terminan con una sección de *Enfoque en el modelado*. La primera de dichas secciones, después del capítulo 2, presenta la idea básica de modelar una situación de la vida cotidiana mediante el ajuste de rectas a datos (regresión lineal). Otras secciones presentan formas en las que funciones polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas y sistemas de desigualdades se pueden utilizar para modelar fenómenos conocidos a partir de las ciencias y de la vida diaria. El capítulo 1 concluye con una sección que se llama *Enfoque en la resolución de problemas*.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO Una manera de hacer participar a los estudiantes y volverlos alumnos activos es hacerlos que trabajen, quizá en grupos, en proyectos extensos que los hagan sentir que logran algo importante cuando los terminan. Cada capítulo contiene uno o más *Proyectos para un descubrimiento* (véase el contenido). Estas secciones proporcionan un conjunto de actividades desafiantes pero

accesibles que permiten que los estudiantes exploren con mayores detalles un aspecto interesante del tema que acaban de aprender.

HISTORIAS MATEMÁTICAS Aprovechamos los márgenes para presentar notas históricas, reflexiones clave o aplicaciones de las matemáticas en el mundo moderno. Todo esto sirve para mostrar que las matemáticas son una actividad importante y vital, y que hasta en este nivel básico es fundamental para la vida cotidiana.

- **Historias matemáticas** Estas descripciones comprenden biografías de matemáticos importantes y a veces sobre un punto clave que el matemático descubrió y que es importante para este curso.
- **Matemáticas en el mundo moderno** Es una serie de viñetas que destacan el papel importante de las matemáticas en los logros técnicos y científicos actuales.

REVISE SU RESPUESTA Es una sección que destaca el papel importante de esta ciencia en los logros técnicos y científicos actuales.

SECCIONES DE REPASO Y PRUEBAS DE LOS CAPÍTULOS Cada capítulo finaliza con una amplia sección de repaso, incluso una *Evaluación del capítulo* diseñada para que el estudiante mida su avance. En la parte final del libro se proporcionan respuestas breves de los ejercicios con número impar de todas las secciones, incluso la de los ejercicios de repaso, y las respuestas a todas las preguntas de las evaluaciones de los capítulos.

El material de repaso de cada capítulo inicia con una *Revisión de conceptos*, diseñada para motivar al estudiante a que piense y explique con sus propias palabras las ideas que se presentan en el capítulo. Se pueden usar como ejercicios de escritura, en una discusión en el salón de clases o para estudiar en forma individual.

Principales cambios de la quinta edición

- Más del 20% de los ejercicios es nuevo y se seleccionó para proporcionar más práctica con conceptos básicos, así como para explorar ideas que no pudimos tratar en el texto ni en los ejemplos por falta de espacio. Se añadieron muchos nuevos ejercicios aplicados.
- Cada capítulo inicia con un *Esquema del capítulo* que presenta los temas principales del capítulo y explica la razón de la importancia del material.
- Se añadieron seis nuevas secciones de *Enfoque en el modelado*, y los temas van desde mapas del mundo (capítulo 8) hasta ondas viajeras y ondas estacionarias (capítulo 7).
- Se añadieron cinco nuevos *Proyectos para un descubrimiento*, y los temas van desde el uso de vectores en la navegación, hasta el uso de cónicas en la arquitectura.
- Se agregaron más historias matemáticas.
- Quitamos la sección sobre variación del capítulo 2 y la pasamos al capítulo 1, con lo que se logra que el capítulo 2 se enfoque más claramente en los conceptos esenciales de una función.
- En el capítulo 5, *Funciones trigonométricas de los números reales*, incorporamos el material del movimiento armónico como una sección nueva. La sección de *Enfoque en el modelado* trata ahora sobre ajuste de curvas sinusoidales a los datos.

- En el capítulo 7, *Trigonometría analítica*, incluimos sólo el material sobre identidades y ecuaciones trigonométricas. Hicimos este cambio a petición de los lectores.
- El capítulo 8, *Coordenadas polares y vectores* es nuevo. En él se encuentra material que estaba antes en otros capítulos. Los temas de este capítulo, que abarcan también la representación polar de números complejos, se unifican mediante el tema del uso de las funciones trigonométricas para ubicar las coordenadas de un punto o describir las componentes de un vector.
- En el capítulo 9, *Sistemas de ecuaciones y desigualdades*, la sección sobre las gráficas de desigualdades ahora es la última sección, de modo que ahora precede inmediatamente el material sobre programación lineal en la sección *Enfoque en el modelado*.
- El capítulo 10, *Geometría analítica*, comprende ahora sólo la sección que trata de las cónicas y ecuaciones paramétricas. El material sobre las coordenadas polares está ahora en el nuevo capítulo 8.
- El capítulo 11, *Sucesiones y series* contiene ahora más material sobre sucesiones recursivas, puesto que se añadió una sección sobre *Enfoque en el modelado* que trata acerca del uso de dichas sucesiones al modelar fenómenos cotidianos.

Complementos

Este libro cuenta con una serie de complementos para el profesor, los cuales están en inglés y sólo se proporcionan a los docentes que adopten la presente obra como texto para sus cursos. Para mayor información, favor de comunicarse con las oficinas de nuestros representantes o a los siguientes correos electrónicos:
Thomson México y Centroamérica clientes@thomsonlearning.com.mx.
Thomson América del Sur cliente@thomsonlearning.com
Thomson Caribe amy.reyes@thomsonlearning.com
Thomson Cono Sur thomson@thomsonlearning.com.ar

Existe una versión en español de todas las respuestas a los ejercicios y problemas. Se encuentra en el sitio de Thomson Learning Latinoamérica www.thomson.com.mx. El acceso a este material es mediante una clave especialmente asignada al profesor que adopte este libro como texto.

CD incluido
Con este libro se incluye un CD con el recurso para el estudiante Interactive Video Skillbuilder, el cual contiene horas de clases en video. Lo problemas trabajados durante cada video se muestran a un lado de la pantalla, a fin de que el estudiante los vaya resolviendo antes de ver la solución. También se incluyen tutoriales, cuestionarios, tareas y otros apoyos.
El símbolo señala qué temas tienen ejemplos adicionales y explicaciones en el CD.

Agradecimientos

Tenemos una deuda de gratitud con los siguientes revisores por sus comentarios cuidadosos y constructivos.

REVISORES DE LA CUARTA EDICIÓN Michelle Benedict, Augusta State University; Linda Crawford, Augusta State University; Vivian G. Kostyk, Inver Hills Community College y Heather C. McGilvray, Seattle University.

REVISORES DE LA QUINTA EDICIÓN Kenneth Berg, University of Maryland; Elizabeth Bowman, University of Alabama en Huntsville; William Cherry, University of

North Texas; Barbara Cortzen, DePaul University; Gerry Fitch, Louisiana State University; Lana Grishchenko, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Bryce Jenkins, Cal Poly State University, San Luis Obispo; Margaret Mary Jones, Rutgers University; Victoria Kauffman, University of New Mexico; Sharon Keener, Georgia Perimeter College; YongHee Kim-Park, California State University en Long Beach; Mangala Kothari, Rutgers University; Andre Mathurin, Bellarmine College Prep; Donald Robertson, Olympic College; Jude Socrates, Pasadena City College; Enefiok Umana, Georgia Perimeter College; Michele Wallace, Washington State University, y Linda Waymire, Daytona Beach Community College.

Nos hemos beneficiado mucho de las recomendaciones y los comentarios de nuestros colegas, quienes se han apoyado en ediciones anteriores de nuestros libros. Hacemos extensivo el agradecimiento especial a Linda Byun, Bruce Chaderjian, David Gau, Daniel Hernández, YongHee Kim-Park, Daniel Martínez, David McKay, Robert Mena, Kent Merryfield, Florence Newberger, Viet Ngo, Marilyn Oba, Alan Safer, Angelo Segalla, Robert Valentini y a Derming Wang, de California State University, Long Beach; a Karen Gold, Betsy Gensamer, Cecilia McVoy, Mike McVoy, Samir Ouzomgi y Ralph Rush de The Pennsylvania State University, Abington College; a Gloria Dion, de Educational Testing Service, Princeton, New Jersey; a Mark Ashbaugh y Nakhlé Asmar de la University of Missouri, Columbia; a Fred Safier, del City College de San Francisco, y Steve Edwards, de la Southern Polytechnic State University en Marietta, Georgia. También recibimos muchos consejos valiosos de nuestros alumnos, en especial de Devaki Shah y Ellen Newman.

Damos las gracias en forma particular a Martha Emry, gerente de producción, por su excelente trabajo y su atención incansable a la calidad y al detalle. Su energía, dedicación, experiencia e inteligencia fueron puntos esenciales en la eleboración de este libro. También estamos muy agradecidos con Luana Richards, correctora de estilo, quien a través de los años ha moldeado el lenguaje y el estilo de todos nuestros libros. Agradecemos a Jade Meyers de Matrix Art Services por sus ingeniosas figuras. Agradecemos al equipo de G & S Book Services por su alta calidad y sistematización en la composición de las páginas. Gracias especialmente a Phyllis Panman-Watson por su dedicación y cuidado al generar la sección de respuestas. Nuestro agradecimiento al equipo de Brooks/Cole: Stacy Green, asistente del editor; Katherine Cook, asistente editorial; Karin Sandberg, gerente de comercialización; Jennifer Velásquez, asistente de comercialización; Bryan Vann, gerente comercial y de comunicaciones del proyecto; Janet Hill, gerente general de producción del proyecto; Vernon Boes, director general de arte, y Earl Perry, gerente de tecnología del proyecto.

Agradecemos muy en particular al editor Bob Pirtle por dirigir este libro a través de las etapas de escritura y producción. Su apoyo y su experiencia editorial fueron invaluables en el momento de tomar decisiones cruciales.

Al estudiante

Este libro fue escrito a fin de que lo use como guía para conocer a fondo las matemáticas previas al cálculo. En seguida se presentan algunas recomendaciones para ayudarle a aprovechar al máximo este curso.

Primero debe leer la sección adecuada del texto *antes* de intentar resolver los problemas de la tarea. Leer un texto de matemáticas es muy diferente a leer una novela, el periódico o cualquier otro libro. Podría encontrar que debe leer una vez tras otra un párrafo para poder entenderlo. Ponga atención especial a los ejemplos y resuélvalos usted mismo con lápiz y papel mientras los va leyendo. De esta manera será capaz de resolver la tarea con más rapidez y comprensión.

No cometa el error de tratar de memorizar cada regla o hecho que se encuentre. Las matemáticas no son memorización. Las matemáticas son el *arte de resolver problemas*, no sólo una colección de datos. Para conocer a fondo el tema, debe resolver problemas, muchos problemas. Resuelva tantos como pueda. Asegúrese de escribir la solución en una forma lógica, paso por paso. No deseche un problema si no puede resolverlo en ese momento. Trate de entenderlo mejor, vuelva a leerlo con todo cuidado y relaciónelo con lo que ya aprendió de su maestro y de los ejemplos del libro. Luche con él hasta que lo resuelva. Hecho esto unas cuantas veces, empezará a entender de lo que realmente tratan las matemáticas.

Al final del libro aparecen las respuestas a los ejercicios impares y a las evaluaciones de los capítulos. Si su respuesta difiere de la del libro, no suponga de inmediato que usted está mal. Puede haber un cálculo que relacione las dos respuestas y ambas pueden ser correctas. Por ejemplo, si usted llega a $1/(\sqrt{2} - 1)$, pero la respuesta es $1 + \sqrt{2}$, su respuesta *es* correcta porque puede multiplicar tanto el numerador como el denominador de su respuesta por $\sqrt{2} + 1$ para tener la solución dada.

El símbolo ⊘ se utiliza para advertir que no cometa determinado error. Lo hemos colocado al margen para señalar situaciones en las que observamos que muchos estudiantes las repiten.

Calculadoras y cálculos

Las calculadoras son esenciales en la mayor parte de las matemáticas y las ciencias. Nos liberan de ejecutar tareas rutinarias, de modo que podemos concentrarnos con más tranquilidad en los conceptos que estamos estudiando. Las calculadoras son herramientas poderosas, pero se requiere interpretar con cuidado los resultados. A continuación se describen las características que debe tener una calculadora adecuada para un curso de precálculo, y se ofrecen criterios para interpretar los resultados.

Calculadoras científicas y graficadoras

Para este curso usted necesita una calculadora *científica*, es decir, su calculadora debe tener como mínimo las operaciones aritméticas comunes ($+$, $-$, $\times$, $\div$), así como las funciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas (e^x, 10^x, ln, log, sen, cos, tan). Además, será útil contar con una memoria y por lo menos algún grado de capacidad de ser programada.

Su maestro podría recomendarle que compre una calculadora con la que pueda *elaborar gráficas*. Este libro tiene subsecciones y ejercicios optativos que requieren el uso de una calculadora de este tipo o de una computadora que tenga programas para graficar. Estas subsecciones y ejercicios especiales están señalados mediante el símbolo . Además de graficar funciones, las calculadoras para graficar se pueden usar también para encontrar funciones que modelen datos de la vida cotidiana, resuelvan ecuaciones, ejecuten cálculos con matrices (lo cual se estudia en el capítulo 9) y para que le ayuden a efectuar otras operaciones matemáticas. Todos estos usos se estudian en este libro.

Es importante darse cuenta que debido a su limitada resolución, una calculadora para graficar da sólo una *aproximación* de la gráfica de una función. La calculadora grafica sólo una cantidad finita de puntos y luego los une para formar una *representación* de la gráfica. En la sección 1.9, damos criterios para usar este tipo de calculadoras e interpretar las gráficas que genera.

Cálculos y cifras significativas

La mayor parte de ejemplos y ejercicios aplicados de este libro requiere valores aproximados. Por ejemplo, un ejercicio establece que la Luna mide 1074 millas de radio. Esto no significa que el radio de la Luna sea exactamente de 1074 millas, sino que este es el radio redondeado a la milla más cercana.

Un método simple para especificar la exactitud de un número es establecer cuántas **cifras significativas** tiene. Las cifras significativas de una cantidad son los números desde el primer dígito no cero hasta el último dígito no cero, leyendo de izquierda a derecha. Por consiguiente, 1074 tiene cuatro cifras significativas, 1070 tiene tres, 1100 tiene dos y 1000 tiene una cifra significativa. Esta regla puede originar algunas veces ambigüedades. Por ejemplo, si una distancia es de 200 km al kilómetro más

cercano, entonces el número 200 realmente tiene tres cifras significativas, y no sólo una. Esta ambigüedad se evita si se utiliza la notación científica, es decir, si se expresa el número como un múltiplo de una potencia de 10:

$$2.00 \times 10^2$$

Cuando trabajan con valores aproximados, los estudiantes cometen a menudo el error de dar una respuesta final con *más* cifras significativas que los datos originales. Esto es incorrecto porque usted no puede “generar” precisión usando una calculadora. El resultado no puede ser más exacto que las mediciones dadas en el problema. Por ejemplo, suponga que nos han dicho que los dos catetos de un triángulo rectángulo miden 1.25 y 2.33 pulg. De acuerdo con el Teorema de Pitágoras determinamos mediante una calculadora que la hipotenusa mide

$$\sqrt{1.25^2 + 2.33^2} \approx 2.644125564 \text{ pulg}$$

Pero como las longitudes están expresadas con tres cifras significativas, la respuesta no puede ser más exacta. Por lo tanto, podemos decir sólo que la hipotenusa es de 2.64 pulg, redondeando a la centésima más cercana.

En general, la respuesta final se debe expresar con la misma exactitud que la medición *menos* exacta dada en el enunciado del problema. Las reglas siguientes establecen más precisamente este principio.

Reglas para trabajar con datos aproximados

1. Al multiplicar o dividir, redondee el resultado de modo que tenga tantas *cifras significativas* que el valor dado con la cantidad más baja de cifras significativas.
2. Al sumar o restar, redondee el resultado de modo que su última cifra significativa esté en el *lugar de los decimales* en el cual el valor dado menos exacto tiene su última cifra significativa.
3. Cuando calcule potencias o raíces, redondee el resultado de modo que tenga el mismo número de *cifras significativas* que el valor dado.

Por ejemplo, suponga que el mantel de una mesa rectangular mide 122.64 pulg por 37.3 pulg. El área y el perímetro los expresamos como sigue:

$$\text{Área} = \text{largo} \times \text{ancho} = 122.64 \times 37.3 \approx 4570 \text{ pulg}^2$$ Tres cifras significativas

$$\text{Perímetro} = 2(\text{largo} + \text{ancho}) = 2(122.64 + 37.3) \approx 319.9 \text{ pulg}$$ Dígito de décimos

Observe que en la fórmula del perímetro, el valor 2 es exacto, no una medida aproximada. Por lo tanto, no afecta la exactitud del resultado final. En general, si un problema tiene sólo valores exactos, podríamos expresar la respuesta con tantas cifras significativas como queramos.

Asimismo, note que para hacer el resultado final tan exacto como sea posible, *usted debe esperar hasta el último paso para redondear la respuesta*. Si es necesario use la memoria de la calculadora para conservar los resultados de los pasos intermedios.

Abreviaturas

cm	centímetro	**mg**	miligramo
dB	decibel	**MHz**	megahertz
F	farad	**mi**	milla
ft	pie	**min**	minuto
g	gramo	**mL**	mililitro
gal	galón	**mm**	milímetro
h	hora	**N**	Newton
H	henry	**qt**	cuarto de galón
Hz	Hertz	**oz**	onza
in.	pulgada	**s**	segundo
J	Joule	**Ω**	ohm
kcal	kilocaloría	**V**	volt
kg	kilogramo	**W**	watt
km	kilómetro	**yd**	yarda
kPa	kilopascal	**yr**	año
L	litro	**°C**	grado Celsius
lb	libra	**°F**	grado Fahrenheit
lm	lumen	**K**	Kelvin
M	mol de soluto por litro de solución	⇒	entonces
m	metro	⇔	equivale a

Historias matemáticas

MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

PRECÁLCULO

Matemáticas para el cálculo

QUINTA EDICIÓN

1 Fundamentos

Esquema del capítulo

Este primer capítulo es un repaso de los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que usted ya esté familiarizado con los conceptos, pero es útil hacer un repaso para ver cómo estas ideas trabajan juntas para resolver problemas y modelar, o describir, situaciones del mundo cotidiano.

Veamos cómo todas estas ideas se usan en la siguiente situación real: suponga que le pagan 8 dólares por hora en su trabajo. Nos interesa saber cuánto dinero gana.

Para describir su salario usamos los *números reales*. En efecto, usamos los números reales todos los días, por ejemplo, para describir cuál es nuestra estatura, cuánto dinero tenemos, qué tanto frío o calor hace, etcétera. En álgebra, expresamos las propiedades de los números reales mediante letras que representan números. Una propiedad importante es la propiedad distributiva:

$$A(B + C) = AB + AC$$

Para encontrar el sentido de esta propiedad, consideremos su salario si trabaja 6 horas un día y 5 horas el siguiente. El salario de los dos días se puede determinar de dos maneras distintas: \$8(6 + 5), o bien, 8 dólares por 6 + 8 dólares por 5, y ambos procedimientos dan la misma respuesta. Ésta y otras propiedades de los números reales constituyen las reglas para trabajar con los números, es decir, son reglas del álgebra.

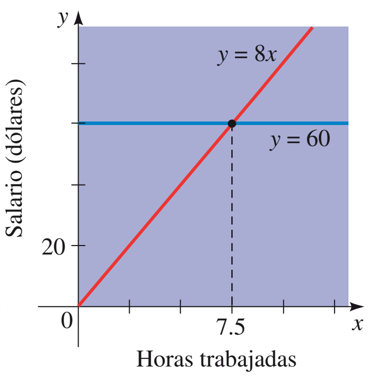
También podemos modelar el salario para cualquier número de horas mediante una fórmula. Si usted trabaja x horas, entonces su salario es y dólares, donde y se encuentra mediante la fórmula algebraica

$$y = 8x$$

Entonces, si trabaja 10 horas, el salario será $y = 8 \cdot 10$ dólares.

Una *ecuación* es un enunciado escrito en el lenguaje del álgebra que expresa un hecho con respecto a una cantidad desconocida x. Por ejemplo, ¿cuántas horas necesitaría trabajar para obtener 60 dólares? Para responder esta pregunta es necesario resolver la ecuación

$$60 = 8x$$



Bob Krist/Corbis

Aplicamos las reglas del álgebra para encontrar x. En este caso dividimos ambos miembros de la ecuación entre 8, de modo que $x = \frac{60}{8} = 7.5$ horas.

El *plano coordenado* permite trazar una gráfica de una ecuación de dos variables. Por ejemplo, al graficar la ecuación $y = 8x$ podemos "ver" cómo se incrementa el salario al aumentar las horas trabajadas. Asimismo, podemos resolver gráficamente la ecuación $60 = 8x$ encontrando el valor de x en el cual se cortan las gráficas de $y = 8x$ y $y = 60$ (observe la figura).

En este capítulo hay muchos ejemplos de cómo trabajan juntos los números reales, ecuaciones y plano coordenado para que podamos resolver problemas de la vida real.

1.1 Números reales

Repasemos los tipos de números que constituyen el sistema de los números reales. Empecemos con los **números naturales**:

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los **enteros** están formados por los números naturales junto con los negativos y el 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al formar cocientes con los enteros. Por lo tanto, cualquier número racional r se puede expresar como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Ejemplos son:

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división entre cero es imposible, por lo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, como $\sqrt{2}$, que no pueden ser expresados como un cociente de enteros y, por lo tanto, se llaman **números irracionales**. Se puede demostrar que, con diferentes grados de dificultad, estos números son también irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Los distintos tipos de números reales se inventaron para cumplir con necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir deudas o temperaturas por abajo de cero grados, los números racionales para conceptos como "medio litro de leche", y los números irracionales para medir ciertas distancias como la diagonal de un cuadrado.

El conjunto de todos los números reales se denota mediante el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin calificativo, queremos decir "número real". En la figura 1 se ilustra un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

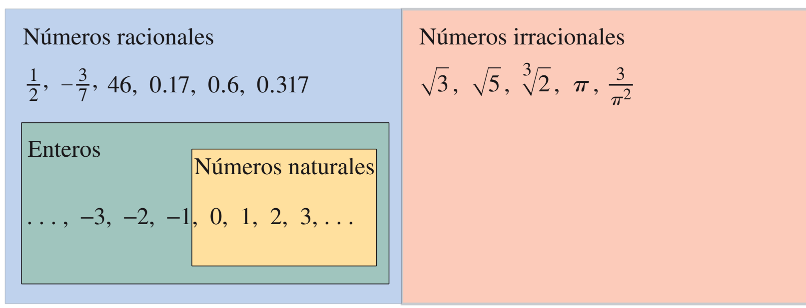


Figura 1
El campo de los números reales

Todos los números reales tienen una representación decimal. Si el número es racional, entonces su decimal correspondiente es periódico. Por ejemplo,

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6}$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra significa que la sucesión de cifras se repite por siempre.) Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica:

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo en un cociente de dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ 10x &= 35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, $x = \frac{3512}{990}$. (La idea es multiplicar x por potencias adecuadas de 10, y luego restar para eliminar la parte que se repite.)

Si interrumpimos la expansión decimal de cualquier número en un cierto lugar, tenemos una aproximación del número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ quiere decir "es aproximadamente igual a". A medida que tenemos más decimales es mejor la aproximación.

Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$ y que $5 + 7 = 7 + 5$ y que $513 + 87 = 87 + 513$, y así sucesivamente. En álgebra, expresamos estos hechos, que son infinitos, mediante la expresión

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una manera concisa de decir que "cuando se suman dos números, no importa el orden en que se sumen". Este hecho se conoce como *Propiedad conmutativa* de la suma. De acuerdo con nuestra experiencia con los números, sabemos que las propiedades de la tabla siguiente son también válidas.

Propiedades de los números reales

Propiedad	Ejemplo	Descripción
Propiedades conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando se suman dos números, no importa el orden.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando se multiplican dos números no importa el orden.
Propiedades asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando se suman tres números, no importa cuáles dos se suman primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números no importa cuáles dos se multiplican primero.
Propiedad distributiva		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando se multiplica un número por una suma de dos números se obtiene el mismo resultado al multiplicar el número por cada uno de los términos y luego sumar los resultados.

La propiedad distributiva se aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. En la figura 2 se explica por qué esta propiedad se aplica en el caso en el cual todos los números son enteros positivos, pero la propiedad es válida para cualquier número real a, b y c.

La propiedad distributiva es muy importante porque describe la manera en que interactúan la adición y la multiplicación.

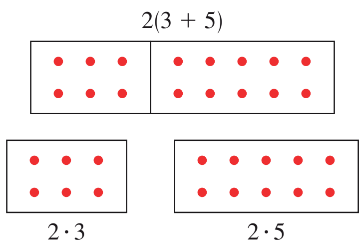


Figura 2
La propiedad distributiva

Ejemplo 1 Uso de la propiedad distributiva

a) $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ Propiedad distributiva

$= 2x + 6$ Simplificación

b) $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ Propiedad distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ Propiedad distributiva

$= ax + bx + ay + by$ Propiedad asociativa de la suma

En el último paso quitamos los paréntesis porque, de acuerdo con la propiedad asociativa, no importa el orden de la suma. ■

No suponga que $-a$ es un número negativo. Si $-a$ es negativa o positiva depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -(-5) = 5$ (propiedad 2), que es un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; se le llama **elemento idéntico** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un **negativo**, $-a$, que cumple $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación inversa a la adición; para restar un número de otro simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para combinar los números reales que contienen negativos, utilizamos las propiedades siguientes.

Propiedades de los negativos

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

La propiedad 6 establece el hecho intuitivo de que $a - b$ es el negativo de $b - a$. La propiedad 5 se usa a menudo con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

Ejemplo 2 Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales.

a) $-(x + 2) = -x - 2$ Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ Propiedad 2: $-(-a) = a$ ■

El número 1 es especial para la multiplicación; se le llama **elemento idéntico** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real diferente de cero a tiene un **inverso**, $1/a$, que cumple $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación inversa de la multiplicación; para dividir un número multiplicamos por el inverso de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** de a y b, o bien, como la **fracción** a entre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar los números reales usando la operación de división usamos las propiedades siguientes.

Propiedades de las fracciones

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Cuando se **multiplican fracciones**, se multiplican los numeradores y los denominadores.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Cuando se **dividen fracciones**, se invierte el divisor y se multiplica.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Cuando se **suman fracciones** con el **mismo denominador** se suman los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	Cuando se **suman fracciones** con **denominadores diferentes**, se busca un denominador común. Luego se suman todos los numeradores.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	**Se anulan** los números que son **factores comunes** en el numerador y en el denominador.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, por lo que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	**Multiplicación cruzada**.

Por lo regular, cuando se suman fracciones con denominadores diferentes, no se usa la propiedad 4. En lugar de eso se vuelven a escribir las fracciones de modo que tengan el denominador común más pequeño posible (con frecuencia más pequeño que el producto de los denominadores), y luego se aplica la propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se explica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3 Uso del MCD en la suma de fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

Solución Al factorizar cada denominador en sus factores primos se tiene

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \qquad \text{y} \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el Mínimo Común Denominador (MCD) efectuando el producto de todos los factores que hay en estas factorizaciones y se usa la potencia más alta de cada factor.

Por consiguiente, el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3}$$ Uso del denominador común

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360}$$ Propiedad 3: sumar fracciones con el mismo denominador ■

La recta numérica

Los números reales se pueden representar mediante puntos sobre una recta, como se muestra en la figura 3. La dirección positiva, hacia la derecha, se señala por medio de una flecha. Escogemos un punto de referencia O arbitrario, al que llamamos **origen**, el cual corresponde al número real 0. Dada una unidad conveniente de medición, cada número positivo x se representa por un punto en la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ se representa mediante un punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta recibe el nombre de **eje coordenado** o de **recta de los números reales** o simplemente **recta real**. Con frecuencia identificamos el punto con su coordenada y pensamos que un número es el inicio de la recta numérica.

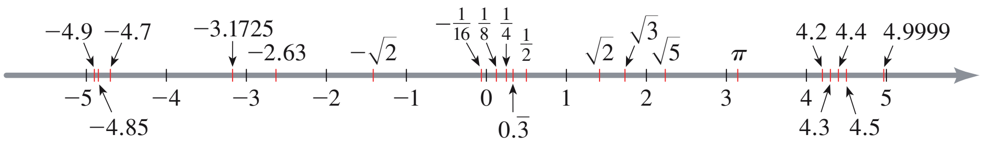


Figura 3 Recta de los números reales

Los números reales están *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Desde el punto de vista geométrico, esto quiere decir que a queda a la izquierda de b en la recta numérica. Es lo mismo que decir que ***b* es mayor que *a*** y escribir $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$), quiere decir que $a < b$ o $a = b$ y se lee como "a es menor que o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (véase figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

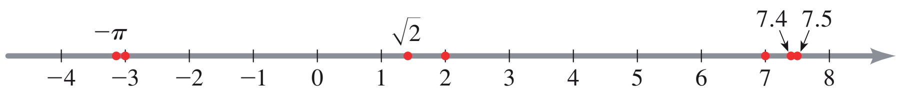


Figura 4

Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se denominan **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento que pertenece a S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de los enteros, entonces, $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos de los conjuntos se pueden describir acomodando sus elementos dentro de corchetes. Por ejemplo, un conjunto A que consiste en todos los enteros positivos menores que 7 se expresa como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en la **notación de conjuntos**:

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

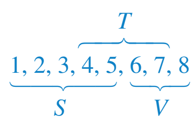
que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$."

Si S y T son conjuntos, entonces la **unión** $S \cup T$ es el conjunto que consta de todos los elementos que están en S o en T o en ambos. La **intersección** de S y de T es el conjunto $S \cap T$ que consiste en todos los elementos que están tanto en S como en T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte que es común a S y a T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$ es el conjunto que no contiene elementos.

Ejemplo 4 Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$, y $V = \{6, 7, 8\}$, determine los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

Solución



$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ — *Todos los elementos que están en S o en T*

$S \cap T = \{4, 5\}$ — *Elementos comunes tanto a S como a T*

$S \cap V = \varnothing$ — *S y V no tienen elementos en común* ■

Ciertos conjuntos de números reales, llamados **intervalos**, se presentan con mucha frecuencia en el cálculo y corresponden geométricamente a segmentos lineales. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** desde a hasta b consta de todos los números entre a y b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** desde a hasta b comprende los extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

Figura 5
Intervalo abierto (a, b)

Figura 6
Intervalo cerrado $[a, b]$

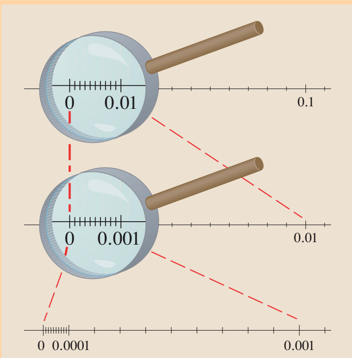
Observe que el paréntesis ( ) en la notación de los intervalos y los círculos abiertos en la gráfica de la figura 5 indican que los extremos están *excluidos* del intervalo. Por otro lado, los corchetes [ ] y los círculos llenos de la figura 6 indican que los extremos están *incluidos*. Los intervalos pueden incluir sólo un punto extremo, o se podrían prolongar hasta el infinito en una dirección o en ambas direcciones. En la siguiente tabla se ilustran los tipos posibles de intervalos.

El símbolo ∞ ("infinito") no es un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, indica simplemente que el intervalo no tiene punto final a la derecha, sino que se prolonga hacia el infinito en la dirección positiva.

Notación	Descripción del conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

No hay número más pequeño o más grande en un intervalo abierto

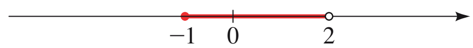
Cualquier intervalo contiene una cantidad infinita de números —cada punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real—. En el intervalo cerrado [0, 1], el número más pequeño es 0 y el más grande es 1, pero el intervalo abierto (0, 1) no contiene un número que sea el más pequeño o el más grande. Para entenderlo, observe que 0.01 está cerca de cero, pero 0.001 está más cerca, y 0.0001 está todavía más cerca, y así sucesivamente. De este modo, siempre podemos encontrar un número en el intervalo (0, 1) más cercano a cero que cualquier número dado. Puesto que 0 en sí no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número que sea el más pequeño. Con el mismo razonamiento, 0.99 está cercano a 1, pero 0.999 está más cerca, 0.9999 es aún más cercano, y así sucesivamente. Como el 1 no está en el intervalo, éste no contiene un número que sea el más grande.



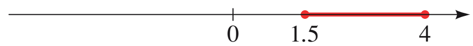
Ejemplo 5 Graficación de intervalos

Exprese cada intervalo en términos de desigualdades, y luego grafíquelos.

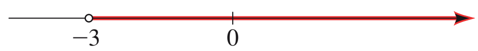
a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$



b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$



c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$



■

Ejemplo 6 Determinar la unión y la intersección de intervalos

Grafique cada conjunto

a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ b) $(1, 3) \cup [2, 7]$

Solución

a) La intersección de dos intervalos consiste en los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto se ilustra en la figura 7.

b) La unión de dos intervalos son los números que están en un intervalo o en el otro o en ambos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto se ilustra en la figura 8.

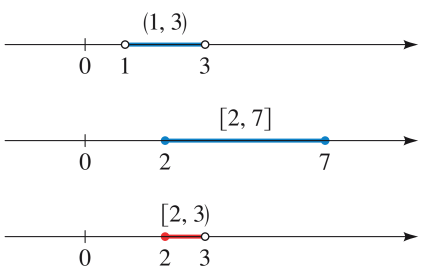


Figura 7
$(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

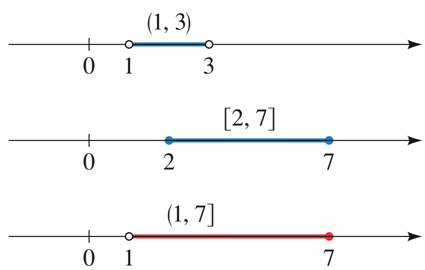


Figura 8
$(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$ ■

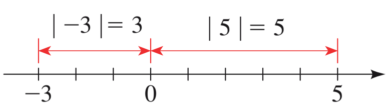


Figura 9

Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia desde a hasta 0 sobre la recta de los números reales (véase la figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para cada número a. Tenga en cuenta que $-a$ es positiva cuando a es negativa, y entonces tenemos la definición siguiente.

Definición de valor absoluto

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 7 Determinación de los valores absolutos de números

a) $|3| = 3$

b) $|-3| = -(-3) = 3$

c) $|0| = 0$

d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (puesto que $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$) ■

Cuando se trabaja con números absolutos, usamos las propiedades siguientes.

Propiedades del valor absoluto

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a\rvert \geq 0$	$\lvert -3\rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.
2. $\lvert a\rvert = \lvert -a\rvert$	$\lvert 5\rvert = \lvert -5\rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab\rvert = \lvert a\rvert\lvert b\rvert$	$\lvert -2 \cdot 5\rvert = \lvert -2\rvert\lvert 5\rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos.
4. $\left\lvert \frac{a}{b} \right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$	$\left\lvert \frac{12}{-3} \right\rvert = \frac{\lvert 12\rvert}{\lvert -3\rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos.

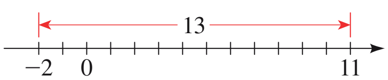


Figura 10

¿Cuál es la distancia en la recta numérica entre los números -2 y 11? En la figura 10, vemos que la distancia es 13. Llegamos a este resultado luego de determinar $|11 - (-2)| = 13$, o bien, $|(-2) - 11| = 13$. De acuerdo con esta observación damos la definición siguiente (véase la figura 11).

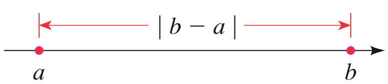


Figura 11
Longitud de un segmento de recta $= |b - a|$

Distancia entre puntos de la recta de los números reales

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b en la recta numérica es

$$d(a, b) = |b - a|$$

De acuerdo con la propiedad 6 se infiere que $|b - a| = |a - b|$. Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma que la distancia de b a a.

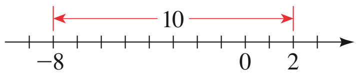


Figura 12

Ejemplo 8 Distancia entre puntos de la recta numérica

La distancia entre los números −8 y 2 es

$$d(a, b) = |-8 - 2| = |-10| = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ilustra en la figura 12. ■

1.1 Ejercicios

1–2 ■ Liste los elementos del conjunto dado que son

a) números naturales
b) enteros
c) números racionales
d) números irracionales

1. $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

2. $\{1.001, 0.333\ldots, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

3–10 ■ Establezca la propiedad de los números reales que se está usando.

3. $7 + 10 = 10 + 7$

4. $2(3 + 5) = (3 + 5)2$

5. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$

6. $2(A + B) = 2A + 2B$

7. $(5x + 1)3 = 15x + 3$

8. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$

9. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$

10. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

11–14 ■ Escriba de nuevo la expresión aplicando la propiedad dada de los números reales

11. Propiedad conmutativa de la adición, $x + 3 = \square$

12. Propiedad asociativa de la multiplicación, $7(3x) = \square$

13. Propiedad distributiva, $4(A + B) = \square$

14. Propiedad distributiva, $5x + 5y = \square$

15–20 ■ Aplique las propiedades de los números reales para escribir las expresiones sin paréntesis.

15. $3(x + y)$

16. $(a - b)8$

17. $4(2m)$

18. $\frac{4}{3}(-6y)$

19. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$

20. $(3a)(b + c - 2d)$

21–26 ■ Efectúe las operaciones indicadas.

21. a) $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

22. a) $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$

23. a) $\frac{2}{3}(6 - \frac{3}{2})$ **b)** $0.25(\frac{8}{9} + \frac{1}{2})$

24. a) $(3 + \frac{1}{4})(1 - \frac{4}{5})$ **b)** $(\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$

25. a) $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$

26. a) $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

27–28 ■ Escriba el símbolo correcto ($<$, $>$ o $=$) en el espacio.

27. a) $3 \;\square\; \frac{7}{2}$ **b)** $-3 \;\square\; -\frac{7}{2}$ **c)** $3.5 \;\square\; \frac{7}{2}$

28. a) $\frac{2}{3} \;\square\; 0.67$ **b)** $\frac{2}{3} \;\square\; -0.67$ **c)** $|0.67| \;\square\; |-0.67|$

29–32 ■ Diga de cada desigualdad si es verdadera o falsa.

29. a) $-6 < -10$ **b)** $\sqrt{2} > 1.41$

30. a) $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$

31. a) $-\pi > -3$ **b)** $8 \le 9$

32. a) $1.1 > 1.\overline{1}$ **b)** $8 \le 8$

33–34 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

33. a) x es positiva
b) t es menor que 4
c) a es mayor que o igual a π
d) x es menor que $\frac{1}{3}$ y es mayor que -5
e) La distancia desde p hasta 3 es cuando mucho 5

34. a) y es negativa
b) z es mayor que 1
c) b es cuanto más 8

d) w es positiva y es menor o igual a 17

e) y está por lo menos a 2 unidades desde π

35–38 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

35. a) $A \cup B$ **b)** $A \cap B$

36. a) $B \cup C$ **b)** $B \cap C$

37. a) $A \cup C$ **b)** $A \cap C$

38. a) $A \cup B \cup C$ **b)** $A \cap B \cap C$

39–40 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

39. a) $B \cup C$ **b)** $B \cap C$

40. a) $A \cap C$ **b)** $A \cap B$

41–46 ■ Exprese el intervalo en forma de desigualdad, y luego grafique el intervalo.

41. $(-3, 0)$ **42.** $(2, 8]$

43. $[2, 8)$ **44.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

45. $[2, \infty)$ **46.** $(-\infty, 1)$

47–52 ■ Exprese la desigualdad con notación de intervalo, y después grafique el intervalo correspondiente.

47. $x \leq 1$ **48.** $1 \leq x \leq 2$

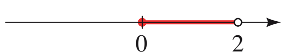
49. $-2 < x \leq 1$ **50.** $x \geq -5$

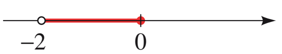
51. $x > -1$ **52.** $-5 < x < 2$

53–54 ■ Exprese cada conjunto mediante la notación de los intervalos.

53. a)

b)

54. a) 

b) 

55–60 ■ Grafique el conjunto.

55. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **56.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

57. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **58.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

59. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **60.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

61–66 ■ Evalúe cada una de las expresiones.

61. a) $|100|$ **b)** $|-73|$

62. a) $|\sqrt{5} - 5|$ **b)** $|10 - \pi|$

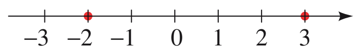
63. a) $||-6| - |-4||$ **b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

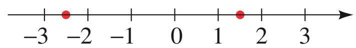
64. a) $|2 - |-12||$ **b)** $-1 - |1 - |-1||$

65. a) $|(-2) \cdot 6|$ **b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

66. a) $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

67–70 ■ Determine la distancia entre los números dados.

67. 

68. 

69. a) 2 y 17

b) -3 y 21

c) $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

70. a) $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$

b) -38 y -57

c) -2.6 y -1.8

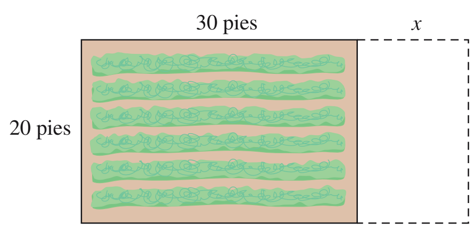
71–72 ■ Exprese cada uno de los decimales periódicos en forma de fracción. (Véase la nota al margen de la página 2.)

71. a) $0.\overline{7}$ **b)** $0.\overline{28}$ **c)** $0.\overline{57}$

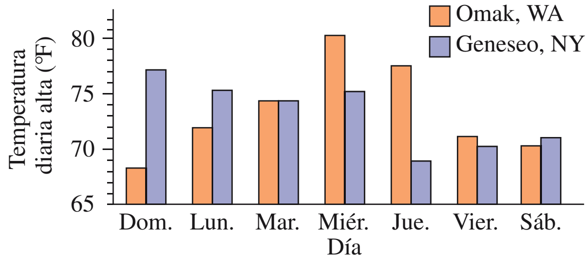
72. a) $5.\overline{23}$ **b)** $1.3\overline{7}$ **c)** $2.1\overline{35}$

Aplicaciones

73. Superficie de un jardín El terreno trasero donde Mary siembra verduras mide 20 por 30 pies, por lo que esa área es $20 \times 30 = 600$ pies cuadrados. Decide agrandarlo, como se muestra en la figura, de modo que el área se incrementa a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales dice que la nueva área se puede expresar también como $A = 600 + 20x$?



74. Variación de la temperatura La gráfica de barras muestra las temperaturas diarias altas de Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante una cierta semana de junio. Sea T_O la temperatura de Omak y T_G la temperatura de Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada uno de los días mostrados. ¿Cuál de los dos valores da más información?

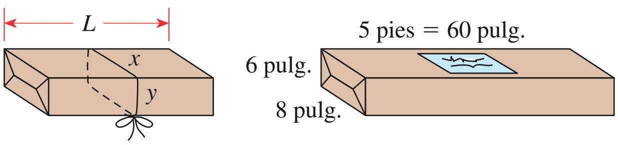


75. Envío por correo de un paquete La oficina de correos sólo aceptará paquetes para los cuales el largo más lo que mida alrededor no sea mayor que 108 pulg. Por consiguiente, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete que mide 6 pulg de ancho, 8 pulg de alto y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mide 2 por 2 por 4 pies?

b) ¿Cuál es el mayor largo aceptable para un paquete que tiene base cuadrada y mide 9 por 9 pulg?



Descubrimiento • Análisis

76. Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) $-a$ **b)** $-b$ **c)** bc

d) $a - b$ **e)** $c - a$ **f)** $a + bc$

g) $ab + ac$ **h)** $-abc$ **i)** ab^2

77. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales son números racionales. ¿El producto de dos números irracionales es necesariamente irracional? ¿Qué sucede con la suma?

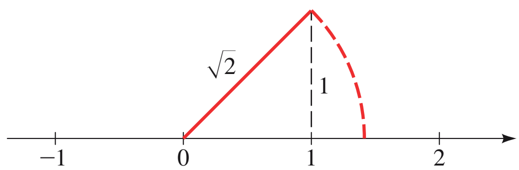
78. Combinación de números racionales con números irracionales ¿Es $\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ racional o irracional? Es $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ racional o irracional? En general, ¿qué puede decir con respecto a la suma de un número racional y un número irracional? ¿Y del producto?

79. Comportamiento limitante de los recíprocos Complete las tablas. ¿Qué sucede con el tamaño de la fracción $1/x$ cuando x se incrementa? ¿Y cuando disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

80. Números irracionales y geometría Refiérase a la figura siguiente y explique cómo ubicar el punto $\sqrt{2}$ sobre una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ mediante un método similar? ¿Y $\sqrt{6}$? Mencione otros números irracionales que se pueden ubicar mediante este modo.



81. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que tanto la suma como la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿Es conmutativa la substracción?

(b) ¿Es conmutativa la división de números reales no cero?

1.2 Exponentes y radicales

En esta sección damos el significado de expresiones como $a^{m/n}$ en las cuales el exponente m/n es un número racional. Para hacerlo, necesitamos recordar algunos hechos con respecto a los exponentes, radicales y raíces n-ésimas de enteros.

Exponentes enteros

Por lo regular, un producto de números idénticos se expresa mediante la notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la definición siguiente.

Notación exponencial

Si a es un número real cualquiera y n es un entero positivo, entonces la **potencia n-ésima** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base** y n es el **exponente**.

Ejemplo 1 Notación exponencial

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{32}$

b) $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$

c) $-3^4 = -(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = -81$ ■

Observe la distinción entre $(-3)^4$ y -3^4. En $(-3)^4$ el exponente se aplica a -3, pero en -3^4 el exponente se aplica sólo a 3.

Podemos establecer varias reglas útiles para trabajar con la notación exponencial. Para descubrir la regla de la multiplicación, multipliquemos 5^4 por 5^2:

$$5^4 \cdot 5^2 = \underbrace{(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)}_{4 \text{ factores}}\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2 \text{ factores}} = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}_{6 \text{ factores}} = 5^6 = 5^{4+2}$$

Al parecer, al *multiplicar dos potencias de la misma base, sumamos los exponentes*. En general, para cualquier número real a y los enteros positivos m y n, tenemos

$$a^m a^n = \underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{m \text{ factores}}\underbrace{(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a)}_{n \text{ factores}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m+n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

Por consiguiente $a^m a^n = a^{m+n}$.

Nos gustaría que esta regla fuera válida incluso cuando m y n sean 0 o enteros negativos. Por ejemplo,

$$2^0 \cdot 2^3 = 2^{0+3} = 2^3$$

Pero esto sólo puede suceder si $2^0 = 1$. De igual manera, queremos tener

$$5^4 \cdot 5^{-4} = 5^{4+(-4)} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

y esto será cierto si $5^{-4} = 1/5^4$. Estas observaciones generan la definición siguiente:

Exponentes cero y negativos

Si $a \neq 0$ es un número real y n es un entero positivo, entonces

$$a^0 = 1 \qquad \text{y} \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 2 Exponentes cero y negativos

a) $\left(\frac{4}{7}\right)^0 = 1$

b) $x^{-1} = \dfrac{1}{x^1} = \dfrac{1}{x}$

c) $(-2)^{-3} = \dfrac{1}{(-2)^3} = \dfrac{1}{-8} = -\dfrac{1}{8}$ ■

Es esencial conocer las reglas siguientes para trabajar con los exponentes y bases. En la tabla siguiente, las bases a y b son números reales y los exponentes m y n son enteros.

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
1. $a^m a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$	Para multiplicar dos potencias del mismo número, sume los exponentes.
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$	Para dividir dos potencias del mismo número, reste los exponentes.
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$(3^2)^5 = 3^{2\cdot 5} = 3^{10}$	Para elevar una potencia a una nueva potencia, multiplique los exponentes.
4. $(ab)^n = a^n b^n$	$(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$	Para elevar un producto a una potencia, eleve cada factor a la potencia.
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2}$	Para elevar un cociente a una potencia, eleve tanto el numerador y denominador a la potencia.

■ **Demostración de la ley 3** Si m y n son enteros positivos, tenemos

$$
\begin{aligned}
(a^m)^n &= (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})^n \\
&= \underbrace{(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})(\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}}) \cdots (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{m \text{ factores}})}_{n \text{ grupos de factores}} \\
&= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{mn \text{ factores}} = a^{mn}
\end{aligned}
$$

Los casos para los cuales $m \le 0$ o $n \le 0$ se pueden demostrar usando la definición de los exponentes negativos. ■

■ **Demostración de la ley 4** Si n es un entero positivo, tenemos

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)(ab) \cdots (ab)}_{n \text{ factores}} = (\underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}) \cdot (\underbrace{b \cdot b \cdot \cdots \cdot b}_{n \text{ factores}}) = a^n b^n$$

En este caso hemos aplicado las propiedades conmutativa y asociativa de manera repetida. Si $n \le 0$ la ley 4 se puede demostrar usando la definición de los exponentes negativos. ■

En el ejercicio 88 se le pide demostrar las leyes 2 y 5.

Ejemplo 3 Aplicación de las leyes de los exponentes

a) $x^4 x^7 = x^{4+7} = x^{11}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $y^4 y^{-7} = y^{4-7} = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$ — Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

c) $\dfrac{c^9}{c^5} = c^{9-5} = c^4$ — Ley 2: $a^m/a^n = a^{m-n}$

d) $(b^4)^5 = b^{4 \cdot 5} = b^{20}$ — Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

e) $(3x)^3 = 3^3x^3 = 27x^3$ — Ley 4: $(ab)^n = a^nb^n$

f) $\left(\dfrac{x}{2}\right)^5 = \dfrac{x^5}{2^5} = \dfrac{x^5}{32}$ — Ley 5: $(a/b)^n = a^n/b^n$ ■

Ejemplo 4 Simplificación de expresiones con exponentes

Simplifique:

a) $(2a^3b^2)(3ab^4)^3$ b) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3\left(\dfrac{y^2x}{z}\right)^4$

Solución

a)
$$
\begin{aligned}
(2a^3b^2)(3ab^4)^3 &= (2a^3b^2)[3^3a^3(b^4)^3] && \text{Ley 4: } (ab)^n = a^nb^n \\
&= (2a^3b^2)(27a^3b^{12}) && \text{Ley 3: } (a^m)^n = a^{mn} \\
&= (2)(27)a^3a^3b^2b^{12} && \text{Agrupación de factores con la misma base} \\
&= 54a^6b^{14} && \text{Ley 1: } a^ma^n = a^{m+n}
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x}{y}\right)^3\left(\frac{y^2x}{z}\right)^4 &= \frac{x^3}{y^3}\frac{(y^2)^4x^4}{z^4} && \text{Ley 5 y 4} \\
&= \frac{x^3}{y^3}\frac{y^8x^4}{z^4} && \text{Ley 3} \\
&= (x^3x^4)\left(\frac{y^8}{y^3}\right)\frac{1}{z^4} && \text{Agrupación de factores con la misma base} \\
&= \frac{x^7y^5}{z^4} && \text{Ley 1 y 2}
\end{aligned}
$$
■

Al simplificar una expresión, encontrará que llega al mismo resultado mediante diferentes métodos. Siéntase libre de usar cualquiera de las reglas de los exponentes para poner en práctica su propio método. En seguida presentamos otras dos leyes que son útiles para simplificar expresiones con exponentes negativos.

Leyes de los exponentes

Ley	Ejemplo	Descripción
6. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$	Para elevar una fracción a una potencia negativa, invierta la fracción y cambie el signo del exponente.
7. $\dfrac{a^{-n}}{b^{-m}} = \dfrac{b^m}{a^n}$	$\dfrac{3^{-2}}{4^{-5}} = \dfrac{4^5}{3^2}$	Para pasar un número elevado a una potencia desde el numerador al denominador o desde el denominador al numerador, cambie el signo del exponente.

■ **Demostración de la ley 7** Si usamos la definición de los exponentes negativos y luego aplicamos la propiedad 2 de las fracciones (pág. 5), tenemos

$$\frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1/a^n}{1/b^m} = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$
■

Se le pedirá que demuestre la ley 6 en el ejercicio 88.

Matemáticas en el mundo moderno

Si bien a menudo no nos percatamos de su presencia, la matemática impregna casi todos los aspectos de la vida del mundo moderno. Con la técnica moderna, las matemáticas desempeñan un papel más importante en nuestra vida. Quizá hoy usted despertó con la alarma de un reloj digital, habló por teléfono que usa transmisión digital, envió un mensaje por correo electrónico a través de Internet, guió un automóvil que cuenta con inyección de combustible controlada en forma digital, escuchó música por medio de un reproductor de discos compactos, luego durmió en una habitación cuya temperatura está controlada por un termostato digital. En cada una de estas actividades, las matemáticas son imprescindibles. En general, una propiedad como la intensidad o la frecuencia del sonido, el nivel de oxígeno en la emisión del escape del automóvil, los colores de una imagen, o la temperatura en la recámara es transformada en sucesiones de números mediante complicados algoritmos matemáticos. Estos datos numéricos, los cuales casi siempre consisten en varios millones de bits (los dígitos 0 y 1), se transmiten y luego se reinterpretan. Trabajar con esas enormes cantidades de datos no era posible antes de la invención de las computadoras, y los matemáticos fueron los que inventaron los procesos lógicos de estas máquinas.

La contribución de las matemáticas en el mundo moderno no se limita a los adelantos técnicos. Los procesos lógicos de las matemáticas se utilizan ahora para analizar problemas complejos en las ciencias sociales, políticas y biológicas de manera nueva y sorprendente. Los avances en las matemáticas continúan, algunos de los más emocionantes surgieron en la década recién finalizada.

En otras de las secciones de las *Matemáticas en el mundo moderno* se describe con más detalle cómo esta ciencia afecta a todos nosotros en nuestras actividades de la vida cotidiana.

Ejemplo 5 Simplificación de expresiones con exponentes negativos

Elimine los exponentes negativos y simplifique las expresiones.

a) $\dfrac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2}$ b) $\left(\dfrac{y}{3z^3}\right)^{-2}$

Solución

(a) Usamos la ley 7, la cual permite pasar un número elevado a una potencia del numerador al denominador, o viceversa, cambiando el signo del exponente.

t^{-4} se baja al denominador y se vuelve t^4.

s^{-2} se sube al numerador y se vuelve s^2.

$$\frac{6st^{-4}}{2s^{-2}t^2} = \frac{6ss^2}{2t^2t^4} \qquad \text{Ley 7}$$

$$= \frac{3s^3}{t^6} \qquad \text{Ley 1}$$

b) Usamos la ley 6, que permite cambiar el signo del exponente de una fracción si ésta se invierte.

$$\left(\frac{y}{3z^3}\right)^{-2} = \left(\frac{3z^3}{y}\right)^2 \qquad \text{Ley 6}$$

$$= \frac{9z^6}{y^2} \qquad \text{Leyes 5 y 4}$$

■

Notación científica

Los científicos utilizan la notación exponencial para compactar la escritura de números muy grandes o de los muy pequeños. Por ejemplo, la estrella más cercana más allá del Sol, Alfa Centauro, está a casi 40 000 000 000 000 kilómetros. Por otro lado, la masa de un átomo de hidrógeno es de casi 0.00000000000000000000000166 g. Estos números son difíciles de leer y de escribir, de modo que los científicos los expresan casi siempre en *notación científica*.

Notación científica

Se dice que un número positivo x está escrito en **notación científica** si está expresado como sigue:

$$x = a \times 10^n \qquad \text{donde } 1 \le a < 10 \text{ y } n \text{ es un entero}$$

Por ejemplo, cuando establecemos que la distancia a la estrella Alfa Centauro es 4×10^{13} km, el exponente positivo 13 indica que el punto decimal se debe desplazar 13 lugares a la *derecha*:

$$4 \times 10^{13} = 40\,000\,000\,000\,000$$

Mover el punto decimal 13 lugares a la derecha.

Cuando decimos que la masa de un átomo de hidrógeno es 1.66×10^{-24} g, el exponente -24 indica que el punto decimal debe pasarse 24 lugares a la *izquierda*:

$$1.66 \times 10^{-24} = 0.00000000000000000000000166$$

Mover el punto decimal 24 lugares a la izquierda.

Ejemplo 6 Escritura de números en notación científica

a) $\underbrace{327900}_{\text{5 lugares}} = 3.279 \times 10^5$ b) $0.\underbrace{000627}_{\text{4 lugares}} = 6.27 \times 10^{-4}$ ■

Para utilizar la notación científica en una calculadora, presione la tecla EE o bien EXP o EEX para ingresar el exponente. Por ejemplo, para escribir el número 3.629×10^{15} en una calculadora TI-83, escribimos

3.629 2ND EE 15

y en la pantalla se lee

3.629E15

La notación científica se aplica a menudo para escribir un número muy grande o muy pequeño en una calculadora. Por ejemplo, si usamos una calculadora para elevar al cuadrado el número 1 111 111, se puede ver en la pantalla, dependiendo del modelo de calculadora, la aproximación

1.234568 12 o bien, 1.23468 E12

En este caso, los dígitos finales indican la potencia de 10, e interpretamos que el resultado es

$$1.234568 \times 10^{12}$$

Ejemplo 7 Cálculos con ayuda de la notación científica

Si $a \approx 0.00046$, $b \approx 1.697 \times 10^{22}$, y $c \approx 2.91 \times 10^{-18}$, use una calculadora para obtener un valor aproximado del cociente ab/c.

Solución Podemos escribir los datos en notación científica, o bien, podemos usar las leyes de los exponentes como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{ab}{c} &\approx \frac{(4.6 \times 10^{-4})(1.697 \times 10^{22})}{2.91 \times 10^{-18}} \\ &= \frac{(4.6)(1.697)}{2.91} \times 10^{-4+22+18} \\ &\approx 2.7 \times 10^{36}\end{aligned}$$

Damos la respuesta correcta hasta con dos cifras significativas porque el menos exacto de los números dados tiene dos cifras significativas. ■

Radicales

Ya sabemos lo que 2^n significa siempre que n es un entero. Para dar el significado de una potencia, como $2^{4/5}$, cuyo exponente es un número racional, necesitamos estudiar a los radicales.

El símbolo $\sqrt{}$ significa "la raíz cuadrada de". Por lo tanto

$$\sqrt{a} = b \quad \text{significa} \quad b^2 = a \quad \text{y} \quad b \geq 0$$

Es cierto que el número 9 tiene dos raíces cuadradas, 3 y -3, pero la notación $\sqrt{9}$ se reserva para la raíz cuadrada *positiva* de 9 (a veces llamada *raíz cuadrada principal* de 9). Si queremos la raíz negativa, debemos escribir $-\sqrt{9}$, que es -3.

Puesto que $a = b^2 \geq 0$, el símbolo $\sqrt{a}$ tiene sentido sólo cuando $a \geq 0$. Por ejemplo,

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{porque} \quad 3^2 = 9 \quad \text{y} \quad 3 \geq 0$$

Las raíces cuadradas son casos especiales de las raíces n-ésimas. La raíz n-ésima de x es el número que cuando se eleva a la potencia n-ésima da x.

Definición de la raíz n-ésima

Si n es un entero positivo, entonces la **raíz n-ésima principal** de a se define como sigue:

$$\sqrt[n]{a} = b \quad \text{quiere decir} \quad b^n = a$$

Si n es par, debemos tener $a \geq 0$ y $b \geq 0$.

Por consiguiente,

$$\sqrt[4]{81} = 3 \qquad \text{porque} \qquad 3^4 = 81 \qquad \text{y} \qquad 3 \geq 0$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \qquad \text{porque} \qquad (-2)^3 = -8$$

Pero $\sqrt{-8}$, $\sqrt[4]{-8}$ y $\sqrt[6]{-8}$ no están definidos. (Por ejemplo, $\sqrt{-8}$ no está definido porque el cuadrado de todo número real es no negativo.)

Observe que

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{pero} \qquad \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16} = 4 = |-4|$$

Entonces, la ecuación $\sqrt{a^2} = a$ no siempre se cumple; es verdadera sólo cuando $a \geq 0$. No obstante, siempre podemos escribir $\sqrt{a^2} = |a|$. Esta última ecuación es verdadera no sólo para raíces cuadradas, sino para cualquier raíz par. Ésta y otras reglas usadas al trabajar con raíces n-ésimas se listan en el siguiente cuadro. En cada propiedad suponemos que existen las raíces dadas.

Propiedades de las raíces n-ésimas

Propiedad	Ejemplo
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{-8 \cdot 27} = \sqrt[3]{-8}\sqrt[3]{27} = (-2)(3) = -6$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{2}{3}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$
4. $\sqrt[n]{a^n} = a$ si n es impar	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5, \quad \sqrt[5]{2^5} = 2$
5. $\sqrt[n]{a^n} = \|a\|$ si n es par	$\sqrt[4]{(-3)^4} = \|-3\| = 3$

Ejemplo 8 Simplificación de expresiones que contienen raíces n-ésimas

(a)
$$\sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 x} \qquad \text{Sacar como factor el término más grande al cubo}$$
$$= \sqrt[3]{x^3}\sqrt[3]{x} \qquad \text{Propiedad 1: } \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}$$
$$= x\sqrt[3]{x} \qquad \text{Propiedad 4: } \sqrt[3]{a^3} = a$$

b) $\sqrt[4]{81x^8y^4} = \sqrt[4]{81}\sqrt[4]{x^8}\sqrt[4]{y^4}$ Propiedad 1: $\sqrt[4]{abc} = \sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[4]{c}$

$= 3\sqrt[4]{(x^2)^4}|y|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$

$= 3x^2|y|$ Propiedad 5: $\sqrt[4]{a^4} = |a|$, $|x^2| = x^2$ ■

Con frecuencia es muy útil combinar radicales similares en una expresión como $2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$. Se puede hacer usando la propiedad distributiva. Por lo tanto,

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (2 + 5)\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$$

En el ejemplo siguiente se ilustra mejor este proceso.

Evite cometer el error siguiente:

$$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Por ejemplo, si hacemos $a = 9$ y $b = 16$, entonces vemos el error:

$$\sqrt{9 + 16} \stackrel{?}{=} \sqrt{9} + \sqrt{16}$$

$$\sqrt{25} \stackrel{?}{=} 3 + 4$$

$$5 \stackrel{?}{=} 7 \quad \text{¡Falso!}$$

Ejemplo 9 Combinación de radicales

a) $\sqrt{32} + \sqrt{200} = \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{100 \cdot 2}$ Se sacan como factores los cuadrados más grandes

$= \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{100}\sqrt{2}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 4\sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$ Propiedad distributiva

b) Si $b > 0$, entonces

$\sqrt{25b} - \sqrt{b^3} = \sqrt{25}\sqrt{b} - \sqrt{b^2}\sqrt{b}$ Propiedad 1: $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

$= 5\sqrt{b} - b\sqrt{b}$ Propiedad 5, $b > 0$

$= (5 - b)\sqrt{b}$ Propiedad distributiva ■

Exponentes racionales

Para definir lo que queremos decir con *exponente racional* o, lo que es lo mismo, *exponente fraccionario* como $a^{1/3}$, necesitamos usar los radicales. Con objeto de dar significado al símbolo $a^{1/n}$ de manera que sea consistente con las Leyes de los exponentes, tendríamos que tener

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n)n} = a^1 = a$$

Entonces, según la definición de raíz n-ésima,

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

En general, definimos los exponentes racionales como se señala a continuación.

Definición de exponentes racionales

Para cualquier exponente racional m/n de los términos más bajos, donde m y n son enteros y $n > 0$, definimos

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m \qquad \text{o en forma equivalente} \qquad a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Si n es par, entonces es necesario que $a \geq 0$.

Con esta definición se puede demostrar que las *Leyes de los exponentes son válidas también para los exponentes racionales.*

Diofanto vivió en Alejandría por el año 250 antes de nuestra era. Se considera que su obra *Aritmética* es el primer libro sobre álgebra. En ella proporciona métodos para encontrar soluciones enteras de ecuaciones algebraicas. *Aritmética* fue la obra en la que se estudió por más de mil años. Fermat (véase página 652) hizo algunos de sus descubrimientos más importantes cuando estudiaba este libro. La contribución principal de Diofanto es el uso de símbolos para representar las incógnitas en un problema. Aunque este simbolismo no es tan simple como lo usamos en la actualidad, fue un gran adelanto para no escribir todo con palabras. En la notación de Diofanto, la ecuación

$$x^5 - 7x^2 + 8x - 5 = 24$$

se escribe

$$\Delta K^{\gamma}\alpha\,\varsigma\eta \pitchfork \Delta^{\gamma}\zeta\mathring{M}\varepsilon\iota^{\sigma}\kappa\delta$$

La notación algebraica moderna no se volvió común sino hasta el siglo XVII.

Ejemplo 10 Uso de la definición de los exponentes racionales

a) $4^{1/2} = \sqrt{4} = 2$

b) $8^{2/3} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$ Otra solución: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

c) $125^{-1/3} = \dfrac{1}{125^{1/3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{125}} = \dfrac{1}{5}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{1}{x^{4/3}} = x^{-4/3}$ ■

Ejemplo 11 Uso de las Leyes de los exponentes con exponentes racionales

a) $a^{1/3}a^{7/3} = a^{8/3}$ Ley 1: $a^m a^n = a^{m+n}$

b) $\dfrac{a^{2/5}a^{7/5}}{a^{3/5}} = a^{2/5+7/5-3/5} = a^{6/5}$ Ley 1, Ley 2: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

c) $(2a^3b^4)^{3/2} = 2^{3/2}(a^3)^{3/2}(b^4)^{3/2}$ Ley 4: $(abc)^n = a^n b^n c^n$

$= (\sqrt{2})^3 a^{3(3/2)} b^{4(3/2)}$ Ley 3: $(a^m)^n = a^{mn}$

$= 2\sqrt{2}a^{9/2}b^6$

d) $\left(\dfrac{2x^{3/4}}{y^{1/3}}\right)^3\left(\dfrac{y^4}{x^{-1/2}}\right) = \dfrac{2^3(x^{3/4})^3}{(y^{1/3})^3}\cdot(y^4x^{1/2})$ Leyes 5, 4 y 7

$= \dfrac{8x^{9/4}}{y}\cdot y^4x^{1/2}$ Ley 3

$= 8x^{11/4}y^3$ Leyes 1 y 2 ■

Ejemplo 12 Simplificación al escribir radicales como exponentes racionales

a) $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) = (2x^{1/2})(3x^{1/3})$ Definición de exponentes racionales

$= 6x^{1/2+1/3} = 6x^{5/6}$ Ley 1

b) $\sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{1/2})^{1/2}$ Definición de exponentes racionales

$= (x^{3/2})^{1/2}$ Ley 1

$= x^{3/4}$ Ley 3 ■

Racionalización del denominador

Con frecuencia es muy útil eliminar el denominador mediante la multiplicación tanto del numerador como del denominador por una expresión adecuada. Este procedimiento recibe el nombre de **racionalización del denominador**. Si el denominador es de la forma $\sqrt{a}$, entonces multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{a}$. Al hacerlo, estamos multiplicando la cantidad por 1, de modo que no se altera el valor. Por ejemplo

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

Obsérvese que el denominador en la última fracción no contiene radical alguno. En general, si el denominador es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$, entonces al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$ racionalizamos el denominador, porque, en el caso de $a > 0$,

$$\sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^{n-m}} = \sqrt[n]{a^{m+n-m}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

Ejemplo 13 Racionalización de denominadores

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x}$

c) $\sqrt[7]{\dfrac{1}{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[7]{a^2}} \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^5}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{\sqrt[7]{a^7}} = \dfrac{\sqrt[7]{a^5}}{a}$ ■

1.2 Ejercicios

1–8 ■ Escriba cada una de las expresiones con radicales usando exponentes y cada expresión exponencial usando radicales.

	Expresión con radicales	Expresión con exponentes
1.	$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$	
2.	$\sqrt[3]{7^2}$	
3.		$4^{2/3}$
4.		$11^{-3/2}$
5.	$\sqrt[5]{5^3}$	
6.		$2^{-1.5}$
7.		$a^{2/5}$
8.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$	

9–18 ■ Evalúe cada expresión

9. **a)** -3^2 **b)** $(-3)^2$ **c)** $(-3)^0$

10. **a)** $5^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3$ **b)** $\dfrac{10^7}{10^4}$ **c)** $\dfrac{3}{3^{-2}}$

11. **a)** $\dfrac{4^{-3}}{2^{-8}}$ **b)** $\dfrac{3^{-2}}{9}$ **c)** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

12. **a)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ **b)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} \cdot \frac{9}{16}$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$

13. **a)** $\sqrt{16}$ **b)** $\sqrt[4]{16}$ **c)** $\sqrt[4]{1/16}$

14. **a)** $\sqrt{64}$ **b)** $\sqrt[3]{-64}$ **c)** $\sqrt[5]{-32}$

15. **a)** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}}$ **b)** $\sqrt[3]{\dfrac{-1}{64}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[5]{-3}}{\sqrt[5]{96}}$

16. **a)** $\sqrt{7}\sqrt{28}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ **c)** $\sqrt[4]{24}\sqrt[4]{54}$

17. **a)** $\left(\frac{4}{9}\right)^{-1/2}$ **b)** $(-32)^{2/5}$ **c)** $-32^{2/5}$

18. **a)** $1024^{-0.1}$ **b)** $\left(-\frac{27}{8}\right)^{2/3}$ **c)** $\left(\frac{25}{64}\right)^{-3/2}$

19–22 ■ Evalúe la expresión usando $x = 3$, $y = 4$ y $z = -1$.

19. $\sqrt{x^2 + y^2}$

20. $\sqrt[4]{x^3 + 14y + 2z}$

21. $(9x)^{2/3} + (2y)^{2/3} + z^{2/3}$

22. $(xy)^{2z}$

23–26 ■ Simplifique la expresión.

23. $\sqrt{32} + \sqrt{18}$

24. $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

25. $\sqrt[5]{96} + \sqrt[5]{3}$

26. $\sqrt[4]{48} - \sqrt[4]{3}$

27–44 ■ Simplifique la expresión y elimine todos los exponentes negativos.

27. a^9a^{-5}

28. $(3y^2)(4y^5)$

29. $(12x^2y^4)\left(\frac{1}{2}x^5y\right)$

30. $(6y)^3$

31. $\dfrac{x^9(2x)^4}{x^3}$

32. $\dfrac{a^{-3}b^4}{a^{-5}b^5}$

33. $b^4\left(\frac{1}{3}b^2\right)(12b^{-8})$

34. $(2s^3t^{-1})\left(\frac{1}{4}s^6\right)(16t^4)$

35. $(rs)^3(2s)^{-2}(4r)^4$

36. $(2u^2v^3)^3(3u^3v)^{-2}$

37. $\dfrac{(6y^3)^4}{2y^5}$

38. $\dfrac{(2x^3)^2(3x^4)}{(x^3)^4}$

39. $\dfrac{(x^2y^3)^4(xy^4)^{-3}}{x^2y}$

40. $\left(\dfrac{c^4d^3}{cd^2}\right)\left(\dfrac{d^2}{c^3}\right)^3$

41. $\dfrac{(xy^2z^3)^4}{(x^3y^2z)^3}$ **42.** $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

43. $\left(\dfrac{q^{-1}rs^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$ **44.** $(3ab^2c)\left(\dfrac{2a^2b}{c^3}\right)^{-2}$

45–52 ■ Simplifique la expresión. Suponga que las letras representan números reales.

45. $\sqrt[4]{x^4}$ **46.** $\sqrt[5]{x^{10}}$

47. $\sqrt[4]{16x^8}$ **48.** $\sqrt[3]{x^3y^6}$

49. $\sqrt{a^2b^6}$ **50.** $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{a^4b}$

51. $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$ **52.** $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$

53–70 ■ Simplifique la expresión y elimine los exponentes negativos. Suponga que las letras representan números positivos.

53. $x^{2/3}x^{1/5}$ **54.** $(2x^{3/2})(4x)^{-1/2}$

55. $(-3a^{1/4})(9a)^{-3/2}$ **56.** $(-2a^{3/4})(5a^{3/2})$

57. $(4b)^{1/2}(8b^{2/5})$ **58.** $(8x^6)^{-2/3}$

59. $(c^2d^3)^{-1/3}$ **60.** $(4x^6y^8)^{3/2}$

61. $(y^{3/4})^{2/3}$ **62.** $(a^{2/5})^{-3/4}$

63. $(2x^4y^{-4/5})^3(8y^2)^{2/3}$ **64.** $(x^{-5}y^3z^{10})^{-3/5}$

65. $\left(\dfrac{x^6y}{y^4}\right)^{5/2}$ **66.** $\left(\dfrac{-2x^{1/3}}{y^{1/2}z^{1/6}}\right)^4$

67. $\left(\dfrac{3a^{-2}}{4b^{-1/3}}\right)^{-1}$ **68.** $\dfrac{(y^{10}z^{-5})^{1/5}}{(y^{-2}z^3)^{1/3}}$

69. $\dfrac{(9st)^{3/2}}{(27s^3t^{-4})^{2/3}}$ **70.** $\left(\dfrac{a^2b^{-3}}{x^{-1}y^2}\right)^3\left(\dfrac{x^{-2}b^{-1}}{a^{3/2}y^{1/3}}\right)$

71–72 ■ Escriba las cantidades mediante la notación científica.

71. **a)** 69 300 000 **b)** 7 200 000 000 000
c) 0.000028536 **d)** 0.0001213

72. **a)** 129 540 000 **b)** 7 259 000 000
c) 0.0000000014 **d)** 0.0007029

73–74 ■ Escriba cada una de las cantidades en la notación decimal.

73. **a)** 3.19×10^5 **b)** 2.721×10^8
c) 2.670×10^{-8} **d)** 9.999×10^{-9}

74. **a)** 7.1×10^{14} **b)** 6×10^{12}
c) 8.55×10^{-3} **d)** 6.257×10^{-10}

75–76 ■ Escriba en notación científica la cantidad indicada en cada inciso.

75. **a)** Un año luz, la distancia que la luz recorre en un año, es de casi 9 460 800 000 000 km.

b) El diámetro de un electrón es de casi 0.0000000000004 cm.

c) Una gota de agua contiene más de 33 trillones de moléculas.

76. **a)** La distancia de la Tierra al Sol es de casi 150 millones de kilómetros.

b) La masa de una molécula de oxígeno es de casi 0.000000000000000000000053 g.

c) La masa de la Tierra es de casi 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg.

77–82 ■ Utilice la notación científica, las Leyes de los exponentes y la calculadora para ejecutar las operaciones señaladas. Proporcione su respuesta correcta de acuerdo con la cantidad de cifras significativas indicadas por los datos dados.

77. $(7.2 \times 10^{-9})(1.806 \times 10^{-12})$

78. $(1.062 \times 10^{24})(8.61 \times 10^{19})$

79. $\dfrac{1.295643 \times 10^9}{(3.610 \times 10^{-17})(2.511 \times 10^6)}$

80. $\dfrac{(73.1)(1.6341 \times 10^{28})}{0.0000000019}$

81. $\dfrac{(0.0000162)(0.01582)}{(594\,621\,000)(0.0058)}$ **82.** $\dfrac{(3.542 \times 10^{-6})^9}{(5.05 \times 10^4)^{12}}$

83–86 ■ Racionalice el denominador.

83. **a)** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{2}{x}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

84. **a)** $\sqrt{\dfrac{5}{12}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{x}{6}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{y}{2z}}$

85. **a)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{y^3}}$ **c)** $\dfrac{x}{y^{2/5}}$

86. **a)** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$ **b)** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$ **c)** $\dfrac{1}{c^{3/7}}$

87. Sean a, b y c números reales con $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Determine el signo de cada expresión.

a) b^5 **b)** b^{10} **c)** ab^2c^3

d) $(b - a)^3$ **e)** $(b - a)^4$ **f)** $\dfrac{a^3c^3}{b^6c^6}$

88. Demuestre que las Leyes de los exponentes dadas para cada caso en el cual m y n son enteros positivos y $m > n$.

a) Ley 2 **b)** Ley 5 **c)** Ley 6

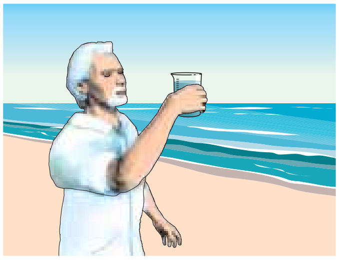
Aplicaciones

89. Distancia a la estrella más cercana Alfa Centauro, la estrella más cercana al Sistema Solar, está a 4.3 años luz.

Utilice la información del ejercicio 75 a) para expresar esta distancia en kilómetros.

90. Velocidad de la luz La velocidad de la luz es de casi 300 000 km/s. Utilice la información del ejercicio 76 a) para determinar cuánto tarda un rayo de luz en llegar a la Tierra desde el Sol.

91. Volumen del mar El promedio de la profundidad del mar es de 3.7×10^3 m, y la superficie del mar es de 3.6×10^{14} m^2. ¿Cuál es el volumen total del mar en litros? (Un metro cúbico contiene 1000 litros.)



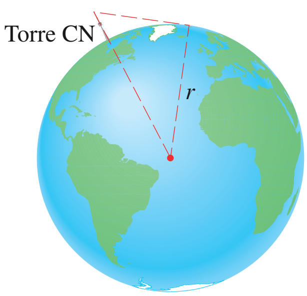
92. Deuda nacional En noviembre de 2004, la población de Estados Unidos era de 2.949×10^8, y la deuda nacional era de 7.529×10^{12} dólares. ¿Cuánto debe cada persona?

93. Número de moléculas Un cuarto aislado de hospital mide 5 m de ancho, 10 m de largo y 3 m de alto; se llena de oxígeno puro. Un metro cúbico contiene 1000 litros y 22.4 litros de cualquier gas contiene 6.02×10^{23} moléculas (número de Avogadro). ¿Cuántas moléculas de oxígeno hay en el cuarto?

94. ¿Qué tan lejos puede ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que usted puede ver desde el último piso de un edificio alto cuya altura es h se estima mediante la fórmula

$$D = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h también se miden en millas. ¿Qué tan lejos puede ver desde el mirador de la Torre de CN de Toronto, 1135 pies por arriba del suelo?

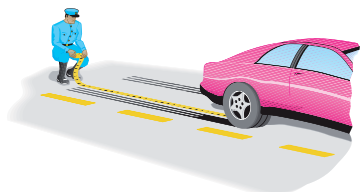


95. Velocidad de un automóvil que frena La policía aplica la fórmula $s = \sqrt{30fd}$ para estimar la velocidad s (en millas por hora) a la cual un vehículo se desplaza si recorre d pies después de que aplica los frenos en forma repentina. El número f es el coeficiente de fricción de la carretera, el cual es una medida de la "deslizabilidad" de la carretera. La tabla da algunas estimaciones representativas de f.

	Alquitrán	Concreto	Grava
Seco	1.0	0.8	0.2
Húmedo	0.5	0.4	0.1

(a) Si un automóvil se desliza 65 pies en concreto húmedo, ¿qué tan rápido iba cuando se aplicaron los frenos?

(b) Si el vehículo se desplaza a 50 millas por hora, ¿qué tanto se desliza en alquitrán húmedo?



96. Distancia de la Tierra al Sol Se infiere de la **Tercera Ley de Kepler** del movimiento de los planetas que la distancia promedio de un planeta al Sol, en metros, es

$$d = \left(\frac{GM}{4\pi^2}\right)^{1/3} T^{2/3}$$

donde $M = 1.99 \times 10^{30}$ kg es la masa del Sol, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ es la constante gravitacional y T es el periodo de la órbita del planeta, en segundos. Aplique el hecho de que el periodo de la órbita de la Tierra es de casi 365.25 días para encontrar la distancia de la Tierra al Sol.

97. Velocidad de flujo en un canal La velocidad del agua que fluye por un canal o por el lecho de un río se rige por la **ecuación de Manning**

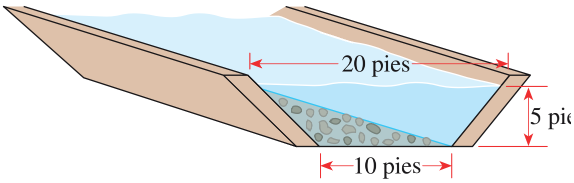
$$V = 1.486 \frac{A^{2/3}S^{1/2}}{p^{2/3}n}$$

donde V es la velocidad del flujo en pies/s; A es el área de la sección transversal del canal; en pies cuadrados; S es la pendiente descendente del canal; p es el perímetro mojado en pies (la distancia desde la parte superior de una orilla, bajando por el lado del canal, atravesando el fondo y subiendo hasta la parte superior de la otra orilla), y n es el coeficiente de rugosidad (una medida de la rugosidad del fondo del canal). Esta ecuación se usa para predecir la capacidad de los canales de inundación para regular el escurrimiento de

las fuertes deprecipitaciones pluviales. En el caso del canal mostrado en la figura, $A = 75$ pies cuadrados, $S = 0.050$, $p = 24.1$ pies, y $n = 0.040$.

a) Determinar la velocidad que lleva el agua por este canal.

b) ¿Cuántos pies cúbicos de agua puede descargar el canal por cada segundo? [*Sugerencia:* multiplique V por A para obtener el volumen del flujo por segundo.]



Descubrimiento • Análisis

98. ¿Qué tanto son mil millones? Si tiene un millón (10^6) de dólares en una valija y usted gasta mil (10^3) dólares cada día, ¿cuántos años tardaría en gastarse todo el dinero? Si gasta lo mismo, ¿cuántos años tardaría en vaciar la valija llena con *mil millones* (10^9) de dólares?

99. Potencias fáciles que parecen difíciles Calcule estas expresiones mentalmente. Aplique las Leyes de los exponentes para facilitar el proceso.

a) $\dfrac{18^5}{9^5}$ **b)** $20^6 \cdot (0.5)^6$

100. Comportamiento limitante de las potencias Complete las tablas siguientes. ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de 2 cuando n se incrementa? ¿Qué sucede con la raíz n-ésima de $\frac{1}{2}$?

n	$2^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

n	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/n}$
1	
2	
5	
10	
100	

Construya una tabla similar para $n^{1/n}$. ¿Qué sucede con la raíz e-ésima de n cuando n se incrementa?

101. Comparación de raíces Sin usar calculadora, determine qué número es más grande en cada par de valores.

a) $2^{1/2}$ o $2^{1/3}$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$ o $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$

c) $7^{1/4}$ o $4^{1/3}$ **d)** $\sqrt[3]{5}$ o $\sqrt{3}$

1.3 Expresiones algebraicas

Una **variable** es una letra que representa a cualquier número de un conjunto dado de números. Si empezamos con variables como x, y y z y algunos números reales, y los combinamos usando la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces obtendremos una **expresión algebraica**. He aquí algunos ejemplos:

$$2x^2 - 3x + 4 \qquad \sqrt{x} + 10 \qquad \frac{y - 2z}{y^2 + 4}$$

Un **monomio** es una expresión de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un entero no negativo. Un **binomio** es una suma de dos monomios y un **trinomio** es una suma de tres monomios. En general, una suma de monomios se llama *polinomio*. Por ejemplo, la primera expresión de las anteriores es un polinomio, pero las otras dos no lo son.

Polinomios

Un **polinomio** en la variable x es una expresión de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio es de **grado** $\boldsymbol{n}$. Los polinomios $a_k x^k$ que conforman el polinomio son los **términos** del polinomio.

Observe que el grado de un polinomio es la potencia más alta de la variable que aparece en el polinomio.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
$2x^2 - 3x + 4$	trinomio	$2x^2, -3x, 4$	2
$x^8 + 5x$	binomio	$x^8, 5x$	8
$3 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^3$	cuatro términos	$-\frac{1}{2}x^3, x^2, -x, 3$	3
$5x + 1$	binomio	$5x, 1$	1
$9x^5$	monomio	$9x^5$	5
6	monomio	6	0

Combinación de expresiones algebraicas

Sumamos y **restamos** polinomios aplicando las propiedades de los números reales que se estudian en la sección 1.1. La idea es combinar **términos semejantes** (es decir, términos con las mismas variables elevadas a las mismas potencias) usando la propiedad distributiva. Por ejemplo,

Propiedad distributiva

$ac + bc = (a + b)c$

$$5x^7 + 3x^7 = (5 + 3)x^7 = 8x^7$$

Al restar polinomios tenemos que recordar que si un signo menos precede a una expresión que se encuentra entre paréntesis, entonces el signo de cada término dentro del paréntesis cambia cuando eliminamos los paréntesis:

$$-(b + c) = -b - c$$

[Es simplemente un caso de la propiedad distributiva, $a(b + c) = ab + ac$, con $a = -1$.]

Ejemplo 1 Adición y sustracción de polinomios

a) Efectúe la suma $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

b) Encuentre la diferencia $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$.

Solución

a) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) + (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= (x^3 + x^3) + (-6x^2 + 5x^2) + (2x - 7x) + 4$ Agrupación de términos semejantes

$= 2x^3 - x^2 - 5x + 4$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^3 - 6x^2 + 2x + 4) - (x^3 + 5x^2 - 7x)$

$= x^3 - 6x^2 + 2x + 4 - x^3 - 5x^2 + 7x$ Propiedad distributiva

$= (x^3 - x^3) + (-6x^2 - 5x^2) + (2x + 7x) + 4$ Agrupación de términos semejantes

$= -11x^2 + 9x + 4$ Combinación de términos semejantes

■

Para encontrar el **producto** de polinomios o de otras expresiones algebraicas necesitamos usar la propiedad distributiva en forma repetida. En particular, al usarla tres veces en el producto de dos binomios, obtenemos

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Esto indica que para multiplicar los dos factores se multiplica cada uno de los términos de un factor por cada uno de los términos del otro factor y se suman los productos. En forma esquemática tenemos

La regla práctica siguiente ayuda a obtener el producto de dos binomios: el primero por el primero, el primero por el segundo, el segundo por el primero y el segundo por el segundo.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

En general, multiplicamos dos expresiones algebraicas usando la propiedad distributiva y las Leyes de los exponentes.

Ejemplo 2 Multiplicación de expresiones algebraicas

a) $(2x + 1)(3x - 5) = 6x^2 - 10x + 3x - 5$ Propiedad distributiva

$= 6x^2 - 7x - 5$ Combinación de términos semejantes

b) $(x^2 - 3)(x^3 + 2x + 1) = x^2(x^3 + 2x + 1) - 3(x^3 + 2x + 1)$ Propiedad distributiva

$= x^5 + 2x^3 + x^2 - 3x^3 - 6x - 3$ Propiedad distributiva

$= x^5 - x^3 + x^2 - 6x - 3$ Combinación de términos semejantes

c) $(1 + \sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x}) = 2 - 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 3(\sqrt{x})^2$ Propiedad distributiva

$= 2 - \sqrt{x} - 3x$ Combinación de términos semejantes ■

Ciertos tipos de productos son tan frecuentes que es necesario memorizarlos. Puede verificar las fórmulas siguientes efectuando las multiplicaciones.

Refiérase al Proyecto de descubrimiento de la página 34 para ver una interpretación geométrica de algunas de estas fórmulas.

Fórmulas para productos especiales

Si A y B son números reales o expresiones algebraicas, entonces

1. $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ Suma y producto de términos iguales

2. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ Cuadrado de una suma

3. $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ Cuadrado de una diferencia

4. $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ Cubo de una suma

5. $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ Cubo de una diferencia

La idea clave de usar estas fórmulas (o cualquier otra fórmula en álgebra) es el **principio de la sustitución**: podríamos reemplazar cualquier expresión algebraica por cualquier letra en una fórmula. Por ejemplo, para determinar $(x^2 + y^3)^2$ aplicamos la fórmula 2 del producto, escribimos A en lugar de x^2 y B en lugar de y^3 para llegar a

$$(x^2 + y^3)^2 = (x^2)^2 + 2(x^2)(y^3) + (y^3)^2$$

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

Ejemplo 3 Aplicación de las fórmulas para productos especiales

Utilice las fórmulas para productos especiales para determinar cada uno de los productos.

a) $(3x + 5)^2$ b) $(x^2 - 2)^3$ c) $(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y})$

Solución

a) Al sustituir $A = 3x$ y $B = 5$ en la fórmula 2 de los productos, tenemos

$$(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + 5^2 = 9x^2 + 30x + 25$$

b) Al sustituir $A = x^2$ y $B = 2$ en la fórmula 5 de los productos, tenemos

$$\begin{aligned}(x^2 - 2)^3 &= (x^2)^3 - 3(x^2)^2(2) + 3(x^2)(2)^2 - 2^3 \\ &= x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8\end{aligned}$$

c) Al sustituir $A = 2x$ y $B = \sqrt{y}$ en la fórmula 1 de los productos, tenemos

$$\begin{aligned}(2x - \sqrt{y})(2x + \sqrt{y}) &= (2x)^2 - (\sqrt{y})^2 \\ &= 4x^2 - y\end{aligned}$$

■

Factorización

Aplicamos la propiedad distributiva para expandir las expresiones algebraicas. Algunas veces necesitamos invertir este proceso usando otra vez la propiedad distributiva mediante la **factorización** de una expresión en productos de términos más simples. Por ejemplo, podemos escribir

FACTORIZACIÓN →

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$$

← EXPANSIÓN

Decimos que $x - 2$ y $x + 2$ son **factores** de $x^2 - 4$.

El tipo más sencillo de factorización se presenta cuando los términos tienen un factor común.

Ejemplo 4 Obtención de factores comunes

Factorice cada una de las expresiones.

a) $3x^2 - 6x$ b) $8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4$

c) $(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3)$

Solución

a) El factor común máximo de los términos $3x^2$ y $-6x$ es $3x$, y entonces

$$3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$$3x(x - 2) = 3x^2 - 6x \quad ✓$$

b) Observe que

8, 6 y -2 tienen a 2 como máximo factor común

x^4, x^3 y x tienen a x como máximo factor común

y^2, y^3 y y^4 tienen a y^2 como máximo factor común

De modo que el máximo factor común de los tres términos en el polinomio es $2xy^2$, por lo que

$$\begin{aligned}8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 &= (2xy^2)(4x^3) + (2xy^2)(3x^2y) + (2xy^2)(-y^2) \\ &= 2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2)\end{aligned}$$

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$$2xy^2(4x^3 + 3x^2y - y^2) = 8x^4y^2 + 6x^3y^3 - 2xy^4 \quad ✓$$

c) Los dos términos tienen el factor común $x - 3$.

$$\begin{aligned}(2x + 4)(x - 3) - 5(x - 3) &= [(2x + 4) - 5](x - 3) && \text{Propiedad distributiva}\\ &= (2x - 1)(x - 3) && \text{Simplificación}\end{aligned}$$

■

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$, observamos que

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs$$

de modo que es necesario escoger números r y s tal que $r + s = b$ y $rs = c$.

Ejemplo 5 Factorización de $x^2 + bx + c$ mediante ensayo y error

Factorice: $x^2 + 7x + 12$

Solución Necesitamos encontrar dos enteros cuyo producto sea 12 y cuya suma sea igual a 7. Mediante ensayo y error encontramos que los dos enteros son 3 y 4. Por lo tanto, la factorización es

$$x^2 + 7x + 12 = \underbrace{(x + 3)(x + 4)}_{\text{factores de 12}}$$

■

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ ✓

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con $a \neq 1$, buscamos factores de la forma $px + r$ y $qx + s$:

$$ax^2 + bx + c = (px + r)(qx + s) = pqx^2 + (ps + qr)x + rs$$

$$ax^2 + bx + c = (\overset{\text{factores de } a}{p}x + \underset{\text{factores de } c}{r})(qx + s)$$

Por lo tanto, tratamos de hallar números p, q, r, y s tal que $pq = a$, $rs = c$, $ps + qr = b$. Si todos estos números son enteros, entonces tendremos un número limitado de posibilidades para p, q, r y s.

Ejemplo 6 Factorización de $ax^2 + bx + c$ por ensayo y error

Factorice: $6x^2 + 7x - 5$

Solución Podemos factorizar 6 como $6 \cdot 1$ o bien $3 \cdot 2$, y -5 como $-25 \cdot 1$ o $5 \cdot (-1)$. Intentando estas posibilidades llegamos a la factorización

$$6x^2 + 7x - 5 = (\overset{\text{factores de 6}}{3}x + \underset{\text{factores de } -5}{5})(\overset{\text{factores de 6}}{2}x \underset{\text{factores de } -5}{-1})$$

■

Verifique su respuesta

La multiplicación da

$(3x + 5)(2x - 1) = 6x^2 + 7x - 5$ ✓

Ejemplo 7 Identificación de la forma de una expresión

Factorice cada una de las expresiones.

a) $x^2 - 2x - 3$ b) $(5a + 1)^2 - 2(5a + 1) - 3$

Solución

a) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ Ensayo y error

b) Esta expresión es de la forma

$$\square^2 - 2\square - 3$$

donde $\square$ representa $5a + 1$. Ésta es la misma forma que la de la expresión en el inciso (a), de modo que se factoriza como $(\square - 3)(\square + 1)$.

$$(5a+1)^2 - 2(5a+1) - 3 = [(5a+1) - 3][(5a+1) + 1]$$
$$= (5a-2)(5a+2)$$ ■

Algunas expresiones algebraicas especiales se pueden factorizar usando las fórmulas siguientes. Las primeras tres son simplemente las fórmulas para productos especiales, pero escritas hacia atrás.

Fórmulas de factorización especial

Fórmula	Nombre
1. $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$	Diferencia de cuadrados
2. $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$	Cuadrado perfecto
3. $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$	Cuadrado perfecto
4. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$	Diferencia de cubos
5. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$	Suma de cubos

Ejemplo 8 Factorización de diferencias de cuadrados

Factorice cada polinomio.

a) $4x^2 - 25$ b) $(x + y)^2 - z^2$

Solución

a) Si usamos la fórmula de diferencia de cuadrados con $A = 2x$ y $B = 5$, tenemos

$$4x^2 - 25 = (2x)^2 - 5^2 = (2x - 5)(2x + 5)$$

$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$

b) Aplicamos la fórmula de la diferencia de cuadrados con $A = x + y$ y $B = z$.

$$(x + y)^2 - z^2 = (x + y - z)(x + y + z)$$ ■

Ejemplo 9 Factorización de diferencias y sumas de cubos

Factorice cada polinomio.

a) $27x^3 - 1$ b) $x^6 + 8$

Solución

a) Al aplicar la fórmula de diferencia de cubos con $A = 3x$ y $B = 1$, tenemos que

$$27x^3 - 1 = (3x)^3 - 1^3 = (3x - 1)[(3x)^2 + (3x)(1) + 1^2]$$
$$= (3x - 1)(9x^2 + 3x + 1)$$

b) Al aplicar la fórmula de la suma de cubos con $A = x^2$ y $B = 2$, tenemos

$$x^6 + 8 = (x^2)^3 + 2^3 = (x^2 + 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$$ ■

Un trinomio es un cuadrado perfecto si es de la forma

$$A^2 + 2AB + B^2 \qquad \text{o bien,} \qquad A^2 - 2AB + B^2$$

Entonces, **reconocemos a un cuadrado perfecto** si el término medio ($2AB$ o bien, $-2AB$) es más o menos el doble del producto de la raíces cuadradas de los otros dos términos.

Ejemplo 10 Identificación de cuadrados perfectos

Factorice los trinomios.

a) $x^2 + 6x + 9$ b) $4x^2 - 4xy + y^2$

Solución

a) En este caso $A = x$ y $B = 3$, de modo que $2AB = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$. Como el término medio es $6x$, el trinomio es un cuadrado perfecto. De acuerdo con la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

b) Aquí, $A = 2x$ y $B = y$, de modo que $2AB = 2 \cdot 2x \cdot y = 4xy$. Puesto que el término medio es $-4xy$, el trinomio es un cuadrado perfecto. Mediante la fórmula del cuadrado perfecto tenemos

$$4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)^2$$ ■

Cuando factorizamos una expresión, algunas veces el resultado se puede factorizar todavía más. En general, *primero buscamos los factores comunes*, luego inspeccionamos el resultado para ver si se puede factorizar por medio de otros métodos de esta sección. Repetimos el proceso hasta que hemos factorizado la expresión por completo.

Ejemplo 11 Factorización completa de una expresión

Factorice totalmente cada una de las expresiones.

a) $2x^4 - 8x^2$ b) $x^5y^2 - xy^6$

Solución

a) Primero factorizamos la potencia de x con el exponente más pequeño.

$$\begin{aligned} 2x^4 - 8x^2 &= 2x^2(x^2 - 4) && \text{El factor común es } 2x^2 \\ &= 2x^2(x - 2)(x + 2) && \text{Factorizamos } x^2 - 4 \text{ como una diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

b) Primero factorizamos las potencias de x y y con los exponentes más pequeños.

$$\begin{aligned} x^5y^2 - xy^6 &= xy^2(x^4 - y^4) && \text{El factor común es } xy^2 \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) && \text{Se factoriza } x^4 - y^4 \text{ como diferencias de cuadrados} \\ &= xy^2(x^2 + y^2)(x + y)(x - y) && \text{Se factoriza } x^2 - y^2 \text{ como diferencias de cuadrados} \end{aligned}$$ ■

En el siguiente ejemplo se factorizan variables con exponentes fraccionarios. Este tipo de factorización se requiere en el cálculo.

Matemáticas en el mundo moderno

Palabras, sonidos e imágenes que se cambian a números

Fotografías, sonidos y texto se transmiten en forma continua desde un lugar a otro por medio de Internet, máquinas para facsímiles o módem. ¿Cómo pueden ser transmitidas tales cosas por los cables del teléfono? La clave para hacerlo es transformarlas en números o bits (los dígitos 0 o 1). Es fácil ver cómo se cambia un texto a números. Por ejemplo, podríamos usar la correspondencia A = 00000001, B = 00000010, C = 00000011, D = 00000100, E = 00000101, y así sucesivamente. La palabra “BED” se convertiría en 000000100000010100000100. Al leer los dígitos en grupos de ocho es posible traducir este núme-ro a la palabra “BED”.

Cambiar el sonido a bits es más complicado. Una onda de sonido se puede graficar en un osciloscopio o una computadora. La gráfica se descompone matemáticamente en componentes más simples que corresponden a las frecuencias diferentes del sonido original. (Una rama de las matemáticas que se llama análisis de Fourier se usa aquí.) La intensidad de cada componente es un número y el sonido original se puede reconstruir a partir de estos números. Por ejemplo, la música se almacena en un disco compacto como una sucesión de bits; se podría ver como 101010001010010-1001010101000001011110101000101011. . . . (¡Un segundo de música requiere 1.5 millones de bits!) El reproductor de discos compactos reconstruye la música a partir de los números en el disco.

Cambiar fotografías a números requiere expresar el color y la brillantez de cada punto, o pixel, en un número. Lo anterior se logra con mucha eficacia usando una rama de las matemáticas que se llama teoría ondulatoria. El FBI utiliza las ondas como una manera compacta de almacenar los millones de huellas digitales que necesitan.

Para factorizar $x^{-1/2}$ a partir de $x^{3/2}$, *restamos* los exponentes:

$$\begin{aligned} x^{3/2} &= x^{-1/2}(x^{3/2-(-1/2)}) \\ &= x^{-1/2}(x^{3/2+1/2}) \\ &= x^{-1/2}(x^2) \end{aligned}$$

Compruebe su respuesta

Para ver si la factorización es correcta, multiplique usando las Leyes de los Exponentes.

(a) $3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$

$= 3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ ✓

(b) $(2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$

$= (2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$ ✓

Ejemplo 12 Factorización de expresiones con exponentes fraccionarios

Factorice las expresiones.

a) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ b) $(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3}$

Solución

a) Factorice la potencia de x con el *exponente más pequeño*, es decir, $x^{-1/2}$.

$3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2} = 3x^{-1/2}(x^2 - 3x + 2)$ Se saca como factor $3x^{-1/2}$

$= 3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ Factorización de la expresión cuadrática $x^2 - 3x + 2$

b) Se toma como factor la potencia de $2 + x$ con el *exponente más pequeño*, es decir $(2 + x)^{-2/3}$.

$(2 + x)^{-2/3}x + (2 + x)^{1/3} = (2 + x)^{-2/3}[x + (2 + x)]$ El factor es $(2 + x)^{-2/3}$

$= (2 + x)^{-2/3}(2 + 2x)$ Simplificación

$= 2(2 + x)^{-2/3}(1 + x)$ Se saca como factor al 2 ■

Los polinomios con al menos cuatro términos se pueden factorizar agrupando términos. El ejemplo siguiente ilustra la idea

Ejemplo 13 Factorización por agrupación

Factorice cada uno de los polinomios.

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4$ b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6$

Solución

a) $x^3 + x^2 + 4x + 4 = (x^3 + x^2) + (4x + 4)$ Términos agrupados

$= x^2(x + 1) + 4(x + 1)$ Se toman factores comunes

$= (x^2 + 4)(x + 1)$ Se saca como factor común $x + 1$ de cada término

b) $x^3 - 2x^2 - 3x + 6 = (x^3 - 2x^2) - (3x - 6)$ Agrupación de términos

$= x^2(x - 2) - 3(x - 2)$ Se sacan factores comunes

$= (x^2 - 3)(x - 2)$ Se saca como factor común $x - 2$ de cada término ■

1.3 Ejercicios

1–6 ■ Complete la tabla siguiente escribiendo si el polinomio es un monomio, binomio o trinomio. Luego liste los términos y establezca su grado.

Polinomio	Tipo	Términos	Grado
1. $x^2 - 3x + 7$			
2. $2x^5 + 4x^2$			
3. -8			
4. $\frac{1}{2}x^7$			
5. $x - x^2 + x^3 - x^4$			
6. $\sqrt{2}x - \sqrt{3}$			

7–42 ■ Ejecute las operaciones que se piden y simplifique.

7. $(12x - 7) - (5x - 12)$ **8.** $(5 - 3x) + (2x - 8)$

9. $(3x^2 + x + 1) + (2x^2 - 3x - 5)$

10. $(3x^2 + x + 1) - (2x^2 - 3x - 5)$

11. $(x^3 + 6x^2 - 4x + 7) - (3x^2 + 2x - 4)$

12. $3(x - 1) + 4(x + 2)$

13. $8(2x + 5) - 7(x - 9)$

14. $4(x^2 - 3x + 5) - 3(x^2 - 2x + 1)$

15. $2(2 - 5t) + t^2(t - 1) - (t^4 - 1)$

16. $5(3t - 4) - (t^2 + 2) - 2t(t - 3)$

17. $\sqrt{x}(x - \sqrt{x})$

18. $x^{3/2}(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x})$

19. $(3t - 2)(7t - 5)$

20. $(4x - 1)(3x + 7)$

21. $(x + 2y)(3x - y)$

22. $(4x - 3y)(2x + 5y)$

23. $(1 - 2y)^2$

24. $(3x + 4)^2$

25. $(2x^2 + 3y^2)^2$

26. $\left(c + \dfrac{1}{c}\right)^2$

27. $(2x - 5)(x^2 - x + 1)$

28. $(1 + 2x)(x^2 - 3x + 1)$

29. $(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)$

30. $(x^{1/2} + y^{1/2})(x^{1/2} - y^{1/2})$

31. $\left(\sqrt{a} - \dfrac{1}{b}\right)\left(\sqrt{a} + \dfrac{1}{b}\right)$

32. $(\sqrt{h^2 + 1} + 1)(\sqrt{h^2 + 1} - 1)$

33. $(1 + a^3)^3$

34. $(1 - 2y)^3$

35. $(x^2 + x - 1)(2x^2 - x + 2)$

36. $(3x^3 + x^2 - 2)(x^2 + 2x - 1)$

37. $(1 + x^{4/3})(1 - x^{2/3})$

38. $(1 - b)^2(1 + b)^2$

39. $(3x^2y + 7xy^2)(x^2y^3 - 2y^2)$

40. $(x^4y - y^5)(x^2 + xy + y^2)$

41. $(x + y + z)(x - y - z)$

42. $(x^2 - y + z)(x^2 + y - z)$

43–48 ■ Obtenga el factor común.

43. $-2x^3 + 16x$

44. $2x^4 + 4x^3 - 14x^2$

45. $y(y - 6) + 9(y - 6)$

46. $(z + 2)^2 - 5(z + 2)$

47. $2x^2y - 6xy^2 + 3xy$

48. $-7x^4y^2 + 14xy^3 + 21xy^4$

49–54 ■ Factorice el trinomio.

49. $x^2 + 2x - 3$

50. $x^2 - 6x + 5$

51. $8x^2 - 14x - 15$

52. $6y^2 + 11y - 21$

53. $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$

54. $2(a + b)^2 + 5(a + b) - 3$

55–60 ■ Aplique una fórmula de factorización especial para factorizar la expresión.

55. $9a^2 - 16$

56. $(x + 3)^2 - 4$

57. $27x^3 + y^3$

58. $8s^3 - 125t^6$

59. $x^2 + 12x + 36$

60. $16z^2 - 24z + 9$

61–66 ■ Factorice la expresión agrupando términos.

61. $x^3 + 4x^2 + x + 4$

62. $3x^3 - x^2 + 6x - 2$

63. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$

64. $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

65. $x^3 + x^2 + x + 1$

66. $x^5 + x^4 + x + 1$

67–70 ■ Factorice totalmente la expresión. Empiece por factorizar la potencia más baja de cada factor común.

67. $x^{5/2} - x^{1/2}$

68. $x^{-3/2} + 2x^{-1/2} + x^{1/2}$

69. $(x^2 + 1)^{1/2} + 2(x^2 + 1)^{-1/2}$

70. $2x^{1/3}(x - 2)^{2/3} - 5x^{4/3}(x - 2)^{-1/3}$

71–100 ■ Factorice totalmente las expresiones.

71. $12x^3 + 18x$

72. $5ab - 8abc$

73. $x^2 - 2x - 8$

74. $y^2 - 8y + 15$

75. $2x^2 + 5x + 3$

76. $9x^2 - 36x - 45$

77. $6x^2 - 5x - 6$

78. $r^2 - 6rs + 9s^2$

79. $25s^2 - 10st + t^2$

80. $x^2 - 36$

81. $4x^2 - 25$

82. $49 - 4y^2$

83. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

84. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^2 - \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^2$

85. $x^2(x^2 - 1) - 9(x^2 - 1)$

86. $(a^2 - 1)b^2 - 4(a^2 - 1)$

87. $8x^3 + 125$

88. $x^6 + 64$

89. $x^6 - 8y^3$

90. $27a^3 - b^6$

91. $x^3 + 2x^2 + x$

92. $3x^3 - 27x$

93. $y^3 - 3y^2 - 4y + 12$

94. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

95. $2x^3 + 4x^2 + x + 2$

96. $3x^3 + 5x^2 - 6x - 10$

97. $(x - 1)(x + 2)^2 - (x - 1)^2(x + 2)$

98. $y^4(y + 2)^3 + y^5(y + 2)^4$

99. $(a^2 + 1)^2 - 7(a^2 + 1) + 10$

100. $(a^2 + 2a)^2 - 2(a^2 + 2a) - 3$

101–104 ■ Factorice completamente la expresión. (Este tipo de expresión surge en el cálculo cuando se usa la "regla del producto".)

101. $5(x^2 + 4)^4(2x)(x - 2)^4 + (x^2 + 4)^5(4)(x - 2)^3$

102. $3(2x - 1)^2(2)(x + 3)^{1/2} + (2x - 1)^3(\frac{1}{2})(x + 3)^{-1/2}$

103. $(x^2 + 3)^{-1/3} - \frac{2}{3}x^2(x^2 + 3)^{-4/3}$

104. $\frac{1}{2}x^{-1/2}(3x + 4)^{1/2} - \frac{3}{2}x^{1/2}(3x + 4)^{-1/2}$

105. **a)** Demuestre que $ab = \frac{1}{2}[(a + b)^2 - (a^2 + b^2)]$.

b) Demuestre que $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$.

c) Demuestre que

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

d) Factorice completamente: $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$.

106. Compruebe las fórmulas de factorización especial 4 y 5 expandiendo sus segundos miembros.

Aplicaciones

107. Volumen de concreto Una alcantarilla está construida mediante cascarones cilíndricos colados en concreto, según se muestra en la figura. Aplique la fórmula del volumen de un cilindro que se encuentra en los forros interiores de este libro y explique por qué el volumen del cascarón cilíndrico es

$$V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

Factorice para demostrar que

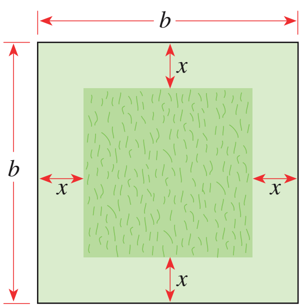
$$V = 2\pi \cdot \text{radio promedio} \cdot \text{altura} \cdot \text{espesor}$$

Utilice el esquema "desenrrollado" para explicar por qué tiene sentido desde el punto de vista geométrico.

108. Poda de un terreno Cada semana se corta el pasto de las orillas de un terreno cuadrado de un cierto estacionamiento. El resto del terreno permanece intacto para que sirva como hábitat de pájaros y otros pequeños animales (véase la figura). El terreno mide b pies por b pies y la franja podada es de x pies de ancho.

(a) Explique por qué el área de la parte podada es $b^2 - (b - 2x)^2$.

(b) Factorice la expresión del inciso a) para demostrar que el área de la parte podada es también $4x(b - x)$.



Descubrimiento • Debate

109. Grados de sumas y productos de polinomios Forme varios pares de polinomios, luego calcule la suma y el producto de cada par. Con base en sus experimentos y observaciones, responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cómo es el grado del producto en relación con los grados de los polinomios originales?

b) ¿Cómo es el grado de la suma en relación con el grado de los polinomios originales?

110. El poder de las fórmulas algebraicas Aplique la fórmula de las diferencias de cuadrados para factorizar $17^2 - 16^2$. Observe que es fácil de calcular mentalmente la forma factorizada, pero es difícil de calcular la forma original de esta manera. Evalúe cada expresión mentalmente:

a) $528^2 - 527^2$ **b)** $122^2 - 120^2$ **c)** $1020^2 - 1010^2$

Ahora aplique la fórmula para productos especiales

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

para evaluar estos productos mentalmente:

d) $79 \cdot 51$ **e)** $998 \cdot 1002$

111. Diferencias de potencias pares

a) Factorice del todo las expresiones: $A^4 - B^4$ y $A^6 - B^6$.

b) Verifique que $18335 = 12^4 - 7^4$ y que $2\,868\,335 = 12^6 - 7^6$.

c) Use los resultados de los incisos a) y b) para factorizar los enteros 18 335 y 2 868 335. Luego demuestre que en ambas factorizaciones, todos los factores son números primos.

112. Factorización de $A^n - 1$ Verifique estas fórmulas expandiendo y simplificando el segundo miembro.

$$A^2 - 1 = (A - 1)(A + 1)$$
$$A^3 - 1 = (A - 1)(A^2 + A + 1)$$
$$A^4 - 1 = (A - 1)(A^3 + A^2 + A + 1)$$

Use base en el patrón mostrado en esta lista, ¿cómo piensa que se factorizaría $A^5 - 1$? Verifique sus suposiciones. En seguida generalice el patrón que observó para obtener una fórmula con la cual se factorice $A^n - 1$, donde n es un entero positivo.

113. Factorización de $x^4 + ax^2 + b$ Algunas veces, un trinomio de la forma $x^4 + ax^2 + b$ puede factorizarse con facilidad. Por ejemplo, $x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$. Pero $x^4 + 3x^2 + 4$ no se puede factorizar de esta manera, sino que podemos usar el método siguiente.

$$x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2 \quad \text{Suma y resta de } x^2$$
$$= (x^2 + 2)^2 - x^2 \quad \text{Factorización del cuadrado perfecto}$$
$$= [(x^2 + 2) - x][(x^2 + 2) + x] \quad \text{Diferencia de cuadrados}$$
$$= (x^2 - x + 2)(x^2 + x + 2)$$

Factorice las expresiones siguientes usando cualquier método que sea adecuado.

a) $x^4 + x^2 - 2$

b) $x^4 + 2x^2 + 9$

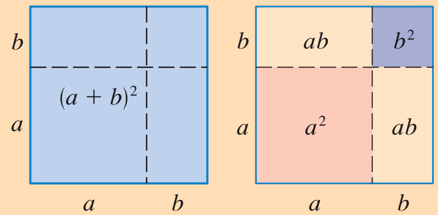
c) $x^4 + 4x^2 + 16$

d) $x^4 + 2x^2 + 1$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Representación gráfica de una fórmula

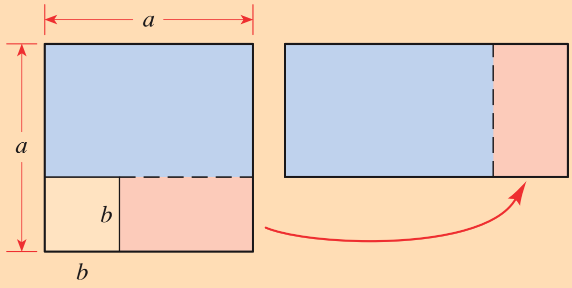
Muchas de las fórmulas para productos especiales que se tratan en esta sección se pueden representar en forma geométrica, considerando el largo, el área y el volumen. Por ejemplo, la figura ilustra cómo se puede interpretar la fórmula del cuadrado de un binomio mediante áreas de cuadrados y de rectángulos.



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

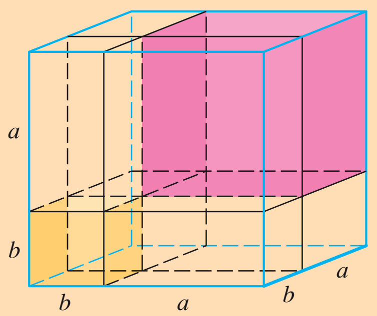
En la figura, a y b representan longitudes, a^2, b^2, ab y $(a+b)^2$ representan áreas. Los antiguos griegos siempre interpretaban las fórmulas algebraicas en términos de figuras geométricas como se hace aquí.

1. Explique cómo la figura verifica la fórmula $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.



2. Encuentre una figura que compruebe la fórmula $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. Explique cómo la figura siguiente verifica la fórmula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.



4. ¿Es posible dibujar una figura geométrica que verifique la fórmula para $(a+b)^4$? Explique.

5. a) Efectúe $(a+b+c)^2$.

b) Trace una figura geométrica que verifique la fórmula que encontró en el inciso a).

1.4 Expresiones racionales

Un cociente de dos expresiones algebraicas recibe el nombre de **expresión fraccionaria**. Siguen algunos ejemplos:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{\sqrt{x}+3}{x+1} \qquad \frac{y-2}{y^2+4}$$

Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde tanto el numerador como el denominador son polinomios. Por ejemplo, las que siguen son expresiones racionales:

$$\frac{2x}{x-1} \qquad \frac{x}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-x}{x^2-5x+6}$$

En esta sección se estudia cómo efectuar operaciones algebraicas con expresiones racionales.

Dominio de una expresión algebraica

Expresión	Dominio
$\frac{1}{x}$	$\{x \mid x \neq 0\}$
$\sqrt{x}$	$\{x \mid x \geq 0\}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\{x \mid x > 0\}$

En general, una expresión algebraica podría no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de los números reales que se le permite tener a la variable. La tabla al margen proporciona algunas expresiones básicas y sus dominios.

Ejemplo 1 Determinación del dominio de una expresión

Encuentre el dominio de las expresiones siguientes.

a) $2x^2 + 3x - 1$ b) $\dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$ c) $\dfrac{\sqrt{x}}{x-5}$

Solución

a) Este polinomio está definido para toda x. Por consiguiente, el dominio es el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

b) Primero factorizamos el denominador.

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

El denominador sería 0 si $x = 2$ o $x = 3$.

Puesto que el denominador es cero cuando $x = 2$ o 3, la expresión no está definida para estos números. El dominio es $\{x \mid x \neq 2 \text{ y } x \neq 3\}$.

c) Para que el numerador esté definido, deberemos tener $x \geq 0$. Además, no podemos dividir entre cero, de modo que $x \neq 5$.

Es necesario tener $x \geq 0$ para obtener una raíz cuadrada.

$$\frac{\sqrt{x}}{x-5}$$

El denominador sería igual a 0 si $x = 5$.

Por lo tanto, el dominio es $\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 5\}$. ■

Simplificación de expresiones racionales

Para **simplificar las expresiones racionales** factorizamos tanto el numerador como el denominador y aplicamos la siguiente propiedad de las fracciones:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Esto permite **eliminar** los factores comunes del numerador y del denominador.

Ejemplo 2 Simplificación de expresiones racionales por eliminación

Simplifique: $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$

No podemos eliminar las x^2 en $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2}$ porque la x^2 no está multiplicando.

Solución

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 2)} \qquad \text{Factorización}$$

$$= \frac{x + 1}{x + 2} \qquad \text{Eliminación de factores comunes}$$

■

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para **multiplicar expresiones racionales**, aplicamos la siguiente propiedad de las fracciones

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Esto dice que para multiplicar dos fracciones se tienen que multiplicar los numeradores y por otra parte los denominadores.

Ejemplo 3 Multiplicación de expresiones racionales

Ejecute la multiplicación indicada y simplifique: $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

Solución Primero factorizamos.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \frac{3x + 12}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x + 4)^2} \cdot \frac{3(x + 4)}{x - 1} \qquad \text{Factorización}$$

$$= \frac{3(x - 1)(x + 3)(x + 4)}{(x - 1)(x + 4)^2} \qquad \text{Propiedad de las fracciones}$$

$$= \frac{3(x + 3)}{x + 4} \qquad \text{Eliminación de factores comunes}$$

■

Para **dividir las expresiones racionales** aplicamos la propiedad siguiente de las fracciones

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Esto quiere decir que para dividir una fracción entre otra fracción, invertimos el divisor y multiplicamos.

Ejemplo 4 División de expresiones racionales

Efectúe la división y simplifique: $\dfrac{x-4}{x^2-4} \div \dfrac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6}$

Solución

$$\frac{x-4}{x^2-4} \div \frac{x^2-3x-4}{x^2+5x+6} = \frac{x-4}{x^2-4}\cdot\frac{x^2+5x+6}{x^2-3x-4}$$ Inversión y multiplicación

$$= \frac{(x-4)(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)(x-4)(x+1)}$$ Factorización

$$= \frac{x+3}{(x-2)(x+1)}$$ Se eliminan los factores comunes ■

Adición y sustracción de expresiones racionales

Para **sumar o restar expresiones racionales**, primero determinamos un denominador común y luego aplicamos la propiedad siguiente de las fracciones:

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

Evite cometer el error siguiente:

$$\frac{A}{B+C} \neq \frac{A}{B} + \frac{A}{C}$$

Por ejemplo, si tenemos $A = 2$, $B = 1$, y $C = 1$, entonces vemos el error:

$$\frac{2}{1+1} \stackrel{?}{=} \frac{2}{1} + \frac{2}{1}$$

$$\frac{2}{2} \stackrel{?}{=} 2 + 2$$

$$1 \stackrel{?}{=} 4 \quad \text{¡Falso!}$$

Aunque podría servir cualquier denominador común, es mejor usar el **mínimo común denominador** (MCD), que se trató en la sección 1. El MCD se encuentra factorizando cada denominador y luego se obtiene el producto de los distintos factores; se usa la potencia más alta que aparece en alguno de los factores.

Ejemplo 5 Adición y sustracción de expresiones racionales

Efectúe las operaciones indicadas y simplifique:

a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{x}{x+2}$ b) $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Solución

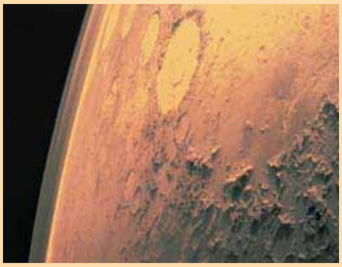
a) En este caso el MCD es simplemente el producto $(x-1)(x+2)$.

$$\frac{3}{x-1} + \frac{x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x-1)(x+2)} + \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$ Las fracciones se escriben usando el MCD

$$= \frac{3x+6+x^2-x}{(x-1)(x+2)}$$ Las fracciones se suman

$$= \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x+2)}$$ Se combinan los términos del numerador

Matemáticas en el mundo moderno



NASA

Codificación para corregir errores

Las imágenes que envió a la Tierra la nave espacial *Pathfinder* desde la superficie de Marte en julio de 1997 eran asombrosamente claras. Pero sólo muy pocos de quienes observaron estas imágenes estaban conscientes de la aplicación matemática tan compleja que se usó para lograr este hecho tan notable. La distancia a Marte es enorme, y el ruido de fondo, también conocido como estática, es muchas veces más fuerte que la señal original que envía la nave. Entonces, cuando los científicos reciben la señal, ésta se encuentra llena de errores. Para obtener una imagen clara, se tienen que encontrar los errores y corregirlos. Este mismo problema de errores se encuentra en forma rutinaria al transmitir los registros de un banco cuando usted usa un cajero automático o en la voz cuando usted habla por teléfono.

Para entender cómo se encuentran y se corrigen los errores, primero debemos tener claro que para transmitir imágenes, sonido o texto es necesario transformarlos en bits (los dígitos 0 o 1; refiérase a la pág. 30). Con el fin de ayudar al receptor a identificar los errores, se "codifica" el mensaje insertando bits adicionales. Por ejemplo, suponga que quiere transmitir el mensaje "10100". Un código muy sencillo es el siguiente: enviar cada uno de los dígitos un millón de veces. La persona que recibe el mensaje lo lee en bloques de un millón de dígitos. Si la mayoría es 1 en el primer bloque, la persona concluye

(*continúa*)

b) El MCD de $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ y $(x+1)^2$ es $(x-1)(x+1)^2$.

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2} \quad \text{Factorización}$$

$$= \frac{(x+1) - 2(x-1)}{(x-1)(x+1)^2} \quad \text{Combinación de fracciones usando el MCD}$$

$$= \frac{x+1-2x+2}{(x-1)(x+1)^2} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2} \quad \text{Combinación de términos en el numerador}$$

■

Fracciones compuestas

Una **fracción compuesta** es una expresión en la cual el numerador, el denominador, o ambos son también expresiones fraccionarias.

Ejemplo 6 Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}}$

Solución 1 Combinamos los términos en el numerador para tener una sola fracción. Ejecutamos lo mismo con el denominador. Luego invertimos y multiplicamos.

$$\frac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x+y}{y}}{\dfrac{x-y}{x}} = \frac{x+y}{y}\cdot\frac{x}{x-y}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)}$$

Solución 2 Determinamos el MCD de todas las fracciones en la expresión, luego multiplicamos el numerador y el denominador por el MCD. En este ejemplo, el MCD de todas las fracciones es xy. Por lo tanto,

$$\frac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}} = \frac{\dfrac{x}{y}+1}{1-\dfrac{y}{x}}\cdot\frac{xy}{xy} \quad \text{Multiplicación del numerador y del denominador por xy}$$

$$= \frac{x^2+xy}{xy-y^2} \quad \text{Simplificación}$$

$$= \frac{x(x+y)}{y(x-y)} \quad \text{Factorización}$$

■

que usted trata con probabilidad de transmitir un 1, y así sucesivamente. Decir que este código no es efectivo tiene un poco de declaración exageradamente modesta; se requiere enviar un millón de veces más datos que el mensaje original. En otro método se insertan "dígitos de verificación". Por ejemplo, por cada bloque de ocho dígitos se inserta un noveno dígito; el dígito insertado es 0 si hay una cantidad par de números 1 en el bloque, y 1 si hay una cantidad impar. Entonces, si un solo dígito está mal, por ejemplo, un 0 cambiado por un 1 o viceversa, los dígitos de verificación permiten saber que ha ocurrido un error. Pero este método no nos dice dónde está el error, por lo que no podemos corregirlo. Los códigos modernos para corregir errores aplican interesantes algoritmos matemáticos que requieren la inserción de relativamente pocos dígitos, pero que permiten que el receptor no sólo identifique errores, sino que también los corrija. El primer código para corregir errores lo desarrolló Richard Hamming por el año 1940 en el Massachusetts Institute of Technology. Es interesante hacer notar que el idioma inglés tiene un mecanismo incorporado para corregir errores; para probarlo, trate de leer la oración plagada de errores: *Gve mo libty ox giv ne deth* (*Give me more liberty or give me death*).*

Los dos ejemplos siguientes muestran situaciones en el cálculo que requieren la capacidad de trabajar con expresiones fraccionarias.

Ejemplo 7 Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$

Solución Empezamos por combinar las fracciones del numerador usando un denominador común.

$$\frac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h} = \frac{\dfrac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} \quad \text{Combinación de fracciones en el numerador}$$

$$= \frac{a-(a+h)}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{Propiedad 2 de las fracciones (inversión del divisor y multiplicación)}$$

$$= \frac{a-a-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{Propiedad distributiva}$$

$$= \frac{-h}{a(a+h)} \cdot \frac{1}{h} \quad \text{Simplificación}$$

$$= \frac{-1}{a(a+h)} \quad \text{Propiedad 5 de las fracciones (eliminación de los factores comunes)}$$

■

Ejemplo 8 Simplificación de una fracción compuesta

Simplifique: $\dfrac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2}$

Solución 1 Saque como factor $(1+x^2)^{-1/2}$ del numerador.

Se saca como factor la potencia de $1+x^2$ con el exponente *más pequeño* en este caso $(1+x^2)^{-1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{-1/2}[(1+x^2) - x^2]}{1+x^2}$$

$$= \frac{(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

Solución 2 Puesto que $(1+x^2)^{-1/2} = 1/(1+x^2)^{1/2}$ es una fracción, podemos simplificar las fracciones multiplicando numerador y denominador por $(1+x^2)^{1/2}$.

$$\frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} = \frac{(1+x^2)^{1/2} - x^2(1+x^2)^{-1/2}}{1+x^2} \cdot \frac{(1+x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{(1+x^2) - x^2}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

■

* Dadme más libertad o dadme la muerte

Racionalización del denominador o del numerador

Si una fracción tiene un denominador de la forma $A + B\sqrt{C}$, podemos racionalizar el denominador multiplicando el numerador y el denominador por el **radical conjugado** $A - B\sqrt{C}$. Esto es efectivo porque de acuerdo con la fórmula 1 para los productos especiales tratada en la sección 1.3, el producto del denominador por su radical conjugado no contiene un radical:

$$(A + B\sqrt{C})(A - B\sqrt{C}) = A^2 - B^2C$$

Ejemplo 9 Racionalización del denominador

Racionalice el denominador: $\dfrac{1}{1 + \sqrt{2}}$

Solución Multiplicamos tanto el numerador como el denominador por el radical conjugado de $1 + \sqrt{2}$, el cual es $1 - \sqrt{2}$.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$ Multiplicación del numerador o del denominador por el radical conjugado

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1^2 - (\sqrt{2})^2}$$ Fórmula 1 para los productos especiales

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{1-2} = \frac{1-\sqrt{2}}{-1} = \sqrt{2} - 1$$ ■

Fórmula 1 para los productos especiales
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplo 10 Racionalización del numerador

Racionalizar el numerador: $\dfrac{\sqrt{4+h} - 2}{h}$

Solución Multiplicamos el numerador y el denominador por el radical conjugado $\sqrt{4+h} + 2$.

$$\frac{\sqrt{4+h}-2}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-2}{h} \cdot \frac{\sqrt{4+h}+2}{\sqrt{4+h}+2}$$ Multiplicación del numerador y del denominador por el radical conjugado

$$= \frac{(\sqrt{4+h})^2 - 2^2}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$ Fórmula 1 para productos especiales

$$= \frac{4 + h - 4}{h(\sqrt{4+h}+2)}$$

$$= \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$$ Propiedad 5 de las fracciones (eliminación de factores comunes) ■

Fórmula 1 para los productos especiales
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Forma de evitar los errores comunes

No cometa el error de aplicar las propiedades de la multiplicación a la operación de la adición. Muchos de los errores comunes del álgebra se relacionan precisamente con esto. En la siguiente tabla se establecen varias propiedades de la multiplicación y se ilustra el error al aplicarlos a la suma.

Propiedad correcta de la multiplicación	Error común en la adición
$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$	$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$
$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a}\sqrt{b} \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a + b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
$\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \quad (a, b \geq 0)$	$\sqrt{a^2 + b^2} \neq a + b$
$\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{a \cdot b}$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \neq \frac{1}{a + b}$
$\frac{ab}{a} = b$	$\frac{a + b}{a} \neq b$
$a^{-1} \cdot b^{-1} = (a \cdot b)^{-1}$	$a^{-1} + b^{-1} \neq (a + b)^{-1}$

Para comprobar que las ecuaciones en la columna de la derecha son erróneas sustituya simplemente números para a y b y calcule cada lado. Por ejemplo, si hacemos $a = 2$ y $b = 2$ en el cuarto error, encontramos que el lado izquierdo es

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

y en el lado derecho es

$$\frac{1}{a + b} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

Puesto que $1 \neq \frac{1}{4}$, la ecuación planteada es errónea. Debe convencerse a sí mismo del error en cada una de las otras ecuaciones. (Véase el ejercicio 97.)

1.4 Ejercicios

1–6 ■ Determine el dominio de la expresión.

1. $4x^2 - 10x + 3$

2. $-x^4 + x^3 + 9x$

3. $\dfrac{2x + 1}{x - 4}$

4. $\dfrac{2t^2 - 5}{3t + 6}$

5. $\sqrt{x + 3}$

6. $\dfrac{1}{\sqrt{x - 1}}$

7–16 ■ Simplifique la expresión racional.

7. $\dfrac{3(x + 2)(x - 1)}{6(x - 1)^2}$

8. $\dfrac{4(x^2 - 1)}{12(x + 2)(x - 1)}$

9. $\dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$

10. $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 1}$

11. $\dfrac{x^2 + 6x + 8}{x^2 + 5x + 4}$

12. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 + 5x + 6}$

13. $\dfrac{y^2 + y}{y^2 - 1}$

14. $\dfrac{y^2 - 3y - 18}{2y^2 + 5y + 3}$

15. $\dfrac{2x^3 - x^2 - 6x}{2x^2 - 7x + 6}$

16. $\dfrac{1 - x^2}{x^3 - 1}$

17–30 ■ Efectúe la multiplicación o la división, y simplifique.

17. $\dfrac{4x}{x^2 - 4} \cdot \dfrac{x + 2}{16x}$

18. $\dfrac{x^2 - 25}{x^2 - 16} \cdot \dfrac{x + 4}{x + 5}$

19. $\dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 9} \cdot \dfrac{3 + x}{4 - x}$

20. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 2x - 3} \cdot \dfrac{3 - x}{3 + x}$

21. $\dfrac{t - 3}{t^2 + 9} \cdot \dfrac{t + 3}{t^2 - 9}$

22. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} \cdot \dfrac{x^3 + x^2}{x^2 - 2x - 3}$

23. $\dfrac{x^2 + 7x + 12}{x^2 + 3x + 2} \cdot \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 9}$

24. $\dfrac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} \cdot \dfrac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - xy - 2y^2}$

25. $\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 + 2x - 15} \div \dfrac{x^2 + 6x + 5}{2x^2 - 7x + 3}$

26. $\dfrac{4y^2 - 9}{2y^2 + 9y - 18} \div \dfrac{2y^2 + y - 3}{y^2 + 5y - 6}$

27. $\dfrac{\dfrac{x^3}{x+1}}{\dfrac{x}{x^2 + 2x + 1}}$

28. $\dfrac{\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1}}{\dfrac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 + x - 2}}$

29. $\dfrac{x/y}{z}$

30. $\dfrac{x}{y/z}$

31–50 ■ Efectúe la adición o la sustracción, y simplifique.

31. $2 + \dfrac{x}{x+3}$

32. $\dfrac{2x - 1}{x + 4} - 1$

33. $\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-3}$

34. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$

35. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x+2}$

36. $\dfrac{x}{x-4} - \dfrac{3}{x+6}$

37. $\dfrac{x}{(x+1)^2} + \dfrac{2}{x+1}$

38. $\dfrac{5}{2x-3} - \dfrac{3}{(2x-3)^2}$

39. $u + 1 + \dfrac{u}{u+1}$

40. $\dfrac{2}{a^2} - \dfrac{3}{ab} + \dfrac{4}{b^2}$

41. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^2 + x}$

42. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

43. $\dfrac{2}{x+3} - \dfrac{1}{x^2 + 7x + 12}$

44. $\dfrac{x}{x^2 - 4} + \dfrac{1}{x-2}$

45. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2 - 9}$

46. $\dfrac{x}{x^2 + x - 2} - \dfrac{2}{x^2 - 5x + 4}$

47. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{4}{x^2 - x}$

48. $\dfrac{x}{x^2 - x - 6} - \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{2}{x-3}$

49. $\dfrac{1}{x^2 + 3x + 2} - \dfrac{1}{x^2 - 2x - 3}$

50. $\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{3}{x^2 - 1}$

51–60 ■ Simplifique la expresión fraccionaria compuesta.

51. $\dfrac{\dfrac{x}{y} - \dfrac{y}{x}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}}$

52. $x - \dfrac{y}{\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}}$

53. $\dfrac{1 + \dfrac{1}{c-1}}{1 - \dfrac{1}{c-1}}$

54. $1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1+x}}$

55. $\dfrac{\dfrac{5}{x-1} - \dfrac{2}{x+1}}{\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}}$

56. $\dfrac{\dfrac{a-b}{a} - \dfrac{a+b}{b}}{\dfrac{a-b}{b} + \dfrac{a+b}{a}}$

57. $\dfrac{x^{-2} - y^{-2}}{x^{-1} + y^{-1}}$

58. $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(x+y)^{-1}}$

59. $\dfrac{1}{1 + a^n} + \dfrac{1}{1 + a^{-n}}$

60. $\dfrac{\left(a + \dfrac{1}{b}\right)^m \left(a - \dfrac{1}{b}\right)^n}{\left(b + \dfrac{1}{a}\right)^m \left(b - \dfrac{1}{a}\right)^n}$

61–66 ■ Simplifique la expresión fraccionaria. (Expresiones como éstas se utilizan en el cálculo infinitesimal.)

61. $\dfrac{\dfrac{1}{a+h} - \dfrac{1}{a}}{h}$

62. $\dfrac{(x+h)^{-3} - x^{-3}}{h}$

63. $\dfrac{\dfrac{1 - (x+h)}{2 + (x+h)} - \dfrac{1-x}{2+x}}{h}$

64. $\dfrac{(x+h)^3 - 7(x+h) - (x^3 - 7x)}{h}$

65. $\sqrt{1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)^2}$

66. $\sqrt{1 + \left(x^3 - \dfrac{1}{4x^3}\right)^2}$

67–72 ■ Simplifique la expresión. (Este tipo de expresión se utiliza en el cálculo infinitesimal cuando se aplica la “regla del cociente”.)

67. $\dfrac{3(x+2)^2(x-3)^2 - (x+2)^3(2)(x-3)}{(x-3)^4}$

68. $\dfrac{2x(x+6)^4 - x^2(4)(x+6)^3}{(x+6)^8}$

69. $\dfrac{2(1+x)^{1/2} - x(1+x)^{-1/2}}{x+1}$

70. $\dfrac{(1-x^2)^{1/2} + x^2(1-x^2)^{-1/2}}{1 - x^2}$

71. $\dfrac{3(1+x)^{1/3} - x(1+x)^{-2/3}}{(1+x)^{2/3}}$

72. $\dfrac{(7-3x)^{1/2} + \frac{3}{2}x(7-3x)^{-1/2}}{7 - 3x}$

73–78 ■ Racionalice el denominador.

73. $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

74. $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$

75. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$

76. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$

77. $\dfrac{y}{\sqrt{3}+\sqrt{y}}$

78. $\dfrac{2(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

79–84 ■ Racionalice el numerador.

79. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$

80. $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$

81. $\dfrac{\sqrt{r}+\sqrt{2}}{5}$

82. $\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x}\sqrt{x+h}}$

83. $\sqrt{x^2+1}-x$

84. $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

85–92 ■ Diga si la ecuación se cumple para todos los valores de las variables. (Deseche cualquier valor que hace que el denominador sea cero.)

85. $\dfrac{16+a}{16}=1+\dfrac{a}{16}$

86. $\dfrac{b}{b-c}=1-\dfrac{b}{c}$

87. $\dfrac{2}{4+x}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{x}$

88. $\dfrac{x+1}{y+1}=\dfrac{x}{y}$

89. $\dfrac{x}{x+y}=\dfrac{1}{1+y}$

90. $2\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{2a}{2b}$

91. $\dfrac{-a}{b}=-\dfrac{a}{b}$

92. $\dfrac{1+x+x^2}{x}=\dfrac{1}{x}+1+x$

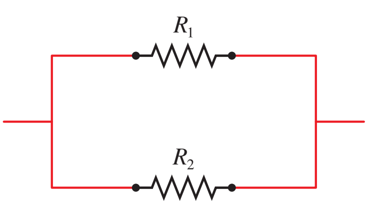
Aplicaciones

93. Resistencia eléctrica Si dos resistencias eléctricas con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo (véase la figura), entonces la resistencia total R es

$$R=\frac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$$

a) Simplifique la expresión para R.

b) Si $R_1 = 10$ ohms y $R_2 = 20$ ohms, ¿cuál es la resistencia total R?



94. Costo promedio Un fabricante de ropa determina que el costo de la producción de x camisas es $500 + 6x + 0.01x^2$ dólares.

a) Explique la razón de que el costo promedio por camisa esté dado por la expresión racional

$$A=\frac{500+6x+0.01x^2}{x}$$

b) Complete la tabla siguiente con el cálculo del costo promedio por camisa para los valores dados de x.

x	Costo promedio
10	
20	
50	
100	
200	
500	
1000	

Descubrimiento • Debate

95. Comportamiento limitante de una expresión racional La expresión racional

$$\frac{x^2-9}{x-3}$$

no está definida para $x = 3$. Complete las tablas siguientes y determine a qué valor se aproxima la expresión a medida que x se acerca más y más a 3. ¿Por qué es razonable? Descomponga en factores el numerador de la expresión y simplifique para ver por qué.

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
2.80	
2.90	
2.95	
2.99	
2.999	

x	$\dfrac{x^2-9}{x-3}$
3.20	
3.10	
3.05	
3.01	
3.001	

96. ¿Esto es racionalización? En la expresión $2/\sqrt{x}$ eliminaríamos el radical si fuéramos a elevar al cuadrado tanto el numerador como el denominador. ¿Es lo mismo que racionalizar el denominador?

97. Errores algebraicos La columna de la izquierda en la tabla da el listado de algunos errores comunes de álgebra. En cada caso proporcione un ejemplo usando números que muestren que la fórmula no es válida. Un ejemplo de este

tipo, que muestra que un enunciado es falso, se denomina *contraejemplo*.

Error algebraico	Contraejemplo
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \neq \frac{1}{a+b}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2+2}$
$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$	
$\sqrt{a^2+b^2} \neq a+b$	
$\frac{a+b}{a} \neq b$	
$(a^3+b^3)^{1/3} \neq a+b$	
$a^m/a^n \neq a^{m/n}$	
$a^{-1/n} \neq \frac{1}{a^n}$	

98. La forma de una expresión algebraica Una expresión algebraica podría verse complicada, pero su "forma" siempre es simple; tiene que ser una suma, un producto, un cociente o una potencia. Por ejemplo, considere las expresiones siguientes:

$$(1+x^2)^2+\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^3 \qquad (1+x)\left(1+\frac{x+5}{1+x^4}\right)$$

$$\frac{5-x^3}{1+\sqrt{1+x^2}} \qquad \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Con elecciones adecuadas para A y B, la primera tiene la forma de $A+B$, la segunda de AB, la tercera de A/B, y la cuarta de $A^{1/2}$. Identificar la forma de una expresión nos ayuda a expandir, simplificar o a factorizar en forma correcta. Encuentre la forma de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $x+\sqrt{1+\frac{1}{x}}$ **b)** $(1+x^2)(1+x)^3$

c) $\sqrt[3]{x^4(4x^2+1)}$ **d)** $\frac{1-2\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x^2}}$

1.5 Ecuaciones

Una ecuación es un enunciado en el que se establece que las expresiones matemáticas son iguales. Por ejemplo,

$$3+5=8$$

es una ecuación. La mayor parte de las ecuaciones que se estudian en el álgebra contiene variables, las cuales son símbolos, casi siempre letras que representan números. En la ecuación

$$4x+7=19$$

la letra x es la variable. Consideramos que la x es la "incógnita" de la ecuación, por lo que el objetivo es determinar el valor de x que hace que la ecuación sea cierta. Los valores de la incógnita que hacen que la ecuación sea verdadera se llaman **soluciones** o **raíces** de la ecuación, y el proceso para determinar las soluciones se llama **resolución de una ecuación**.

$x=3$ es una solución de la ecuación $4x+7=19$, porque al sustituir $x=3$ la ecuación se cumple:

$$x=3$$

$$4(3)+7=19 \quad ✓$$

Dos ecuaciones con exactamente las mismas soluciones se llaman **ecuaciones equivalentes**. Para resolver una ecuación, tratamos de encontrar una ecuación más simple y equivalente en la que la variable esté sola en un lado del signo de "igual". En seguida están las propiedades que aplicamos para resolver una ecuación. (En estas propiedades, A, B y C representan expresiones algebraicas y el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a".)

Propiedades de la igualdad

Propiedad	Descripción
1. $A=B \Leftrightarrow A+C=B+C$	Sumar la misma cantidad a ambos miembros de una ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. $A=B \Leftrightarrow CA=CB \quad (C \neq 0)$	Multiplicar ambos miembros de una ecuación por la misma cantidad no cero se obtiene una ecuación equivalente.

Estas propiedades requieren que *usted efectúe la misma operación en ambos lados de una ecuación* cuando la resuelve. Por lo tanto, al decir "se *suma* -7" al resolver una ecuación, lo que realmente queremos decir es "*sumar* -7 a cada miembro de la ecuación".

Ecuaciones lineales

El tipo más sencillo de ecuación es la *ecuación lineal*, o ecuación de primer grado, que es una ecuación en la cual cada término es una constante o un múltiplo no cero de la variable.

Ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** de una variable es una ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + b = 0$$

donde a y b son números reales y x es la variable.

A continuación hay algunos ejemplos que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$4x - 5 = 3$	$x^2 + 2x = 8$	No lineal; contiene el cuadrado de la variable
$2x = \frac{1}{2}x - 7$	$\sqrt{x} - 6x = 0$	No lineal, contiene la raíz cuadrada de la variable
$x - 6 = \frac{x}{3}$	$\frac{3}{x} - 2x = 1$	No lineal, contiene el recíproco de la variable

Ejemplo 1 Solución de una ecuación lineal

Resuelva la ecuación $7x - 4 = 3x + 8$.

Solución Resolvemos la ecuación cambiándola a una equivalente en la que todos los términos que tienen la variable x están en un lado y todos los términos constantes están en el otro.

$$7x - 4 = 3x + 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$(7x - 4) + 4 = (3x + 8) + 4 \qquad \text{Se suma 4}$$
$$7x = 3x + 12 \qquad \text{Simplificación}$$
$$7x - 3x = (3x + 12) - 3x \qquad \text{Se resta } 3x$$
$$4x = 12 \qquad \text{Se simplifica}$$
$$\tfrac{1}{4}\cdot 4x = \tfrac{1}{4}\cdot 12 \qquad \text{Multiplicación por } \tfrac{1}{4}$$
$$x = 3 \qquad \text{Simplificación}$$

■

Puesto que es importante VERIFICAR LAS RESPUESTAS, lo haremos en muchos de los ejemplos. En estas comprobaciones, PM quiere decir "primer miembro" y SM quiere decir "segundo miembro" de la ecuación original.

Comprueba su respuesta

$x = 3$:

$x = 3$: PM $= 7(3) - 4 = 17$

$x = 3$: SM $= 3(3) + 8 = 17$

PM = SM ✓

Muchas fórmulas que se usan en las ciencias tienen varias variables, por lo que a menudo es necesario expresar una de las variables en términos de las otras. En el ejemplo siguiente determinamos una variable de la Ley de Newton de la Gravitación.

Ejemplo 2 Determinar una variable en términos de las otras

Determinar la variable M de la ecuación

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

Esta es la Ley de Newton de la Gravitación. Determina la fuerza gravitacional F entre dos masas m y M que están separadas una distancia r. La constante G es la constante universal de la gravitación.

Solución Aunque esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos de la manera usual, aislando a M en un lado y tratando a las otras variables como si fueran números.

$$F = \left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Se saca a M como factor en el SM}$$

$$\left(\frac{r^2}{Gm}\right)F = \left(\frac{r^2}{Gm}\right)\left(\frac{Gm}{r^2}\right)M \qquad \text{Multiplicación por el recíproco de } \frac{Gm}{r^2}$$

$$\frac{r^2F}{Gm} = M \qquad \text{Simplificación}$$

La solución es $M = \dfrac{r^2F}{Gm}$. ■

Ejemplo 3 Determinación de una variable en términos de las otras

El área superficial A de la caja rectangular cerrada de la figura 1 se puede calcular a partir del largo l, el ancho w y la altura h de acuerdo con la fórmula

$$A = 2lw + 2wh + 2lh$$

Determine w en términos de las otras variables de esta ecuación.

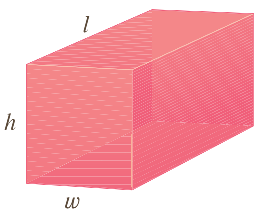


Figura 1
Una caja rectangular cerrada

Solución Aunque esta ecuación contiene más de una variable, la resolvemos de la manera usual, aislando a w en un lado y tratando a las otras variables como si fueran números.

$$A = (2lw + 2wh) + 2lh \qquad \text{Agrupación de términos que contienen } w$$

$$A - 2lh = 2lw + 2wh \qquad \text{Resta de } 2lh$$

$$A - 2lh = (2l + 2h)w \qquad \text{Se saca } w \text{ como factor en el SM}$$

$$\frac{A - 2lh}{2l + 2h} = w \qquad \text{División entre } 2l + 2h$$

La solución es $w = \dfrac{A - 2lh}{2l + 2h}$. ■

Ecuaciones cuadráticas

Las ecuaciones lineales son las ecuaciones de primer grado como $2x + 1 = 5$ o como $4 - 3x = 2$. Las ecuaciones cuadráticas son ecuaciones de segundo grado $x^2 + 2x - 3 = 0$ o como $2x^2 + 3 = 5x$.

Ecuaciones cuadráticas

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$3x + 10 = 4x^2$

$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{6} = 0$

Ecuaciones cuadráticas

Una **ecuación cuadrática** es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son números reales con $a \neq 0$.

Algunas ecuaciones cuadráticas se pueden resolver mediante factorización y usando la propiedad básica siguiente de los números reales.

Propiedad del producto nulo

$$AB = 0 \qquad \text{si y sólo si} \qquad A = 0 \quad \text{o bien,} \quad B = 0$$

Esto quiere decir que si podemos descomponer en factores el primer miembro de una ecuación cuadrática, o de otro orden, entonces podemos resolverla igualando a cero, por turnos, a cada factor. Este método funciona sólo cuando el segundo miembro de la ecuación es 0.

Ejemplo 4 Solución de una ecuación cuadrática mediante factorización

Resuelva la ecuación $x^2 + 5x = 24$.

Solución Primero debemos volver a escribir la ecuación de modo que el segundo miembro sea igual a cero.

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0 \qquad \text{Resta de 24}$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 8 = 0 \qquad \text{Propiedad del producto nulo}$$

$$x = 3 \qquad\qquad x = -8 \qquad \text{Solución}$$

Las soluciones son $x = 3$ y $x = -8$. ■

Compruebe su respuesta

$x = 3$:

$(3)^2 + 5(3) = 9 + 15 = 24$ ✓

$x = -8$:

$(-8)^2 + 5(-8) = 64 - 40 = 24$ ✓

¿Se da cuenta por qué un lado de la ecuación debe ser 0 en el ejemplo 4? Al factorizar la ecuación como $x(x + 5) = 24$ no ayuda a determinar la solución, puesto que 24 se puede descomponer en factores de infinitas maneras, como $6 \cdot 4$, $\frac{1}{2} \cdot 48$, $\left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-60)$, etcétera.

Una ecuación cuadrática de la forma $x^2 - c = 0$, donde c es una constante positiva, se factoriza como $(x - \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$, así que las soluciones son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$. Con frecuencia abreviamos esto como $x = \pm\sqrt{c}$.

Resolución de una ecuación cuadrática simple

Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

Ejemplo 5 Resolución de ecuaciones cuadráticas simples

Encuentre la solución de cada ecuación.

a) $x^2 = 5$ b) $(x - 4)^2 = 5$

Solución

a) De acuerdo con el principio del recuadro anterior, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

b) Obtenemos también la raíz cuadrada de cada miembro de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \quad \text{Obtención de la raíz cuadrada}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{5} \quad \text{Se suma 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$. ■

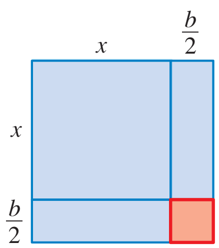
Refiérase a la página 30 para saber cómo identificar cuando una expresión cuadrática es un cuadrado perfecto.

Completando el cuadrado

El área de la región azul es

$$x^2 + 2\left(\frac{b}{2}\right)x = x^2 + bx$$

Sume un cuadrado pequeño de área $(b/2)^2$ para "completar" el cuadrado.



Como se estudió en el ejemplo 5, si una ecuación cuadrática es de la forma $(x \pm a)^2 = c$, entonces la podemos resolver obteniendo la raíz cuadrada de cada miembro. En una ecuación de esta forma, el primer miembro es un *cuadrado perfecto*: el cuadrado de una expresión lineal en x. Así, si una ecuación cuadrática no se factoriza con facilidad, entonces la podemos resolver aplicando la técnica de completar el cuadrado. Esto quiere decir que sumamos una constante a una expresión para hacerla un cuadrado perfecto. Por ejemplo, para hacer $x^2 - 6x$ un cuadrado perfecto tenemos que añadir 9, ya que $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Completar el cuadrado

Para hacer que $x^2 + bx$ sea un cuadrado perfecto, se suma $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Esto da el cuadrado perfecto

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

Ejemplo 6 Resolución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

Resuelva la ecuación.

a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ b) $3x^2 - 12x + 6 = 0$

Solución

a)
$$x^2 - 8x + 13 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$x^2 - 8x = -13 \quad \text{Se resta 13}$$
$$x^2 - 8x + 16 = -13 + 16 \quad \text{Se completa el cuadrado: se suma } \left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$$
$$(x - 4)^2 = 3 \quad \text{Cuadrado perfecto}$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{3} \quad \text{Obtención de la raíz cuadrada}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{3} \quad \text{Se suma 4}$$

Cuando complete el cuadrado, asegúrese de que el coeficiente de x^2 es 1. Si no es así, debe factorizar este coeficiente de los dos términos que contienen x:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$$

Luego complete el cuadrado que está dentro del paréntesis. Recuerde que el término sumado dentro del paréntesis está multiplicado por a.

b) Después de restar 6 a cada miembro de la ecuación, es necesario factorizar el coeficiente de x^2 es decir, el 3, en el primer miembro para poner la ecuación en la forma correcta completando el cuadrado.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 6 &= 0 && \text{Ecuación dada} \\ 3x^2 - 12x &= -6 && \text{Sustracción de 6} \\ 3(x^2 - 4x) &= -6 && \text{Factorización de 3 en el PM} \end{aligned}$$

En seguida completamos el cuadrado añadiendo $(-2)^2 = 4$ *dentro* del paréntesis. Ya que todo lo que está dentro del paréntesis está multiplicado por 3, esto quiere decir que en realidad estamos añadiendo $3 \cdot 4 = 12$ al primer miembro de la ecuación. Por lo tanto, tenemos que sumar también 12 al segundo miembro.

$$\begin{aligned} 3(x^2 - 4x + 4) &= -6 + 3 \cdot 4 && \text{Cuadrado completado: se suma 4} \\ 3(x - 2)^2 &= 6 && \text{Cuadrado perfecto} \\ (x - 2)^2 &= 2 && \text{División entre 3} \\ x - 2 &= \pm\sqrt{2} && \text{Se obtiene la raíz cuadrada} \\ x &= 2 \pm \sqrt{2} && \text{Se suma 2} \end{aligned}$$

■

Podemos aplicar la técnica de completar el cuadrado con el fin de deducir una fórmula para determinar las raíces de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$.

La fórmula cuadrática

Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

■ **Demostración** Primero dividimos ambos miembros de la ecuación entre a y pasamos la constante al lado derecho, con lo que se tiene

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \qquad \text{División entre } a$$

Luego completamos el cuadrado sumando $(b/2a)^2$ a ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 && \text{Se completa el cuadrado: se suma } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{-4ac + b^2}{4a^2} && \text{Cuadrado perfecto} \\ x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Obtención de la raíz cuadrada} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && \text{Se resta } \frac{b}{2a} \end{aligned}$$

■

La fórmula cuadrática se podría utilizar para resolver las ecuaciones en los ejemplos 4 y 6. Usted puede llevar a cabo con todo detalle estos cálculos.

François Viète (1540–1603) era un político exitoso cuando se dedicó a las matemáticas ya tarde en su vida. Se convirtió en uno de los matemáticos franceses más famosos del siglo XVI. Viète introdujo un nuevo nivel de abstracción en álgebra por medio del uso de letras para representar cantidades *conocidas* de una ecuación. Antes de la época de Viète, cada una de las ecuaciones se tenía que resolver por separado. Por ejemplo, las ecuaciones cuadráticas

$$3x^2 + 2x + 8 = 0$$

$$5x^2 - 6x + 4 = 0$$

se tenían que resolver separadas completando el cuadrado. La idea de Viète era considerar todas las ecuaciones cuadráticas de una vez al escribir

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son cantidades conocidas. Por consiguiente, él hizo posible escribir una *fórmula*, en este caso, la fórmula cuadrática, que contiene a, b y c con la que se pueden resolver todas las ecuaciones cuadráticas en unos pocos pasos.

El genio matemático de Viète demostró lo valioso que era durante la guerra entre Francia y España. Para comunicarse con las tropas, los españoles utilizaban un complicado código, que Viète descifró. El rey de España, Felipe II, ajeno a los logros de Viète, protestó ante el Papa, y afirmó que los franceses recurrían a la hechicería para leer sus mensajes.

Ejemplo 7 Aplicación de la fórmula cuadrática

Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones.

a) $3x^2 - 5x - 1 = 0$ b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ c) $x^2 + 2x + 2 = 0$

Solución

a) En esta ecuación cuadrática $a = 3$, $b = -5$ y $c = -1$.

$$3x^2 - 5x - 1 = 0$$

$b = -5$

$a = 3$ $c = -1$

De acuerdo con la fórmula cuadrática,

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{37}}{6}$$

Si se desean aproximaciones, podemos usar una calculadora para obtener

$$x = \frac{5 + \sqrt{37}}{6} \approx 1.8471 \qquad \text{y} \qquad x = \frac{5 - \sqrt{37}}{6} \approx -0.1805$$

Otro método

$4x^2 + 12x + 9 = 0$

$(2x + 3)^2 = 0$

$2x + 3 = 0$

$x = -\frac{3}{2}$

b) Al usar la fórmula cuadrática con $a = 4$, $b = 12$ y $c = 9$ tenemos

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{-12 \pm 0}{8} = -\frac{3}{2}$$

Esta ecuación tiene sólo una solución, $x = -\frac{3}{2}$.

c) Si usamos la fórmula cuadrática con $a = 1$, $b = 2$ y $c = 2$ obtenemos

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Puesto que el cuadrado de cualquier número real es no negativo, $\sqrt{-1}$ no está definido en el sistema de los números reales. La ecuación no tiene solución real. ■

En la sección 3.4 se estudia el sistema de los números complejos, en el cual sí existen las raíces cuadradas de los números negativos. La ecuación del ejemplo 7 (c) sí tiene soluciones en el campo de los números complejos.

La cantidad $b^2 - 4ac$ que aparece bajo el signo de la raíz cuadrada en la fórmula cuadrática se denomina *discriminante* de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ y se representan con el signo D. Si $D < 0$, entonces $\sqrt{b^2 - 4ac}$ no está definido, por lo que la ecuación cuadrática no tiene solución real, como en el ejemplo 7 (c). Si $D = 0$, la ecuación tiene sólo una solución real, como en el ejemplo 7 (b). Por último, si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, como en el ejemplo 7 (a). En el siguiente recuadro se resumen estas observaciones.

El discriminante

El **discriminante** de la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ es $D = b^2 - 4ac$.

1. Si $D > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
2. Si $D = 0$, entonces la ecuación tiene exactamente una solución real.
3. Si $D < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplo 8 Uso del discriminante

Utilice el discriminante para determinar cuántas soluciones reales tiene cada ecuación.

a) $x^2 + 4x - 1 = 0$ b) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ c) $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 4 = 0$

Solución

a) El discriminante es $D = 4^2 - 4(1)(-1) = 20 > 0$, de modo que la ecuación tiene dos soluciones distintas.

b) El discriminante es $D = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$, por lo que la ecuación tiene exactamente una solución real.

c) El discriminante es $D = (-2)^2 - 4(\frac{1}{3})4 = -\frac{4}{3} < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. ■

En seguida consideramos una situación de la vida real que puede ser modelada mediante una ecuación cuadrática.

Ejemplo 9 Trayectoria de un proyectil

Esta fórmula depende del hecho de que la aceleración de la gravedad es constante cerca de la superficie terrestre. En este caso ignoramos el efecto de la resistencia del aire.

Un objeto arrojado o lanzado hacia arriba con una velocidad inicial v_0 pies/s alcanzará un altura de h pies después de t segundos, donde h y t están relacionadas mediante la fórmula

$$h = -16t^2 + v_0 t$$

Suponga que se dispara una bala directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 800 pies/s. Su trayectoria se muestra en la figura 2.

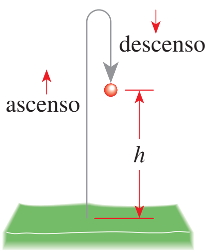


Figura 2

a) ¿Cuándo regresará la bala al nivel del piso?

b) ¿Cuándo alcanzará una altura de 6 400 pies?

c) ¿Cuándo alcanzará una altura de 2 millas?

d) ¿Cuál es el punto más alto que alcanza la bala?

Solución

Puesto que la velocidad inicial es $v_0 = 800$ pies/s, la fórmula es

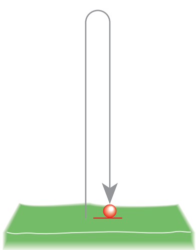
$$h = -16t^2 + 800t$$

a) El nivel del piso corresponde a $h = 0$, de modo que necesitamos resolver la ecuación

$$0 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Se hace } h = 0$$

$$0 = -16t(t - 50) \qquad \text{Factorización}$$

Por consiguiente, $t = 0$ o $t = 50$. Esto quiere decir que la bala inicia ($t = 0$) al nivel del piso y regresa al mismo nivel después de 50 segundos.



b) Haciendo $h = 6400$ tenemos

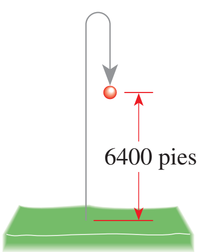
$$6400 = -16t^2 + 800t \qquad \text{Se hace h = 6 400}$$

$$16t^2 - 800t + 6400 = 0 \qquad \text{Todos los términos al PM}$$

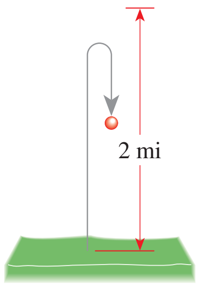
$$t^2 - 50t + 400 = 0 \qquad \text{División entre 16}$$

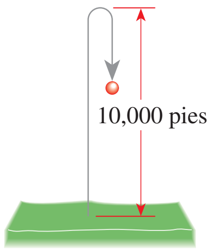
$$(t - 10)(t - 40) = 0 \qquad \text{Descomposición en factores}$$

$$t = 10 \quad \text{o} \quad t = 40 \qquad \text{Solución}$$



La bala alcanza 6400 pies después de 10 s (el ascenso) y otra vez después de 40 s (en el descenso al suelo).





c) Dos millas es $2 \times 5280 = 10\,560$ pies.

$$10\,560 = -16t^2 + 800t \quad \text{Se hace } h = 10\,560$$
$$16t^2 - 800t + 10\,560 = 0 \quad \text{Todos los términos se pasan al PM}$$
$$t^2 - 50t + 660 = 0 \quad \text{División entre 16}$$

El discriminante de esta ecuación es $D = (-50)^2 - 4(660) = -140$, que es negativo. Por lo tanto, la ecuación no tiene solución real. La bala nunca alcanza una altura de 2 millas.

d) La bala alcanza dos veces cada altura: una vez en el ascenso y una vez en el descenso. La única excepción es el punto más alto en su trayectoria, al cual llega sólo una vez. Esto quiere decir que para el valor más alto de h, la ecuación siguiente sólo tiene una solución para t:

$$h = -16t^2 + 800t$$
$$16t^2 - 800t + h = 0 \quad \text{Todos los términos al PM}$$

A su vez, esto significa que el discriminante D de la ecuación es 0, y entonces

$$D = (-800)^2 - 4(16)h = 0$$
$$640\,000 - 64h = 0$$
$$h = 10\,000$$

La altura máxima alcanzada es 10 000 pies. ■

Otros tipos de ecuaciones

Hasta este momento, hemos estudiado cómo resolver ecuaciones lineales y cuadráticas. En seguida se tratan otros tipos de ecuaciones, incluso aquellos en los que hay potencias superiores, expresiones fraccionarias y radicales.

Ejemplo 10 Una ecuación con expresiones fraccionarias

Resuelva la ecuación $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x+2} = 2$.

Solución Eliminamos los denominadores multiplicando ambos miembros por el mínimo común denominador.

$$\left(\frac{3}{x} + \frac{5}{x+2}\right)x(x+2) = 2x(x+2) \quad \text{Multiplicación por MCD } x(x+2)$$
$$3(x+2) + 5x = 2x^2 + 4x \quad \text{Desarrollo}$$
$$8x + 6 = 2x^2 + 4x \quad \text{Desarrollo del PM}$$
$$0 = 2x^2 - 4x - 6 \quad \text{Resta de } 8x + 6$$
$$0 = x^2 - 2x - 3 \quad \text{Ambos miembros se dividen entre 2}$$
$$0 = (x-3)(x+1) \quad \text{Factorización}$$
$$x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0 \quad \text{Propiedad del producto nulo}$$
$$x = 3 \qquad x = -1 \quad \text{Solución}$$

Compruebe su respuesta

$x = 3$:

$$\text{PM} = \frac{3}{3} + \frac{5}{3+2} = 1 + 1 = 2$$

SM = 2

PM = SM ✓

$x = -1$:

$$\text{PM} = \frac{3}{-1} + \frac{5}{-1+2} = -3 + 5 = 2$$

SM = 2

PM = SM ✓

Es necesario comprobar las respuestas porque la multiplicación por una expresión que contiene la variable puede introducir soluciones extrañas. Según la sección *Compruebe su respuesta* vemos que las soluciones son $x = 3$ y -1. ■

Compruebe su respuesta

$x = -\frac{1}{4}$:

$$\text{PM} = 2\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\text{SM} &= 1 - \sqrt{2 - \left(-\tfrac{1}{4}\right)}\\ &= 1 - \sqrt{\tfrac{9}{4}}\\ &= 1 - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

$\text{PM} = \text{SM}$ ✓

$x = 1$:

$$\text{PM} = 2(1) = 2$$

$$\begin{aligned}\text{SM} &= 1 - \sqrt{2 - 1}\\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

$\text{PM} \neq \text{SM}$ ✗

Cuando resuelva una ecuación que contenga radicales, sea especialmente cuidadoso al comprobar las respuestas finales. El ejemplo siguiente demuestra por qué.

Ejemplo 11 Una ecuación que involucra un radical

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

Solución Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un miembro, y luego elevamos al cuadrado.

$$\begin{aligned}
2x - 1 &= -\sqrt{2 - x} && \text{Resta 1}\\
(2x - 1)^2 &= 2 - x && \text{Elevamos al cuadrado ambos miembros}\\
4x^2 - 4x + 1 &= 2 - x && \text{Desarrollo del primer miembro}\\
4x^2 - 3x - 1 &= 0 && \text{Suma de } -2 + x\\
(4x + 1)(x - 1) &= 0 && \text{Factorización}\\
4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 &= 0 && \text{Propiedad del producto nulo}\\
x = -\tfrac{1}{4} \qquad\qquad x &= 1 && \text{Solución}
\end{aligned}$$

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Es necesario comprobarlas para ver si cumplen con la ecuación original. De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución, pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$. ■

Cuando resolvemos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas**, es decir, soluciones potenciales que no cumplen con la ecuación original. En el ejemplo 11, el valor $x = 1$ es una solución extraña. Dichas soluciones se pueden introducir cuando elevamos al cuadrado ambos miembros de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede transformar una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Por consiguiente, la ecuación cuadrada podría ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que debe comprobar siempre sus respuestas para tener la seguridad de que todas cumplen con la ecuación original.

Una ecuación de la forma $aW^2 + bW + c = 0$, donde W es una expresión algebraica, es una ecuación del **tipo cuadrático**. Las ecuaciones de tipo cuadrático se resuelven reemplazando la expresión algebraica con W, como se ve en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 12 Una ecuación de cuatro grado de tipo cuadrático

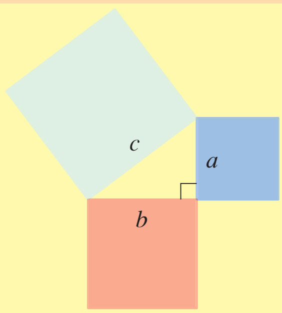
Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

Solución Si hacemos que $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación en donde la nueva variable W es cuadrática:

$$\begin{aligned}
(x^2)^2 - 8x^2 + 8 &= 0 && \text{Se escribe } x^4 \text{ como } (x^2)^2\\
W^2 - 8W + 8 &= 0 && \text{Se hace } W = x^2\\
W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot 8}}{2} &= 4 \pm 2\sqrt{2} && \text{Fórmula cuadrática}\\
x^2 &= 4 \pm 2\sqrt{2} && W = x^2\\
x &= \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} && \text{Obtención de las raíces cuadradas}
\end{aligned}$$

Pitágoras (alrededor de 580-500 antes de nuestra era) fundó una escuela en Crotona, en el sur de Italia, que estaba dedicada al estudio de la aritmética, geometría, música y astronomía. Los pitagóricos, como ellos se llamaban a sí mismos, constituían una sociedad secreta con reglas y ritos de iniciación peculiares. No escribieron nada, ni revelaban a nadie lo que aprendían del maestro. Aunque las mujeres tenían prohibido por la ley asistir a reuniones públicas, Pitágoras permitió que asistieran mujeres a su escuela, y su estudiante más famosa fue Theano, con quien se casó posteriormente.

Según Aristóteles, los pitagóricos estaban convencidos de que "los principios de las matemáticas eran los principios de todas las cosas". Su lema era "El todo son los números", y se referían a los números *enteros*. La principal contribución de Pitágoras es el teorema que lleva su nombre: en un triángulo rectángulo el área del cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los otros dos lados.



$c^2 = a^2 + b^2$

El inverso del Teorema de Pitágoras también es cierto: un triángulo cuyos lados a, b y c satisfacen $a^2 + b^2 = c^2$ es un triángulo rectángulo.

Entonces, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4+2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4-2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4+2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4-2\sqrt{2}}$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$. ■

Ejemplo 13 Una ecuación que contiene potencias fraccionarias

Determine todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

Solución Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos que $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

$$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$$

$$W^2 + W - 2 = 0 \qquad \text{Se hace } W = x^{1/6}$$

$$(W - 1)(W + 2) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$W - 1 = 0 \quad \text{o bien} \quad W + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del producto nulo}$$

$$W = 1 \qquad W = -2 \qquad \text{Solución}$$

$$x^{1/6} = 1 \qquad x^{1/6} = -2 \qquad W = x^{1/6}$$

$$x = 1^6 = 1 \qquad x = (-2)^6 = 64 \qquad \text{Obtención de la sexta potencia}$$

De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = 1$ es una solución, pero $x = 64$ no lo es. La única solución es $x = 1$. ■

Compruebe su respuesta

$x = 1$:

$\text{PM} = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$

$\text{SM} = 0$

$\text{PM} = \text{SM}$ ✓

$x = 64$:

$\text{PM} = 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$

$= 4 + 2 - 2 = 4$

$\text{SM} = 0$

$\text{PM} \neq \text{SM}$ ✗

Por lo común, al resolver ecuaciones que contienen valores absolutos, partimos el problema.

Ejemplo 14 Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

Solución De acuerdo con la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ equivale a

$$2x - 5 = 3 \quad \text{o bien} \quad 2x - 5 = -3$$

$$2x = 8 \qquad 2x = 2$$

$$x = 4 \qquad x = 1$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$. ■

1.5 Ejercicios

1–4 ■ Determine si el valor dado es una solución de la ecuación.

1. $4x + 7 = 9x - 3$
 a) $x = -2$ **b)** $x = 2$

2. $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$
 a) $x = 2$ **b)** $x = 4$

3. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x - 4} = 1$
 a) $x = 2$ **b)** $x = 4$

4. $\dfrac{x^{3/2}}{x - 6} = x - 8$
 a) $x = 4$ **b)** $x = 8$

5–22 ■ La ecuación dada es lineal o equivale a una ecuación lineal. Resuelva la ecuación.

5. $2x + 7 = 31$

6. $5x - 3 = 4$

7. $\frac{1}{2}x - 8 = 1$

8. $3 + \frac{1}{3}x = 5$

9. $-7w = 15 - 2w$

10. $5t - 13 = 12 - 5t$

11. $\frac{1}{2}y - 2 = \frac{1}{3}y$

12. $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$

13. $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

14. $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y + 1}{4}$

15. $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x - 5 = 0$

16. $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x + 1}{4} = 6x$

17. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$

18. $\dfrac{2x - 1}{x + 2} = \dfrac{4}{5}$

19. $\dfrac{3}{x + 1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x + 3}$

20. $\dfrac{4}{x - 1} + \dfrac{2}{x + 1} = \dfrac{35}{x^2 - 1}$

21. $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$

22. $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \dfrac{x + 5}{\sqrt{3}}$

23–36 ■ Resuelva la ecuación para la variable indicada.

23. $PV = nRT$; para R

24. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; para m

25. $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$; para R_1

26. $P = 2l + 2w$; para w

27. $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$; para x

28. $a - 2[b - 3(c - x)] = 6$; para x

29. $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$; para x

30. $\dfrac{a + 1}{b} = \dfrac{a - 1}{b} + \dfrac{b + 1}{a}$; para a

31. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; para r

32. $F = G\dfrac{mM}{r^2}$; para r

33. $a^2 + b^2 = c^2$; para b

34. $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$; para i

35. $h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$; para t

36. $S = \dfrac{n(n + 1)}{2}$; para n

37–44 ■ Resuelva la ecuación por factorización.

37. $x^2 + x - 12 = 0$

38. $x^2 + 3x - 4 = 0$

39. $x^2 - 7x + 12 = 0$

40. $x^2 + 8x + 12 = 0$

41. $4x^2 - 4x - 15 = 0$

42. $2y^2 + 7y + 3 = 0$

43. $3x^2 + 5x = 2$

44. $6x(x - 1) = 21 - x$

45–52 ■ Resuelva la ecuación completando el cuadrado.

45. $x^2 + 2x - 5 = 0$

46. $x^2 - 4x + 2 = 0$

47. $x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

48. $x^2 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$

49. $2x^2 + 8x + 1 = 0$

50. $3x^2 - 6x - 1 = 0$

51. $4x^2 - x = 0$

52. $-2x^2 + 6x + 3 = 0$

53–68 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación cuadrática.

53. $x^2 - 2x - 15 = 0$

54. $x^2 + 30x + 200 = 0$

55. $x^2 + 3x + 1 = 0$

56. $x^2 - 6x + 1 = 0$

57. $2x^2 + x - 3 = 0$

58. $3x^2 + 7x + 4 = 0$

59. $2y^2 - y - \frac{1}{2} = 0$

60. $\theta^2 - \frac{3}{2}\theta + \frac{9}{16} = 0$

61. $4x^2 + 16x - 9 = 0$

62. $w^2 = 3(w - 1)$

63. $3 + 5z + z^2 = 0$

64. $x^2 - \sqrt{5}x + 1 = 0$

65. $\sqrt{6}x^2 + 2x - \sqrt{3/2} = 0$

66. $3x^2 + 2x + 2 = 0$

67. $25x^2 + 70x + 49 = 0$

68. $5x^2 - 7x + 5 = 0$

69–74 ■ Utilice el discriminante para determinar el número de soluciones reales de la ecuación. No resuelva la ecuación

69. $x^2 - 6x + 1 = 0$

70. $3x^2 = 6x - 9$

71. $x^2 + 2.20x + 1.21 = 0$

72. $x^2 + 2.21x + 1.21 = 0$

73. $4x^2 + 5x + \frac{13}{8} = 0$

74. $x^2 + rx - s = 0 \quad (s > 0)$

75–98 ■ Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación.

75. $\dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{5}{4}$

76. $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x - 3} + 4 = 0$

77. $\dfrac{x^2}{x + 100} = 50$

78. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$

79. $\dfrac{x+5}{x-2} = \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{28}{x^2-4}$ **80.** $\dfrac{x}{2x+7} - \dfrac{x+1}{x+3} = 1$

81. $\sqrt{2x+1} + 1 = x$ **82.** $\sqrt{5-x} + 1 = x - 2$

83. $2x + \sqrt{x+1} = 8$ **84.** $\sqrt{\sqrt{x-5} + x} = 5$

85. $x^4 - 13x^2 + 40 = 0$ **86.** $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

87. $2x^4 + 4x^2 + 1 = 0$ **88.** $x^6 - 2x^3 - 3 = 0$

89. $x^{4/3} - 5x^{2/3} + 6 = 0$ **90.** $\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} - 4 = 0$

91. $4(x+1)^{1/2} - 5(x+1)^{3/2} + (x+1)^{5/2} = 0$

92. $x^{1/2} + 3x^{-1/2} = 10x^{-3/2}$

93. $x^{1/2} - 3x^{1/3} = 3x^{1/6} - 9$ **94.** $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

95. $|2x| = 3$ **96.** $|3x+5| = 1$

97. $|x-4| = 0.01$ **98.** $|x-6| = -1$

Aplicaciones

99–100 ■ Problemas de caída de los cuerpos Suponga que dejamos caer un objeto desde una altura h_0 por arriba del suelo. Entonces, su altura después de t segundos es $h = -16t^2 + h_0$, donde h se mide en pies. Utilice esta información para resolver el problema.

99. Si se deja caer una pelota desde 288 pies por arriba del suelo, ¿cuánto tiempo es necesario para que llegue al suelo?

100. Se deja caer una pelota desde la parte superior de un edificio de 96 pies de alto.

a) ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer la mitad de la distancia al suelo?

b) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo?

101–102 ■ Problemas de caída de los cuerpos Utilice la fórmula $h = -16t^2 + v_0 t$ que se analizó en el ejemplo 9.

101. Se lanza una pelota hacia arriba con una velocidad inicial de $v_0 = 40$ pies/s.

a) ¿Cuándo alcanza la pelota la altura de 24 pies?

b) ¿Cuándo alcanza la altura de 48 pies?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

d) ¿Cuándo alcanza la pelota el punto más alto de su trayectoria?

e) ¿Cuándo golpea el suelo la pelota?

102. ¿Qué tan rápido se tendría que lanzar hacia arriba una pelota para alcanzar una altura máxima de 100 pies? [*Sugerencia:* utilice el discriminante de la ecuación $16t^2 - v_0 t + h = 0$.]

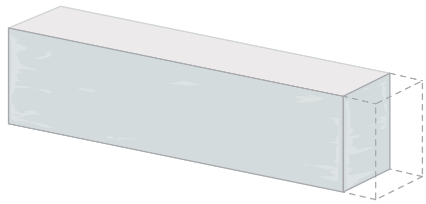
103. Contracción de las vigas de concreto A medida que el concreto fragua, se contrae —entre mayor es el contenido de agua, es mayor la contracción—. Si una viga de concreto tiene un contenido de agua de w kg/m³, entonces sufrirá contracción de acuerdo con un factor

$$S = \frac{0.032w - 2.5}{10\,000}$$

donde S es la fracción de la longitud de la viga original que desaparece debido a la contracción.

a) Una viga de 12.025 m de largo se cuela con concreto que contiene 250 kg/m³ de agua. ¿Cuál es el factor de contracción S? ¿Cuánto medirá de largo la viga cuando seque?

b) Una viga mide de largo 10.014 m recién colada. Queremos que se contraiga a 10.009 m, por lo que el factor de contracción debe ser de $S = 0.00050$. ¿Qué contenido de agua proporcionará esta cantidad de contracción?



104. Ecuación de una lente Si F es la distancia focal de una lente convexa y se coloca un objeto a una distancia x de la lente, entonces la imagen del objeto estará a una distancia y de la lente, donde F, x y y están relacionadas mediante la *ecuación de una lente*

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Suponga que la distancia focal de una lente es de 4.8 cm, y que la imagen de un objeto es 4 cm más cercana a la lente que el objeto en sí. ¿A qué distancia de la lente está el objeto?

105. Población de peces La población de peces de un lago aumenta y disminuye según la fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2)$$

En este caso, F es la cantidad de peces que hay en el tiempo t, donde t se mide en años desde el primero de enero de 2002, cuando la población de peces se estimó por vez primera.

a) ¿En qué fecha la población de peces volverá a ser la misma que en el primero de enero de 2002?

b) ¿En qué fecha habrán muerto todos los peces del lago?

106. Población de peces Un gran estanque se surte de peces. La población de peces P se modela mediante la fórmula $P = 3t + 10\sqrt{t} + 140$, donde t es el número de días a partir de que los peces se introdujeron al estanque. ¿Cuántos días se tardará en que la población de peces alcance 500?

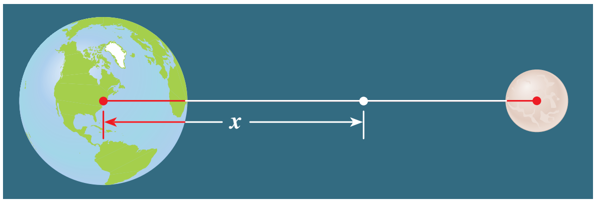
107. Ganancias Un fabricante de pequeños instrumentos encuentra que la ganancia P (en dólares) generada por la producción de x hornos de microondas por semana está dada por la fórmula $P = \frac{1}{10}x(300 - x)$ siempre que $0 \le x \le 200$. ¿Cuántos hornos se tienen que fabricar en una semana para generar una ganancia de 1250 dólares?

108. Gravedad Si un segmento de recta imaginario se traza entre los centros de la Tierra y la Luna, entonces la fuerza

gravitacional neta F que actúa en un objeto situado en este segmento es

$$F = \frac{-K}{x^2} + \frac{0.012K}{(239 - x)^2}$$

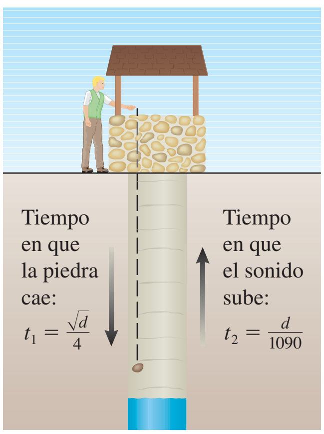
donde $K > 0$ es una constante y x es la distancia del objeto desde el centro de la Tierra, medido en miles de millas. ¿Qué tan lejos del centro de la Tierra está el "punto muerto" donde ninguna fuerza gravitacional actúa sobre el objeto? Exprese su respuesta en la milla más cercana.



109. Profundidad de un pozo Un método para determinar la profundidad de un pozo es arrojar una piedra hacia dentro y medir el tiempo que toma hasta que se escucha el choque contra el agua. Si d es la profundidad del pozo en pies y t_1 en tiempo en segundos que requiere la piedra para llegar al agua, entonces $d = 16t_1^2$, de modo que $t_1 = \sqrt{d}/4$. Luego, si t_2 es el tiempo que tarda el sonido en viajar, entonces $d = 1090t_2$ porque la velocidad del sonido es 1090 pies/s. Entonces $t_2 = d/1090$. Por lo tanto, el tiempo total transcurrido entre que se arroja la piedra y escuchar que choca contra el agua es

$$t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{d}}{4} + \frac{d}{1090}$$

¿Qué tan profundo es el pozo si el tiempo total es 3 segundos?



Descubrimiento • Debate

110. Una familia de ecuaciones La ecuación

$$3x + k - 5 = kx - k + 1$$

es en realidad una **familia de ecuaciones** porque para cada valor de k obtenemos una ecuación distinta con la incógnita x. La letra k se denomina **parámetro** de esta familia. ¿Qué valor debemos escoger para k para que el valor dado de x sea una solución de la ecuación resultante?

a) $x = 0$ **b)** $x = 1$ **c)** $x = 2$

111. ¿Demostración de que 0 = 1? Al parecer, los pasos siguientes dan ecuaciones equivalentes, lo cual parece demostrar que $1 = 0$. Encuentre el error.

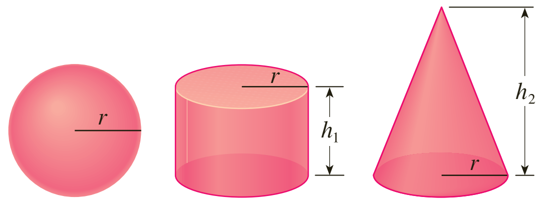
$x = 1$	Dato
$x^2 = x$	Multiplicación por x
$x^2 - x = 0$	Resta de x
$x(x - 1) = 0$	Factorización
$\frac{x(x-1)}{x-1} = \frac{0}{x-1}$	División entre $x - 1$
$x = 0$	Simplificación
$1 = 0$	Dado $x = 1$

112. Volumen de sólidos La esfera, cilindro y el cono mostrados aquí tienen el mismo radio r y el mismo volumen V.

a) Utilice las fórmulas del volumen que se encuentran en los forros interiores de este libro para demostrar que

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h_1 \qquad \text{y} \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h_2$$

b) Resuelva estas ecuaciones para h_1 y h_2.



113. Relaciones entre raíces y coeficientes La fórmula cuadrática nos proporciona las raíces de una ecuación cuadrática a partir de sus coeficientes. También es posible obtener los coeficientes a partir de las raíces. Por ejemplo, encuentre las raíces de la ecuación $x^2 - 9x + 20 = 0$ y demuestre que el producto de las raíces es el término constante 20 y que la suma de las raíces es 9, el negativo del coeficiente de x. Demuestre que la misma relación entre raíces y coeficientes se cumple para las ecuaciones siguientes:

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x^2 + 4x + 2 = 0$$

Aplique la fórmula cuadrática para demostrar que, en general, si la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ tiene raíces r_1 y r_2, entonces $c = r_1 r_2$ y $b = -(r_1 + r_2)$.

114. Resolución de una ecuación de maneras distintas Ya se estudiaron varias maneras de resolver una ecuación en esta sección. Algunas ecuaciones se pueden abordar por más de un método. Por ejemplo, la ecuación $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ es de tipo cuadrático: podemos resolverla haciendo $\sqrt{x} = u$ y $x = u^2$, y factorizando después. O también se puede eliminar $\sqrt{x}$, elevando al cuadrado ambos miembros, y luego resolviendo la ecuación cuadrática resultante. Resuelva las ecuaciones siguientes usando ambos métodos señalados y demuestre que obtiene las mismas respuestas finales.

a) $x - \sqrt{x} - 2 = 0$ tipo cuadrático; despeje del radical y elevar al cuadrado

b) $\dfrac{12}{(x-3)^2} + \dfrac{10}{x-3} + 1 = 0$ tipo cuadrático; multiplicación por el mínimo común denominador

1.6 Modelado mediante ecuaciones

Muchos de los problemas de las ciencias, economía, finanzas, medicina y otros numerosos campos se pueden traducir a problemas de álgebra. Ésta es una razón por la que el álgebra es tan útil. En esta sección usamos las ecuaciones como modelos matemáticos para resolver problemas de la vida cotidiana.

Criterios para modelar con ecuaciones

Se aplican los siguientes criterios para plantear ecuaciones que modelen situaciones formuladas en palabras. Para mostrar la manera en que los criterios pueden ayudar a plantear las ecuaciones, anotamos al margen cuándo funciona cada ejemplo de esta sección.

Criterios para modelar con ecuaciones

1. **Identificar la variable.** Identifique la cantidad que el problema le pide determinar. Por lo regular, esta cantidad se puede determinar por medio de una lectura cuidadosa de la pregunta planteada al final del problema. Entonces **introduzca la notación** para la variable (llámela x o cualquier otro nombre).

2. **Expresar todas las incógnitas en términos de la variable.** Lea una vez más cada oración del problema, y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en términos de la variable que definió en el paso 1. Para organizar esta información, a veces es útil **dibujar un esquema** o **elaborar una tabla**.

3. **Plantear el modelo.** Encuentre el hecho decisivo en el problema que relaciona las expresiones que usted listó en el paso 2. **Plantee una ecuación** o **modelo**, que exprese esta relación.

4. **Resuelva la ecuación y compruebe su respuesta.** Resuelva la ecuación, verifique la respuesta y exprésela como una oración que responde a la pregunta hecha en el problema.

El ejemplo siguiente ilustra la manera en que estos criterios se aplican para traducir el enunciado de un problema al lenguaje del álgebra.

Ejemplo 1 Renta de un automóvil

Una compañía que renta automóviles cobra 30 dólares al día más 15 centavos de dólar por milla al rentar un automóvil. Helen renta un automóvil por dos días y su cuenta es de 108 dólares. ¿Cuántas millas recorrió?

Identifique la variable

Solución Se pide determinar la cantidad de millas que Helen recorrió. Entonces sea

$$x = \text{cantidad de millas recorridas}$$

Luego traducimos toda la información del problema al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Cantidad de millas recorridas	x
Costo de la cantidad de millas recorridas (a 15 centavos la milla)	$0.15x$
Costo diario (a 30 dólares el día)	$2(30)$

En seguida planteamos el modelo.

Plantee el modelo

$$\text{costo de las millas recorridas} + \text{costo diario} = \text{costo total}$$

Resolución

$$0.15x + 2(30) = 108$$

$$0.15x = 48 \qquad \text{Sustracción de 60}$$

$$x = \frac{48}{0.15} \qquad \text{División entre 0.15}$$

$$x = 320 \qquad \text{Calculadora}$$

Helen recorrió 320 millas con su auto rentado. ■

Compruebe su respuesta

$$\text{costo total} = \text{costo de las millas recorridas} + \text{costo por día}$$

$$= 0.15(320) + 2(30)$$

$$= 108 \checkmark$$

Construcción de modelos

En los ejemplos y ejercicios que siguen planteamos ecuaciones que modelan problemas en muchas situaciones distintas de la vida cotidiana.

Ejemplo 2 Interés de una inversión

Mary hereda 100 000 dólares y los invierte en dos certificados de depósito. Uno de los certificados paga el 6% y el otro paga $4\frac{1}{2}\%$ de interés anual simple. Si el interés total de Mary es 5025 dólares por año, ¿cuánto dinero está invertido en cada tasa?

Solución El problema pide la cantidad que Helen invirtió a cada una de las tasas. Sea

Identifique la variable

$$x = \text{la cantidad invertida a 6\%}$$

Puesto que el total de la herencia de Mary es de 100 000 dólares, se infiere entonces que invirtió $100\,000 - x$ al $4\frac{1}{2}\%$. Pasamos toda la información al lenguaje del álgebra.

Expreses todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Cantidad invertida al 6%	x
Cantidad invertida al $4\frac{1}{2}$%	$100\,000 - x$
Interés ganado al 6%	$0.06x$
Interés ganado al $4\frac{1}{2}$%	$0.045(100\,000 - x)$

Aprovechamos el hecho de que el interés total de Mary es de 5025 dólares para plantear el modelo.

Plantee el modelo

interés al 6% + interés al $4\frac{1}{2}$% = interés total

Resuelva

$$0.06x + 0.045(100\,000 - x) = 5025$$

$$0.06x + 4500 - 0.045x = 5025 \qquad \text{Multiplicación}$$

$$0.015x + 4500 = 5025 \qquad \text{Combinación de los términos } x$$

$$0.015x = 525 \qquad \text{Sustracción de 4500}$$

$$x = \frac{525}{0.015} = 35\,000 \qquad \text{División entre 0.015}$$

Por lo tanto, Mary invirtió 35 000 dólares al 6% y los restantes \$65 000 dólares al $4\frac{1}{2}$%. ■

Compruebe su respuesta

interés total = 6% de 35 000 dólares + $4\frac{1}{2}$% de 65 000 dólares

= \$2100 + \$2925 = \$5025 ✓

Ejemplo 3 Dimensiones de un cartel

En problemas como éste, para el que se requiere geometría, es esencial dibujar un diagrama como el que se muestra en la figura 1.

Un cartel tiene una superficie impresa de 100 por 140 cm y una franja de ancho uniforme alrededor de los cuatro lados. El perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa. ¿Cuál es el ancho de la franja en blanco y cuáles son las dimensiones del cartel?

Solución Se pide determinar el ancho de la franja en blanco. Entonces, sea

Identifique la variable

$$x = \text{ancho de la franja en blanco}$$

Luego pasamos la información de la figura 1 al lenguaje algebraico:

Expreses las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Ancho de la franja en blanco	x
Perímetro de la superficie impresa	$2(100) + 2(140) = 480$
Ancho del cartel	$100 + 2x$
Largo del cartel	$140 + 2x$
Perímetro del cartel	$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x)$

A continuación usaremos el hecho de que el perímetro del cartel es $1\frac{1}{2}$ veces el perímetro del área impresa para formular el modelo.

Plantee el modelo

$$\text{perímetro del cartel} = \tfrac{3}{2} \cdot \text{perímetro del área impresa}$$

$$2(100 + 2x) + 2(140 + 2x) = \tfrac{3}{2} \cdot 480$$

Resuelva

$$480 + 8x = 720 \qquad \text{Desarrollo y combinación de términos semejantes en el PM}$$

$$8x = 240 \qquad \text{Sustracción de 480}$$

$$x = 30 \qquad \text{División entre 8}$$

La franja en blanco mide 30 cm de ancho, de modo que las dimensiones del cartel son

$$100 + 30 + 30 = 160 \text{ cm de ancho}$$

por

$$140 + 30 + 30 = 200 \text{ cm de largo}$$

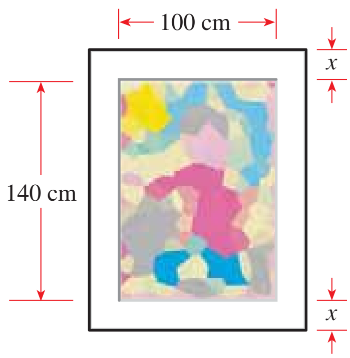


Figura 1 ■

Ejemplo 4 Dimensiones de un terreno para construcción

Un terreno de forma rectangular para construir mide 8 pies más que el ancho y su área es de 2900 pies cuadrados. Determine las dimensiones del lote.

Solución Se pide determinar el ancho y el largo del terreno. Entonces, sea

Identifique la variable

$$w = \text{ancho del terreno}$$

Luego expresamos la información dada en lenguaje algebraico (véase la figura 2 de la pág. 62).

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Ancho del terreno	w
Largo del terreno	$w + 8$

Ahora planteamos el modelo.

Formule el modelo

$$\text{ancho del terreno} \cdot \text{largo del terreno} = \text{área del terreno}$$

Resuelva

$$w(w + 8) = 2900$$

$$w^2 + 8w = 2900 \qquad \text{Desarrollo}$$

$$w^2 + 8w - 2900 = 0 \qquad \text{Sustracción de 2900}$$

$$(w - 50)(w + 58) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$w = 50 \quad \text{o} \quad w = -58 \qquad \text{Propiedad del producto nulo}$$

Puesto que el ancho del terreno tiene que ser un número positivo, concluimos que $w = 50$ pies. El largo del terreno es $w + 8 = 50 + 8 = 58$ pies.

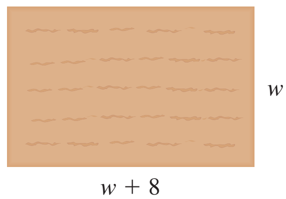


Figura 2

Ejemplo 5 Determinación de la altura de un edificio aplicando los triángulos semejantes

Un hombre de 6 pies de estatura desea encontrar la altura de un edificio de cuatro pisos. Mide la sombra del edificio y encuentra que es de 28 pies, y mide también su propia sombra, la cual es $3\frac{1}{2}$ pies de largo. ¿Cuál es la altura del edificio?

Solución El problema pide determinar la altura del edificio. Sea

Identifique la variable

$$h = \text{altura del edificio}$$

Aprovechamos el hecho de que los triángulos de la figura 3 son semejantes. Recuerde que para cualquier par de triángulos semejantes las relaciones de sus lados correspondientes son iguales. Ahora traduzcamos estas observaciones al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Altura del edificio	h
Relación entre la altura y la base del triángulo mayor	$\frac{h}{28}$
Relación entre la altura y la base del triángulo menor	$\frac{6}{3.5}$

Como el triángulo mayor y el menor son semejantes, obtenemos la ecuación

Plantee el modelo

$$\text{proporción entre la altura y la base en el triángulo grande} = \text{proporción entre la altura y la base en el triángulo pequeño}$$

$$\frac{h}{28} = \frac{6}{3.5}$$

Resuelva

$$h = \frac{6 \cdot 28}{3.5} = 48$$

El edificio es de 48 pies de alto.

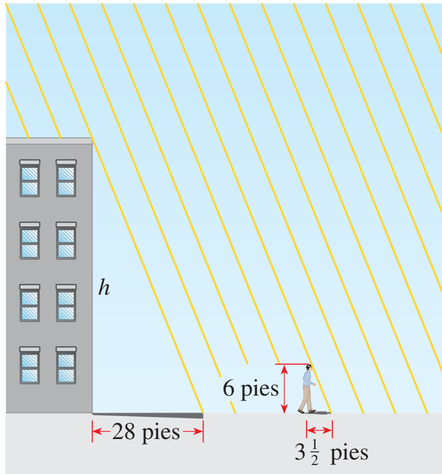


Figura 3

■

Ejemplo 6 Mezclas y concentración

Un fabricante de bebidas refrescantes afirma que su naranjada tiene “saborizante natural”, aunque contiene sólo 5% de jugo de naranja. Una nueva ley federal establece que para que se le llame “natural” a una bebida ésta debe contener por lo menos 10% de jugo de fruta. ¿Cuánto jugo natural puro debe agregar este fabricante a los 900 galones de bebida de naranja para apegarse a la nueva reglamentación?

Solución El problema pide determinar la cantidad de jugo de naranja puro que se debe añadir.
Sea

Identifique la variable

x = la cantidad (en galones) de jugo de naranja puro que se tiene que añadir

En cualquier problema de este tipo, en el cual se mezclan dos sustancias diferentes, un diagrama ayuda a organizar la información dada (véase la figura 4).

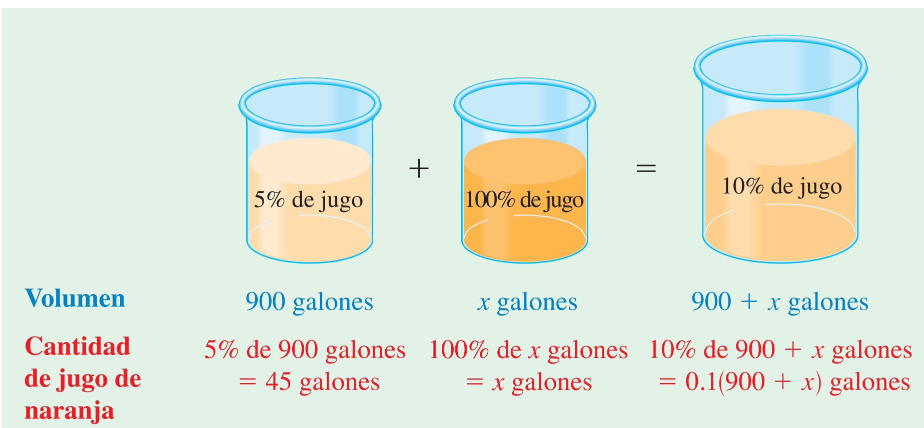


Figura 4

Luego traducimos la información que se da en la figura al lenguaje del álgebra.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En el lenguaje algebraico
Cantidad de jugo de naranja que se tiene que añadir	x
Cantidad de la mezcla	$900 + x$
Cantidad de jugo de naranja en el primer recipiente	$0.05(900) = 45$
Cantidad de jugo en el segundo recipiente	$1 \cdot x = x$
Cantidad de jugo de naranja en la mezcla	$0.10(900 + x)$

Para plantear el modelo, aprovechamos el hecho de que la cantidad total de jugo de naranja en la mezcla es igual al jugo de naranja en los primeros dos recipientes.

Plantee el modelo

cantidad de jugo de naranja en el primer recipiente	+	cantidad de jugo de naranja en el segundo recipiente	=	cantidad de jugo de naranja en la mezcla

Resuelva

$$45 + x = 0.1(900 + x) \qquad \text{Según la figura 4}$$

$$45 + x = 90 + 0.1x \qquad \text{Multiplicación}$$

$$0.9x = 45 \qquad \text{Sustracción de } 0.1x \text{ y } 45$$

$$x = \frac{45}{0.9} = 50 \qquad \text{División entre } 0.9$$

El fabricante debe añadir 50 galones de jugo de naranja puro a la bebida. ■

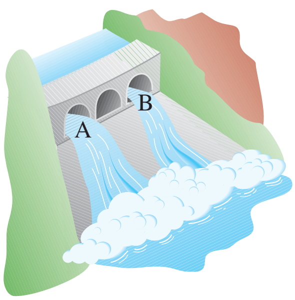
Compruebe su respuesta

cantidad de jugo antes de la mezcla = 5% de 900 galones + 50 galones de jugo puro

= 45 galones + 50 galones = 95 galones

cantidad de jugo después de la mezcla = 10% de 950 galones = 95 galones

Las cantidades son iguales. ✓



Ejemplo 7 Tiempo necesario para hacer un trabajo

Debido a una fuerte tormenta imprevista, el nivel del agua en una presa se debe reducir un pie. La apertura de la compuerta A reduce el nivel a esa cantidad en 4 horas, pero la apertura de la compuerta más pequeña B permite el desalojo en 6 horas. ¿Cuánto tiempo se necesita para bajar el nivel del agua un pie si se abren ambas compuertas?

Solución Se pide determinar el tiempo que se requiere para bajar el nivel un pie si ambas compuertas se abren. Sea entonces

Identifique la variable

x = el tiempo en horas que se requiere para bajar el nivel un pie si ambas compuertas se abren

Encontrar una ecuación que relacione x con las otras cantidades de este problema es difícil.

Claro que x no es simplemente $4 + 6$, porque eso significaría que juntas las dos compuertas requerirían más tiempo para bajar el nivel del agua que una sola. Entonces, *examinemos la fracción del trabajo que puede hacer cada una de las compuertas en una hora*.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Tiempo que necesitan las compuertas A y B juntas para bajar el nivel 1 pie	x h
Nivel que baja A en 1 h	$\frac{1}{4}$ de pie
Nivel que baja B en 1 h	$\frac{1}{6}$ de pie
Nivel que baja con A y B juntas en 1 h	$\frac{1}{x}$ de pie

Ahora planteamos el modelo.

Plantee el modelo

parte que efectúa A + parte que efectúa B = parte que efectúan ambas

Resuelva

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

$$3x + 2x = 12 \quad \text{Multiplicación por el MCD, } 12x$$

$$5x = 12 \quad \text{Adición}$$

$$x = \frac{12}{5} \quad \text{División entre 5}$$

Se necesitan $2\frac{2}{5}$ horas, o 2 h 24 min bajar el nivel un pie si se abren ambas compuertas. ■

El siguiente ejemplo trata de la distancia, rapidez (velocidad) y tiempo. La fórmula que se debe tener presente es

$$\text{distancia} = \text{rapidez} \times \text{tiempo}$$

donde la rapidez es velocidad constante o velocidad promedio de desplazamiento de un objeto. Por ejemplo, manejar a 60 millas por hora durante 4 horas representa una distancia de $60 \cdot 4 = 240$ millas.

Ejemplo 8 Un problema de distancia-velocidad-tiempo

Un avión voló desde Nueva York a Los Ángeles, una distancia de 4 200 km. La velocidad para el viaje de regreso fue de 100 km/h más rápido que la velocidad de ida. Si el viaje total dura 13 horas, ¿cuál es la velocidad del avión desde Nueva York a Los Ángeles?

Identifique la variable

Solución Se pide la velocidad del avión de Nueva York a Los Ángeles. Hagamos

$$s = \text{velocidad de Nueva York a Los Ángeles}$$

Entonces $s + 100 =$ velocidad desde Los Ángeles hasta Nueva York

En seguida organizamos la información en una tabla. Primero llenamos la columna "Distancia", porque sabemos que entre las ciudades hay 4200 km. Luego llenamos la columna "Velocidad", ya que hemos expresado ambas velocidades en términos de la variable s. Por último, calculamos las entradas para la columna "Tiempo" mediante

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$$

Exprese las cantidades desconocidas en términos de la variable

	Distancia (km)	Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
N.Y. a L.A.	4200	s	$\frac{4200}{s}$
L.A. a N.Y.	4200	$s + 100$	$\frac{4200}{s + 100}$

El viaje total dura 13 horas, de modo que tenemos el modelo

Plantee el modelo

$$\text{tiempo desde N.Y. a L.A.} + \text{tiempo desde L.A. a N.Y.} = \text{tiempo total}$$

$$\frac{4200}{s} + \frac{4200}{s + 100} = 13$$

Al multiplicar por el común denominador, $s(s + 100)$, obtenemos

$$\begin{aligned} 4200(s + 100) + 4200s &= 13s(s + 100) \\ 8400s + 420\,000 &= 13s^2 + 1300s \\ 0 &= 13s^2 - 7100s - 420\,000 \end{aligned}$$

Aunque esta ecuación se puede factorizar, con cantidades tan grandes quizá sea más rápido usar la fórmula cuadrática y una calculadora.

Resuelva

$$\begin{aligned} s &= \frac{7100 \pm \sqrt{(-7100)^2 - 4(13)(-420\,000)}}{2(13)} \\ &= \frac{7100 \pm 8500}{26} \end{aligned}$$

$$s = 600 \quad \text{o} \quad s = \frac{-1400}{26} \approx -53.8$$

Puesto que s representa la velocidad, rechazamos la respuesta negativa y concluimos que la velocidad del avión desde Nueva York hasta Los Ángeles fue de 600 km/h. ■

Ejemplo 9 Energía que gasta al volar un ave

Los ornitólogos han determinado que algunas especies de aves evitan volar sobre cuerpos de agua grandes mientras haya luz del día porque, por lo general, el aire se eleva durante el día sobre el suelo, pero desciende sobre el agua, de modo que volar sobre el agua requiere más energía. Un ave es liberada en el punto A en una isla, a 5 millas de B, el punto más cercano sobre una orilla recta de la playa. El ave vuela hasta el punto C sobre la orilla de la playa y luego a lo largo de la playa hasta una zona D donde anida, según se ilustra en la figura 5. Suponga que el ave tiene 170 kcal de reservas de energía. Utiliza 10 kcal/milla al volar sobre tierra y 14 kcal/milla al volar sobre agua.

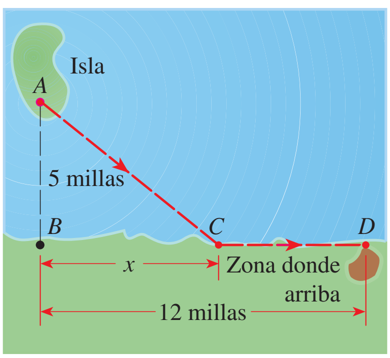


Figura 5

a) ¿Dónde se debe ubicar el punto C para que el ave utilice exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo?

b) ¿Tiene el ave suficientes reservas de energía para volar de manera directa desde A hasta D?

Solución

a) Se pide determinar la ubicación de C. De modo que

Identifique la variable

$$x = \text{distancia desde } B \text{ hasta } C$$

De acuerdo con la figura y por el hecho de que

$$\text{energía usada} = \text{energía por milla} \times \text{millas voladas}$$

determinamos lo siguiente:

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Distancia desde B hasta C	x
Distancia de vuelo sobre el agua (desde A hasta C)	$\sqrt{x^2 + 25}$ Teorema de Pitágoras
Distancia de vuelo sobre tierra (desde C hasta D)	$12 - x$
Energía utilizada sobre el agua	$14\sqrt{x^2 + 25}$
Energía usada sobre tierra	$10(12 - x)$

Ahora establecemos el modelo.

Plantee el modelo

$$\text{energía total usada} = \text{energía usada sobre el agua} + \text{energía usada sobre tierra}$$

$$170 = 14\sqrt{x^2 + 25} + 10(12 - x)$$

Para resolver esta ecuación, eliminamos primero la raíz cuadrada pasando todos los otros términos a la izquierda del signo de igual y luego elevamos al cuadrado ambos miembros.

Resuelva

$$170 - 10(12 - x) = 14\sqrt{x^2 + 25}$$ Se aísla el término de la raíz cuadrada en el primer miembro

$$50 + 10x = 14\sqrt{x^2 + 25}$$ Simplificación del primer miembro

$$(50 + 10x)^2 = (14)^2(x^2 + 25)$$ Se elevan al cuadrado ambos miembros

$$2500 + 1000x + 100x^2 = 196x^2 + 4900$$ Desarrollo

$$0 = 96x^2 - 1000x + 2400$$ Todos los términos se pasan al primer término

Esta ecuación se puede factorizar, pero como las cantidades son muy grandes es más sencillo usar la fórmula cuadrática y una calculadora:

$$x = \frac{1000 \pm \sqrt{(-1000)^2 - 4(96)(2400)}}{2(96)}$$

$$= \frac{1000 \pm 280}{192} = 6\tfrac{2}{3} \qquad \text{o bien} \qquad 3\tfrac{3}{4}$$

El punto C debe estar a $6\frac{2}{3}$ millas o a $3\frac{3}{4}$ millas de B para que el ave utilice exactamente 170 kcal de energía durante su vuelo.

b) De acuerdo con el teorema de Pitágoras (véase la pág. 54), la longitud de la ruta desde A hasta D es $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ millas, de modo que la energía que el ave requiere para esa ruta es $14 \times 13 = 182$ kcal. Esto es más de lo que tiene el ave reservado, de modo que no puede irse por esa ruta. ■

1.6 Ejercicios

1–12 ■ Exprese la cantidad dada en términos de la variable indicada.

1. La suma de tres enteros consecutivos; n = primer entero de los tres

2. La suma de tres enteros consecutivos; n = entero intermedio de los tres

3. El promedio de tres calificaciones de exámenes si las primeras dos calificaciones son 78 y 82; s = tercera calificación

4. El promedio de cuatro calificaciones si cada una de las tres primeras es 8; q = cuarta calificación

5. El interés obtenido después de un año de una inversión al $2\frac{1}{2}\%$ de interés simple anual; x = cantidad de dólares invertida

6. La renta total pagada por un departamento si la renta es de 795 dólares al mes; n = cantidad de meses

7. El área en pies cuadrados de un rectángulo cuyo largo es tres veces su ancho; w = ancho del rectángulo en pies

8. El perímetro en cm de un rectángulo cuyo largo es 5 cm mayor que su ancho; w = ancho del rectángulo en cm

9. La distancia en millas que recorre un automóvil en 45 min; s = velocidad del vehículo en millas por hora

10. El tiempo en horas que se requiere para viajar una distancia dada en 55 millas/h; d = distancia dada en millas

11. La concentración en onzas por galón de sal en una mezcla de 3 galones de salmuera que contienen 25 onzas de sal, a la cual se le ha añadido agua pura; x = volumen de agua pura adicionada en galones

12. El valor en centavos del cambio que hay en una bolsa que contiene el doble de monedas de cinco centavos que de monedas de un centavo, cuatro monedas más de diez centavos que de monedas de 5 centavos y la misma cantidad de monedas de 25 centavos que de monedas de 10 y de 5 centavos combinadas; p = cantidad de monedas de a centavo

Aplicaciones

13. Problema de números Encuentre tres enteros consecutivos cuya suma sea 156.

14. Problema de números Encuentre cuatro enteros impares consecutivos cuya suma sea 416.

15. Problema de números Calcule dos números cuya suma es 55 y cuyo producto es 684.

16. Problema de números La suma de los cuadrados de dos enteros pares consecutivos es 1252. Encuentre los enteros.

17. Inversiones Phyllis invirtió 12 000 dólares; una parte gana un interés simple de $4\frac{1}{2}\%$ por año y el resto gana una tasa de 4% anual. Después de un año, el interés total ganado por las inversiones es de 525 dólares. ¿Cuánto dinero invirtió a cada tasa?

18. Inversiones Si Ben invierte 4000 dólares a 4% de interés anual, ¿cuánto dinero adicional debe invertir a un interés de $5\frac{1}{2}\%$ anual para que el interés que reciba cada año sea $4\frac{1}{2}\%$ de la cantidad total invertida?

19. Inversiones ¿Qué tasa de interés anual tendría que tener usted sobre una inversión de 3500 dólares para asegurar que recibe 262.50 dólares de interés después de un año?

20. Inversiones Jack invierte 1000 dólares a una cierta tasa de interés anual, e invierte otros 2000 dólares a una tasa anual que es 0.5% superior. Si recibe un total de 190 dólares de interés en un año, ¿a qué tasa están invertidos los 1000 dólares?

21. Salarios Una ejecutiva de una compañía de ingeniería tiene un salario mensual más un bono para la Navidad de 8500 dólares. Si gana un total de 97 300 dólares al año, ¿cuál es su salario mensual?

22. Salarios Una mujer gana 15% más que su marido. Entre los dos juntan 69 875 dólares al año. ¿Cuál es el salario del marido al año?

23. Herencias Craig está ahorrando para comprar una casa para ir de vacaciones. Heredó algún dinero de un tío rico, y lo junta con los 22 000 dólares que ya tenía y duplica el total mediante una inversión afortunada. Al final tiene reunidos 134 000 dólares, lo suficiente para comprar una cabaña en un lago. ¿Cuánto dinero heredó?

24. Tiempo extra Helen gana 7.50 dólares por hora en su trabajo, pero si trabaja más de 35 horas a la semana, se le paga $1\frac{1}{2}$ veces su salario regular por las horas de tiempo extra trabajadas. Una semana obtiene un salario bruto de 352.50 dólares. ¿Cuántas horas de tiempo extra trabajó esa semana?

25. Costo de la mano de obra Un plomero y su ayudante trabajan juntos para reemplazar la tubería de una casa vieja. El plomero gana 45 dólares por hora por su trabajo y 25 dólares su ayudante. El plomero trabaja el doble del tiempo que su ayudante y el cargo final por mano de obra es de 4025 dólares. ¿Cuánto tiempo trabajaron el plomero y su ayudante en esta casa?

26. Una carrera de jonrones Durante su carrera en las ligas mayores, Hank Aaron lanzó 41 jonrones más que Babe Ruth en toda su carrera. Entre los dos colocaron 1459 jonrones. ¿Cuántos jonrones colocó Babe Ruth?

27. Acertijo Un actor de cine, decidido a no revelar su edad, le dijo el siguiente acertijo a un articulista de chismes: "Hace siete años, yo tenía once veces la edad de mi hija. Ahora tengo cuatro veces la edad de ella." ¿Cuántos años tenía el actor?

28. Acertijo Un papá tiene cuatro veces la edad de su hija. Dentro de 6 años, él tendrá tres veces la edad de ella. ¿Qué edad tiene su hija ahora?

29. Valor de las monedas Una bolsa con cambio contiene una cantidad igual de monedas de 1 centavo, 5 y 10 centavos. El valor total de las monedas es 1.44 dólares. ¿Cuántas monedas de cada tipo contiene la bolsa?

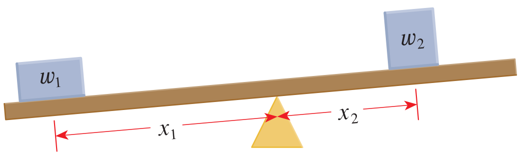
30. Valor de las monedas Mary tiene 3 dólares en monedas de 5, 10 y 25 centavos. Si tiene el doble de monedas de 10 centavos que de monedas de 25 y cinco monedas de 5 centavos que de 10 centavos, ¿cuántas monedas de cada tipo tiene?

31. Ley de la palanca En la figura se ilustra un sistema de palancas, similar al sube y baja que usted encuentra en los parques para niños. Para que el sistema se equilibre, el producto del peso por la distancia a partir del punto de apoyo debe ser igual en cada lado. Es decir,

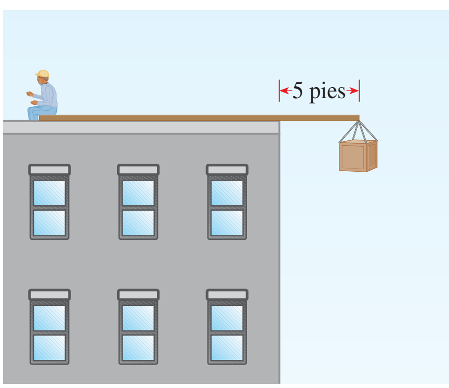
$$w_1x_1 = w_2x_2$$

Esta ecuación recibe el nombre de ley de la palanca, y fue descubierta por Arquímedes (véase la pág. 748).

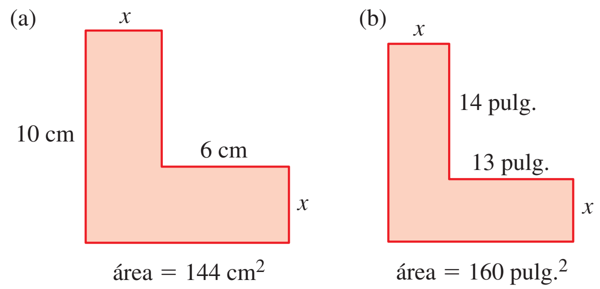
Una mujer y su hijo están jugando en un sube y baja. El muchacho está en un extremo, a 8 pies del punto de apoyo. Si el hijo pesa 100 libras y la madre pesa 125 libras, ¿dónde debe colocarse la mujer para equilibrar el sube y baja?



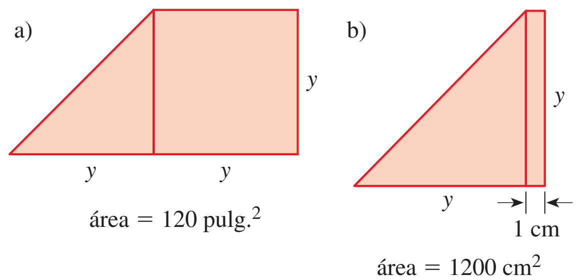
32. Ley de la palanca Un tablón de 30 pies de largo se apoya en la azotea de un edificio; 5 pies del tablón sobresalen de la orilla según se muestra en la figura. Un trabajador que pesa 240 libras se sienta en el otro extremo del tablón. ¿Cuál es el peso más grande que se puede colgar en el extremo que sobresale del tablón si tiene que estar en equilibrio? Aplique la ley de la palanca establecida en el ejercicio 31.



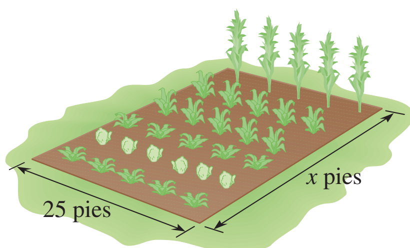
33. Longitud y área Calcule la longitud x de la figura. Se proporciona el área de la región sombreada.



34. Longitud y área Determine la longitud y de la figura. Se proporciona el área de la región sombreada.



35. Largo de un jardín El ancho de un jardín rectangular es de 25 pies. Si el área es de 1125 pies cuadrados, ¿cuál es el largo del jardín?



36. Ancho de un terreno de pastura El largo de un terreno de pastura es el doble del ancho. Su área es 115 200 pies cuadrados. ¿Cuánto mide de ancho el terreno?

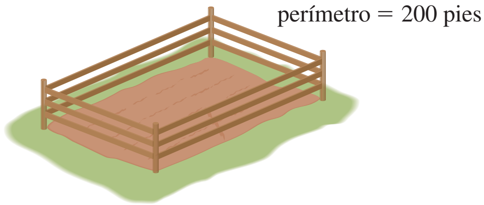
37. Dimensiones de un terreno Un terreno de forma cuadrada tiene una construcción de 60 pies de largo por 40 pies de ancho en una esquina. El resto del terreno es un estacionamiento. Si el área del estacionamiento es de 12 000 pies cuadrados, ¿cuáles son las dimensiones de todo el terreno?

38. Dimensiones de un terreno El largo de un terreno de medio acre es cinco veces lo que mide el ancho. ¿Cuáles son las dimensiones? [*Nota:* 1 acre = 43 560 pies cuadrados.]

39. Dimensiones de un jardín Un jardín rectangular mide 10 pies más de largo que lo que mide de ancho. Su área es de 875 pies cuadrados. ¿Cuáles son sus dimensiones?

40. Dimensiones de una habitación Una recámara rectangular mide de largo 7 pies más de lo que mide el ancho. Su área es de 228 pies cuadrados. ¿Cuál es el ancho de la habitación?

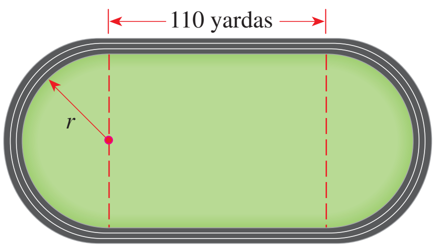
41. Dimensiones de un jardín Un granjero tiene un terreno rectangular para jardín, rodeado por una cerca de 200 pies. Determine la longitud y la anchura del jardín si el área es de 2 400 pies cuadrados.



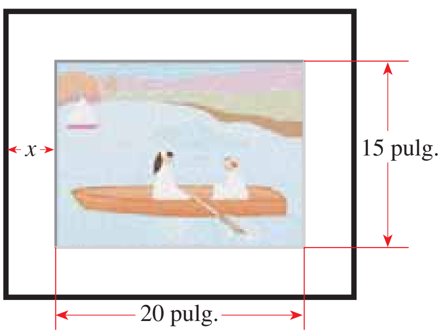
42. Dimensiones de un terreno El largo de una parcela mide 6 pies más que el ancho. Cada diagonal mide 174 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

43. Dimensiones de un terreno El ancho de una parcela rectangular mide 50 pies. Una diagonal mide 10 pies más que el largo de la parcela. ¿Cuál es el largo de la parcela?

44. Dimensiones de una pista Una pista para carreras tiene la forma que se ilustra en la figura, con lados rectos y extremos semicirculares. Si la pista mide en total 440 yardas y los dos lados rectos miden 110 yardas de largo, ¿cuál es el radio de las partes semicirculares, aproximado a la yarda más cercana?

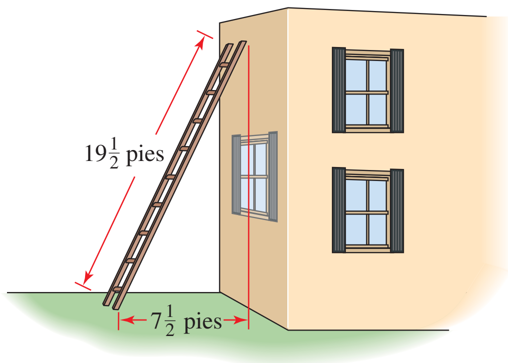


45. Marco para una pintura Alejandro pinta una acuarela en una hoja de papel de 20 por 15 pulg. Luego coloca su acuarela sobre una base de modo que quede una franja de un ancho uniforme alrededor de la pintura. El perímetro de la base es de 102 pulg. ¿Cuánto mide el ancho de la franja que rodea a la acuarela?

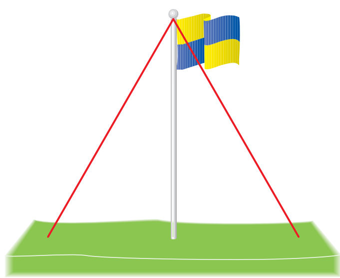


46. Ancho de un terreno con césped Se va a construir una fábrica en un terreno que mide 180 por 240 pies. El reglamento de construcción local señala que debe rodear a la fábrica un terreno con césped de ancho uniforme y de área igual al área de la misma. ¿Cuál debe ser el ancho de esta zona de césped y cuáles las dimensiones de la fábrica?

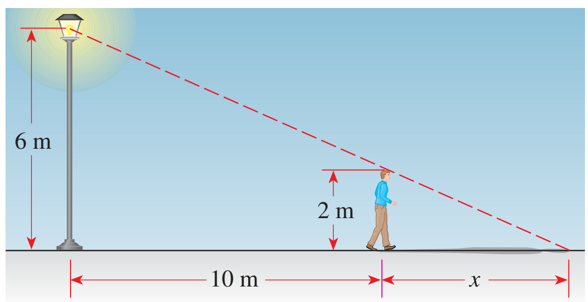
47. Alcance de una escalera Una escalera de $19\frac{1}{2}$ pies se apoya contra una construcción. La base de la escalera está a $7\frac{1}{2}$ pies a partir del edificio. ¿Qué altura del edificio alcanza la escalera?



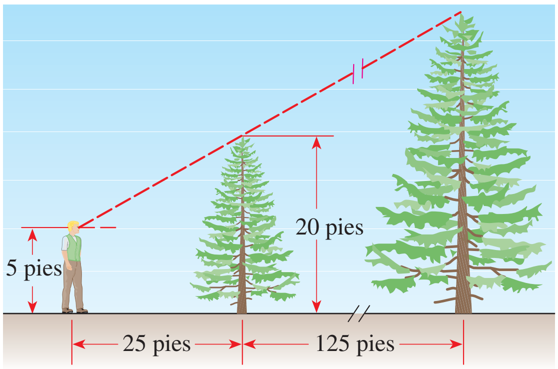
48. Altura de un asta de bandera Un asta está asegurada por dos tensores de alambre, opuestos entre sí. Cada tensor mide 5 pies más que el asta. La distancia entre los puntos donde se fijan los tensores al suelo es igual a la longitud de un tensor. ¿Cuál es la altura del asta, aproximada a la pulgada más cercana?



49. Longitud de una sombra Un hombre se aleja caminando de un poste cuya luminaria está a 6 m por arriba del suelo. El hombre tiene una estatura de 2 m. ¿Cuánto mide la sombra del hombre cuando está a 10 m del poste? [*Sugerencia:* aplique triángulos semejantes.]



50. Altura de un árbol Un aserrador estima la altura de un árbol alto midiendo primero un árbol pequeño alejado 125 pies del árbol alto; luego se desplaza de tal manera que sus ojos estén en la visual de las copas de los árboles y mide después qué tan lejos está del árbol pequeño (véase la figura). Suponga que el árbol pequeño mide 20 pies de altura, el hombre está a 25 pies del árbol pequeño y sus ojos están a 5 pies por arriba del suelo. ¿Cuánto mide el árbol más alto?



51. Compra de una casa Un grupo de amigos decide comprar una casa para ir de vacaciones de 120 000 dólares, para lo que compartirán los gastos en partes iguales. Si pueden encontrar una persona más que se les una, cada uno contribuirá con 6 000 dólares. ¿Cuántas personas forman el grupo?

52. Problema de mezclas ¿Qué cantidad de una solución ácida al 60% se tiene que mezclar con una solución al 30% para producir 300 ml de una solución al 50%?

53. Problema de mezclas Un joyero tiene cinco anillos, cada uno pesa 18 g, y son de una aleación de 10% de plata y 90% de oro. Decide fundir los anillos y añadir suficiente plata para reducir el contenido de oro a 75%. ¿Cuánta plata debe añadir?

54. Problema de mezclas Un olla contiene 6 litros de salmuera a una concentración de 120 g/L. ¿Cuánta agua se debe evaporar por ebullición para que la concentración sea de 200 g/L?

55. Problema de mezclas El radiador de un automóvil está lleno con una solución de 60% de anticongelante y 40% de agua. El fabricante del anticongelante recomienda que, en verano, el enfriamiento óptimo del motor se logra con sólo 50% de anticongelante. Si la capacidad del radiador es de 3.6 litros, ¿cuanto anticongelante se debe extraer para reemplazarlo con agua para reducir la concentración del anticongelante al nivel recomendado?

56. Problema de mezclas Un centro de salud aplica una solución de blanqueador para esterilizar las cajas de Petri en las que crecieron cultivos. El recipiente de esterilización contiene 100 galones de una solución de blanqueador común para uso doméstico al 2% mezclado con agua pura destilada. Las nuevas investigaciones señalan que la concentración del blanqueador debe ser de 5% para conseguir una esterilización completa. ¿Cuánta de la solución se debe extraer y reemplazar con blanqueador para incrementar el contenido de éste y tener el nivel recomendado?

57. Problema de mezclas Una botella contiene 750 ml de ponche de frutas con una concentración de jugo de frutas puro al 50%. Jill toma 100 ml del ponche y luego vuelve a llenar la botella con una cantidad igual pero de una marca más barata de ponche, si la concentración de jugo en la botella se redujo ahora a 48%, ¿cuál es la concentración del ponche que Jill añadió?

58. Problema de mezclas Un comerciante mezcla té que vende a 3 dólares una libra con té que vende a 2.75 dólares la libra para producir 80 libras de una mezcla que vende a 2.90 dólares la libra. ¿Cuántas libras de cada tipo de té debe usar el comerciante en su mezcla?

59. Trabajo compartido Candy y Tim comparten una ruta de entrega de periódicos. Candy tarda 70 min en entregar todos los periódicos, y Tim se tarda 80 min. ¿Cuánto se tardan los dos cuando trabajan en forma conjunta?

60. Trabajo compartido Stan e Hilda pueden podar el pasto en 40 min si trabajan juntos. Si Hilda trabaja el doble de rápido que Stan, ¿cuánto se tardará Stan en podar él solo el césped?

61. Trabajo compartido Betty y Karen fueron contratadas para pintar las casas de una unidad habitacional. Si trabajan juntas, las mujeres pueden pintar una casa en dos tercios del tiempo que se tarda Karen si trabaja sola. Betty se tarda 6 h en pintar una casa sola. ¿Cuánto se tarda Karen en pintar una casa si trabaja sola?

62. Trabajo compartido Bob y Jim son vecinos y utilizan mangueras de las dos casas para llenar la piscina de Bob. Ya saben que se requieren 18 h si se usan ambas mangueras. También saben que si se usa sólo la manguera de Bob, se tarda 20% menos de tiempo que cuando se utiliza la manguera de Jim sola. ¿Cuánto tiempo se requiere para llenar la piscina con cada una de las mangueras?

63. Trabajo compartido Cuando Henry e Irene trabajan juntos pueden lavar todas las ventanas de su casa en 1 h 48 min. Si Henry trabaja solo, se tarda $1\frac{1}{2}$ más que Irene en hacer el trabajo. ¿Cuánto tarda cada persona sola en lavar todas las ventanas?

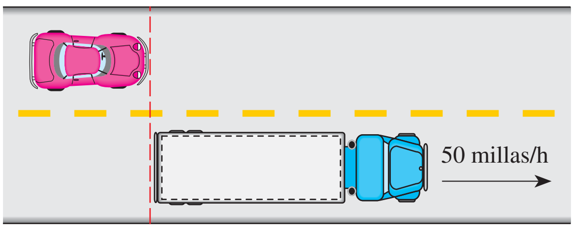
64. Trabajo compartido Jack, Kay y Lynn entregan folletos de propaganda en un poblado pequeño. Si cada uno de ellos trabaja solo, Jack tarda 4 h en entregar todos los folletos, y Lynn se tarda una hora más que Kay. Si trabajan juntos, pueden entregar toda la propaganda en 40% del tiempo que tarda Kay cuando trabaja sola. ¿Cuánto tarda Kay en entregar toda la propaganda ella sola?

65. Distancia, velocidad y tiempo Wendy emprende un viaje desde Davenport hasta Omaha, que es una distancia de 300 millas. Viaja una parte por autobús, el cual llega a la estación del tren justo a tiempo para que Wendy continúe su viaje por tren. El autobús viajó a una velocidad promedio de 40 millas por hora y el tren se mueve a una velocidad de 60 millas por hora. El viaje completo dura $5\frac{1}{2}$ h. ¿Cuánto tiempo pasó Wendy en el tren?

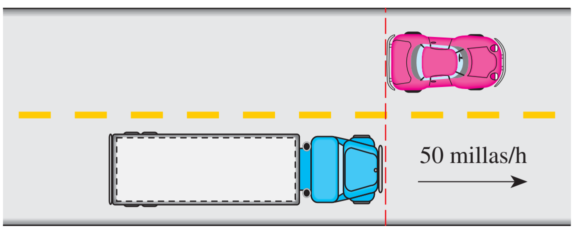
66. Distancia, velocidad y tiempo Dos ciclistas separados por 90 millas, inician al mismo tiempo un viaje para encontrarse. Uno se desplaza el doble de rápido que el otro. Si se encuentran 2 h después, ¿a qué velocidad promedio viajó cada ciclista?

67. Distancia, velocidad y tiempo Un piloto vuela un avión desde Montreal a Los Ángeles, que es una distancia de 2500 millas. En el viaje de regreso la velocidad promedio fue de 20% más alta que la velocidad de ida. El viaje redondo dura 9 h 10 min. ¿Cuál fue la velocidad de Montreal a Los Ángeles?

68. Distancia, velocidad y tiempo Una mujer que maneja un automóvil de 14 pies de largo va a rebasar a un camión de carga de 30 pies de largo. El camión va a una velocidad de 50 millas/hora. ¿Qué tan rápido debe ir la mujer en su automóvil para que pueda rebasar por completo al camión en 6 s, de acuerdo con la posición que se muestra en la figura (a) hasta la posición de la figura (b)? [*Sugerencia:* utilice pies y segundos en lugar de millas y horas.]



a)



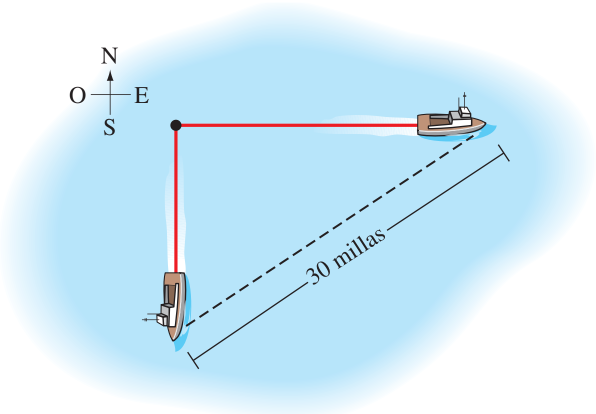
b)

69. Distancia, velocidad y tiempo Un vendedor viaja desde Ajax a Barrington, que es una distancia de 120 millas, a una velocidad constante. Después aumenta su velocidad 10 millas/h para viajar las 150 millas desde Barrington hasta Collins. Si la segunda parte de este viaje tarda 6 min más que la primera parte, ¿a qué velocidad viajó de Ajax a Barrington?

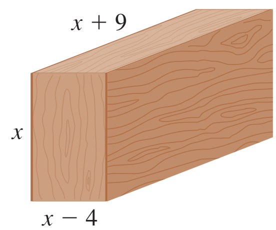
70. Distancia, velocidad y tiempo Kiran fue en automóvil desde Tortula a Cactus, que es una distancia de 250 millas. Luego aumentó su velocidad 10 millas/hora para el viaje de 360 millas entre Cactus y Dry Junction. Si todo el recorrido dura 11 h, ¿cuál fue la velocidad desde Tortula hasta Cactus?

71. Distancia, velocidad y tiempo La tripulación de una lancha tarda 2 h 40 min remar 6 km corriente arriba y regresar. Si la velocidad de la corriente es de 3 km/h, ¿cuál fue la velocidad de remado de la tripulación en aguas tranquilas?

72. Velocidad de un bote Dos naves pesqueras salen de un puerto al mismo tiempo, una viaja hacia el este y otra hacia el sur. El bote que viaja hacia el este se desplaza a una velocidad de 3 millas/h más rápido que el que va al sur. Después de dos horas los botes están separados 30 millas. Calcule la velocidad del bote que va hacia el sur.

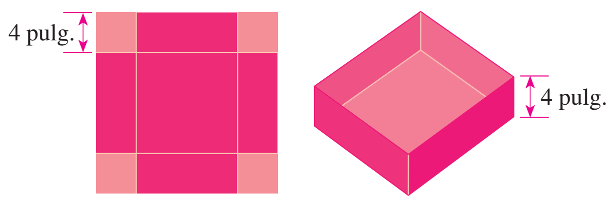


73. Dimensiones de una caja Una caja de madera contrachapada tiene un volumen de 180 pies cúbicos. El largo mide de 9 pies más que su altura y su anchura mide 4 pies menos que su altura. ¿Cuáles son las dimensiones de la caja?

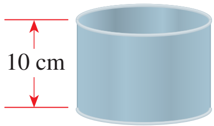


74. Radio de una esfera Un joyero tiene tres esferas sólidas y pequeñas de oro, de 2 mm, 3 mm y 4 mm de radio. El joyero decide fundirlas y hacer una sola esfera con ellas. ¿Cuál será el radio de la esfera resultante?

75. Dimensiones de una caja Una caja de base cuadrada y sin tapa se hace con una pieza cuadrada de cartulina, en la que se recortan cuadrados de 4 pulg en cada esquina, y se doblan los lados según se muestra en la figura. La caja tendrá un volumen de 100 pulg^3. ¿De qué tamaño tiene que ser la cartulina que se requiere?



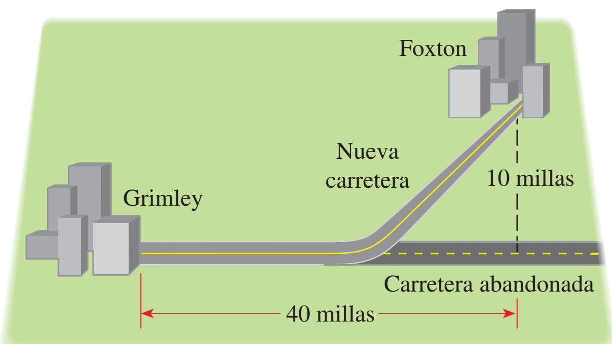
76. Dimensiones de una lata Una lata cilíndrica tiene un volumen de 40π cm^3 y mide 10 cm de altura. ¿Cuál es el diámetro? [*Sugerencia:* aplique la fórmula del volumen que se encuentra en los forros interiores de este libro.]



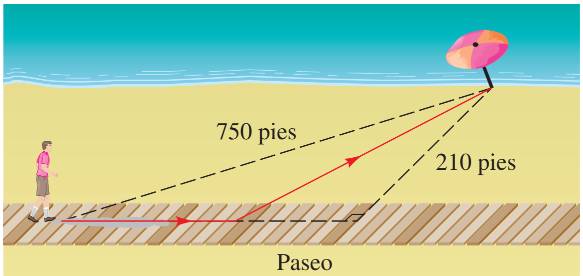
77. Radio de un recipiente Un recipiente esférico tiene una capacidad de 750 galones. Aplique el hecho de que un galón es casi 0.1337 pies cúbicos, y determine el radio del depósito con aproximación a la centésima de pie más cercana.

78. Dimensiones de un terreno Un terreno urbano tiene la forma de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es de 7 pies más grande que uno de los catetos. El perímetro del terreno es de 392 pies. ¿Cuánto mide el otro cateto?

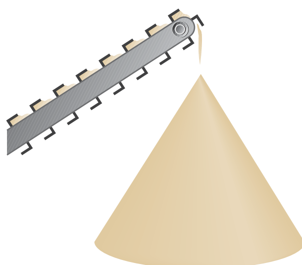
79. Costos de construcción El pueblo de Foxton queda a 10 millas al norte de una carretera abandonada que va del este al oeste que sale de Grimley, según se muestra en la figura. El punto de la carretera abandonada más cercano a Foxton está a 40 millas de Grimley. Las autoridades del condado están por construir una nueva carretera que una los dos pueblos. Ya calcularon que restaurar la carretera vieja costaría 100 000 dólares por milla, y que la construcción de una nueva costaría 200 000 dólares por milla. ¿Cuánto de la carretera abandonada se podría aprovechar, según la figura, si las autoridades pretenden gastar exactamente 6.8 millones? ¿Costaría menos que esta cantidad construir una nueva carretera que una en forma directa los pueblos?



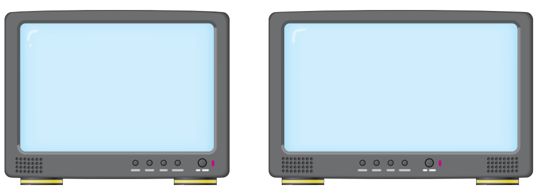
80. Distancia, velocidad y tiempo Un paseo es paralelo a la orilla de una playa recta y está a 210 pies tierra adentro desde dicha orilla. Una playa arenosa está situada entre el paseo y la orilla. Un hombre está parado en el paseo, exactamente a 750 pies de su sombrilla que está al otro lado de la arena; la sombrilla está sobre la orilla de la playa. El hombre camina a 4 pies/s por el paseo y a 2 pies/s sobre la arena. ¿Cuánto debe caminar por el paseo antes de cambiar de dirección y caminar sobre la arena si quiere llegar a su sombrilla en exactamente 4 min 45 s?



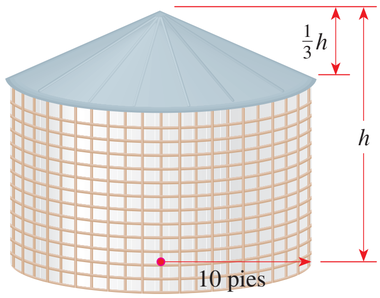
81. Volumen de cereales El grano está cayendo desde un canalón sobre el suelo y forma un montón en forma de cono cuyo diámetro es siempre el triple de su altura. ¿Qué altura tiene el montón, aproximada a la centésima más cercana de un pie, cuando contiene 1000 pies cúbicos de grano?



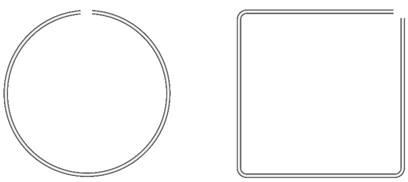
82. Monitores de TV Dos televisores están colocados uno al lado del otro en un aparador de una tienda de aparatos electrónicos. La altura de la pantalla es la misma. Uno tiene una pantalla ordinaria que mide 5 pulg más de ancho que el largo. El otro tiene una pantalla más amplia y de alta definición, que mide de ancho 1.8 veces la altura. La diagonal de la pantalla más ancha mide 14 pulg más que la diagonal de la pantalla más pequeña. ¿Cuál es la altura de las pantallas aproximada hasta la décima de pulgada más cercana?



83. Dimensiones de una estructura Un contenedor para almacenar maíz consta de una parte cilíndrica fabricada con tela de alambre y una cubierta cónica de estaño, como se muestra en la figura. La altura de la cubierta es de un tercio de la altura total de la estructura. Si el volumen total de esta estructura es de 1400π pies cúbicos y su radio es de 10 pies, ¿cuál es la altura total? [*Sugerencia:* utilice las fórmulas del volumen que se encuentran en los forros interiores de este libro.]



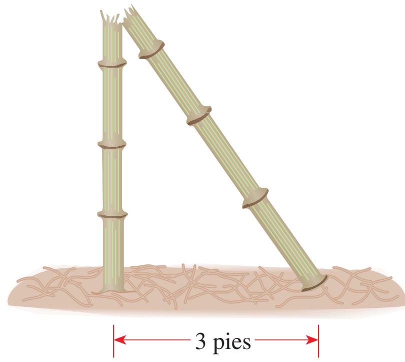
84. Comparación de áreas Un alambre de 360 pulg de largo se corta en dos partes. Con una parte se forma un cuadrado y con la otra un círculo. Si las dos figuras tienen la misma área, ¿cuánto miden de largo los dos trozos de alambre? Exprese los resultados a la décima más cercana de una pulgada.



85. Un antiguo problema chino Este problema se tomó de un libro chino de matemáticas llamado *Chui-chang suan-shu*, que quiere decir *Nine Chapters on the Mathematical Art*, que se escribió por el año 250 antes de nuestra era.

Una vara de bambú de 10 pies de largo se parte de tal manera que la punta toca el suelo a 3 pies de la base de la vara, como se muestra en la figura. ¿A qué altura se produjo el quiebre?

[*Sugerencia:* utilice el Teorema de Pitágoras.]



Descubrimiento • Debate

86. Investigación histórica Lea las notas sobre la vida de Pitágoras (pág. 54), Euclides (pág. 532) y Arquímedes (pág. 748). Elija uno de estos matemáticos e investigue más acerca de él en la biblioteca o la Internet. Escriba un ensayo sobre lo que encuentre. Incluya tanto información biográfica como una descripción de los conceptos matemáticos por los cuales se hizo famoso.

87. Una ecuación cuadrática babilonia Los antiguos babilonios sabían cómo resolver ecuaciones cuadráticas. En seguida se presenta un problema de una de las tablillas con símbolos cuneiformes encontradas en una escuela de Babilonia, que data de hace más de 2000 años antes de nuestra era.

> Tengo una vara, no conozco su largo. Le corté un codo, y así la vara cabe 60 veces en el largo de mi parcela. Restablecí a la vara lo que le había cortado, y ahora se ajusta 30 veces en el ancho de mi parcela. El área de mi parcela es de 375 nindas cuadradas. ¿Cuál era la longitud original de la vara?

Resuelva este problema. Aplique el hecho de que 1 ninda = 12 codos.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Ecuaciones a través de las épocas

Las ecuaciones se han utilizado para resolver problemas a través de toda la historia registrada, en todas las civilizaciones. (Véase por ejemplo el ejercicio 85 de la página 74.) A continuación presentamos un problema de Babilonia (alrededor de 2000 años antes de nuestra era).

The British Museum

> Encontré una piedra, pero no la pesé. Después añadí un séptimo y luego un onceavo del resultado; pesé todo y encontré que pesaba una mina. ¿Cuál era el peso original de la piedra?

La respuesta dada en la tablilla es de $\frac{2}{3}$ mina, 8 sheqel, y $22\frac{1}{2}$ se, donde 1 mina $=$ 60 sheqel y 1 sheqel $=$ 180 se.

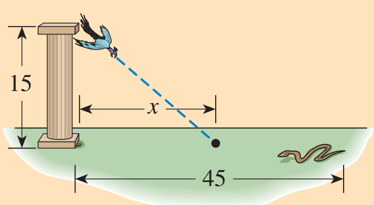
En el antiguo Egipto, el saber cómo resolver problemas planteados en palabras era un secreto altamente valorado. El Papiro Rhind (alrededor de 1850 años antes de nuestra era) contiene muchos de dichos problemas (véase pág. 716). El problema 32 en el papiro dice:

> Una cantidad, su tercio, su cuarto, sumados juntos se convierten en 2. ¿Cuál es la cantidad?

La respuesta en la notación egipcia es $1 + \overline{4} + \overline{76}$, donde la barra indica "recíproco", como nuestra notación 4^{-1}.

El matemático griego Diofanto (alrededor de 250 antes de nuestra era) escribió el libro *Arithmetica*, el cual contiene muchos enunciados de problemas y ecuaciones. El matemático indio Bhaskara (siglo XII antes de nuestra era, véase pág. 144) y el matemático chino Chang Ch'iu-Chien (siglo VI antes de nuestra era) también estudiaron y escribieron sobre ecuaciones. Naturalmente, las ecuaciones siguen siendo importantes en la actualidad.

1. Resuelvan el problema babilonio y demuestren que su respuesta es correcta.
2. Resuelvan el problema egipcio y demuestren que su respuesta es correcta.
3. Los egipcios y babilonios antiguos utilizaban ecuaciones para resolver problemas prácticos. Por los problemas que se han dado aquí, ¿cree usted que habrán disfrutado de plantear y resolver problemas sólo por gusto?
4. Resuelva este problema de la India del sigo XII antes de nuestra era.



> Un pavo real está posado en lo alto de una columna de 15 codos y la guarida de una serpiente está al pie de la columna. El pavo ve a la serpiente cuando ésta se encuentra a 45 codos de su madriguera, y se lanza en forma oblicua sobre ella cuando se desliza hacia su agujero. ¿A cuántos codos de la madriguera de la serpiente se encuentran, suponiendo que cada uno se desplaza una distancia igual?

5. Considere este problema de la China del siglo VI.

> Si un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y tres pollos juntos valen una moneda, ¿cuántos gallos, gallinas y pollos, que hagan un total de 100, se pueden comprar con 100 monedas?

Este problema tiene varias respuestas. Aplique el ensayo y error para encontrar por lo menos una respuesta. ¿Es un problema práctico o un acertijo? Escriba un ensayo corto para sustentar su opinión.

6. Escriba un ensayo corto para explicar cuántas ecuaciones afectan su propia vida en el mundo actual.

1.7 Desigualdades

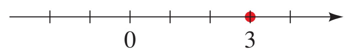
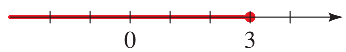
En el álgebra, algunos problemas originan **desigualdades** en lugar de ecuaciones. Una desigualdad es similar a una ecuación, sólo que en lugar de tener un signo de igual hay uno de los símbolos $<$, $>$, $\leq$ o $\geq$. Aquí está un ejemplo de una desigualdad:

$$4x + 7 \leq 19$$

x	$4x + 7 \leq 19$
1	$11 \leq 19$ ✓
2	$15 \leq 19$ ✓
3	$19 \leq 19$ ✓
4	$23 \leq 19$ ✗
5	$27 \leq 19$ ✗

La tabla que aparece al margen muestra que algunos números satisfacen la desigualdad y algunos números no.

Resolver una desigualdad que contiene una variable quiere decir determinar todos los valores de la variable que hacen que la desigualdad sea verdadera. Al contrario que en una ecuación, una desigualdad por lo general tiene infinitas soluciones, las cuales forman un intervalo o una unión de intervalos en la recta de los números reales. La ilustración que sigue muestra cómo una desigualdad difiere de su ecuación correspondiente:

		Solución	**Gráfica**
Ecuación:	$4x + 7 = 19$	$x = 3$	
Desigualdad:	$4x + 7 \leq 19$	$x \leq 3$	

Para resolver desigualdades, aplicamos las reglas siguientes para aislar la variable a un lado del signo de la desigualdad. Estas reglas indican cuándo dos desigualdades son *equivalentes* (el símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivale a"). En estas reglas, los símbolos A, B y C son números reales o expresiones algebraicas. Aquí establecemos las reglas para desigualdades que contienen el símbolo $\leq$, pero se aplican a los cuatro símbolos de desigualdad.

Reglas de las desigualdades

Regla	Descripción
1. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A + C \leq B + C$	**Sumar** la misma cantidad a cada miembro de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
2. $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad A - C \leq B - C$	**Restar** la misma cantidad de ambos miembros de una desigualdad da una desigualdad equivalente.
3. Si $C > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \leq CB$	**Multiplicar** cada miembro de una desigualdad por la misma cantidad *positiva* da una desigualdad equivalente.
4. Si $C < 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad CA \geq CB$	**Multiplicar** ambos miembros de una desigualdad por la misma cantidad *negativa invierte la dirección* de la desigualdad.
5. Si $A > 0$ y $B > 0$, entonces $A \leq B \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{A} \geq \dfrac{1}{B}$	**Obtener los recíprocos** de ambos miembros de una desigualdad que contiene cantidades *positivas invierte la dirección* de la desigualdad.
6. Si $A \leq B$ y $C \leq D$, entonces $A + C \leq B + D$	Las desigualdades se pueden sumar.

Ponga atención especial a las reglas 3 y 4. La regla 3 establece que podemos multiplicar (o dividir) cada miembro de una desigualdad por un número *positivo*, pero la regla 4 señala que si multiplicamos cada miembro de una desigualdad por un número *negativo*, entonces invertimos la dirección de la desigualdad. Por ejemplo, si empezamos con la desigualdad

$$3 < 5$$

y multiplicamos por 2, obtenemos

$$6 < 10$$

pero si multiplicamos por -2, tenemos

$$-6 > -10$$

Desigualdades lineales

Una desigualdad es **lineal** si cada término es constante o es un múltiplo de la variable.

Ejemplo 1 Resolución de una desigualdad lineal

Resuelva la desigualdad $3x < 9x + 4$ y grafique el conjunto solución.

Solución

$$3x < 9x + 4$$

$$3x - 9x < 9x + 4 - 9x \qquad \text{Sustracción de } 9x$$

$$-6x < 4 \qquad \text{Simplificación}$$

$$\left(-\tfrac{1}{6}\right)(-6x) > \left(-\tfrac{1}{6}\right)(4) \qquad \text{Multiplicación por } -\tfrac{1}{6} \text{ (o división entre } -6)$$

$$x > -\tfrac{2}{3} \qquad \text{Simplificación}$$

La multiplicación por el número $-\frac{1}{6}$ *invierte* la dirección de la desigualdad.

El conjunto solución consta de todos los números mayores que $-\frac{2}{3}$. En otras palabras, la solución de la desigualdad es el intervalo $\left(-\frac{2}{3}, \infty\right)$. La gráfica se ilustra en la figura 1. ■

Figura 1

Ejemplo 2 Resolución de un par de desigualdades simultáneas

Resuelva las desigualdades $4 \le 3x - 2 < 13$.

Solución El conjunto solución consiste en todos los valores de x que cumplen tanto la desigualdad $4 \le 3x - 2$ y $3x - 2 < 13$. Aplicando las reglas 1 y 3, vemos que las desigualdades siguientes son equivalentes:

$$4 \le 3x - 2 < 13$$

$$6 \le 3x < 15 \qquad \text{Suma de 2}$$

$$2 \le x < 5 \qquad \text{División entre 3}$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $[2, 5)$, como se ilustra en la figura 2. ■

Figura 2

Desigualdades no lineales

Para resolver desigualdades que contienen la variable al cuadrado o a otras potencias, aplicamos la factorización junto con el principio siguiente.

El signo de un producto o cociente

Si un producto o un cociente tienen un número *par* de factores *negativos*, entonces su valor es *positivo*.

Si un producto o un cociente tienen un número *impar* de factores *negativos*, entonces su valor es *negativo*.

Ejemplo 3 Una desigualdad cuadrática

Resuelva la desigualdad $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

Solución Primero factorizamos el primer miembro.

$$(x - 2)(x - 3) \leq 0$$

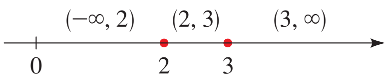


Figura 3

Sabemos que la ecuación correspondiente $(x - 2)(x - 3) = 0$ tiene las soluciones 2 y 3. Como se ilustra en la figura 3, los números 2 y 3 dividen la recta de los números reales en tres intervalos: $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ y $(3, \infty)$. Determinamos los signos de los factores usando **valores de prueba** en cada uno de estos intervalos. Elegimos un número dentro de cada intervalo y comprobamos el signo de los factores $x - 2$ y $x - 3$ en el valor seleccionado. Por ejemplo, si usamos el valor de prueba $x = 1$ para el intervalo $(-\infty, 2)$ mostrado en la figura 4, entonces la sustitución en los factores $x - 2$ y $x - 3$ da

$$x - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

y

$$x - 3 = 1 - 3 = -2 < 0$$

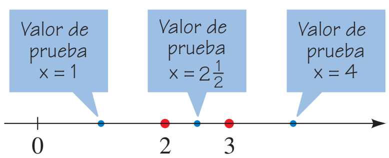


Figura 4

Ambos factores son negativos en este intervalo. (Los factores $x - 2$ y $x - 3$ cambian de signo sólo en 2 y en 3, respectivamente, de modo que conservan sus signos en cada intervalo. Ésta es la razón de que usar un solo valor de prueba en cada intervalo es suficiente.)

La siguiente tabla de signos se elaboró usando los valores de prueba $x = 2\frac{1}{2}$ y $x = 4$ para los intervalos $(2, 3)$ y $(3, \infty)$ (véase la figura 4), respectivamente. El renglón final es el producto de dos factores.

Intervalo	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$	$+$	$+$
Signo de $x - 3$	$-$	$-$	$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$	$-$	$+$

Si lo prefiere, puede representar esta información sobre una recta numérica, como en el siguiente diagrama de signos. Las líneas verticales indican los puntos en los cuales la recta de los números reales se divide en intervalos:

	$(-\infty, 2)$	2	$(2, 3)$	3	$(3, \infty)$
Signo de $x - 2$	$-$		$+$		$+$
Signo de $x - 3$	$-$		$-$		$+$
Signo de $(x - 2)(x - 3)$	$+$		$-$		$+$

De acuerdo con la tabla o con el diagrama vemos que $(x - 2)(x - 3)$ es negativo en el intervalo $(2, 3)$. Por consiguiente, la solución de la desigualdad $(x - 2)(x - 3) \leq 0$ es

$$\{x \mid 2 \leq x \leq 3\} = [2, 3]$$

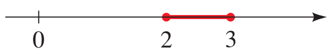


Figura 5

Están incluidos los extremos 2 y 3 porque buscamos valores de x tales que el producto es menor que o *igual a* cero. La solución se ilustra en la figura 5. ■

En el ejemplo 3 se ilustran los siguientes criterios para resolver una desigualdad que se puede factorizar.

Criterios para resolver desigualdades no lineales

1. **Pase todos los términos a un miembro.** Si es necesario, vuelva a escribir la desigualdad de modo que todos los términos no cero aparezcan a un lado del signo de la desigualdad. Si el lado no cero de la desigualdad contiene cocientes, busque un denominador común.

2. **Factorice.** Factorice el miembro no cero de la desigualdad.

3. **Determine los intervalos.** Calcule los valores para los cuales cada factor es cero. Estos números dividirán la recta numérica en intervalos. Liste los intervalos determinados por medio de estos números.

4. **Elabore una tabla o diagrama.** Utilice los valores de prueba para construir una tabla o un diagrama de los signos de cada factor en cada intervalo. En el último renglón de la tabla determine el signo del producto o cociente de estos factores.

5. **Resuelva.** Determine la solución de la desigualdad a partir del último renglón de la tabla de signos. Compruebe si alguno de los extremos de los intervalos cumplen con la desigualdad, lo cual es válido si la desigualdad contiene $\leq$ o $\geq$).

La técnica de factorización descrita en estos criterios funciona sólo si todos los términos no cero aparecen en un lado del símbolo de desigualdad. Si la desigualdad no está expresada en esta forma, primero vuélvala a escribir, como se indica en el paso 1. Esta técnica se ilustra en los ejemplos que siguen.

Es tentador multiplicar ambos miembros de la desigualdad por $1 - x$ (como se haría si ésta fuera una *ecuación*). Esto no funciona porque no sabemos si $1 - x$ es positivo o negativo, de modo que no podemos decir si la desigualdad necesita ser invertida. (Véase el ejercicio 110.)

Ejemplo 4 Una desigualdad que contiene un cociente

Resuelva: $\dfrac{1 + x}{1 - x} \geq 1$

Solución Primero pasamos todos los términos no cero al lado izquierdo, y luego simplificamos usando un denominador común.

Pase los términos a un lado

$$\frac{1 + x}{1 - x} \geq 1$$

$$\frac{1 + x}{1 - x} - 1 \geq 0 \qquad \text{Resta de 1 para pasar todos los términos al primer miembro}$$

$$\frac{1 + x}{1 - x} - \frac{1 - x}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{Denominador común } 1 - x$$

$$\frac{1 + x - 1 + x}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{Combinación de las fracciones}$$

$$\frac{2x}{1 - x} \geq 0 \qquad \text{Simplificación}$$

El numerador es cero cuando $x = 0$ y el denominador es cero cuando $x = 1$, de modo que elaboramos el siguiente diagrama de signos usando los valores para definir intervalos en la recta numérica.

Elabore un diagrama

	(menor que 0)	0 a 1	(mayor que 1)
Signo de $2x$	$-$	$+$	$+$
Signo de $1 - x$	$+$	$+$	$-$
Signo de $\dfrac{2x}{1 - x}$	$-$	$+$	$-$

Resuelva

A partir del diagrama vemos que la solución es $\{x \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1)$. Está incluido el extremo 0 porque la desigualdad original requiere que el cociente sea mayor que o *igual a* 1. No obstante, no incluimos el otro extremo porque el cociente de la desigualdad no está definido en 1. Compruebe siempre los extremos de los intervalos de solución para determinar si cumplen la desigualdad original.

El conjunto solución $[0, 1)$ se ilustra en la figura 6. ■

Figura 6

Ejemplo 5 Resolución de una desigualdad con tres factores

Resuelva la desigualdad $x < \dfrac{2}{x - 1}$.

Solución Después de pasar todos los términos no cero a un lado de la desigualdad, utilizamos un común denominador para combinar los términos.

Pase los términos a un lado

$$x - \frac{2}{x - 1} < 0 \qquad \text{Resta de } \frac{2}{x - 1}$$

$$\frac{x(x - 1)}{x - 1} - \frac{2}{x - 1} < 0 \qquad \text{Común denominador } x - 1$$

$$\frac{x^2 - x - 2}{x - 1} < 0 \qquad \text{Combinación de fracciones}$$

Factorice

$$\frac{(x + 1)(x - 2)}{x - 1} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

Determine los intervalos

Los factores en este cociente cambian de signo en -1, 1 y 2, de modo que debemos examinar los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, \infty)$. Al usar los valores de prueba, obtenemos el siguiente diagrama de signos.

Elabore un diagrama

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
Signo de $x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
Signo de $x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
Signo de $x - 1$	$-$	$-$	$+$	$+$
Signo de $\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Figura 7

Como el cociente debe ser negativo, la solución es

$$(-\infty, -1) \cup (1, 2)$$

como se ilustra en la figura 7. ■

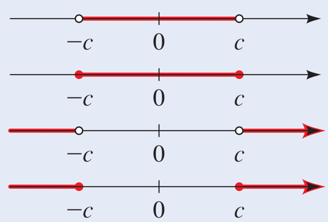
Desigualdades con valores absolutos

Aplicamos las propiedades siguientes para resolver desigualdades que contienen valores absolutos.

Propiedades de desigualdades con valores absolutos

Desigualdad	Forma equivalente
1. $\lvert x \rvert < c$	$-c < x < c$
2. $\lvert x \rvert \le c$	$-c \le x \le c$
3. $\lvert x \rvert > c$	$x < -c$ o $c < x$
4. $\lvert x \rvert \ge c$	$x \le -c$ o $c \le x$

Gráfica



Estas propiedades se cumplen cuando x se reemplaza por cualquier expresión algebraica. (En la figuras suponemos que $c > 0$.)

Estas propiedades se pueden demostrar usando la definición de valor absoluto. Para demostrar la propiedad 1, por ejemplo, observe que la desigualdad $\lvert x \rvert < c$ establece que la distancia desde x hasta 0 es menor que c, y según la figura 8 usted puede observar que esto es cierto si y sólo si x está entre $-c$ y c.

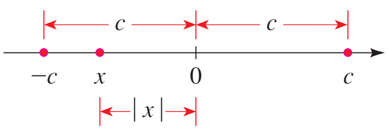


Figura 8

Ejemplo 6 Resolución de una desigualdad que contiene valor absoluto

Resuelva la desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$.

Solución 1 La desigualdad $\lvert x - 5 \rvert < 2$ equivale a

$$-2 < x - 5 < 2 \qquad \text{Propiedad 1}$$

$$3 < x < 7 \qquad \text{Suma de 5}$$

El conjunto solución es el intervalo abierto $(3, 7)$.

Solución 2 Desde el punto de vista geométrico, el conjunto solución consiste en todos los números x cuya distancia desde 5 es menor que 2. Según la figura 9, vemos que es el intervalo $(3, 7)$. ■

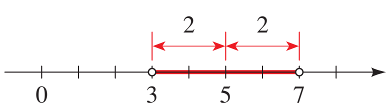


Figura 9

Ejemplo 7 Resolución de una desigualdad que contiene valor absoluto

Resuelva la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$.

Solución De acuerdo con la propiedad 4 la desigualdad $|3x + 2| \geq 4$ equivale a

$$
\begin{array}{rclrl}
3x + 2 \geq 4 & \quad \text{o bien} \quad & 3x + 2 \leq -4 & \\
3x \geq 2 & & 3x \leq -6 & \text{Resta de 2} \\
x \geq \frac{2}{3} & & x \leq -2 & \text{División entre 3}
\end{array}
$$

De modo que el conjunto solución es

$$\{x \mid x \leq -2 \quad \text{o bien} \quad x \geq \tfrac{2}{3}\} = (-\infty, -2] \cup [\tfrac{2}{3}, \infty)$$

El conjunto se grafica en la figura 10. ■

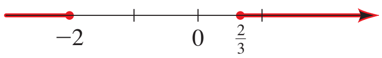


Figura 10

Modelado con desigualdades

El modelado de problemas de la vida cotidiana da con frecuencia desigualdades porque estamos interesados a menudo en determinar cuándo una cantidad es más o menos que otra.

Ejemplo 8 Boletos para el carnaval

Un carnaval tiene dos planes de boletos.

Plan A: tarifa de entrada de 5 dólares y 25 centavos cada vuelta en los juegos

Plan B: tarifa de entrada de 2 dólares y 50 centavos cada vuelta en los juegos

¿Cuántas vueltas tendría que dar para que el plan A resultara menos caro que el plan B?

Solución Se pide el número de vueltas en los juegos para que el plan A sea menos caro que el plan B. Entonces

$$x = \text{número de vueltas}$$

Identifique la variable

La información en el problema se podría organizar como sigue.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de vueltas	x
Costo con el plan A	$5 + 0.25x$
Costo con el plan B	$2 + 0.50x$

Ahora planteamos el modelo.

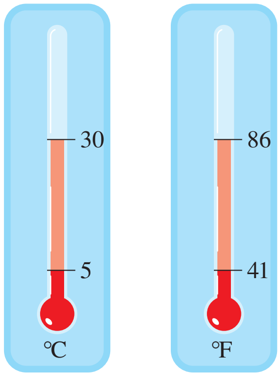
Plantee el modelo

$$\text{costo con el plan A} < \text{costo con el plan B}$$

Resuelva

$$
\begin{array}{rll}
5 + 0.25x < 2 + 0.50x & \\
3 + 0.25x < 0.50x & \text{Resta de 2} \\
3 < 0.25x & \text{Resta de } 0.25x \\
12 < x & \text{División entre 0.25}
\end{array}
$$

De modo que si planea dar *más de* 12 vueltas, el plan A es menos caro. ■



Ejemplo 9 Escalas Fahrenheit y Celsius

Las instrucciones en un empaque de película indican que la caja debe conservarse a una temperatura entre 5°C y 30°C. ¿Qué temperaturas corresponden en la escala Fahrenheit?

Solución La relación entre grados Celsius (C) y grados Fahrenheit (F) la da la ecuación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$. Al expresar la condición de la caja en términos de desigualdades, tenemos

$$5 < C < 30$$

De modo que las temperaturas Fahrenheit correspondientes cumplen con las desigualdades

$$\begin{aligned} 5 &< \tfrac{5}{9}(F - 32) < 30 & \\ \tfrac{9}{5}\cdot 5 &< F - 32 < \tfrac{9}{5}\cdot 30 & \text{Multiplicación por } \tfrac{9}{5} \\ 9 &< F - 32 < 54 & \text{Simplificación} \\ 9 + 32 &< F < 54 + 32 & \text{Suma de 32} \\ 41 &< F < 86 & \text{Simplificación} \end{aligned}$$

La película se debe conservar a una temperatura de entre 41 y 86°F. ■

Ejemplo 10 Boletos para un concierto

Un grupo de estudiantes decide asistir a un concierto. El costo de contratar a un autobús para que los lleve al concierto es de 450 dólares, lo cual se debe repartir en forma uniforme entre los estudiantes. Los promotores del concierto ofrecen descuentos a grupos que lleguen en autobús. Los boletos cuestan normalmente 50 dólares cada uno, pero se reducen 10 centavos de dólar del precio del boleto por cada persona que vaya en el grupo (hasta la capacidad máxima del autobús). ¿Cuántos estudiantes deben ir en el grupo para que el costo total por estudiante sea menor a 54 dólares?

Solución Se pide determinar el número de estudiantes que debe ir en el grupo. Entonces,

Identifique la variable

$$x = \text{cantidad de estudiantes en el grupo}$$

La información del problema se podría organizar como se indica a continuación.

Exprese todas las cantidades desconocidas en términos de la variable

En palabras	En lenguaje algebraico
Número de estudiantes en el grupo	x
Costo del autobús por estudiante	$\frac{450}{x}$
Costo del boleto por estudiante	$50 - 0.10x$

Ahora planteamos el modelo.

Plantee el modelo

$$\boxed{\text{costo del autobús de cada estudiante}} + \boxed{\text{costo del boleto para cada estudiante}} < \boxed{54}$$

$$\frac{450}{x} + (50 - 0.10x) < 54$$

Resuelva

$$\frac{450}{x} - 4 - 0.10x < 0 \qquad \text{Sustracción de 54}$$

$$\frac{450 - 4x - 0.10x^2}{x} < 0 \qquad \text{Denominador común}$$

$$\frac{4500 - 40x - x^2}{x} < 0 \qquad \text{Multiplicación por 10}$$

$$\frac{(90 + x)(50 - x)}{x} < 0 \qquad \text{Factorización del numerador}$$

	$(-\infty, -90)$	$(-90, 0)$	$(0, 50)$	$(50, \infty)$
Signo de $90 + x$	−	+	+	+
Signo de $50 - x$	+	+	+	−
Signo de x	−	−	+	+
Signo de $\frac{(90 + x)(50 - x)}{x}$	+	−	+	−

El diagrama de signos muestra que la solución de la desigualdad es $(-90, 0) \cup (50, \infty)$. Debido a que no podemos tener un número negativo de estudiantes, se infiere que el grupo debe tener más de 50 estudiantes para que el total del costo por persona sea menor de 54 dólares. ■

1.7 Ejercicios

1–6 ■ Sea $S = \{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\}$. Determine cuáles elementos de S cumplen con la desigualdad.

1. $3 - 2x \leq \frac{1}{2}$ **2.** $2x - 1 \geq x$

3. $1 < 2x - 4 \leq 7$ **4.** $-2 \leq 3 - x < 2$

5. $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ **6.** $x^2 + 2 < 4$

7–28 ■ Resuelva la desigualdad lineal. Exprese la solución usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

7. $2x - 5 > 3$ **8.** $3x + 11 < 5$

9. $7 - x \geq 5$ **10.** $5 - 3x \leq -16$

11. $2x + 1 < 0$ **12.** $0 < 5 - 2x$

13. $3x + 11 \leq 6x + 8$ **14.** $6 - x \geq 2x + 9$

15. $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$ **16.** $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$

17. $\frac{1}{3}x + 2 < \frac{1}{6}x - 1$ **18.** $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$

19. $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$ **20.** $2(7x - 3) \leq 12x + 16$

21. $2 \leq x + 5 < 4$ **22.** $5 \leq 3x - 4 \leq 14$

23. $-1 < 2x - 5 < 7$ **24.** $1 < 3x + 4 \leq 16$

25. $-2 < 8 - 2x \leq -1$ **26.** $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$

27. $\frac{1}{6} < \frac{2x - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$ **28.** $-\frac{1}{2} \leq \frac{4 - 3x}{5} \leq \frac{1}{4}$

29–62 ■ Resuelva la desigualdad no lineal. Exprese la solución usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

29. $(x + 2)(x - 3) < 0$ **30.** $(x - 5)(x + 4) \geq 0$

31. $x(2x + 7) \geq 0$ **32.** $x(2 - 3x) \leq 0$

33. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$ **34.** $x^2 + 5x + 6 > 0$

35. $2x^2 + x \geq 1$ **36.** $x^2 < x + 2$

37. $3x^2 - 3x < 2x^2 + 4$ **38.** $5x^2 + 3x \geq 3x^2 + 2$

39. $x^2 > 3(x + 6)$ **40.** $x^2 + 2x > 3$

41. $x^2 < 4$ **42.** $x^2 \geq 9$

43. $-2x^2 \leq 4$

44. $(x + 2)(x - 1)(x - 3) \leq 0$

45. $x^3 - 4x > 0$ **46.** $16x \leq x^3$

47. $\frac{x - 3}{x + 1} \geq 0$ **48.** $\frac{2x + 6}{x - 2} < 0$

49. $\frac{4x}{2x + 3} > 2$ **50.** $-2 < \frac{x + 1}{x - 3}$

51. $\dfrac{2x+1}{x-5} \leq 3$

52. $\dfrac{3+x}{3-x} \geq 1$

53. $\dfrac{4}{x} < x$

54. $\dfrac{x}{x+1} > 3x$

55. $1 + \dfrac{2}{x+1} \leq \dfrac{2}{x}$

56. $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{4}{x} \geq 1$

57. $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{6}{x} \geq 1$

58. $\dfrac{x}{2} \geq \dfrac{5}{x+1} + 4$

59. $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x-1}{x-2}$

60. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} \leq 0$

61. $x^4 > x^2$

62. $x^5 > x^2$

63–76 ■ Resuelva la desigualdad con valor absoluto. Exprese la respuesta usando la notación de intervalos y grafique el conjunto solución.

63. $|x| \leq 4$

64. $|3x| < 15$

65. $|2x| > 7$

66. $\frac{1}{2}|x| \geq 1$

67. $|x-5| \leq 3$

68. $|x+1| \geq 1$

69. $|2x-3| \leq 0.4$

70. $|5x-2| < 6$

71. $\left|\dfrac{x-2}{3}\right| < 2$

72. $\left|\dfrac{x+1}{2}\right| \geq 4$

73. $|x+6| < 0.001$

74. $3 - |2x+4| \leq 1$

75. $8 - |2x-1| \geq 6$

76. $7|x+2| + 5 > 4$

77–80 ■ Se proporciona una frase que describe un conjunto de números reales. Exprese la frase como una desigualdad que contiene valores absolutos.

77. Todos los números reales x menores que 3 unidades a partir del 0

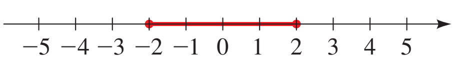
78. Todos los números reales x de más de 2 unidades a partir del 0

79. Todos los números reales x de por lo menos 5 unidades a partir del 7

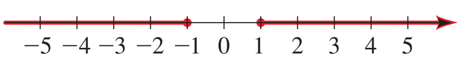
80. Todos los números reales x cuando mucho de 4 unidades a partir del 2

81–86 ■ Está graficado un conjunto de números reales. Encuentre una desigualdad que contenga un valor absoluto que describa el conjunto.

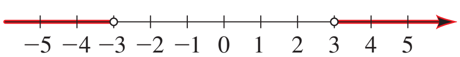
81.



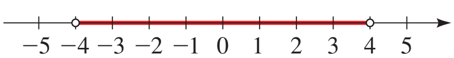
82.



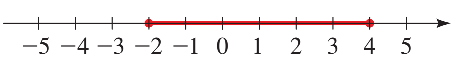
83.



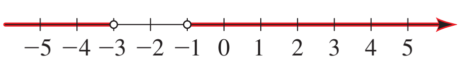
84.



85.



86.



87–90 ■ Determine los valores de la variable para la cual la expresión está definida como un número real.

87. $\sqrt{16 - 9x^2}$

88. $\sqrt{3x^2 - 5x + 2}$

89. $\left(\dfrac{1}{x^2 - 5x - 14}\right)^{1/2}$

90. $\sqrt[4]{\dfrac{1-x}{2+x}}$

91. Resuelva la desigualdad con respecto a x, suponiendo que a, b y c son constantes positivas.

a) $a(bx - c) \geq bc$ **b)** $a \leq bx + c < 2a$

92. Suponga que a, b, c y d son números positivos tales que

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Demuestre que $\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+c}{b+d} < \dfrac{c}{d}$

Aplicaciones

93. Escalas de temperatura Aplique la relación entre C y F dada en el ejemplo 9 para determinar el intervalo en la escala Fahrenheit que corresponde al intervalo de temperatura $20 \leq C \leq 30$.

94. Escalas de temperatura ¿Qué intervalo de la escala de Celsius corresponde al intervalo $50 \leq F \leq 95$?

95. Costo de la renta de un automóvil Una compañía que renta vehículos ofrece dos planes para rentar un automóvil.

Plan A: 30 dólares por día y 10 centavos por milla

Plan B: 50 dólares por día y gratis millas recorridas ilimitadas

¿Para qué valor de millas el plan B le hará ahorrar dinero?

96. Costos de las llamadas de larga distancia Una compañía telefónica ofrece dos planes de larga distancia.

Plan A: 25 dólares por mes y 5 centavos por minuto

Plan B: 5 dólares por mes y 12 centavos por minuto

¿Para cuántos minutos de llamadas de larga distancia el plan B sería ventajoso desde el punto de vista financiero?

97. Costos de manejo de un automóvil Se estima que el costo anual de manejar un cierto automóvil nuevo se obtiene mediante la fórmula

$$C = 0.35m + 2200$$

donde m representa la cantidad de millas recorridas al año y C es el costo en dólares. Jane compró uno de esos vehículos y decide apartar para el año próximo entre 6400 y 7100 dólares para los costos de manejo. ¿Cuál es el intervalo correspondiente de millas que puede recorrer con su nuevo automóvil?

98. Cantidad de millas por galón de gasolina La cantidad de millas que recorre un vehículo particular por cada galón de gasolina, manejado a v millas por hora, se obtiene mediante la fórmula $g = 10 + 0.9v - 0.01v^2$, siempre que v esté entre 10 millas/h y 75 millas/h. ¿Para qué velocidades la cantidad de millas recorridas por galón es 30 millas/galón o más?

99. Gravedad La fuerza gravitacional F que ejerce la Tierra sobre un objeto cuya masa es de 100 kg se determina mediante la ecuación

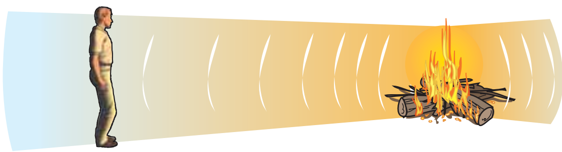
$$F = \frac{4\,000\,000}{d^2}$$

donde d es la distancia en km del objeto desde el centro de la Tierra y la fuerza F se mide en newtons (N). ¿Para qué distancias la fuerza que ejerce la Tierra sobre este objeto estará entre 0.0004 N y 0.01 N?

100. Temperatura de una hoguera En las cercanías de una hoguera, la temperatura T en °C a una distancia de x metros desde el centro de la hoguera se determina mediante

$$T = \frac{600\,000}{x^2 + 300}$$

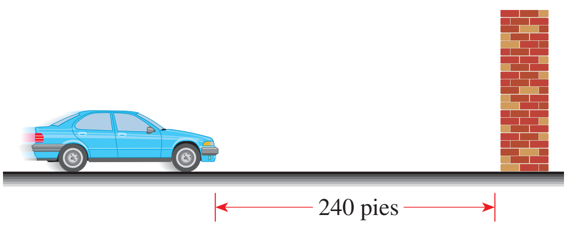
¿A qué distancias del centro del fuego la temperatura será menor de 500°C?



101. Distancia de frenado Para un cierto modelo de automóvil la distancia d que requiere para detenerse si está viajando a una velocidad v millas/h se encuentra mediante la fórmula

$$d = v + \frac{v^2}{20}$$

donde d se mide en pies. Kerry desea que su distancia de frenado no exceda 240 pies. ¿Entre qué rango de velocidad debe viajar?



102. Ganancia de un fabricante Si un fabricante vende x unidades de un cierto producto, sus ingresos R y sus costos C todo en dólares, son

$$R = 20x$$
$$C = 2000 + 8x + 0.0025x^2$$

Aplique el hecho de que

$$\text{ganancia} = \text{ingresos} - \text{costos}$$

para determinar cuántas unidades debe vender para disfrutar de una ganancia de por lo menos 2400 dólares.

103. Temperatura del aire A medida que el aire seco asciende, se expande, y al hacerlo se enfría a un ritmo de alrededor de 1°C por cada 100 metros que sube, hasta casi los 12 km.

a) Si la temperatura del suelo es de 20°C, plantee una fórmula para la temperatura a una altura h.

b) ¿Que temperaturas se pueden esperar si un aeroplano despega y alcanza una altura máxima de 5 km?

104. Precio del boleto de avión Una aerolínea que fleta aviones observa que en sus vuelos del sábado desde Filadelfia a Londres, los 120 lugares se venderán si el precio del boleto es de 200 dólares. Pero por cada 3 dólares de incremento en el precio del boleto, los lugares vendidos disminuirán en uno.

a) Determine una fórmula para el número de lugares vendidos si el precio del boleto es P dólares.

b) En un cierto periodo, el número de lugares vendidos para este vuelo varían entre 90 y 115. ¿Cuál fue el intervalo correspondiente de precios para el boleto?

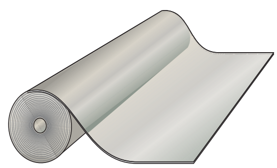
105. Costo de una función de teatro Un barco en el río ofrece funciones de teatro y el viaje en autobús para grupos de personas con las siguientes bases. Alquilar un autobús cuesta al grupo 360 dólares, que los del grupo deben aportar por partes iguales. Los boletos para la función de teatro cuestan normalmente 30 dólares cada uno, pero se les descuentan 25 centavos de dólar por cada persona del grupo. ¿Cuántas personas deben ir en grupo para que el costo de la tarifa del autobús más el boleto de la función de teatro sea de menos de 39 dólares por persona?

106. Cercado de un jardín Una mujer tiene 120 pies de una cerca resistente a los venados. Quiere delimitar un huerto rectangular en su terreno que mida por lo menos 800 pies cuadrados. ¿Qué valores son posibles para el largo de dicho huerto rectangular?

107. Espesor de un material laminado Una compañía fabrica laminados industriales (hojas delgadas con una base de nailon) de 0.020 pulg. de espesor, con una tolerancia de 0.003 pulg.

a) Determine una desigualdad que contenga valores absolutos y que describa el intervalo de espesores posibles para el material laminado.

b) Resuelva la desigualdad que encontró en el inciso a).



108. Estaturas posibles La estatura promedio de un varón adulto es de 68.2 pulg. y 95% de los varones adultos tiene una altura h que cumple la desigualdad

$$\left| \frac{h - 68.2}{2.9} \right| \leq 2$$

Resuelva la desigualdad para determinar el intervalo de estaturas.

Descubrimiento • Debate

109. ¿Con las potencias se conserva el orden? Si $a < b$, ¿es $a^2 < b^2$? (Compruebe tanto el valor positivo como el negativo para a y b.) Si $a < b$, ¿es $a^3 < b^3$? Con base en sus observaciones plantee una regla general con respecto a la relación entre a^n y b^n cuando $a < b$ y n es un entero positivo.

110. ¿Qué es lo que está mal aquí? Es tentador tratar de resolver una desigualdad como si fuera una ecuación. Por ejemplo, podríamos tratar de resolver $1 < 3/x$ multiplicando ambos miembros por x, para obtener $x < 3$, de modo que la solución sería $(-\infty, 3)$. Pero esto es falso; por ejemplo, $x = -1$ está en este intervalo, pero no satisface la desigualdad original. Explique por qué este método no funciona (piense con respecto al *signo* de x). Resuelva luego la desigualdad correctamente.

111. Uso de las distancias para resolver desigualdades que contienen valores absolutos Recuerde que $|a - b|$ es la distancia entre a y b en la recta numérica. Para cualquier número x, ¿qué representan $|x - 1|$ y $|x - 3|$? Aplique esta interpretación para resolver geométricamente la desigualdad $|x - 1| < |x - 3|$. En general, si $a < b$, ¿cuál es la solución de la desigualdad $|x - a| < |x - b|$?

1.8 Geometría analítica

El *plano coordenado* es el vínculo entre el álgebra y la geometría. En el plano coordenado podemos trazar gráficas de ecuaciones algebraicas. Las gráficas, a su vez, nos permiten "ver" la relación existente entre las variables de la ecuación. En esta sección se trata el plano coordenado.

El plano coordenado

El plano cartesiano lleva ese nombre en honor al matemático francés René Descartes (1596-1650), aunque otro francés, Pierre Fermat (1601-1665) también inventó los principios de la geometría analítica al mismo tiempo. (Véanse sus biografías en las páginas 112 y 652.)

Al igual que los puntos sobre una recta se pueden representar con números reales para formar la recta numérica, los puntos sobre un plano se pueden identificar por medio de pares ordenados de números para formar el **plano coordenado** o **plano cartesiano**. Para hacerlo, trazamos dos rectas de números reales entre sí y que se cortan en el 0 de cada recta. Por lo regular, una recta es horizontal con dirección positiva hacia la derecha y se llama **eje *x***; la otra recta es vertical y la dirección posi-tiva es hacia arriba; recibe el nombre de **eje *y***. El punto de intersección del eje x y del eje y es el **origen *O***, y los dos ejes dividen el plano en cuatro **cuadrantes**, llamados I, II, III y IV en la figura 1. (Los puntos que se localizan *sobre* los ejes coordenados no se asignan a ningún cuadrante.)

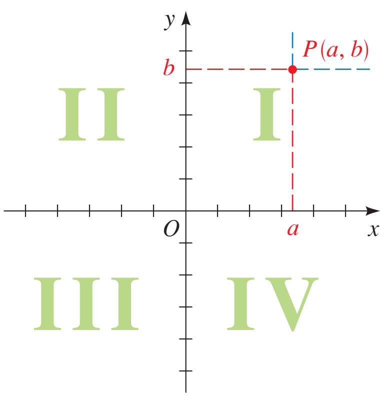


Figura 1

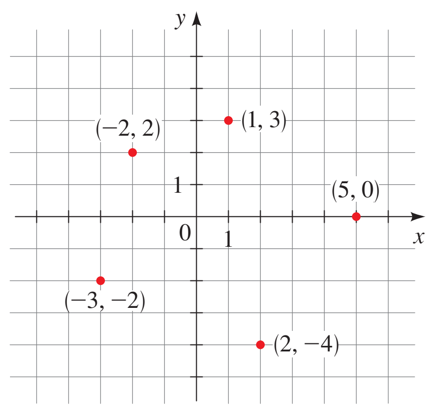


Figura 2

Aunque la notación para un punto (a, b) es la misma que la notación para un intervalo abierto, el contexto debe ayudar a aclarar qué es lo que se quiere representar.

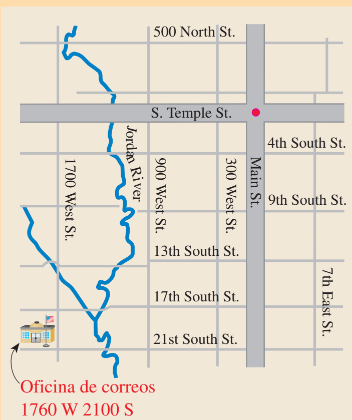
Cualquier punto P en el plano coordenado se puede ubicar por medio de un único **par ordenado** de números (a, b), como se muestra en la figura 1. El primer número a se llama **coordenada *x*** de P; y el segundo número b se llama **coordenada *y*** de P. Podemos pensar que las coordenadas de P son como su "domicilio" porque especifican su ubicación en el plano. En la figura 2 se muestran varios puntos con sus coordenadas.

Las coordenadas son como domicilios

Las coordenadas de un punto en el plano xy determinan exclusivamente su ubicación. Podríamos decir que las coordenadas son como el "domicilio" o la dirección del punto. En Salt Lake City, Utah, las direcciones de la mayor parte de los edificios se dan de hecho como coordenadas. La ciudad se divide en cuadrantes donde la Main Street es el eje vertical (Norte-Sur) y S. Temple Street es el eje horizontal (Este-Oeste). Una dirección tal como

1760 W 2100 S

señala un lugar 17.6 cuadras al oeste de Main Street y 21 cuadras al sur de S. Temple Street. (Es la dirección de la oficina principal de correos en Salt Lake City.) Con este sistema lógico es posible para cualquiera que no conozca la ciudad localizar de manera inmediata cualquier dirección, tan fácil como cuando uno localiza un punto sobre el plano coordenado.



Ejemplo 1 Gráficas de regiones en el plano coordenado

Describa y grafique las regiones representadas mediante cada conjunto.

a) $\{(x, y) \mid x \geq 0\}$ b) $\{(x, y) \mid y = 1\}$ c) $\{(x, y) \mid |y| < 1\}$

Solución

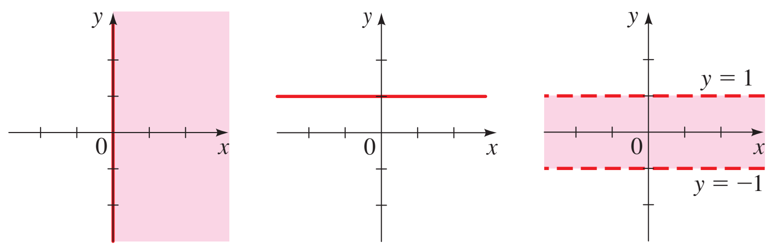
a) Los puntos cuyas coordenada x son 0 o positivas quedan en el eje y o a la derecha de él, como se muestra en la figura 3(a).

b) El conjunto de todos los puntos con coordenada y igual a 1 es una recta horizontal situada una unidad por arriba del eje de las x, como se ilustra en la figura 3(b).

c) Recuerde que en la sección 1.7 se estableció que

$$|y| < 1 \qquad \text{si y sólo si} \qquad -1 < y < 1$$

Entonces, la región dada consiste en aquellos puntos en el plano cuyas coordenadas y quedan entre -1 y 1. Por consiguiente, la región consiste en todos los puntos que están entre las rectas horizontales $y = 1$ y $y = -1$, pero no sobre ellas. Estas rectas se ilustran como líneas discontinuas en la figura 3(c) para señalar que los puntos sobre esas rectas no están en el conjunto.



a) $x \geq 0$ b) $y = 1$ c) $|y| < 1$

Figura 3

■

Fórmulas para la distancia y el punto medio

Ahora determinaremos una fórmula para la distancia $d(A, B)$ entre dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano. Recuerde que en la sección 1.1 se estableció que la distancia entre los puntos a y b sobre una recta numérica es $d(a, b) = |b - a|$. Entonces, de acuerdo con la figura 4, la distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre una recta horizontal debe ser $|x_2 - x_1|$, y la distancia entre $B(x_2, y_2)$ y $C(x_2, y_1)$ sobre la línea vertical debe ser $|y_2 - y_1|$.

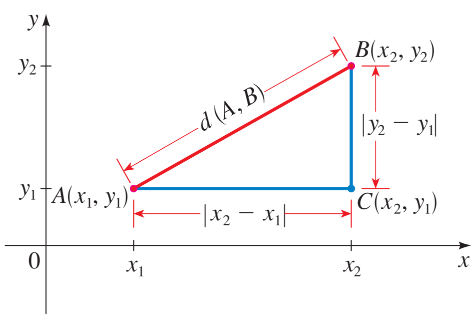


Figura 4

Puesto que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo, mediante el teorema de Pitágoras se obtiene

$$d(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Fórmula de la distancia

La distancia entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ en el plano es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

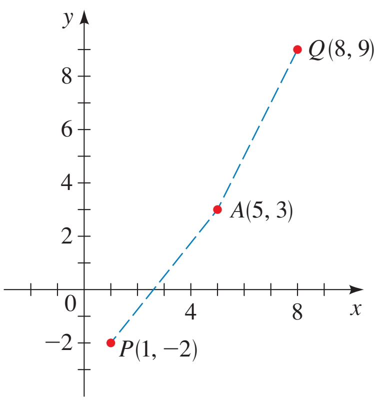


Figura 5

Ejemplo 2 Aplicación de la fórmula para la distancia

¿Cuál de los puntos $P(1, -2)$ o $Q(8, 9)$ está más cerca al punto $A(5, 3)$?

Solución Según la fórmula de la distancia, tenemos

$$d(P, A) = \sqrt{(5 - 1)^2 + [3 - (-2)]^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$d(Q, A) = \sqrt{(5 - 8)^2 + (3 - 9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$$

Esto demuestra que $d(P, A) < d(Q, A)$, de modo que P está más cerca a A (véase la figura 5). ■

Ahora determinemos las coordenadas (x, y) del punto medio M del segmento de recta que une el punto $A(x_1, y_1)$ con el punto $B(x_2, y_2)$. En la figura 6 vemos que los triángulos APM y MQB son congruentes porque $d(A, M) = d(M, B)$ y los ángulos correspondientes son iguales.

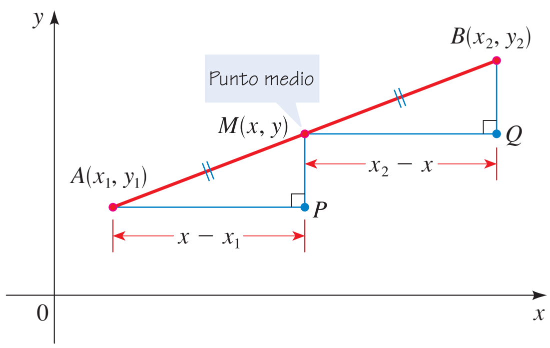


Figura 6

Se infiere entonces que $d(A, P) = d(M, Q)$ y que

$$x - x_1 = x_2 - x$$

Al determinar el valor de x, en esta ecuación, tenemos $2x = x_1 + x_2$, y entonces $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. De igual manera, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Fórmula del punto medio

El punto medio del segmento de recta desde $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ es

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Ejemplo 3 Aplicación de la fórmula del punto medio

Demuestre que el cuadrilátero con vértices $P(1, 2)$, $Q(4, 4)$, $R(5, 9)$ y $S(2, 7)$ es un paralelogramo al probar que sus dos diagonales se bisecan.

Solución Si las dos diagonales tienen el mismo punto medio, entonces deben bisecarse. El punto medio de la diagonal PR es

$$\left(\frac{1 + 5}{2}, \frac{2 + 9}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

y el punto medio de la diagonal QS es

$$\left(\frac{4 + 2}{2}, \frac{4 + 7}{2}\right) = \left(3, \frac{11}{2}\right)$$

de modo que ambas diagonales se bisecan, como se ilustra en la figura 7. (Un teorema de la geometría elemental establece que el cuadrilátero es por lo tanto un paralelogramo.) ■

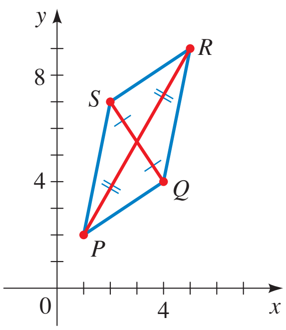


Figura 7

Gráficas de las ecuaciones con dos variables

Una **ecuación de dos variables**, tal como $y = x^2 + 1$, expresa una relación entre dos cantidades. Un punto (x, y) **satisface** la ecuación si la ecuación es verdadera cuando los valores para x y y se sustituyen en dicha ecuación. Por ejemplo, el punto (3, 10) satisface la ecuación $y = x^2 + 1$ porque $10 = 3^2 + 1$, pero el punto (1, 3) no porque $3 \neq 1^2 + 1$.

Principio fundamental de la geometría analítica

Un punto (x, y) pertenece a una gráfica de una ecuación si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación.

Gráfica de una ecuación

La **gráfica** de una ecuación con x y y es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano coordenado que satisfacen la ecuación.

La gráfica de una ecuación es una curva, de modo que para graficar una ecuación trazamos tantos puntos como podamos y, luego, los unimos por medio de una curva suave.

Ejemplo 4 Trazo de una gráfica mediante la ubicación de puntos

Trace la gráfica de la ecuación $2x - y = 3$.

Solución Primero resolvemos la ecuación para encontrar el valor de

$$y = 2x - 3$$

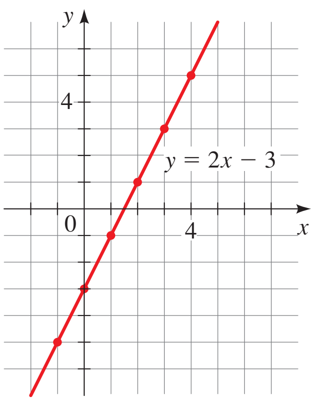


Figura 8

Esto ayuda a calcular las coordenadas y en la tabla siguiente.

x	$y = 2x - 3$	(x, y)
-1	-5	$(-1, -5)$
0	-3	$(0, -3)$
1	-1	$(1, -1)$
2	1	$(2, 1)$
3	3	$(3, 3)$
4	5	$(4, 5)$

Claro, hay una infinidad de puntos en la gráfica, por lo que es imposible localizar todos. Pero entre más puntos ubiquemos mejor imaginaremos cómo es la gráfica que representa la ecuación. Trazamos los puntos que encontramos en la figura 8; al parecer forman una recta. Entonces, para completar la gráfica unimos los puntos mediante una línea. (En la sección 1.10 comprobamos que la gráfica de esta ecuación es realmente una recta.) ■

Ejemplo 5 Trazo de una gráfica mediante la ubicación de puntos

Trace la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

Un análisis exhaustivo de las parábolas y sus propiedades geométricas se presenta en el capítulo 10.

Solución Determinamos algunos de los puntos que satisfacen a la ecuación en la tabla siguiente. En la figura 9 graficamos estos puntos y los unimos mediante una curva suave. Una curva con esta forma se llama *parábola*. ■

x	$y = x^2 - 2$	(x, y)
-3	7	$(-3, 7)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	-1	$(-1, -1)$
0	-2	$(0, -2)$
1	-1	$(1, -1)$
2	2	$(2, 2)$
3	7	$(3, 7)$

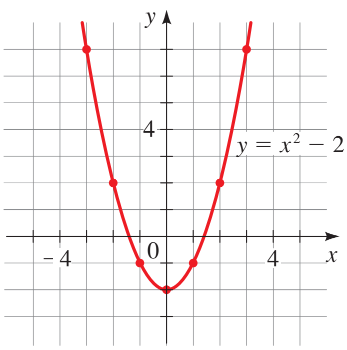


Figura 9

Ejemplo 6 Gráfica de una ecuación que contiene valores absolutos

Trace la gráfica de la ecuación $y = |x|$.

Solución Elaboramos una tabla de valores:

x	$y = \|x\|$	(x, y)
-3	3	$(-3, 3)$
-2	2	$(-2, 2)$
-1	1	$(-1, 1)$
0	0	$(0, 0)$
1	1	$(1, 1)$
2	2	$(2, 2)$
3	3	$(3, 3)$

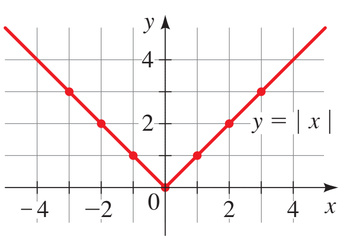


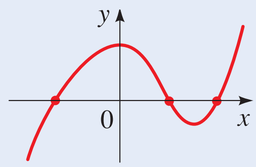
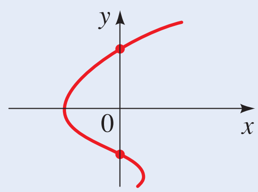
Figura 10

En la figura 10 localizamos estos puntos y los utilizamos para graficar la ecuación. ■

Intersecciones con los ejes

Las coordenadas x de los puntos donde una gráfica corta al eje x se denominan **intersección con el eje x** de la gráfica y se obtiene haciendo $y = 0$ en la ecuación de la gráfica. Las coordenadas y de los puntos donde una gráfica corta al eje y se llaman **intersección con el eje y** de la gráfica y se determinan haciendo $x = 0$ en la ecuación de la gráfica.

Definición de las intersecciones con los ejes

Intersecciones	Manera de determinarlas	En qué parte de la gráfica se encuentran
Intersecciones con el eje x Las coordenadas x de los puntos donde la gráfica de una ecuación corta al eje x	Hacer $y = 0$ y determinar x	
Intersecciones con el eje y Las coordenadas y de los puntos donde la gráfica de una ecuación corta al eje y	Hacer $x = 0$ y determinar y	

Ejemplo 7 Determinación de las intersecciones

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la gráfica de la ecuación $y = x^2 - 2$.

Solución Para encontrar las intersecciones con el eje x hacemos $y = 0$ y determinamos x. Por lo tanto,

$$0 = x^2 - 2 \qquad \text{Se hace } y = 0$$
$$x^2 = 2 \qquad \text{Suma de 2 a ambos miembros}$$
$$x = \pm\sqrt{2} \qquad \text{Obtención de la raíz cuadrada}$$

Las intersecciones con el eje x son $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$.

Para calcular las intersecciones con el eje y hacemos $x = 0$ y calculamos y. Entonces,

$$y = 0^2 - 2 \qquad \text{Se hace } x = 0$$
$$y = -2$$

La intersección con el eje y es -2.

La gráfica de esta ecuación se ilustra en el ejemplo 5. Se repite en la figura 11 con las intersecciones señaladas. ■

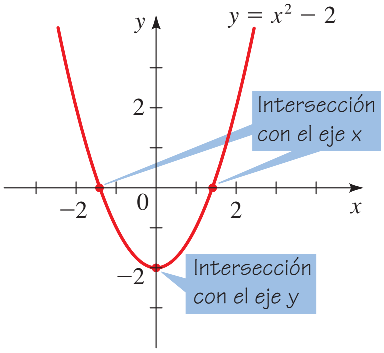


Figura 11

Circunferencia

Hasta ahora hemos estudiado cómo determinar la gráfica de una ecuación que contiene x y y. El problema inverso consiste en encontrar una ecuación de una gráfica,

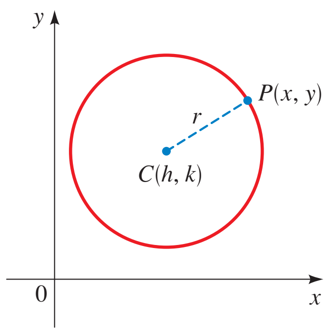


Figura 12

es decir, una ecuación que representa a una curva dada en el plano xy. Las coordenadas de los puntos de la curva, y no otros, satisfacen tal ecuación. Ésta es la otra mitad del principio fundamental de la geometría analítica según lo formularon Descartes y Fermat. La idea es que si una curva geométrica puede ser representada mediante una ecuación algebraica, entonces las reglas del álgebra se pueden utilizar para analizar la curva.

Para ejemplificar este tipo de problema, determinemos la ecuación de una circunferencia con radio r y centro en (h, k). Por definición, la circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ cuya distancia desde el centro $C(h, k)$ es r (véase la figura 12). Por lo tanto, P está sobre la circunferencia si y sólo si $d(P, C) = r$. De acuerdo con la fórmula de la distancia tenemos

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad \text{Se elevan al cuadrado ambos miembros}$$

Ésta es la ecuación deseada.

Ecuación de una circunferencia

Una ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta expresión se denomina **forma ordinaria** de la ecuación de la circunferencia. Si el centro de la circunferencia es el origen (0, 0), entonces la ecuación es

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ejemplo 8 Gráfica de una circunferencia

Grafique las ecuaciones.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$

Solución

a) Volvemos a escribir la ecuación como $x^2 + y^2 = 5^2$, y advertimos que es una ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro en el origen. Su gráfica se ilustra en la figura 13.

b) Reescribimos la ecuación como $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5^2$, y nos percatamos de que es una ecuación de una circunferencia de radio 5 y centro en $(2, -1)$. Su gráfica se muestra en la figura 14.

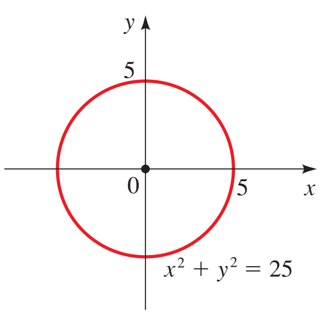


Figura 13

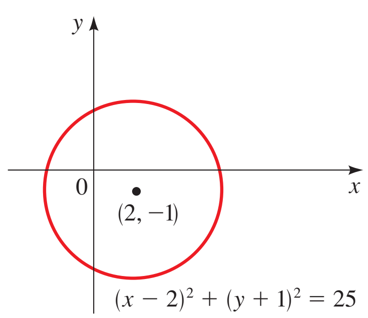


Figura 14

■

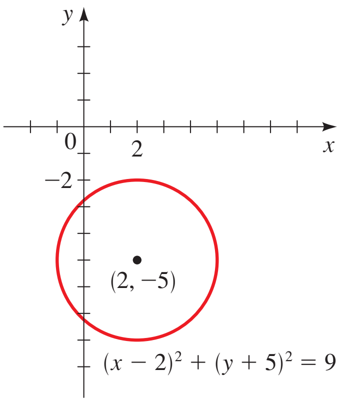


Figura 15

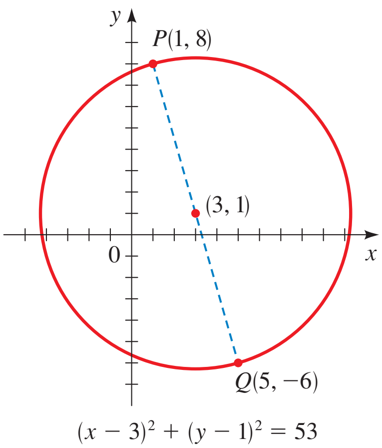


Figura 16

Ejemplo 9 Determinación de la ecuación de una circunferencia

a) Determinar la ecuación de una circunferencia cuyo radio es 3 y su centro es $(2, -5)$.

b) Encontrar una ecuación de la circunferencia cuyos puntos $P(1, 8)$ y $Q(5, -6)$ son los extremos de su diámetro.

Solución

a) Aplicamos la ecuación de la circunferencia con $r = 3$, $h = 2$ y $k = -5$, y obtenemos

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 = 9$$

La gráfica se ilustra en la figura 15.

b) Primero observamos que el centro es el punto medio del diámetro PQ, de modo que, según la fórmula del punto medio, el centro es

$$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{8-6}{2}\right) = (3, 1)$$

El radio r es la distancia desde P hasta el centro, por lo que según la fórmula de la distancia

$$r^2 = (3-1)^2 + (1-8)^2 = 2^2 + (-7)^2 = 53$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia es

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 53$$

La gráfica se muestra en la figura 16. ■

Desarrollemos la ecuación de la circunferencia del ejemplo anterior.

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 53 \quad \text{Forma ordinaria}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 53 \quad \text{Desarrollo de los cuadrados}$$
$$x^2 - 6x + y^2 - 2y = 43 \quad \text{Sustracción de 10 para obtener la forma desarrollada}$$

Suponga que se nos da la ecuación desarrollada de una circunferencia. Entonces, para encontrar su centro y su radio, tenemos que expresar la ecuación en su forma ordinaria. Esto quiere decir que tenemos que invertir los pasos de los cálculos anteriores, y para hacerlo necesitamos conocer qué sumar a una expresión como $x^2 - 6x$ para convertirla en un cuadrado perfecto, es decir, necesitamos completar el cuadrado, como se hace en el ejemplo siguiente.

La técnica de completar cuadrados se utiliza en muchos contextos en el álgebra. En la sección 1.5 utilizamos dicha técnica para resolver ecuaciones cuadráticas.

Ejemplo 10 Identificación de la ecuación de una circunferencia

Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ representa una circunferencia y determine su centro y su radio.

Solución Primero agrupamos los términos que contienen x y los términos que contienen y. Luego completamos el cuadrado dentro de cada grupo. Es decir, completamos el cuadrado para $x^2 + 2x$ sumando $\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right)^2 = 1$, y completamos el cuadrado de $y^2 - 6y$ sumando $\left[\frac{1}{2}\cdot(-6)\right]^2 = 9$.

$$(x^2 + 2x \qquad) + (y^2 - 6y \qquad) = -7 \quad \text{Se agrupan los términos}$$
$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) = -7 + 1 + 9 \quad \text{Completamos el cuadrado sumando 1 y 9 a ambos miembros}$$
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 3 \quad \text{Factorizamos y simplificamos}$$

Debemos sumar las mismas cantidades a *ambos miembros* para conservar la igualdad

Al comparar esta ecuación con la ecuación ordinaria de una circunferencia, vemos que $h = -1$, $k = 3$ y $r = \sqrt{3}$, de modo que la ecuación dada sí representa una circunferencia con centro en $(-1, 3)$ y radio $\sqrt{3}$. ■

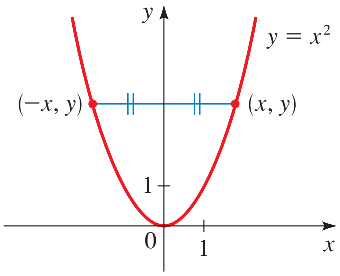
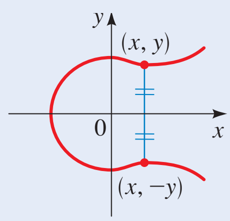
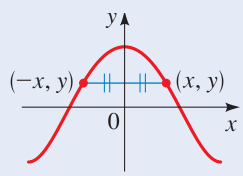
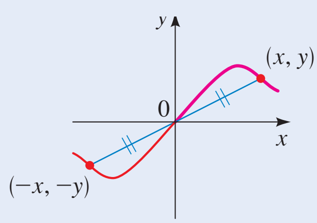


Figura 17

Simetría

En la figura 17 se muestra la gráfica de $y = x^2$. Observe que la parte de la gráfica a la izquierda del eje y es la imagen especular de la parte que se encuentre a la derecha del eje y. La razón es que si el punto (x, y) está en la gráfica, entonces también lo está $(-x, y)$, y estos puntos son los reflejos de los otros con respecto al eje y. En esta situación decimos que la gráfica es **simétrica con respecto al eje y**. Con un razonamiento similar, decimos que una gráfica es **simétrica con respecto al eje x** si siempre que haya un punto (x, y) en la gráfica, hay un punto $(x, -y)$. Una gráfica **es simétrica con respecto al origen** si habiendo un punto (x, y) en la gráfica, hay un punto $(-x, -y)$.

Definición de simetría

Tipo de simetría	Cómo probar la simetría	Cómo se ve la gráfica (las figuras de esta sección)	Significado geométrico
Simetría con respecto al eje x	La ecuación permanece sin cambios cuando y es reemplazada por $-y$	 (Figuras 13, 18)	La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje x
Simetría con respecto al eje y	La ecuación permanece sin cambios cuando x es reemplazada por $-x$	 (Figuras 9, 10, 11, 13, 17)	La gráfica no cambia cuando se refleja en el eje y
Simetría con respecto al origen	La ecuación permanece sin cambios cuando x es reemplazada por $-x$ y y por $-y$	 (Figuras 13, 19)	La gráfica no cambia cuando gira 180° con respecto al origen

Los ejemplos restantes de esta sección muestran cómo la simetría ayuda a trazar las gráficas de las ecuaciones.

Ejemplo 11 Aplicación de la simetría para trazar una gráfica

Pruebe si la ecuación $x = y^2$ es simétrica y trace la gráfica correspondiente.

Solución Si reemplazamos a y por $-y$ en la ecuación $x = y^2$, obtenemos

$$x = (-y)^2 \qquad \text{Reemplazo de } y \text{ por } -y$$
$$x = y^2 \qquad \text{Simplificación}$$

la ecuación permanece sin cambios. Por lo tanto, la gráfica es simétrica con respecto al eje x. Pero al cambiar x por $-x$ se tiene la ecuación $-x = y^2$, lo cual no es lo mismo que la ecuación original, de modo que la gráfica no es simétrica con respecto al eje y.

Aplicamos la simetría con respecto al eje x para trazar la gráfica ubicando puntos para $y > 0$ y luego reflejamos la gráfica en el eje x como se muestra en la figura 18.

y	$x = y^2$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	1	(1, 1)
2	4	(4, 2)
3	9	(9, 3)

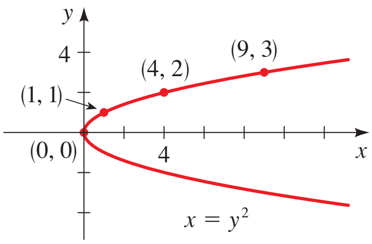


Figura 18

■

Ejemplo 12 Aplicación de la simetría para trazar una gráfica

Pruebe si la ecuación $y = x^3 - 9x$ es simétrica y trace la gráfica.

Solución Si reemplazamos x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación, tenemos

$$-y = (-x)^3 - 9(-x) \qquad \text{Reemplazo de } x \text{ por } -x \text{ y } y \text{ por } -y$$
$$-y = -x^3 + 9x \qquad \text{Simplificación}$$
$$y = x^3 - 9x \qquad \text{Multiplicación por } -1$$

y la ecuación no se modifica. Esto significa que la gráfica es simétrica con respecto al origen. La gráfica se elabora localizando puntos para $x > 0$ y luego aplicando la simetría con respecto al origen (véase la figura 19).

x	$y = x^3 - 9x$	(x, y)
0	0	(0, 0)
1	−8	(1, −8)
1.5	−10.125	(1.5, −10.125)
2	−10	(2, −10)
2.5	−6.875	(2.5, −6.875)
3	0	(3, 0)
4	28	(4, 28)

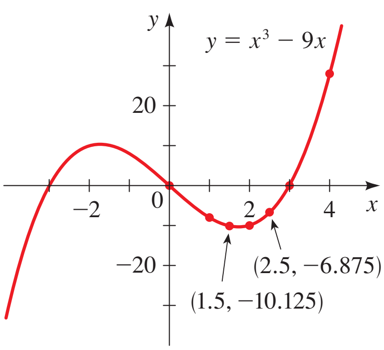


Figura 19

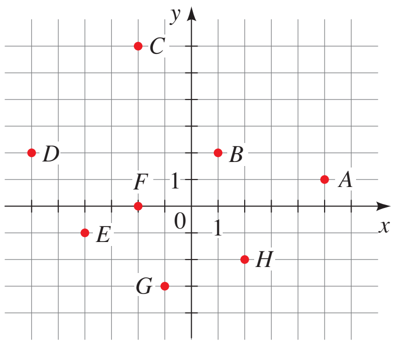
■

1.8 Ejercicios

1. Grafique los puntos dados en el plano coordenado:

$$(2, 3), (-2, 3), (4, 5), (4, -5), (-4, 5), (-4, -5)$$

2. Encuentre las coordenadas de los puntos mostrados en la figura.

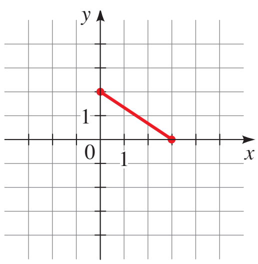


3–6 ■ Está graficado un par de puntos.

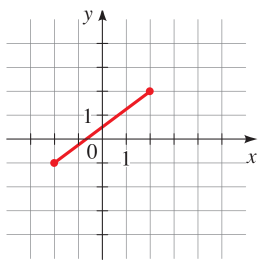
a) Determine la distancia entre ellos.

b) Calcule el punto medio del segmento que los une.

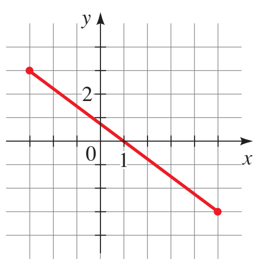
3.



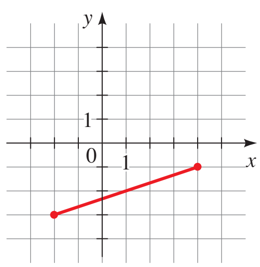
4.



5.



6.



7–12 ■ Está graficado un par de puntos.

a) Grafique los puntos en un plano coordenado.

b) Determine la distancia entre ellos.

c) Determine el punto medio del segmento de recta que los une.

7. $(0, 8), (6, 16)$

8. $(-2, 5), (10, 0)$

9. $(-3, -6), (4, 18)$

10. $(-1, -1), (9, 9)$

11. $(6, -2), (-6, 2)$

12. $(0, -6), (5, 0)$

13. Dibuje el rectángulo con vértices $A(1, 3)$, $B(5, 3)$, $C(1, -3)$, y $D(5, -3)$ en un plano coordenado. Calcule el área del rectángulo.

14. Dibuje el paralelogramo con vértices $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, $C(3, 6)$ y $D(7, 6)$ en un plano coordenado. Calcule el área del paralelogramo.

15. Localice los puntos $A(1, 0)$, $B(5, 0)$, $C(4, 3)$ y $D(2, 3)$, en un plano coordenado. Trace los segmentos AB, BC, CD y DA. ¿Qué clase de cuadrilátero es $ABCD$, y cuál es su área?

16. Localice los puntos $P(5, 1)$, $Q(0, 6)$ y $R(-5, 1)$, en un plano coordenado. ¿Dónde se debe situar el punto S para que el cuadrilátero $PQRS$ sea un cuadrado? Calcule el área de este cuadrado.

17–26 ■ Dibuje la región dada por el conjunto.

17. $\{(x, y) \mid x \geq 3\}$

18. $\{(x, y) \mid y < 3\}$

19. $\{(x, y) \mid y = 2\}$

20. $\{(x, y) \mid x = -1\}$

21. $\{(x, y) \mid 1 < x < 2\}$

22. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4\}$

23. $\{(x, y) \mid |x| > 4\}$

24. $\{(x, y) \mid |y| \leq 2\}$

25. $\{(x, y) \mid x \geq 1 \text{ y } y < 3\}$

26. $\{(x, y) \mid |x| \leq 2 \text{ y } |y| \leq 3\}$

27. ¿Cuál de los puntos $A(6, 7)$ o $B(-5, 8)$ está más cercano al origen?

28. ¿Cuál de los puntos $C(-6, 3)$ o $D(3, 0)$ está más cercano al punto $E(-2, 1)$?

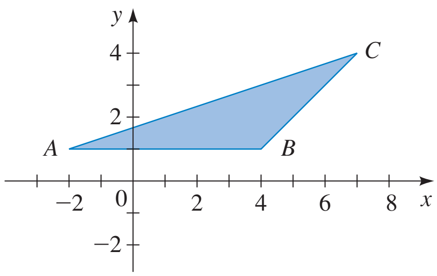
29. ¿Cuál de los puntos $P(3, 1)$ o $Q(-1, 3)$ está más cercano al punto $R(-1, -1)$?

30. **a)** Demuestre que los puntos $(7, 3)$ y $(3, 7)$ están a la misma distancia del origen.

b) Demuestre que los puntos (a, b) y (b, a) están a la misma distancia del origen.

31. Demuestre que el triángulo con vértices $A(0, 2)$, $B(-3, -1)$ y $C(-4, 3)$ es isósceles.

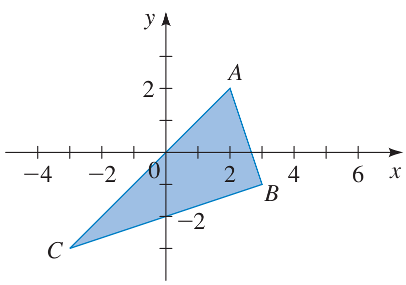
32. Determinar el área del triángulo ilustrado en la figura.



33. Refiérase al triángulo ABC de la figura.

a) Demuestre que el triángulo ABC es un triángulo rectángulo usando el inverso del teorema de Pitágoras (véase pág. 54).

b) Encuentre el área del triángulo ABC.



34. Demuestre que el triángulo con vértices $A(6, -7)$, $B(11, -3)$ y $C(2, -2)$ es un triángulo rectángulo aplicando el inverso del teorema de Pitágoras. Calcule el área del triángulo.

35. Demuestre que los puntos $A(-2, 9)$, $B(4, 6)$, $C(1, 0)$ y $D(-5, 3)$ son los vértices de un cuadrado.

36. Demuestre que los puntos $A(-1, 3)$, $B(3, 11)$ y $C(5, 15)$ son colineales probando que $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

37. Encuentre un punto sobre el eje de la y que es equidistante de los puntos $(5, -5)$ y $(1, 1)$.

38. Determine las longitudes de las medianas de un triángulo con vértices $A(1, 0)$, $B(3, 6)$ y $C(8, 2)$. (Una *mediana* es un segmento de recta que parte de un vértice y se dirige al punto medio del lado opuesto.)

39. Grafique los puntos $P(-1, -4)$, $Q(1, 1)$ y $R(4, 2)$, sobre un plano coordenado. ¿Dónde debe estar el punto S para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo?

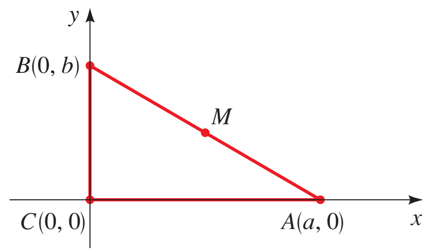
40. Si $M(6, 8)$ es el punto medio del segmento de recta AB, y si A tiene las coordenadas $(2, 3)$, determine las coordenadas de B.

41. **a)** Trace el paralelogramo con vértices $A(-2, -1)$, $B(4, 2)$, $C(7, 7)$ y $D(1, 4)$.

b) Determine los puntos medios de las diagonales de este paralelogramo.

c) De la parte b) demuestre que las diagonales se bisecan entre sí.

42. El punto M de la figura es el punto medio del segmento de recta AB. Demuestre que M es equidistante de los vértices del triángulo ABC.



43–46 ■ Determine si los puntos dados están en la gráfica de la ecuación.

43. $x - 2y - 1 = 0$; $(0, 0), (1, 0), (-1, -1)$

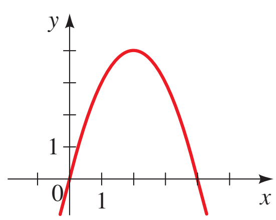
44. $y(x^2 + 1) = 1$; $(1, 1), \left(1, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)$

45. $x^2 + xy + y^2 = 4$; $(0, -2), (1, -2), (2, -2)$

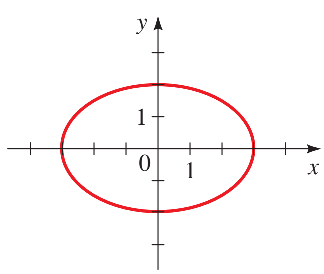
46. $x^2 + y^2 = 1$; $(0, 1), \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

47–50 ■ Se proporcionan una ecuación y su gráfica. Calcule las intersecciones con los ejes x y y.

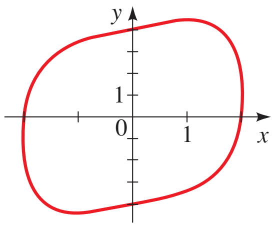
47. $y = 4x - x^2$



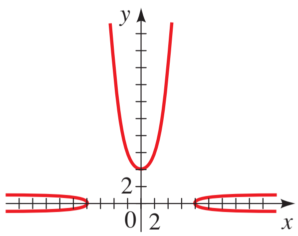
48. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



49. $x^4 + y^2 - xy = 16$



50. $x^2 + y^3 - x^2y^2 = 64$



51–70 ■ Elabore una tabla de valores y trace la gráfica de la ecuación. Encuentre las intersecciones con los ejes x y y e investigue si hay simetría.

51. $y = -x + 4$

52. $y = 3x + 3$

53. $2x - y = 6$

54. $x + y = 3$

55. $y = 1 - x^2$

56. $y = x^2 + 2$

57. $4y = x^2$

58. $8y = x^3$

59. $y = x^2 - 9$

60. $y = 9 - x^2$

61. $xy = 2$

62. $y = \sqrt{x + 4}$

63. $y = \sqrt{4 - x^2}$

64. $y = -\sqrt{4 - x^2}$

65. $x + y^2 = 4$

66. $x = y^3$

67. $y = 16 - x^4$

68. $x = |y|$

69. $y = 4 - |x|$

70. $y = |4 - x|$

71–76 ■ Investigue si la ecuación es simétrica.

71. $y = x^4 + x^2$

72. $x = y^4 - y^2$

73. $x^2y^2 + xy = 1$

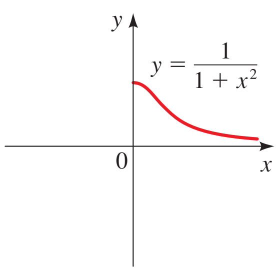
74. $x^4y^4 + x^2y^2 = 1$

75. $y = x^3 + 10x$

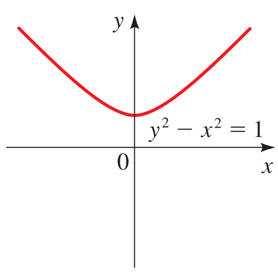
76. $y = x^2 + |x|$

77–80 ■ Complete la gráfica usando la propiedad de simetría dada.

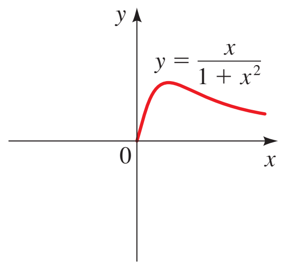
77. Simétrica con respecto al eje y



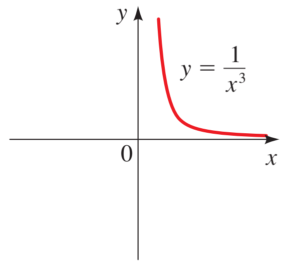
78. Simétrica con respecto al eje x



79. Simétrica con respecto al origen



80. Simétrica con respecto al origen



81–86 ■ Encuentre una ecuación de la circunferencia que cumpla con las condiciones dadas.

81. Centro $(2, -1)$; radio 3

82. Centro $(-1, -4)$; radio 8

83. Centro en el origen; pasa por $(4, 7)$

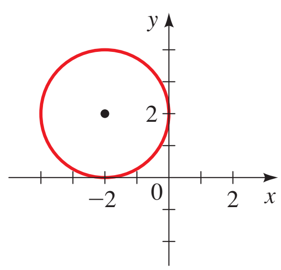
84. Los extremos de un diámetro son $P(-1, 1)$ y $Q(5, 9)$

85. Centro $(7, -3)$; tangente al eje x

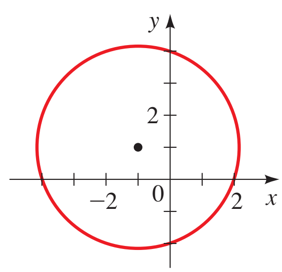
86. La circunferencia está en el primer cuadrante y es tangente tanto al eje x como al eje y; radio 5

87–88 ■ Determine la ecuación de la circunferencia mostrada en la figura.

87.



88.



89–94 ■ Demuestre que la ecuación representa una circunferencia, y determine el centro y el radio.

89. $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 13 = 0$

90. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

91. $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{8}$

92. $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}x + 2y + \frac{1}{16} = 0$

93. $2x^2 + 2y^2 - 3x = 0$

94. $3x^2 + 3y^2 + 6x - y = 0$

95–96 ■ Grafique la región dada por el conjunto.

95. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

96. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 4\}$

97. Determine el área de la región que queda fuera de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ pero dentro de la circunferencia

$$x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$$

98. Grafique la región en el plano coordenado que cumple con las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 9$ y $y \geq |x|$. ¿Cuál es el área de esta región?

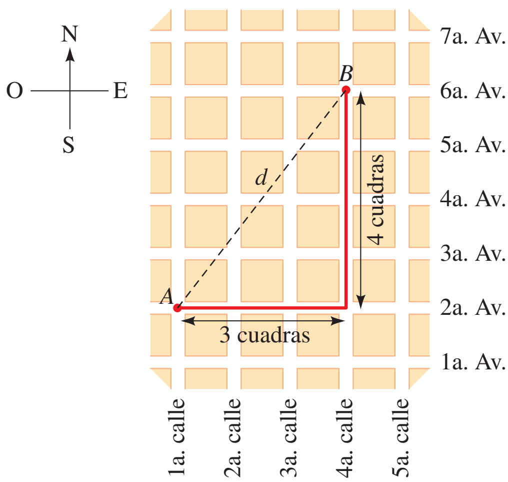
Aplicaciones

99. Distancias en una ciudad Una ciudad tiene calles que van de norte a sur y avenidas que van de oriente a poniente, todas tienen igual separación. Las calles y las avenidas están numeradas en forma consecutiva, según se muestra en la figura. La distancia *si uno va caminando* entre los puntos A y B es de 7 cuadras, es decir, 3 cuadras al oriente y 4 cuadras al norte. Para encontrar las *distancias en línea recta d*, tenemos que usar la fórmula de la distancia.

a) Determine la distancia en línea recta (en cuadras) entre A y B.

b) Calcule la distancia que se recorre caminando y la distancia en línea recta entre la esquina de la cuarta calle y la segunda avenida y la esquina de la calle decimoprimera y la vigesimosexta avenida.

c) ¿Qué tiene que ser cierto en relación con los puntos P y Q si la distancia que se recorre caminando entre P y Q es igual a la distancia en línea recta entre P y Q?



100. Punto intermedio Dos amigos viven en la ciudad descrita en el ejercicio 99: uno en la esquina de la 3a. calle y la 7a. avenida, y el otro en la esquina de la 27a. calle y la 17a. avenida. Con frecuencia se encuentran en un café que está a mitad del camino a sus casas.

a) ¿En qué intersección está situado el café?

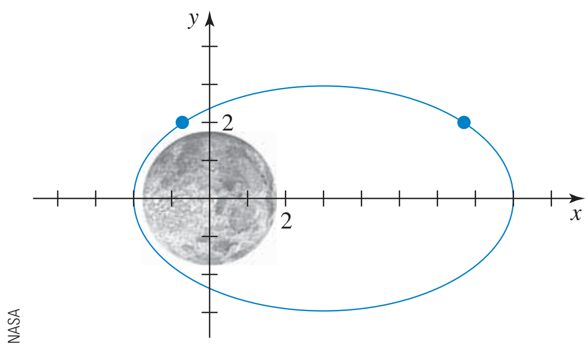
b) ¿Cuánto tiene que caminar cada uno de ellos para llegar al café?

101. Órbita de un satélite Un satélite está en órbita alrededor de la Luna. Un plano coordenado que contiene la órbita está establecido de tal manera que el centro de la Luna está en el origen, como se muestra en la gráfica. Las distancias se miden en megametros (Mm). La ecuación de la órbita del satélite es

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

a) Según la gráfica, determine lo más cerca y lo más lejos que puede estar el satélite al centro de la Luna.

b) Hay dos puntos en la órbita que tienen coordenada y igual a 2. Encuentre las coordenadas x de estos puntos y calcule sus distancias al centro de la Luna.



Descubrimiento • Debate

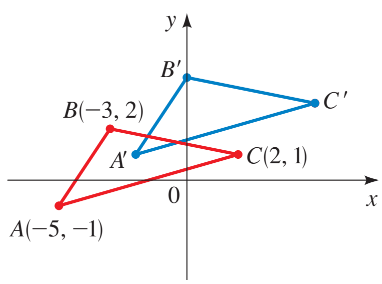
102. Cambio del plano de coordenadas Suponga que cada punto del plano de coordenadas se desplaza 3 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.

a) ¿A qué punto nuevo se desplaza el punto (5, 3)?

b) ¿A qué punto nuevo se desplaza el punto (a, b)?

c) ¿Qué punto se desplazó a (3, 4)?

d) El triángulo ABC de la figura se movió al triángulo $A'B'C'$. Determine las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



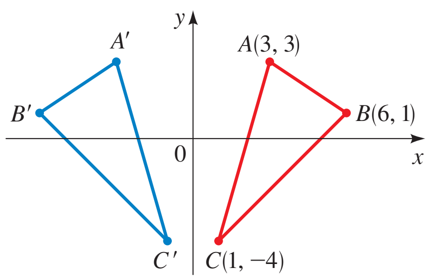
103. Reflexión en el plano coordenado Suponga que el eje y actúa como un espejo que refleja cada punto de la derecha de él en un punto a la izquierda de él.

a) ¿En qué punto se refleja el punto $(3, 7)$?

b) ¿En qué punto se refleja el punto (a, b)?

c) ¿Qué punto se refleja en el punto $(-4, -1)$?

d) El triángulo ABC de la figura se refleja como el triángulo $A'B'C'$. Determine las coordenadas de los puntos A', B' y C'.



104. Completar un segmento de recta Grafique los puntos $M(6, 8)$ y $A(2, 3)$ en un plano coordenado. Si M es el punto medio del segmento rectilíneo AB, determine las coordenadas de B. Escriba una breve descripción de los pasos que siguió para determinar B, y las razones que lo llevaron a seguirlos.

105. Completar un paralelogramo Grafique los puntos $P(0, 3)$, $Q(2, 2)$ y $R(5, 3)$ en un plano de coordenadas. ¿Dónde se debe colocar el punto S para que la figura $PQRS$ sea un paralelogramo. Escriba una breve explicación de los pasos que siguió y las razones de hacerlo así.

106. ¿Circunferencia, punto o conjunto vacío? Complete los cuadrados de la ecuación general $x^2 + ax + y^2 + by + c = 0$ y simplifique el resultado tanto como sea posible. ¿En qué condiciones de los coeficientes a, b y c esta ecuación representa una circunferencia? ¿Y un solo punto? ¿Y un conjunto vacío? En el caso de que la ecuación sí represente una circunferencia, determine el centro y el radio.

107. ¿Se intersecan las circunferencias?

a) Calcule el radio de cada uno de los círculos del par y la distancia entre sus centros. Aplique después esta información para determinar si las circunferencias se intersecan.

(i) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9;$

$(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 16$

(ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4;$

$(x - 5)^2 + (y - 14)^2 = 9$

(iii) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 1;$

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$

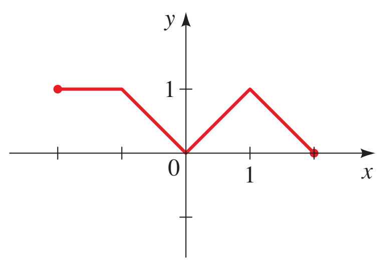
b) ¿Cómo se puede decir, sólo con saber los radios de dos circunferencias y la distancia entre sus centros, si las circunferencias se intersecan? Escriba un párrafo pequeño en el que explique cómo se decidiría esto y trace una gráfica para ilustrar su respuesta.

108. Cómo hacer simétrica a una gráfica La gráfica mostrada en la figura no es simétrica con respecto al eje x ni al eje y ni al origen. Añada segmentos de recta a la gráfica de modo que muestre la simetría que se pide. En cada caso añada lo menos posible.

a) Simetría con respecto al eje x

b) Simetría con respecto al eje y

c) Simetría con respecto al origen



1.9 Calculadoras para graficar y resolución de ecuaciones y desigualdades por métodos gráficos

En las secciones 1.5 y 1.7 resolvimos ecuaciones y desigualdades mediante álgebra. En la sección anterior aprendimos a trazar la gráfica de una ecuación en un plano coordenado. En esta sección usaremos las gráficas para resolver ecuaciones y desigualdades. Para hacerlo, primero necesitamos dibujar la gráfica mediante un dispositivo que grafique. Entonces, empezamos por dar algunos criterios que ayuden a utilizar con efectividad los dispositivos de graficación.

Uso de una calculadora para graficar

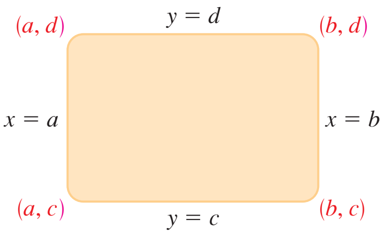


Figura 1
Rectángulo de visión $[a, b]$ por $[c, d]$

Una calculadora para elaborar gráficas o una computadora muestran, una parte de la gráfica de una ecuación en un rectángulo de la pantalla, llamado **rectángulo de visión**. La pantalla que aparece automáticamente proporciona una imagen incompleta o engañosa, de modo que es importante elegir con cuidado el rectángulo de visión. Si elegimos que los valores de x varíen desde un valor mínimo de `Xmin` $= a$ a un valor máximo de `Xmax` $= b$ y que los valores de y varíen de un valor mínimo de `Ymin` $= c$ a un valor máximo de `Ymax` $= d$, entonces la parte que se muestra queda en el rectángulo

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

como se ilustra en la figura 1. Nos referimos a él como el rectángulo de visión $[a, b]$ por $[c, d]$.

Los dispositivos para graficar trazan la gráfica de una ecuación tal como usted lo podría hacer. Localizan los puntos de la forma (x, y) para un cierto número de valores de x, igualmente separados entre a y b. Si la ecuación no está definida para un valor de x o si el valor correspondiente de y queda fuera del rectángulo de visión, el dispositivo ignora este valor y pasa al siguiente valor de x. La máquina une cada uno de los puntos con el graficado anteriormente para generar una representación de la gráfica de la ecuación.

Ejemplo 1 Elección de un rectángulo de visión aceptable

Grafique la ecuación $y = x^2 + 3$ en un rectángulo de visión aceptable.

Solución Experimentemos con diferentes rectángulos de visión. Iniciemos con el rectángulo $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$, de modo que tenemos

`Xmin` $= -2$ `Ymin` $= -2$

`Xmax` $= 2$ `Xmax` $= 2$

La gráfica que resulta y que se muestra en la figura 2(a) ¡no se ve! La razón es que $x^2 \geq 0$, de modo que $x^2 + 3 \geq 3$ para todas las x. Por consiguiente, la gráfica está totalmente arriba del rectángulo de visión, de modo que este rectángulo no es adecuado. Si agrandamos el rectángulo a $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$, como en la figura 2(b), empezamos a ver una parte de la gráfica.

Intentemos ahora con el rectángulo $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$. La gráfica en la figura 2(c) parece dar una visión más completa de la gráfica. Si agrandamos aún más el rectángulo, como en la figura 2(d), la gráfica nos muestra con claridad que la intersección con el eje y es 3.

Entonces, el rectángulo $[-10, 10]$ por $[-5, 30]$ proporciona una representación aceptable de la gráfica.

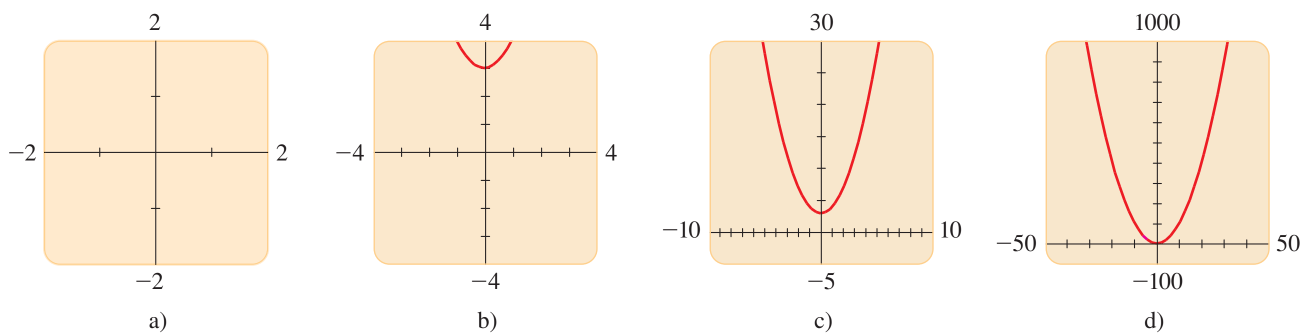
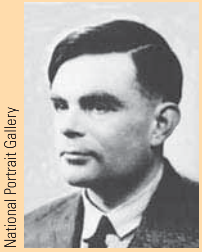


Figura 2 Gráficas de $y = x^2 + 3$

■



Alan Turing (1912-1954) estuvo en el centro de dos hechos determinantes del siglo xx: la Segunda Guerra Mundial y la invención de las computadoras. Cuando tenía 23 años, Turing puso su marca en las matemáticas al resolver un problema importante de las bases matemáticas que había planteado David Gilbert en el Congreso Internacional de Matemáticos de 1928 (véase pág. 708). En esta investigación inventó una máquina teórica, que en la actualidad se conoce como máquina de Turing. Esta máquina fue la inspiración para las computadoras modernas digitales. Durante la Segunda Guerra Mundial, Turing estuvo a cargo del esfuerzo que hicieron los británicos para descifrar los códigos alemanes. El éxito total que tuvo en esta empresa tuvo un papel decisivo en la victoria de los aliados. Para llevar a cabo los numerosos pasos lógicos requeridos para descifrar un mensaje en código Turing elaboró procedimientos de decisión similares a los programas modernos para las computadoras. Después de la guerra ayudó a desarrollar las primeras computadoras electrónicas de los británicos. También fue de los primeros en trabajar en la inteligencia artificial y en modelos para computadora de los procesos biológicos. Turing murió envenenado a la edad de 42 años luego de comer una manzana que había sido rociada misteriosamente con cianuro.

Ejemplo 2 Dos gráficas en la misma pantalla

Grafique las ecuaciones $y = 3x^2 - 6x + 1$ y $y = 0.23x - 2.25$ juntas en el rectángulo de visión $[-1, 3]$ por $[-2.5, 1.5]$. ¿Las gráficas se cortan en este rectángulo de visión?

Solución La figura 3(a) muestra las características esenciales de ambas gráficas. Una es una parábola y la otra es una recta. Se ve como si las gráficas se cortaran cerca del punto $(1, -2)$. Sin embargo, si hacemos un acercamiento de la zona que rodea al punto como se muestra en la figura 3(b), observamos que aunque las gráficas casi se tocan, en realidad no se intersecan.

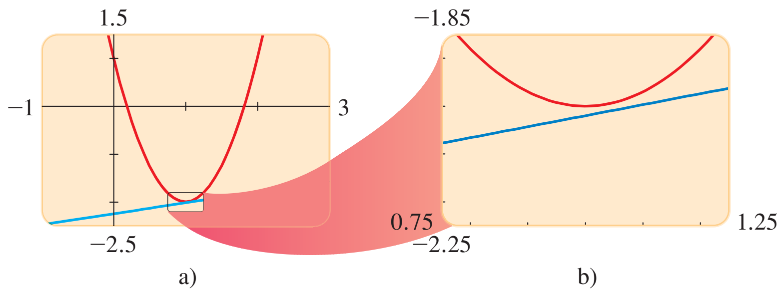


Figura 3 ■

De acuerdo con los ejemplos 1 y 2, vemos que la elección del rectángulo de visión tiene gran importancia en el aspecto de la gráfica. Si usted desea una vista global de la gráfica, tiene que seleccionar un rectángulo de visión relativamente grande para ver la gráfica. En cambio, si desea investigar los detalles, debe efectuar un acercamiento con un rectángulo de visión pequeño que muestre sólo la característica de interés.

La mayor parte de las calculadoras con las que se pueden elaborar gráficas sólo pueden graficar ecuaciones en las que y está aislada en un miembro. El siguiente ejemplo muestra cómo graficar ecuaciones que no tienen esta propiedad.

Ejemplo 3 Gráfica de una circunferencia

Grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

Solución Primero despejamos y, para que quede en un solo miembro.

$$y^2 = 1 - x^2 \qquad \text{Se resta } x^2$$

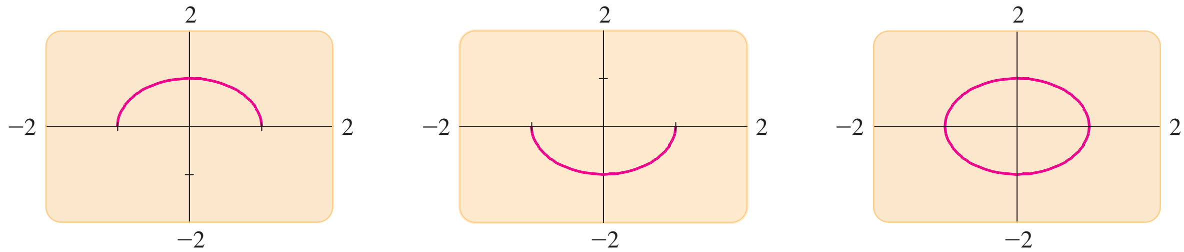
$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Por lo tanto, la circunferencia se describe mediante las gráficas de *dos* ecuaciones:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{1 - x^2}$$

La primera ecuación representa la mitad superior de la circunferencia (porque $y \geq 0$), y la segunda representa la mitad inferior de la circunferencia (porque $y \leq 0$). Si graficamos la primera ecuación en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por

$[-2, 2]$, obtenemos la semicircunferencia mostrada en la figura 4 a). La gráfica de la segunda ecuación es la semicircunferencia de la figura 4 b). Al graficar estas semicircunferencias juntas en el mismo rectángulo de visión obtenemos la figura completa en la figura 4 c).



a) b) c)

Figura 4 Gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ ■

La gráfica de la figura 4(c) parece algo aplanada. La mayor parte de las calculadoras permiten fijar las escalas en los ejes de modo que las circunferencias se vean como tales. En las calculadoras TI-82 y TI-83, en el menú ZOOM, escogemos `ZSquare` para fijar adecuadamente las escalas. (En la TI-86, la orden es `Zsq`.)

Resolución de ecuaciones mediante métodos gráficos

En la sección 1.5 aprendimos a resolver ecuaciones. Para resolver una ecuación como

$$3x - 5 = 0$$

aplicamos el **método algebraico**. Esto quiere decir que usaremos las reglas del álgebra para aislar a x en un lado de la ecuación. Consideramos a x como una *incógnita* y aplicamos las reglas del álgebra para cazarla. He aquí los pasos de la solución:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= 0 & \\ 3x &= 5 & \text{Suma de 5} \\ x &= \tfrac{5}{3} & \text{División entre 3} \end{aligned}$$

De modo que la solución es $x = \frac{5}{3}$.

También podemos resolver la ecuación mediante el **método gráfico**. En este método consideramos a x como una *variable* y trazamos la gráfica de la ecuación

$$y = 3x - 5$$

Valores diferentes de x dan valores diferentes para y. El objetivo es determinar el valor de x para el cual $y = 0$. Según la gráfica de la figura 5 vemos que $y = 0$ cuando $x \approx 1.7$. Por consiguiente, la solución es $x \approx 1.7$. Observe que de acuerdo con la gráfica obtenemos una solución aproximada.

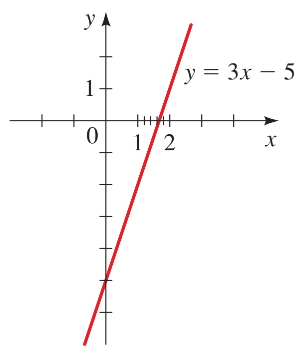


Figura 5

Estos métodos están resumidos en el recuadro siguiente.

"El álgebra es una ciencia festiva", diría el tío Jakob. "Vamos a caza de un animalito cuyo nombre desconocemos, así que lo llamamos *x*. Cuando nos embolsamos nuestra presa, la calamos y le damos su nombre correcto."
ALBERT EINSTEIN

Resolución de una ecuación

Método algebraico

Utilice las reglas del álgebra para aislar la incógnita x en un lado de la ecuación.

Ejemplo: $2x = 6 - x$

$3x = 6$ Suma de x

$x = 2$ División entre 3

La solución es $x = 2$.

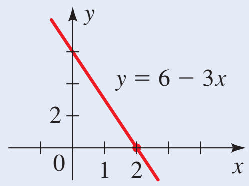
Método gráfico

Pase todos los términos a un lado e iguale todo con y. Trace la gráfica para determinar el valor de x cuando $y = 0$.

Ejemplo: $2x = 6 - x$

$0 = 6 - 3x$

Haga $y = 6 - 3x$ y grafique.



De acuerdo con la gráfica la solución es $x \approx 2$.

El proyecto de descubrimiento de la página 283 describe un método numérico para resolver ecuaciones.

La ventaja del método algebraico es que proporciona respuestas exactas. Asimismo, el proceso de descifrar la ecuación ayuda a entender la estructura algebraica de la ecuación. Por otro lado, en el caso de muchas ecuaciones es difícil o imposible aislar x.

El método gráfico proporciona una aproximación numérica a la respuesta. Esto es una ventaja cuando se desea una respuesta numérica. (Por ejemplo, un ingeniero podría encontrar una respuesta expresada como $x \approx 2.6$ que tiene mayor utilidad inmediata que $x = \sqrt{7}$.) Además, la gráfica de una ecuación ayuda a imaginarnos cómo está relacionada la solución con otros valores de la variable.

Ejemplo 4 Resolución algebraica y por métodos gráficos de una ecuación cuadrática

Resuelva algebraicamente y mediante métodos gráficos las ecuaciones cuadráticas.

a) $x^2 - 4x + 2 = 0$ b) $x^2 - 4x + 4 = 0$ c) $x^2 - 4x + 6 = 0$

Solución 1: por medio de álgebra

Aplicamos la fórmula cuadrática para resolver cada ecuación.

La fórmula cuadrática se estudia en la página 49.

a) $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$

Hay dos soluciones, $x = 2 + \sqrt{2}$ y $x = 2 - \sqrt{2}$.

b) $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = 2$$

Hay sólo una solución, $x = 2$.

c) $$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No hay solución real.

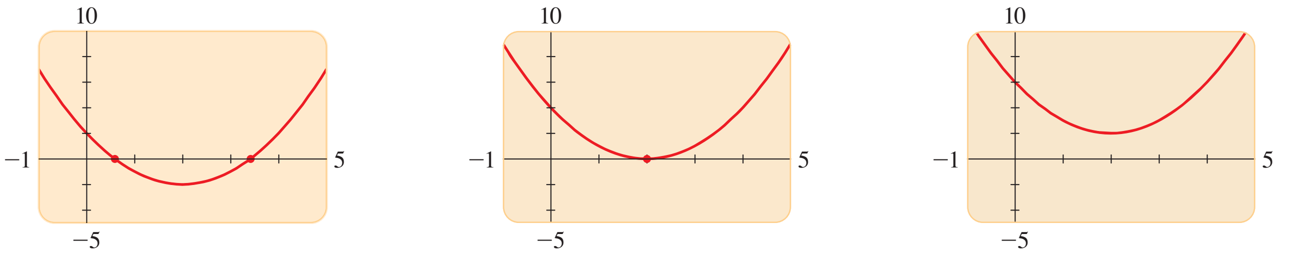
Solución 2: método gráfico

Graficamos las ecuaciones $y = x^2 - 4x + 2$, $y = x^2 - 4x + 4$, y $y = x^2 - 4x + 6$ en la figura 6. Al determinar las intersecciones con el eje x de las gráficas, encontramos las soluciones siguientes.

a) $x \approx 0.6$ y $x \approx 3.4$

b) $x = 2$

c) No hay intersecciones con el eje x por lo que la ecuación no tiene solución.



a) $y = x^2 - 4x + 2$ b) $y = x^2 - 4x + 4$ c) $y = x^2 - 4x + 6$

Figura 6

■

Las gráficas de la figura 6 muestran por qué una ecuación cuadrática podría tener dos soluciones, una solución, o ninguna solución real. Demostramos este hecho algebraicamente en la sección 1.5 cuando estudiamos el discriminante.

Ejemplo 5 Otro método gráfico

Resuelva la ecuación en forma algebraica y mediante métodos gráficos: $5 - 3x = 8x - 20$

Solución 1: Método algebraico

$$5 - 3x = 8x - 20$$

$$-3x = 8x - 25 \qquad \text{Resta de 5}$$

$$-11x = -25 \qquad \text{Resta de } 8x$$

$$x = \frac{-25}{-11} = 2\tfrac{3}{11} \qquad \text{División entre } -11 \text{ y simplificación}$$

Solución 2: Método gráfico

Podríamos pasar todos los términos a un lado del signo igual, igualar el resultado a y, y graficar la ecuación resultante. Pero para evitar estos pasos algebraicos, mejor graficamos las dos ecuaciones:

$$y_1 = 5 - 3x \qquad \text{y} \qquad y_2 = 8x - 20$$

La solución de la ecuación original será el valor de x que hace que y_1 sea igual a y_2; es decir, la solución es la coordenada x del punto de intersección de las dos gráficas. Usamos la característica TRACE del comando `intersect` en una calculadora para elaborar gráficas, y vemos que, según la figura 7, la solución es $x \approx 2.27$. ■

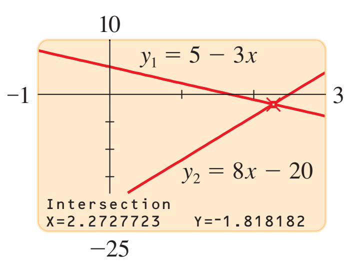


Figura 7

En el ejemplo siguiente aplicamos el método gráfico para resolver una ecuación que es muy difícil de resolver de manera algebraica.

Ejemplo 6 Resolución de una ecuación en un intervalo

Resuelva la ecuación

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

en el intervalo $[1, 6]$.

Solución Se nos pide calcular todas las soluciones x que cumplen $1 \leq x \leq 6$, de modo que graficaremos la ecuación en un rectángulo de visión para el cual los valores x están restringidos a este intervalo.

$$x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x} = 0 \qquad \text{Resta de } \sqrt{x}$$

También podemos utilizar el comando `zero` para determinar las soluciones, como se muestra en las figuras 8(a) y 8(b).

En la figura 8 se ilustra la gráfica de la ecuación $y = x^3 - 6x^2 + 9x - \sqrt{x}$ en el rectángulo de visión $[1, 6]$ por $[-5, 5]$. Hay dos intersecciones con el eje x en esta pantalla; si efectuamos un acercamiento vemos que las soluciones son $x \approx 2.18$ y $x \approx 3.72$.

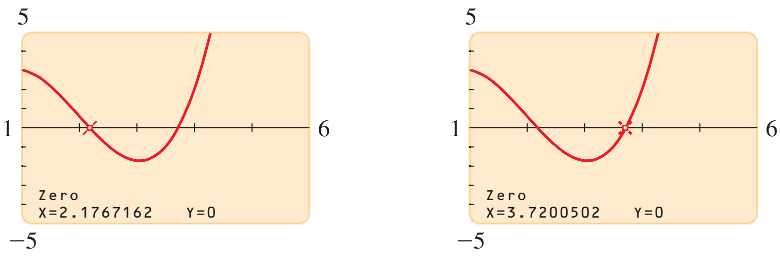


Figura 8 a) b) ■

En realidad, la ecuación del ejemplo 6 tiene cuatro soluciones. Se piden las otras dos soluciones en el ejercicio 57.

Ejemplo 7 Intensidad de la luz

Dos fuentes de luz están separadas 10 m. Una es tres veces más intensa que la otra. La intensidad de la luz L (en luxes) en el punto a x metros desde la fuente más débil es

$$L = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

(Véase la figura 9.) Calcule los puntos a los cuales la intensidad de la luz es 4 luxes.

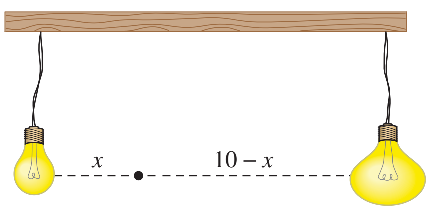


Figura 9

Solución Necesitamos resolver la ecuación

$$4 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

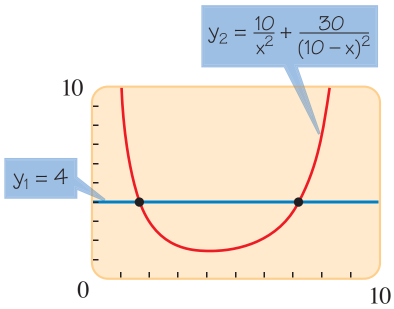


Figura 10

Las gráficas de

$$y_1 = 4 \qquad \text{y} \qquad y_2 = \frac{10}{x^2} + \frac{30}{(10 - x)^2}$$

se muestran en la figura 10. Al efectuar un acercamiento o usar el comando `intersect` encontramos dos soluciones, $x \approx 1.67431$ y $x \approx 7.1927193$. Entonces, la intensidad de la luz es 4 luxes en los puntos que están a 1.67 y 7.19 de la fuente más débil. ■

Resolución gráfica de desigualdades

Las desigualdades se pueden resolver gráficamente. Para explicar el método resolvamos

$$x^2 - 5x + 6 \leq 0$$

Esta desigualdad está resuelta algebraicamente en la sección 1.7, ejemplo 3. Para resolver la desigualdad gráficamente, dibujamos la gráfica de

$$y = x^2 - 5x + 6$$

El objetivo es calcular aquellos valores de x para los cuales $y \leq 0$. Éstos son simplemente los valores de x para los cuales la gráfica queda abajo del eje x. Podemos ver en la figura 11 que la solución de la desigualdad es el intervalo $[2, 3]$.

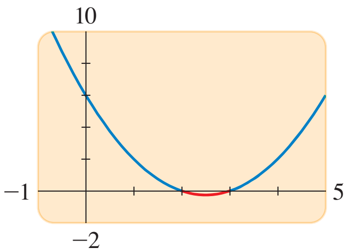


Figura 11
$x^2 - 5x + 6 \leq 0$

Ejemplo 8 Resolución gráfica de una desigualdad

Resuelva la desigualdad $3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \leq 2.0 - 1.4x$.

Solución Graficamos las ecuaciones

$$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9 \qquad \text{y} \qquad y_2 = 2.0 - 1.4x$$

en el mismo rectángulo de visión de la figura 12. Nos interesan los valores de x para los cuales $y_1 \leq y_2$; son los puntos para los cuales la gráfica de y_2 queda sobre la gráfica de y_1 o por arriba de ella. Para determinar el intervalo adecuado, buscamos las coordenadas x de puntos donde las gráficas se cortan. Concluimos que la solución es aproximadamente el intervalo $[-1.45, 0.72]$. ■

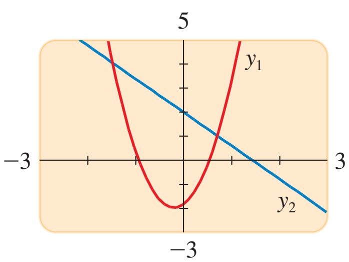


Figura 12
$y_1 = 3.7x^2 + 1.3x - 1.9$
$y_2 = 2.0 - 1.4x$

Ejemplo 9 Resolución gráfica de una desigualdad

Resuelva la desigualdad $x^3 - 5x^2 \geq -8$.

Solución Escribimos la desigualdad como

$$x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$$

y luego graficamos la ecuación

$$y = x^3 - 5x^2 + 8$$

en el rectángulo de visión $[-6, 6]$ por $[-15, 15]$, como se ilustra en la figura 13. La solución de la desigualdad consiste en los intervalos en los cuales la gráfica queda sobre el eje x o arriba de él. Al desplazar el cursor a las intersecciones con el eje x encontramos que la solución es $[-1.1, 1.5] \cup [4.6, \infty)$ correcta a una cifra decimal. ■

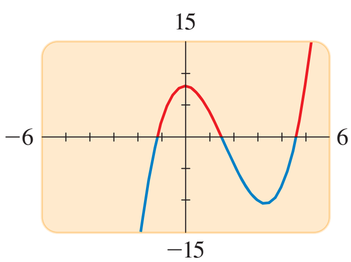


Figura 13
$x^3 - 5x^2 + 8 \geq 0$

1.9 Ejercicios

1–6 ■ Utilice una calculadora para graficar o una computadora para decidir qué rectángulo de visión a) a d) genera la gráfica más adecuada de la ecuación.

1. $y = x^4 + 2$

a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$

b) $[0, 4]$ por $[0, 4]$

c) $[-8, 8]$ por $[-4, 40]$

d) $[-40, 40]$ por $[-80, 800]$

2. $y = x^2 + 7x + 6$

a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$

b) $[0, 10]$ por $[-20, 100]$

c) $[-15, 8]$ por $[-20, 100]$

d) $[-10, 3]$ por $[-100, 20]$

3. $y = 100 - x^2$

a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) $[-15, 15]$ por $[-30, 110]$

d) $[-4, 4]$ por $[-30, 110]$

4. $y = 2x^2 - 1000$

a) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

b) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

c) $[-10, 10]$ por $[-1000, 1000]$

d) $[-25, 25]$ por $[-1200, 200]$

5. $y = 10 + 25x - x^3$

a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) $[-20, 20]$ por $[-100, 100]$

d) $[-100, 100]$ por $[-200, 200]$

6. $y = \sqrt{8x - x^2}$

a) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

b) $[-5, 5]$ por $[0, 100]$

c) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$

d) $[-2, 10]$ por $[-2, 6]$

7–18 ■ Determine un rectángulo de visión adecuado para la ecuación y utilícelo para trazar la gráfica.

7. $y = 100x^2$

8. $y = -100x^2$

9. $y = 4 + 6x - x^2$

10. $y = 0.3x^2 + 1.7x - 3$

11. $y = \sqrt[4]{256 - x^2}$

12. $y = \sqrt{12x - 17}$

13. $y = 0.01x^3 - x^2 + 5$

14. $y = x(x + 6)(x - 9)$

15. $y = x^4 - 4x^3$

16. $y = \dfrac{x}{x^2 + 25}$

17. $y = 1 + |x - 1|$

18. $y = 2x - |x^2 - 5|$

19. Grafique la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ despejando y y trazando las dos ecuaciones como en el ejemplo 3.

20. Grafique la circunferencia $(y - 1)^2 + x^2 = 1$ despejando y y trazando las dos ecuaciones como en el ejemplo 3.

21. Grafique la ecuación $4x^2 + 2y^2 = 1$ despejando y y trazando las dos ecuaciones que corresponden a las raíces negativa y positiva (Esta gráfica se llama *elipse*.)

22. Grafique la ecuación $y^2 - 9x^2 = 1$ determinando y y trazando las dos ecuaciones correspondientes a las raíces cuadradas positiva y negativa. (Esta gráfica se llama *hipérbola*.)

23–26 ■ ¿Las gráficas se cortan en el rectángulo de visión dado? Si es así, ¿cuántos puntos de intersección hay?

23. $y = -3x^2 + 6x - \frac{1}{2}$, $y = \sqrt{7 - \frac{7}{12}x^2}$; $[-4, 4]$ por $[-1, 3]$

24. $y = \sqrt{49 - x^2}$, $y = \frac{1}{5}(41 - 3x)$; $[-8, 8]$ por $[-1, 8]$

25. $y = 6 - 4x - x^2$, $y = 3x + 18$; $[-6, 2]$ por $[-5, 20]$

26. $y = x^3 - 4x$, $y = x + 5$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

27–36 ■ Resuelva la ecuación por medio del álgebra y de los métodos gráficos.

27. $x - 4 = 5x + 12$

28. $\frac{1}{2}x - 3 = 6 + 2x$

29. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2x} = 7$

30. $\dfrac{4}{x + 2} - \dfrac{6}{2x} = \dfrac{5}{2x + 4}$

31. $x^2 - 32 = 0$

32. $x^3 + 16 = 0$

33. $16x^4 = 625$

34. $2x^5 - 243 = 0$

35. $(x - 5)^4 - 80 = 0$

36. $6(x + 2)^5 = 64$

37–44 ■ Resuelva la ecuación gráficamente en el intervalo dado. Dé cada respuesta correcta con dos cifras decimales.

37. $x^2 - 7x + 12 = 0$; $[0, 6]$

38. $x^2 - 0.75x + 0.125 = 0$; $[-2, 2]$

39. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$; $[-1, 4]$

40. $16x^3 + 16x^2 = x + 1$; $[-2, 2]$

41. $x - \sqrt{x + 1} = 0$; $[-1, 5]$

42. $1 + \sqrt{x} = \sqrt{1 + x^2}$; $[-1, 5]$

43. $x^{1/3} - x = 0$; $[-3, 3]$

44. $x^{1/2} + x^{1/3} - x = 0$; $[-1, 5]$

45–48 ■ Calcule todas las soluciones reales de la ecuación con dos cifras decimales.

45. $x^3 - 2x^2 - x - 1 = 0$

46. $x^4 - 8x^2 + 2 = 0$

47. $x(x - 1)(x + 2) = \frac{1}{6}x$

48. $x^4 = 16 - x^3$

49–56 ■ Calcule las soluciones de la desigualdad trazando gráficas adecuadas. Proporcione cada respuesta con dos cifras decimales.

49. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$

50. $0.5x^2 + 0.875x \leq 0.25$

51. $x^3 + 11x \leq 6x^2 + 6$

52. $16x^3 + 24x^2 > -9x - 1$

53. $x^{1/3} < x$

54. $\sqrt{0.5x^2 + 1} \leq 2|x|$

55. $(x + 1)^2 < (x - 1)^2$

56. $(x + 1)^2 \leq x^3$

57. En el ejemplo 6 encontramos dos soluciones de la ecuación $x^3 - 6x^2 + 9x = \sqrt{x}$, las soluciones que quedan entre 1 y 6. Determine dos soluciones más con dos cifras decimales.

Aplicaciones

58. Ganancia estimada Un fabricante de electrodomésticos estima que la ganancia y en dólares que genera la producción x de ollas por mes se determina mediante la ecuación

$$y = 10x + 0.5x^2 - 0.001x^3 - 5000$$

donde $0 \leq x \leq 450$.

a) Grafique la ecuación.

b) ¿Cuántas ollas se tienen que fabricar para empezar a generar ganancias?

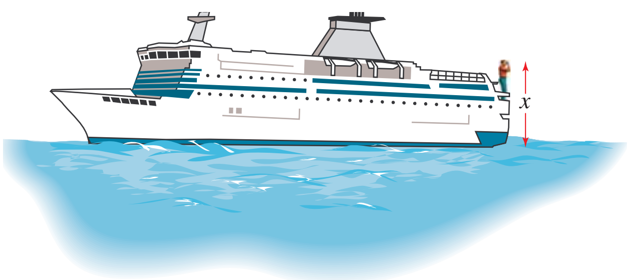
c) ¿Para qué valores de x la ganancia de la compañía es mayor que 15 000 dólares?

59. ¿Qué tan lejos puede ver? Si se pone de pie en un barco que va por mar calmo, entonces su estatura x en pies por arriba del nivel del mar se relaciona con la distancia más lejana y en millas que alcanza a ver mediante la ecuación

$$y = \sqrt{1.5x + \left(\frac{x}{5280}\right)^2}$$

a) Grafique la ecuación para $0 \leq x \leq 100$.

b) ¿Qué tan alto tiene que estar usted para ser capaz de alcanzar a ver 10 millas?



Descubrimiento • Debate

60. Notación de las ecuaciones en las calculadoras para graficar Cuando usted introduce los datos de las ecuaciones siguientes en la calculadora, ¿qué tanto difiere lo que usted ve en la pantalla de la manera usual de escribir las ecuaciones? (Verifique en el manual de usuario si no está seguro.)

a) $y = |x|$

b) $y = \sqrt[5]{x}$

c) $y = \dfrac{x}{x - 1}$

d) $y = x^3 + \sqrt[3]{x + 2}$

61. Introducción cuidadosa de los datos de una ecuación Un estudiante desea graficar las ecuaciones

$$y = x^{1/3} \qquad \text{y} \qquad y = \frac{x}{x + 4}$$

en la misma pantalla, de modo que introduce la información siguiente en su calculadora:

```
Y1 = X^1/3        Y2 = X/X + 4
```

La calculadora grafica dos rectas en lugar de las ecuaciones que el estudiante quería. ¿Qué estuvo mal hecho?

62. Métodos de solución algebraico y gráfico Escriba un breve ensayo para comparar los métodos algebraico y gráfico en la resolución de ecuaciones. Plantee sus propios ejemplos para ilustrar las ventajas y desventajas de cada método.

63. ¿Cuántas soluciones? Este ejercicio trata sobre la familia de ecuaciones

$$x^3 - 3x = k$$

a) Trace las gráficas de

$$y_1 = x^3 - 3x \qquad \text{y} \qquad y_2 = k$$

en el mismo rectángulo de visión, en el caso de $k = -4$, -2, 0, 2, y 4. ¿Cuántas soluciones de la ecuación $x^3 - 3x = k$ hay en cada caso? Calcule las soluciones correctas con dos cifras decimales

b) ¿Para qué valores de k la ecuación tiene una solución? ¿Dos soluciones? ¿Tres soluciones?

1.10 Rectas

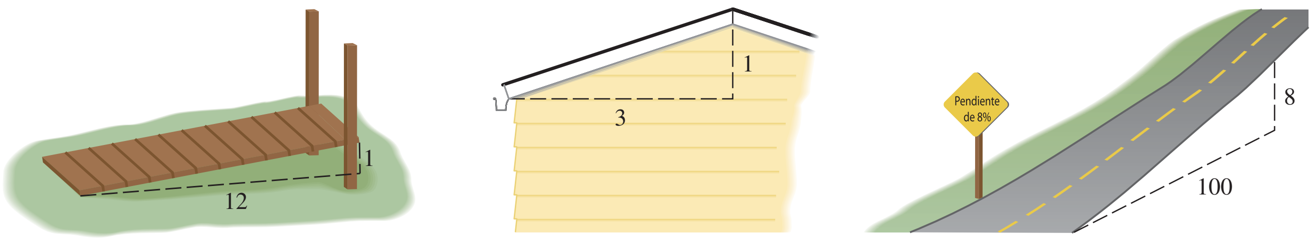
En esta sección determinamos ecuaciones para rectas que están en un plano coordenado. Las ecuaciones dependen de la inclinación de la recta, de modo que empezamos por analizar el concepto de pendiente.

La pendiente de una recta

Primero necesitamos un modo de medir la "inclinación" de una recta, o qué tan rápido se levanta o desciende cuando nos desplazamos desde la izquierda hacia la derecha. Definimos *desplazamiento horizontal* como la distancia que nos movemos a la derecha y *desplazamiento vertical* como la distancia correspondiente que la recta sube o cae. La *pendiente* de una recta es la relación de desplazamiento horizontal a desplazamiento vertical:

$$\text{pendiente} = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}}$$

En la figura 1 se muestran situaciones donde la pendiente es importante. Los carpinteros utilizan el término *declive* para dar a entender la pendiente de un techo o de una rampa; el término *rasante* se utiliza para la pendiente de una carretera.



Declive de una rampa
Pendiente $= \frac{1}{12}$

Declive de un techo
Pendiente $= \frac{1}{3}$

Rasante de una carretera
Pendiente $= \frac{8}{100}$

Figura 1

Si una recta está en un plano coordenado, entonces el **desplazamiento horizontal** es el cambio en la coordenada x y el **desplazamiento vertical** es el cambio correspondiente en la coordenada y entre dos puntos cualesquiera de la recta (véase la figura. 2). Así llegamos a la siguiente definición de pendiente.

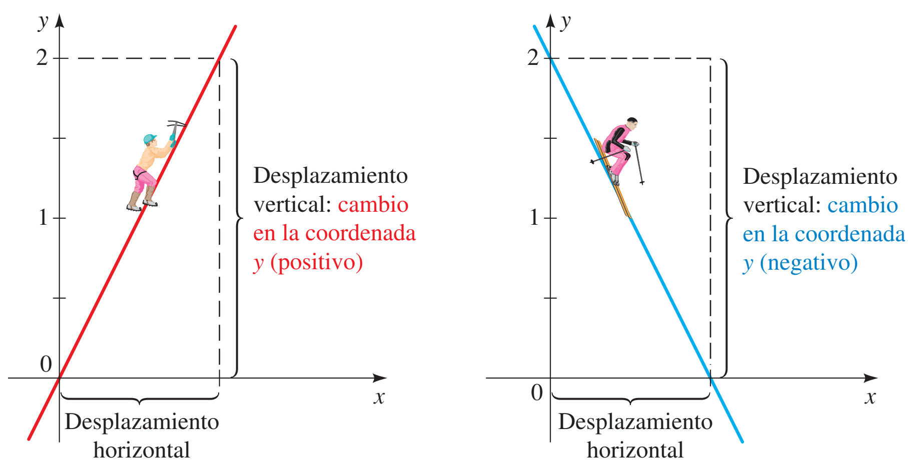


Figura 2

René Descartes (1596-1650) nació en la ciudad de La Haye en el sur de Francia. Desde temprana edad, a Descartes le gustaron las matemáticas debido a "la certeza de sus resultados y a la claridad de su razonamiento". Él opinaba que con el fin de llegar a la verdad uno debía empezar por dudar de todo, incluso de la propia existencia de uno mismo. Esto le llevó a formular quizá la frase más conocida de toda la filosofía: "Pienso, luego existo". En su libro *Discurso del método* describió lo que ahora conocemos como plano cartesiano. Esta idea de combinar el álgebra y la geometría permitió que los matemáticos "vieran" por primera vez las ecuaciones que estudiaban. El filósofo John Stuart Mill llamó a su invención "el paso más grande jamás dado en el avance de las ciencias exactas". A Descartes le gustaba levantarse tarde y pasar la mañana en la cama pensando y escribiendo. Inventó el plano coordenado mientras yacía en la cama observando el recorrido errático de una mosca en el techo, y razonando que podría describir la posición exacta de la mosca si supiera su distancia a dos muros perpendiculares. En 1649, Descartes se volvió tutor de la reina Cristina de Suecia. A ella le gustaba tomar sus lecciones a las 5 de la mañana, hora en que, según ella, su mente estaba más despierta. Pero el cambio en los hábitos de Descartes y la biblioteca fría como el hielo donde estudiaban fueron demasiado para él. En febrero de 1650, justo dos meses después, enfermó de neumonía y murió

Pendiente de una recta

La **pendiente** m de una recta que no es vertical y que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{\text{desplazamiento vertical}}{\text{desplazamiento horizontal}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

La pendiente es independiente de los puntos que se escogen en la recta. Podemos observar que esto es verdadero a partir de los triángulos

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

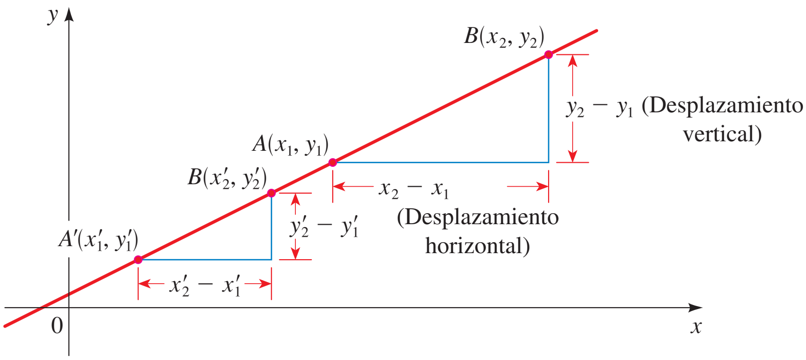


Figura 3

En la figura 4 se muestran varias rectas con sus pendientes marcadas. Observe que las rectas con pendiente positiva están hacia arriba a la derecha, y las de pendiente negativa están hacia abajo y a la derecha. Las rectas con mayor pendiente son aquellas cuyo valor absoluto de la pendiente es más grande; una recta horizontal tiene pendiente cero.

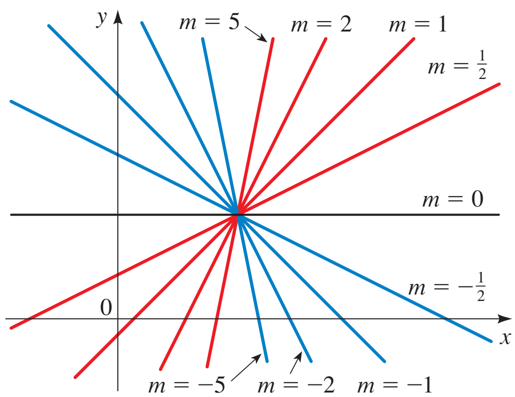


Figura 4
Rectas de varias pendientes

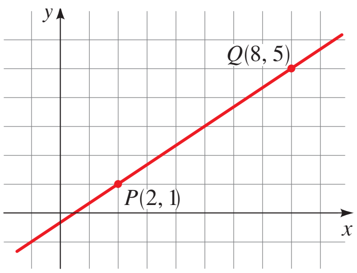


Figura 5

Ejemplo 1 Determinación de la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Calcule la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

Solución Puesto que dos puntos cualesquiera determinan una recta, sólo una recta pasa por esos dos puntos. De acuerdo con la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Esto quiere decir que por cada 3 unidades que nos movamos hacia la derecha, el desplazamiento vertical es de 2 unidades. La recta se ilustra en la figura 5. ■

Ecuaciones de rectas

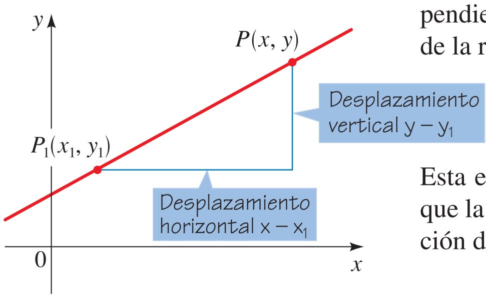


Figura 6

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por un punto dado $P(x_1, y_1)$ y tiene pendiente m. Un punto $P(x, y)$ con $x \neq x_1$ queda en esta recta si y sólo si la pendiente de la recta que pasa por P_1 y P es igual a m (véase la figura 6), es decir

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Esta ecuación se puede volver a escribir en la forma $y - y_1 = m(x - x_1)$; observe que la ecuación también se cumple cuando $x = x_1$ y $y = y_1$. Por lo tanto, es una ecuación de la recta dada.

Forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo 2 Determinación de la ecuación de una recta mediante un punto y la pendiente

a) Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ y su pendiente es $-\frac{1}{2}$.

b) Grafique la recta.

Solución

a) Aplicando la ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos una ecuación de la recta

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \quad \text{Según la ecuación dados un punto y la pendiente}$$
$$2y + 6 = -x + 1 \quad \text{Multiplicación por 2}$$
$$x + 2y + 5 = 0 \quad \text{Reacomodo de términos}$$

b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ indica que cuando nos desplazamos a la derecha 2 unidades, la recta cae una unidad. Esto posibilita que dibujemos la recta de la figura 7. ■

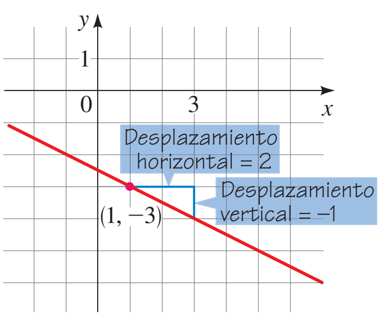


Figura 7

Ejemplo 3 Determinación de la ecuación de una recta por medio de dos puntos dados

Calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

Solución La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Podemos utilizar *cualquier* punto, $(-1, 2)$ *o bien* $(3, -4)$, en la ecuación donde se da un punto y la pendiente. Llegaremos a la misma respuesta final.

Al aplicar la ecuación de una recta que pasa por un punto y conocemos la pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, tenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \quad \text{Según la ecuación de punto y pendiente dados}$$

$$2y - 4 = -3x - 3 \quad \text{Multiplicación por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad \text{Reacomodo de los términos}$$

■

Suponga una recta no vertical que tiene una pendiente m y una ordenada al origen b (véase la figura 8). Esto significa que la recta corta al eje de las y en el punto $(0, b)$, de modo que la ecuación cuando se da un punto y la pendiente para la ecuación de la recta, con $x = 0$ y $y = b$, se vuelve

$$y - b = m(x - 0)$$

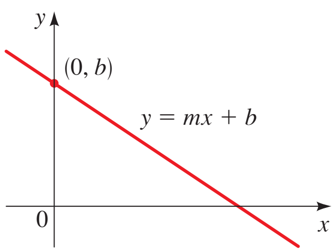


Figura 8

Se simplifica a $y = mx + b$, que se conoce como ecuación de la recta **dada la pendiente y la ordenada en el origen**.

Ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen

Una ecuación de la recta que tiene una pendiente m y cuya ordenada en el origen es b es

$$y = mx + b$$

Ejemplo 4 Ecuación de rectas dadas la pendiente y la ordenada en el origen

a) Calcular la ecuación de la recta con pendiente 3 y ordenada en el origen igual a -2.

b) Encontrar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta $3y - 2x = 1$.

Solución

a) Puesto que $m = 3$ y $b = -2$, de acuerdo con la ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada al origen tenemos

$$y = 3x - 2$$

b) Primero escribimos la ecuación en la forma de $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \quad \text{Suma de 2x}$$

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \quad \text{División entre 3}$$

Pendiente — Ordenada en el origen y

$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3}$$

Según la ecuación de la recta dadas la pendiente y la ordenada al origen, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada es $b = \frac{1}{3}$. ■

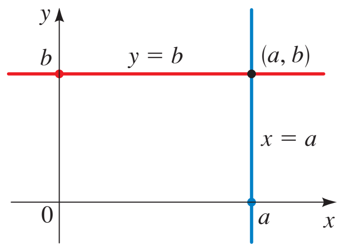


Figura 9

Si la recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es la ordenada en el origen (véase la figura 9). Una vertical no tiene una pendiente, pero podemos expresar su ecuación como $x = a$, donde a es la intersección con el eje x porque la coordenada x de cada uno de los puntos sobre la recta es a.

Rectas verticales y horizontales

Una ecuación de la vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.
Una ecuación de la horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

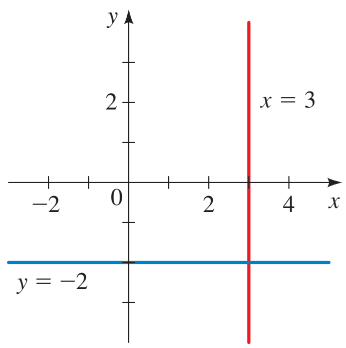


Figura 10

Ejemplo 5 Rectas verticales y horizontales

a) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una vertical cuya intersección con el eje x es 3

b) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una horizontal cuya intersección con el eje y es una horizontal cuya intersección con el eje y es -2.

Las rectas se grafican en la figura 10. ■

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

donde A, B y C son constantes y A y B no son simultáneamente iguales a cero. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

- Una recta no vertical tiene por ecuación $y = mx + b$ o bien $-mx + y - b = 0$, la cual es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene por ecuación $x = a$ o bien, $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

Por lo contrario, la gráfica de una ecuación lineal es una recta:

- Si $B \neq 0$, la ecuación se transforma en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

  y ésta es la forma de la ecuación de una recta dadas la pendiente y la ordenada en el origen (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).
- Si $B = 0$, la ecuación se vuelve

$$Ax + C = 0$$

  o bien $x = -C/A$, la cual representa una línea vertical.

Hemos demostrado lo siguiente.

Ecuación general de la recta

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son simultáneamente cero})$$

es una recta. En caso contrario, cada recta es la gráfica de una ecuación lineal.

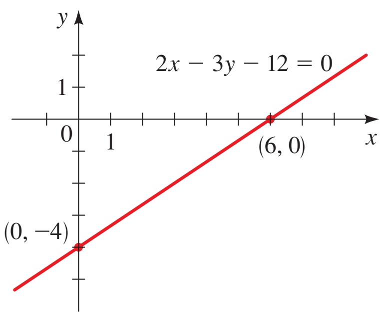


Figura 11

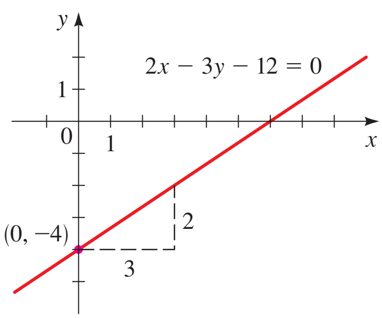


Figura 12

Ejemplo 6 Gráfica de una ecuación lineal

Trace la gráfica de la ecuación $2x - 3y - 12 = 0$.

Solución 1 Puesto que la ecuación es lineal, su gráfica es una recta. Para dibujar la gráfica es suficiente encontrar dos puntos cualesquiera sobre la recta. Las intersecciones con los ejes son los puntos más fáciles de determinar.

Intersección con el eje x: sustituya $y = 0$ para obtener $2x - 12 = 0$, de modo que $x = 6$

Intersección con el eje y: sustituya $x = 0$ para obtener $-3y - 12 = 0$, de modo que $y = -4$

Con estos puntos podemos trazar la gráfica en la figura 11.

Solución 2 Expresamos la ecuación en la forma de pendiente y ordenada en el origen dadas

$$
\begin{aligned}
2x - 3y - 12 &= 0 \\
2x - 3y &= 12 && \text{Suma de 12} \\
-3y &= -2x + 12 && \text{Resta de } 2x \\
y &= \tfrac{2}{3}x - 4 && \text{División entre } -3
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en la forma de $y = mx + b$, de modo que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la ordenada al origen es $b = -4$. Para graficar, localizamos la intersección con el eje y y luego nos desplazamos 3 unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba como se muestra en la figura 12. ■

Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Puesto que la pendiente mide la inclinación de una recta, es razonable que las rectas paralelas tengan la misma pendiente. De hecho, podemos demostrarlo.

Rectas paralelas

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

■ **Demostración** Sean las rectas l_1 y l_2 de la figura 13 que tienen pendientes m_1 y m_2. Si las rectas son paralelas, entonces los triángulos rectángulos ABC y DEF son semejantes, de modo que

$$m_1 = \frac{d(B, C)}{d(A, C)} = \frac{d(E, F)}{d(D, F)} = m_2$$

Y al contrario, si las pendientes son iguales, entonces los triángulos son semejantes, por lo que $\angle BAC = \angle EDF$ y las rectas son paralelas. ■

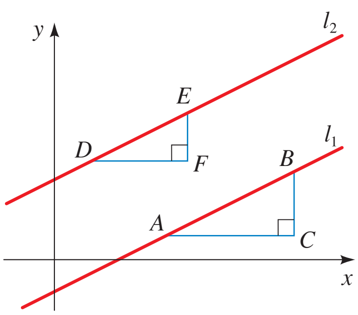


Figura 13

Ejemplo 7 Determinación de la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

Solución Primero escribimos la ecuación de la recta dada en la forma de pendiente y ordenada en el origen.

$$
\begin{aligned}
4x + 6y + 5 &= 0 \\
6y &= -4x - 5 && \text{Resta de } 4x + 5 \\
y &= -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} && \text{División entre } 6
\end{aligned}
$$

Por lo que la recta tiene la pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, tiene también la pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De acuerdo con la ecuación de una recta que pasa por un punto y se conoce su pendiente obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}\text{, pendiente } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \qquad \text{Multiplicación por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \qquad \text{Reacomodo de los términos}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$. ■

La condición para rectas perpendiculares no es tan obvia como con las rectas paralelas.

Rectas perpendiculares

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1m_2 = -1$, es decir, sus pendientes recíprocas y de signo contrario:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Asimismo, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a la recta vertical (pendiente indefinida).

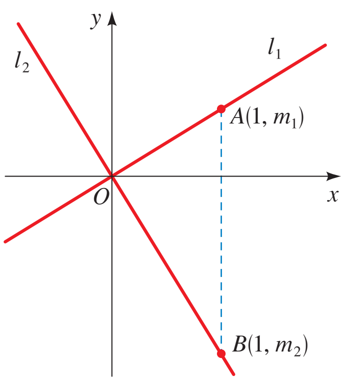


Figura 14

■ **Demostración** En la figura 14 se ilustran dos rectas que se cortan en el origen. (Si las rectas se cortan en algún otro punto, consideramos rectas paralelas a éstas que se cortan en el origen. Estas rectas tienen las mismas pendientes que las rectas originales.)

Si las rectas l_1 y l_2 tienen pendientes m_1 y m_2, entonces sus ecuaciones son $y = m_1x$ y $y = m_2x$. Observe que $A(1, m_1)$ queda sobre l_1 y $B(1, m_2)$ queda sobre l_2. Según el teorema de Pitágoras y su inverso (véase pág. 54), $OA \perp OB$ si y sólo si

$$[d(O, A)]^2 + [d(O, B)]^2 = [d(A, B)]^2$$

De acuerdo con la fórmula de la distancia, esto se transforma en

$$(1^2 + m_1^2) + (1^2 + m_2^2) = (1 - 1)^2 + (m_2 - m_1)^2$$

$$2 + m_1^2 + m_2^2 = m_2^2 - 2m_1m_2 + m_1^2$$

$$2 = -2m_1m_2$$

$$m_1m_2 = -1$$

■

Ejemplo 8 Rectas perpendiculares

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

Solución Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son respectivamente,

$$m_1 = \frac{5 - 3}{11 - 3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5 - 17}{11 - 8} = -4$$

Puesto que m_1 y $m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares y, entonces PQR es un triángulo rectángulo. La gráfica se ilustra en la figura 15.

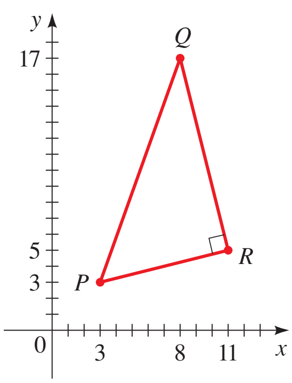


Figura 15

Ejemplo 9 Determinación de la ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Determinar una ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y que pasa por el origen.

Solución En el ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Por consiguiente, la pendiente de una perpendicular es la pendiente recíproca y de signo negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Puesto que la recta requerida pasa por (0, 0), la ecuación de la recta cuando se conoce un punto y la pendiente es

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0)$$
$$y = \tfrac{3}{2}x$$

■

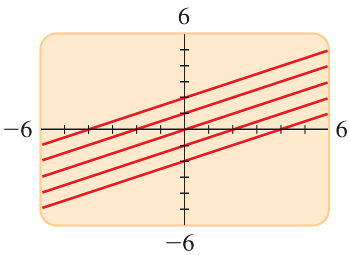


Figura 16
$y = 0.5x + b$

Ejemplo 10 Trazo de una familia de rectas

Utilice la calculadora para elaborar gráficas con el fin de trazar la familia de rectas

$$y = 0.5x + b$$

para $b = -2, -1, 0, 1, 2$. ¿Qué propiedad comparten las rectas?

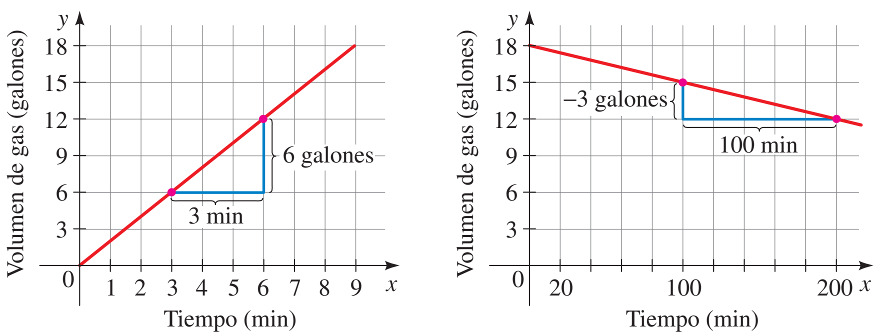
Solución Las rectas se grafican en la figura 16 en el rectángulo de visión $[-6, 6]$ por $[-6, 6]$. Todas las rectas tienen la misma pendiente, de modo que son paralelas. ■

Aplicaciones: pendiente como razón de cambio

Cuando una recta se utiliza como modelo de la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **razón de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la figura 17 (a) da la cantidad de gas de un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{2 \text{ minutos}} = 2 \text{ galones por minuto}$$

La pendiente es la *razón* a la cual el tanque se está llenando, 2 galones por minuto. En la figura 17(b), el tanque se está vaciando a la *razón* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03.



a) Tanque que se llena a razón de 2 galones por minuto. La pendiente de la recta es 2

b) Tanque que se vacía a razón de 0.03 galones por minuto. La pendiente de la recta es –0.03

Figura 17

Los dos ejemplos siguientes representan otras situaciones donde la pendiente de una recta es una razón de cambio.

Ejemplo 11 Pendiente como razón de cambio

Una presa está construida sobre un río para tener un embalse. El nivel del agua w en el embalse está dado por la ecuación

$$w = 4.5t + 28$$

donde t es la cantidad de años desde que la presa se construyó y w se mide en pies.

a) Trace una gráfica de esta ecuación.

b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje w de esta gráfica?

Solución

a) Esta ecuación es lineal, de modo que su gráfica es lineal, es una recta. Como dos puntos definen una recta, localizamos dos puntos que quedan sobre la gráfica y dibujamos una recta que los una.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$,
por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$,
por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

La recta definida por estos puntos se muestra en la figura 18.

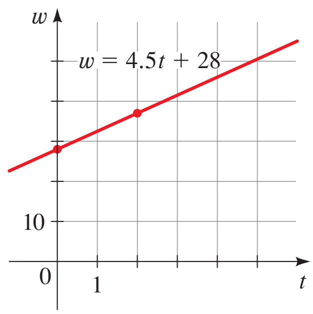
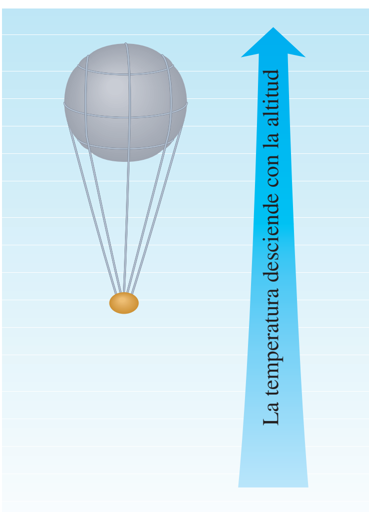


Figura 18

b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la tasa de cambio del nivel del agua con respecto al tiempo. Esto quiere decir que el nivel del agua se *incrementa* 4.5 pies por año. La intersección con el eje w es 28 y ocurre cuando $t = 0$, de modo que representa el nivel del agua cuando la presa fue construida. ■



Ejemplo 12 Relación lineal entre temperatura y altitud

a) A medida que el aire seco asciende, se expande y se enfría. Si la temperatura del suelo es de 20°C y la temperatura a una altura de 1 km es 10°C, exprese la temperatura T (en °C) en términos de la altura h (en kilómetros). (Suponga que la relación entre T y h es lineal.)

b) Dibuje la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente?

c) ¿Cuál es la temperatura a una altura de 2.5 km?

Solución

a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h, la ecuación debe tener la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, sabemos que $T = 20$, por lo que

$$\begin{aligned} 20 &= m(0) + b \\ b &= 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos que $T = 10$ y entonces

$$\begin{aligned} 10 &= m(1) + 20 \\ m &= 10 - 20 = -10 \end{aligned}$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

b) La gráfica se ilustra en la figura 19. La pendiente es $m = -10°\text{C/km}$, que representa la razón de cambio de la temperatura con respecto a la distancia por arriba del suelo. De este modo, la temperatura *desciende* 10°C por kilómetro de altura.

c) A una altura de $h = 2.5$ km, la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5°\text{C}$$

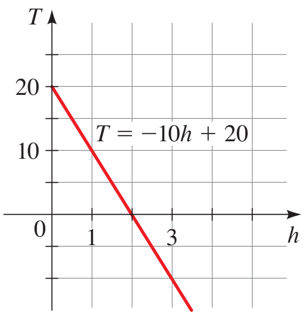


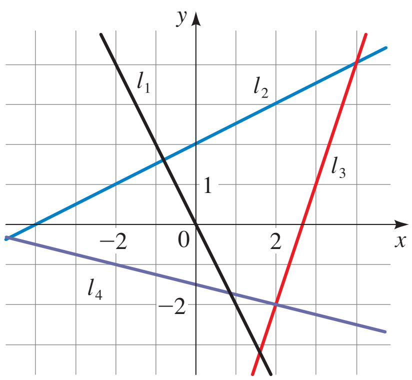
Figura 19

1.10 Ejercicios

1–8 ■ Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos P y Q.

1. $P(0, 0)$, $Q(4, 2)$
2. $P(0, 0)$, $Q(2, -6)$
3. $P(2, 2)$, $Q(-10, 0)$
4. $P(1, 2)$, $Q(3, 3)$
5. $P(2, 4)$, $Q(4, 3)$
6. $P(2, -5)$, $Q(-4, 3)$
7. $P(1, -3)$, $Q(-1, 6)$
8. $P(-1, -4)$, $Q(6, 0)$

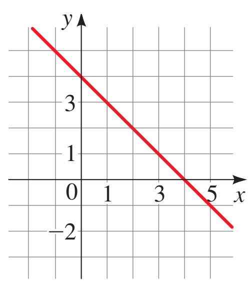
9. Calcule las pendientes de las rectas l_1, l_2, l_3 y l_4 en la figura que sigue.



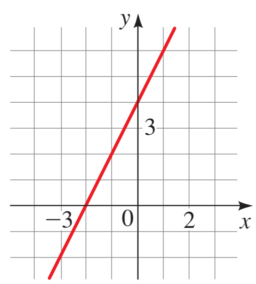
10. **a)** Grafique las rectas que pasan por (0, 0) con pendientes $1, 0, \frac{1}{2}, 2$ y -1.
  b) Grafique las rectas que pasan por (0, 0) con pendientes $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ y 3.

11–14 ■ Determine una ecuación para la recta cuya gráfica se proporciona.

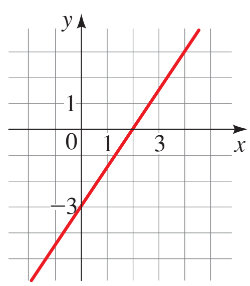
11.



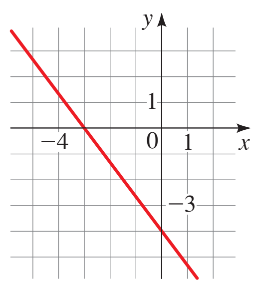
12.



13.



14.



15–34 ■ Calcule una ecuación de la recta que cumpla las condiciones dadas.

15. Pasa por $(2, 3)$; pendiente 1

16. Pasa por $(-2, 4)$; pendiente -1

17. Pasa por $(1, 7)$; pendiente $\frac{2}{3}$

18. Pasa por $(-3, -5)$; pendiente $-\frac{7}{2}$

19. Pasa por $(2, 1)$ y $(1, 6)$

20. Pasa por $(-1, -2)$ y $(4, 3)$

21. Pendiente 3; ordenada al origen y -2

22. Pendiente $\frac{2}{5}$; ordenada al origen y 4

23. Intersección con el eje x 1; ordenada al origen y -3

24. Intersección con el eje x -8; ordenada al origen y 6

25. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje x

26. Pasa por $(4, 5)$; paralela al eje y

27. Pasa por $(1, -6)$; paralela a la recta $x + 2y = 6$

28. Ordenada al origen 6; paralela a la recta $2x + 3y + 4 = 0$

29. Pasa por $(-1, 2)$; paralela a la recta $x = 5$

30. Pasa por $(2, 6)$; perpendicular a la recta $y = 1$

31. Pasa por $(-1, -2)$; perpendicular a la recta $2x + 5y + 8 = 0$

32. Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$; perpendicular a la recta $4x - 8y = 1$

33. Pasa por $(1, 7)$; paralela a la recta que pasa por $(2, 5)$ y $(-2, 1)$

34. Pasa por $(-2, -11)$; perpendicular a la recta que pasa por $(1, 1)$ y $(5, -1)$

35. **a)** Grafique la recta con pendiente $\frac{3}{2}$ que pasa por el punto $(-2, 1)$.

b) Determine una ecuación para esta recta.

36. **a)** Grafique la recta con pendiente -2 que pasa por el punto $(4, -1)$.

b) Encuentre la ecuación de esta recta.

37–40 ■ Utilice una calculadora o una computadora para graficar y trace la familia de rectas en el mismo rectángulo de visión. ¿Qué tienen las rectas en común?

37. $y = -2x + b$ por $b = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 6$

38. $y = mx - 3$ por $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

39. $y = m(x - 3)$ por $m = 0, \pm 0.25, \pm 0.75, \pm 1.5$

40. $y = 2 + m(x + 3)$ por $m = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 2, \pm 6$

41–52 ■ Determine la pendiente y la ordenada al origen de la recta y trace la gráfica.

41. $x + y = 3$

42. $3x - 2y = 12$

43. $x + 3y = 0$

44. $2x - 5y = 0$

45. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

46. $-3x - 5y + 30 = 0$

47. $y = 4$

48. $4y + 8 = 0$

49. $3x - 4y = 12$

50. $x = -5$

51. $3x + 4y - 1 = 0$

52. $4x + 5y = 10$

53. Utilice las pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(7, 4)$, $C(5, 10)$ y $D(-1, 7)$ son vértices de un paralelogramo.

54. Utilice las pendientes para demostrar que $A(-3, -1)$, $B(3, 3)$ y $C(-9, 8)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

55. Utilice las pendientes para demostrar que $A(1, 1)$, $B(11, 3)$, $C(10, 8)$ y $D(0, 6)$ son vértices de un rectángulo.

56. Utilice las pendientes para determinar si los puntos dados son colineales, es decir, están sobre la misma recta.

a) $(1, 1), (3, 9), (6, 21)$

b) $(-1, 3), (1, 7), (4, 15)$

57. Determine una ecuación de la bisectriz perpendicular a la recta que une los puntos $A(1, 4)$ y $B(7, -2)$.

58. Calcule el área del triángulo formado por los ejes de coordenadas y la recta

$$2y + 3x - 6 = 0$$

59. **a)** Demuestre que si las intersecciones con los ejes x y y de una recta son números no cero a y b, entonces la ecuación de la recta se puede expresar de la forma

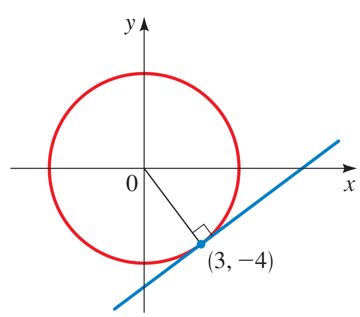
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Esta forma se denomina **ecuación simétrica** de la recta.

b) Utilice el inciso a) para determinar una ecuación de la recta cuya intersección con el eje x sea 6 y cuya ordenada al origen sea -8.

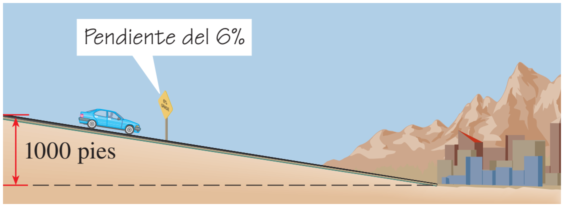
60. **a)** Calcule una ecuación para la tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $(3, -4)$. (Véase la figura.)

b) ¿En qué otro punto de la circunferencia una tangente será paralela a la tangente del inciso a)?



Aplicaciones

61. Rasante de una carretera Al oeste de Albuquerque, Nuevo México, la carretera 40 con rumbo al este es recta y tiene una fuerte pendiente hacia la ciudad. La carretera tiene una rasante del 6%, lo cual quiere decir que su pendiente es $-\frac{6}{100}$. Al manejar por esta carretera usted puede ver por los señalamientos que ha bajado 1000 pies. ¿Cuál es el cambio en la distancia horizontal?



62. Advertencia mundial Algunos científicos opinan que la temperatura superficial promedio del mundo está aumentando en forma constante. La temperatura superficial promedio se expresa mediante

$$T = 0.02t + 8.50$$

donde T es la temperatura en °C y t es años desde 1900.

a) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje T?

b) Utilice la ecuación para predecir la temperatura superficial promedio del mundo en 2100.

63. Dosis de medicamentos Si la dosis de un medicamento que se recomienda para un adulto es D en mg, entonces para determinar la dosis aceptable c para un niño de edad a, los farmacéuticos usan la ecuación

$$c = 0.0417D(a + 1)$$

Suponga que la dosis para un adulto es de 200 mg.

a) Determine la pendiente. ¿Qué representa?

b) ¿Cuál es la dosis para un recién nacido?

64. Mercado de pulgas La administradora de un mercado de pulgas de fin de semana sabe por experiencias anteriores que si cobra x dólares por un espacio en renta en el mercado, entonces el número y de espacios que puede rentar se representan mediante la ecuación $y = 200 - 4x$.

a) Trace una gráfica de esta ecuación lineal. (Recuerde que el costo de la renta por el espacio y la cantidad de espacios rentados deben ser cantidades no negativas.)

b) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje y y la intersección con el eje x?

65. Costos de producción Un pequeño fabricante de electrodomésticos observa que si produce x tostadores en un mes su costo de producción está representado por la ecuación

$$y = 6x + 3000$$

donde y se mide en dólares.

a) Trace una gráfica de su ecuación lineal.

b) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?

66. Escalas de temperatura La relación entre las escalas de temperatura Fahrenheit (F) y Celsius (C) se expresa mediante la ecuación $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Complete la tabla para comparar las dos escalas en los valores dados.

b) Determine la temperatura a la cual las dos temperaturas concuerdan.
[*Sugerencia:* suponga que a es la temperatura a la cual las escalas concuerdan. Haga $F = a$ y $C = a$. Luego determine a.]

C	F
−30°	
−20°	
−10°	
0°	
	50°
	68°
	86°

67. Grillos y temperatura Los biólogos han observado que la tasa de chirridos de los grillos de ciertas especies se relaciona con la temperatura, y la relación parece ser casi lineal. Un grillo produce 120 chirridos por minuto a 70°F y 168 chirridos por minuto a 80°F.

a) Encuentre la ecuación lineal que relaciona la temperatura t con la cantidad de chirridos por minuto n.

b) Si los grillos están chirriando a 150 chirridos por minuto, estime la temperatura.

68. Depreciación Una pequeña empresa compra una computadora en 4000 dólares. Después de cuatro años, el valor esperado de la computadora será de 200 dólares. Para cuestiones de contabilidad, la empresa aplica la *depreciación lineal* para evaluar el valor de la computadora en un tiempo dado. Esto significa que si V es el valor de la computadora en el tiempo t, entonces se usa una ecuación lineal para relacionar V y t.

a) Determine una ecuación lineal que relacione V y t.

b) Grafique la ecuación lineal.

c) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje V de la gráfica?

d) Calcule el valor depreciado de la computadora tres años después de la fecha de la compra.

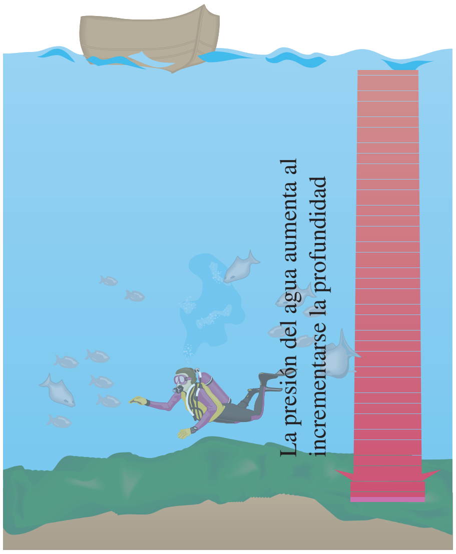
69. Presión y profundidad En la superficie del mar, la presión del agua es la misma que la presión del aire por arriba del agua, 15 lb/pulg^2. Abajo de la superficie, la presión del agua aumenta 4.34 lb/pulg^2 por cada 10 pies que se descienden.

a) Determine una ecuación para la relación entre presión y profundidad abajo de la superficie del mar.

b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

c) ¿Qué representan la pendiente y la ordenada en el origen de la gráfica?

d) ¿A qué profundidad se tiene una presión de 100 lb/pulg^2?



70. Distancia, velocidad y tiempo Jason y Debbie salen en automóvil de Detroit a las 2:00 PM y manejan a una velocidad constante viajando hacia el oeste sobre la I-90. Dejan atrás Ann Arbor, a 40 millas de Detroit, a las 2:50 PM.

a) Exprese la distancia recorrida en términos del tiempo transcurrido.

b) Trace la gráfica de la ecuación del inciso a).

c) ¿Cuál es la pendiente de la recta? ¿Qué representa?

71. Costos por manejar un automóvil El costo mensual de manejar un automóvil depende de la cantidad de millas recorridas. Lynn observa que, en mayo, el costo de manejo fue de 380 dólares por 480 millas y que en junio el costo fue de 460 dólares por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual C por manejar un automóvil y la distancia recorrida d.

a) Calcule una ecuación lineal que relacione C y d.

b) Use el inciso a) para predecir el costo por manejar 1500 millas al mes.

c) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?

d) ¿Qué representa la ordenada en el origen de la gráfica?

e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo adecuado en el caso de esta situación?

72. Costos de producción El gerente de una fábrica de muebles observa que cuesta 2200 dólares manufacturar 100 sillas en un día y 4800 dólares producir 300 sillas en un día.

a) Si se supone que la relación entre costo y número de sillas fabricadas es lineal, encuentre una ecuación que exprese esta relación. Luego grafique la ecuación.

b) ¿Cuál es la pendiente de la recta del inciso a), y qué representa?

c) ¿Cuál es la ordenada al origen de esta recta y qué representa?

Descubrimiento • Debate

73. ¿Qué significa la pendiente? Suponga que la gráfica de la temperatura en el exterior en un cierto periodo es una recta. ¿Qué tanto está cambiando el tiempo si la pendiente de la recta es positiva? ¿Y si es negativa? ¿Y si es cero?

74. Puntos colineales Suponga que le dan las coordenadas de tres puntos en el plano, y que quiere ver si quedan en la misma recta. ¿Cómo lo puede hacer usando las pendientes? ¿Y aplicando la fórmula de la distancia? ¿Puede imaginar otro método?

1.11 Modelos de variación

Los modelos matemáticos se estudian con mayores detalles en *Enfoque en el modelado*, que inicia en la página 239.

Cuando los científicos hablan acerca de un modelo matemático para un fenómeno del mundo cotidiano con frecuencia se refieren a una ecuación que describe la relación entre dos cantidades. Por ejemplo, el modelo podría describir cómo la población de especies animales varía con el tiempo o cómo la presión de un gas varía a medida que cambia la temperatura. En esta sección se estudia la clase de modelado llamado *variación*.

Variación directa

Dos tipos de modelos matemáticos se presentan con tanta frecuencia que tienen nombres especiales. El primero se llama *variación directa* y se presenta cuando una cantidad es un múltiplo constante del otro, de modo que usamos una ecuación de la forma $y = kx$ para modelar esta dependencia.

Variación directa

Si las cantidades x y y están relacionadas mediante una ecuación

$$y = kx$$

para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y **varía directamente con** x, o y es **directamente proporcional a** x, o simplemente y **es proporcional a** x. La constante k se llama **constante de proporcionalidad**.

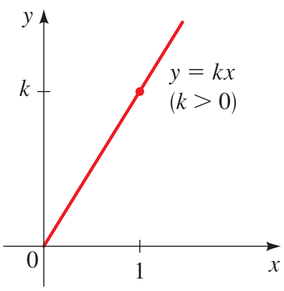
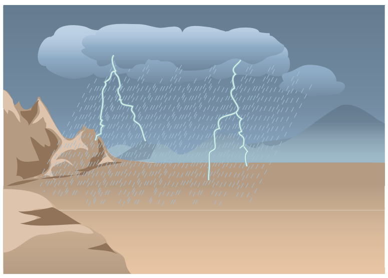


Figura 1

Recuerde que la gráfica de una ecuación de la forma $y = mx + b$ es una recta cuya pendiente es m y la ordenada al origen es b. Entonces, la gráfica de una ecuación $y = kx$ que describe la variación directa es una recta con pendiente k y ordenada al origen 0 (véase la figura 1).

Ejemplo 1 Variación directa



Durante una tormenta de rayos usted ve el rayo antes de escuchar el trueno porque la luz viaja mucho más rápido que el sonido. La distancia entre usted y la tormenta varía directamente con el intervalo que transcurre entre el rayo y el trueno.

a) Suponga que el trueno de una tormenta a 5400 pies de lejanía tarda 5 s para llegar hasta usted. Determine la constante de proporcionalidad y plantee la ecuación de la variación.

b) Grafique la ecuación. ¿Qué representa la constante de proporcionalidad?

c) Si el intervalo entre el rayo y el trueno es ahora de 8 s, ¿qué tan lejos está la tormenta?

Solución

a) Sea d la distancia desde donde está usted hasta la tormenta y sea t el tiempo transcurrido. Sabemos que d varía directamente con t, de modo que

$$d = kt$$

donde k es una constante. Para determinar k, usamos el hecho de que $t = 5$ y $d = 5400$. Al sustituir estos valores en la ecuación obtenemos

$$5400 = k(5) \qquad \text{Sustitución}$$

$$k = \frac{5400}{5} = 1080 \qquad \text{Determinación de } k$$

Al sustituir este valor de k en la ecuación para d, obtenemos

$$d = 1080t$$

cuando la ecuación de d está en función de t.

b) La gráfica de la ecuación $d = 1080t$ es una recta que pasa por el origen con pendiente 1080, y se muestra en la figura 2. La constante $k = 1080$ es la velocidad aproximada del sonido en pies/segundo.

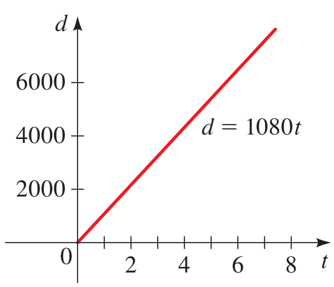


Figura 2

c) Cuando $t = 8$, tenemos

$$d = 1080 \cdot 8 = 8640$$

Entonces, la tormenta está a 8640 pies, casi 1.6 millas. ■

Variación inversa

Otra ecuación que con frecuencia se utiliza en el modelado matemático es $y = k/x$, donde k es una constante.

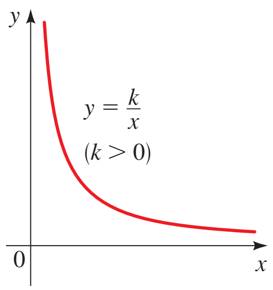


Figura 3
Variación inversa

Variación inversa

Si las cantidades x y y se relacionan mediante la ecuación

$$y = \frac{k}{x}$$

para alguna constante $k \neq 0$, decimos que y es **inversamente proporcional** a x, o que y **varía inversamente con** x.

La gráfica de $y = k/x$ para $x > 0$ se muestra en la figura 3 para el caso $k > 0$. Esto da una imagen de lo que sucede cuando y es inversamente proporcional a x.

Ejemplo 2 Variación inversa

La Ley de Boyle establece que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del gas.

a) Suponga que la presión de una muestra de aire ocupa 0.106 m^3 a 25 °C está a 50 kPa. Determine la constante de proporcionalidad y plantee la ecuación que expresa la proporcionalidad inversa.

b) Si la muestra se expande a un volumen de 0.3 m^3, estime la nueva presión.

Solución

a) Sea P la presión de la muestra de gas y sea V su volumen. Entonces, de acuerdo con la definición de proporcionalidad inversa tenemos

$$P = \frac{k}{V}$$

donde k es constante. Para determinar k aplique el hecho de que $P = 50$ cuando $V = 0.106$. Al sustituir estos valores en la ecuación obtenemos

$$50 = \frac{k}{0.106} \qquad \text{Sustitución}$$

$$k = (50)(0.106) = 5.3 \qquad \text{Determinación de } k$$

Al sustituir este valor de k en la ecuación de P, tenemos

$$P = \frac{5.3}{V}$$

b) Cuando $V = 0.3$, tenemos

$$P = \frac{5.3}{0.3} \approx 17.7$$

Entonces, la nueva presión es de casi 17.7 kPa. ■

Variación conjunta

Con frecuencia, una cantidad física depende de otra cantidad. Si una cantidad es proporcional a dos o más cantidades, esta relación se llama *variación conjunta*.

Variación conjunta

Si las cantidades x, y y z están relacionadas mediante la ecuación

$$z = kxy$$

donde k es una constante no cero, decimos que z **varía en forma conjunta** con x y y, o que z es **conjuntamente proporcional a** x y y.

En las ciencias, las relaciones entre tres o más variables son comunes, y es posible cualquier combinación de los diferentes tipos de proporcionalidad que hemos analizado. Por ejemplo, si

$$z = k\frac{x}{y}$$

decimos que z es **proporcional a** x y que es **inversamente proporcional a** y.

Ejemplo 3 Ley de Newton de la gravitación

La Ley de Newton de la gravitación establece que dos objetos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza F que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r entre los objetos. Exprese la Ley de Newton de la gravitación como una ecuación.

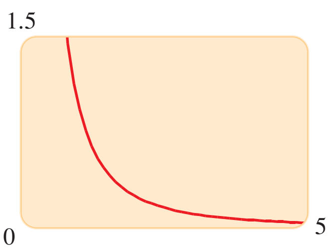


Figura 4
Gráfica de $F = \frac{1}{r^2}$

Solución Si aplicamos las definiciones de variación conjunta e inversa y la notación tradicional G para la constante gravitacional de proporcionalidad tenemos

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$ ■

Si m_1 y m_2 son masas constantes, entonces la fuerza gravitacional entre ellas es $F = C/r^2$ donde $C = Gm_1m_2$ es una constante. En la figura 4 se ilustra la gráfica de esta ecuación para $r > 0$ con $C = 1$. Observe cómo la atracción gravitacional disminuye cuando aumenta la distancia.

1.11 Ejercicios

1–12 ■ Escriba una ecuación que exprese el enunciado.

1. T varía directamente con x.

2. P es directamente proporcional a w.

3. v es directamente proporcional a z.

4. w es proporcional conjuntamente a m y n.

5. y es proporcional a s e inversamente proporcional a t.

6. P varía inversamente a T.

7. z es proporcional a la raíz cuadrada de y.

8. A es proporcional al cuadrado de t e inversamente proporcional al cubo de x.

9. V es conjuntamente proporcional a l, w y h.

10. S es conjuntamente proporcional a los cuadrados de r y θ.

11. R es conjuntamente proporcional a i e inversamente proporcional a P y t.

12. A es conjuntamente proporcional a las raíces cuadradas de x y de y.

13–22 ■ Exprese el enunciado como una ecuación. Utilice la información dada para determinar la constante de proporcionalidad.

13. y es directamente proporcional a x. Si $x = 6$, entonces $y = 42$.

14. z varía inversamente a t. Si $t = 3$, entonces $z = 5$.

15. M varía directamente con x e inversamente a y. Si $x = 2$ y $y = 6$, entonces $M = 5$.

16. S varía conjuntamente con p y q. Si $p = 4$ y $q = 5$, entonces $S = 180$.

17. W es inversamente proporcional al cuadrado de r. Si $r = 6$, entonces $W = 10$.

18. t es conjuntamente proporcional a x y y e inversamente proporcional a r. Si $x = 2$, $y = 3$ y $r = 12$, entonces $t = 25$.

19. C es conjuntamente proporcional a l, w y h. Si $l = w = h = 2$, entonces $C = 128$.

20. H es conjuntamente proporcional a los cuadrados de l y w. Si $l = 2$ y $w = \frac{1}{3}$, entonces $H = 36$.

21. s es inversamente proporcional al cuadrado de t. Si $s = 100$, entonces $t = 25$.

22. M es conjuntamente proporcional a a, b y c, e inversamente proporcional a d. Si a y d valen lo mismo, y si b y c valen 2, entonces $M = 128$.

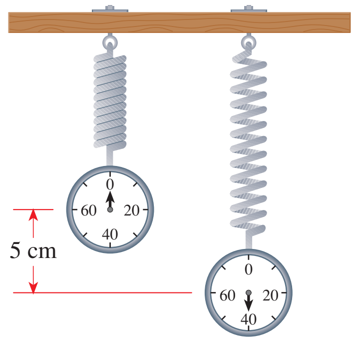
Aplicaciones

23. Ley de Hooke La ley de Hooke establece que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su longitud natural es directamente proporcional a x. En este caso, la constante de proporcionalidad se denomina **constante del resorte**.

a) Exprese la ley de Hooke en forma de una ecuación.

b) Si un resorte tiene una longitud natural de 10 cm y se necesita una fuerza de 40 N para mantener el resorte estirado a una longitud de 15 cm, determine la constante del resorte.

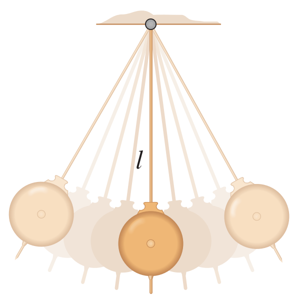
c) ¿Qué fuerza se requiere para mantener estirado el resorte a una longitud de 14 cm?



24. Ley del péndulo El periodo de un péndulo (el tiempo que transcurre durante un balanceo completo del péndulo) varía directamente con la raíz cuadrada de la longitud del péndulo.

a) Exprese esta relación mediante una ecuación.

b) Con el objeto de duplicar el periodo, ¿qué tanto tendríamos que modificar la longitud l?



25. Costos de impresión El costo C de imprimir una revista es conjuntamente proporcional a la cantidad de páginas p de la revista y la cantidad de revistas impresas m.

a) Plantee una ecuación que exprese esta variación conjunta.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad si el costo de impresión es 60 000 dólares para 4000 ejemplares de la revista de 120 páginas.

c) ¿De cuánto sería el costo de impresión para 5000 ejemplares de 92 páginas cada uno?

26. Ley de Boyle La presión P de una muestra de gas es directamente proporcional a la temperatura T e inversamente proporcional al volumen V.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.

b) Determine la constante de proporcionalidad si 100 L de gas ejercen una presión de 33.2 kPa a una temperatura de 400 K (temperatura absoluta medida en la escala de Kelvin).

c) Si la temperatura aumenta a 500 K y el volumen disminuye a 80 L, ¿cuál es la presión del gas?

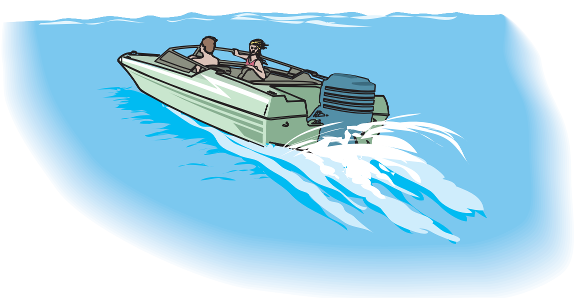
27. Potencia de un molino de viento La potencia P que se puede obtener de un molino de viento es directamente proporcional al cubo de la velocidad del viento s.

a) Plantee una ecuación que exprese esta variación.

b) Determine la constante de proporcionalidad para un molino de viento que produce 96 watts de potencia cuando el viento está soplando a 20 millas/hora.

c) ¿Cuánta potencia genera este molino si la velocidad del viento se incrementa a 30 millas/hora?

28. Potencia necesaria para impulsar un bote La potencia P medida en caballos de fuerza, hp, necesaria para impulsar una embarcación es directamente proporcional al cubo de la velocidad s. Se requiere un motor de 80 hp para impulsar cierto bote a 10 nudos. Encuentre la potencia necesaria para desplazar al bote a 15 nudos.

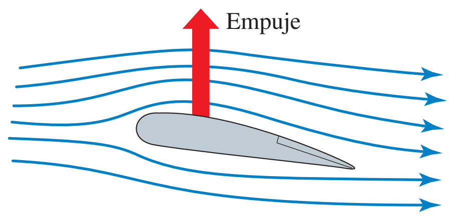


29. Intensidad del sonido La intensidad L de un sonido, medida en decibeles, dB, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente del sonido. Una persona a 10 pies de una podadora experimenta un nivel de sonido de 70 dB; ¿qué tan intenso es el sonido de la podadora cuando la persona está a 100 pies?

30. Distancia de frenado La distancia D para que un vehículo se detenga después que se han aplicado los frenos varía directamente con el cuadrado de la velocidad s. Un cierto automóvil que viaja a 50 millas/hora puede detenerse en 240 pies. ¿Cuál es la velocidad máxima a la que se puede viajar si es necesario detenerse en 160 pies?

31. Chorro de agua La fuerza P de un chorro de agua es conjuntamente proporcional al área de la sección transversal A del chorro y al cubo de la velocidad v. Si la velocidad se duplica y el área de la sección transversal se reduce a la mitad, ¿en qué factor se incrementará la fuerza?

32. Empuje aerodinámico El empuje L sobre el ala de un aeroplano al despegar varía conjuntamente con el cuadrado de la velocidad s del avión y el área A de sus alas. Un aeroplano con un área de alas de 500 pies cuadrados que se desplaza a 50 millas/hora experimenta un empuje de 1700 lb. ¿Qué empuje experimenta un aeroplano que tiene un área de alas de 600 pies cuadrados y que viaja a 40 millas/h?



33. Fuerza de arrastre de un bote La fuerza de arrastre F de una embarcación es conjuntamente proporcional al área de superficie mojada A del casco y al cuadrado de la velocidad s del bote. Un bote experimenta una fuerza de arrastre de 220 lb cuando se desplaza a 5 millas/h con un área de superficie mojada igual a 40 pies cuadrados. ¿Qué tan rápido debe ir una embarcación si tiene 28 pies cuadrados de superficie mojada y está experimentando una fuerza de arrastre de 175 lb?

34. Deslizamiento en curvas Un automóvil se mueve por una curva que forma un arco circular. La fuerza F necesaria para evitar que el vehículo se deslice es conjuntamente proporcional a su peso w y al cuadrado de su velocidad s, e inversamente proporcional al radio r de la curva.

a) Escriba una ecuación que exprese esta variación.

b) Un automóvil que pesa 1600 lb viaja por una curva a 60 millas/h. El siguiente automóvil que pasa por esta curva pesa 2500 lb y requiere la misma fuerza que el

primero para no deslizarse. ¿Qué tan rápido va el segundo vehículo?

35. Resistencia eléctrica La resistencia R de un alambre varía directamente con su longitud L e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.

a) Plantee una ecuación que exprese esta variación conjunta.

b) Encuentre la constante de proporcionalidad si un alambre de 1.2 m de largo y 0.005 m de diámetro tiene una resistencia de 140 ohms.

c) Determine la resistencia de un alambre hecho del mismo material que es de 3 m de largo y tiene un diámetro de 0.008 m.

36. Tercera Ley de Kepler La tercera ley de Kepler sobre el movimiento de los planetas establece que el cuadrado del periodo T de un planeta (el tiempo que tarda el planeta en completar una revolución alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de su distancia promedio d a partir del Sol.

a) Exprese esta ley de Kepler como una ecuación.

b) Determine la constante de proporcionalidad aplicando el hecho de que el periodo para nuestro planeta es de casi 365 días y la distancia promedio es de casi 93 millones de millas.

c) El planeta Neptuno está a casi 2.79×10^9 millas del Sol. Calcule el periodo de Neptuno.

37. Energía de radiación La energía de radiación total E que emite una superficie caliente por unidad de área varía con la cuarta potencia de su temperatura absoluta T. La temperatura es 6000 K en la superficie del Sol y 300 K en la superficie de la Tierra.

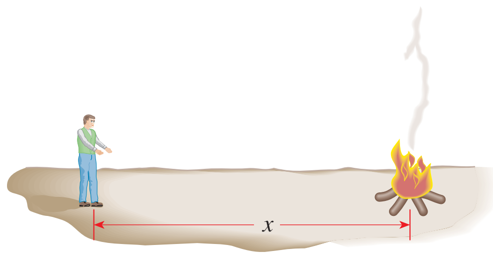
a) ¿Cuántas veces más se produce energía de radiación por unidad de área por el Sol que por la Tierra?

b) El radio de la Tierra es de 3960 millas y el radio del Sol es de 435 000 millas. ¿Cuántas veces más emite radiación total el Sol que la Tierra?

38. Valor de un terreno El valor de un lote para construcción en la Isla Galiano es conjuntamente proporcional a su superficie y la cantidad de agua que produce un pozo en la propiedad. Un lote de 200 por 300 pies tiene un pozo que produce 10 galones de agua por minuto y vale 48 000 dólares. ¿Cuál es el valor de un lote de 400 por 400 pies si el pozo del terreno produce 4 galones de agua por minuto?

39. Cultivo de coles En la corta estación de crecimiento del territorio ártico canadiense de Nunavut, algunos jardineros logran cultivar coles gigantes con el sol de medianoche. Suponga que el tamaño final de una col es proporcional a la cantidad de nutrientes que recibe e inversamente proporcional al número de otras coles que la rodean. Una col que recibe 20 onzas de nutrientes y tiene 12 coles a su alrededor llega a pesar 30 lb. ¿Qué tamaño llegará a tener si recibe 10 onzas de nutrientes y sólo tiene como vecinas otras cinco coles?

40. Calor de una fogata El calor que proporciona una fogata a un excursionista es proporcional a la cantidad de leña en el fuego, e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fogata. Si el excursionista está a 20 pies del fuego y alguien duplica la cantidad de leña que se quema, ¿a qué distancia del fuego tiene que estar el excursionista de modo que sienta el mismo calor que antes?



41. Frecuencia de vibración La frecuencia f de vibración de una cuerda de violín es inversamente proporcional a su largo L. La constante de proporcionalidad k es positiva y depende de la tensión y densidad de la cuerda.

a) Plantee una ecuación que represente esta variación.

b) ¿Qué efecto hay al duplicar la longitud de la cuerda en la frecuencia de su vibración?

42. Diseminación de una enfermedad La tasa r a la cual una enfermedad se extiende dentro de una población de tamaño P es conjuntamente proporcional a la cantidad x de personas infectadas y al número $P - x$ de quienes no están infectados. Una infección brota en un pequeño pueblo cuya población es $P = 5000$.

a) Escriba una ecuación que exprese a r en función de x.

b) Compare la tasa de diseminación de esta infección cuando 10 personas están infectadas con la tasa de diseminación cuando están infectadas 1000 personas. ¿Qué tasa es mayor? ¿Con qué factor?

c) Calcule la tasa de diseminación cuando toda la población está infectada. ¿Por qué esta respuesta es intuitiva?

Descubrimiento • Debate

43. ¿Todo es proporcionalidad? Una gran cantidad de leyes de la física y la química se expresan como proporciones. Dé por lo menos un ejemplo de una función que se encuentra en las ciencias que *no* sea una proporción.

1 Repaso

Comprobación de conceptos

1. Defina cada término con sus propias palabras. Compruebe la respuesta refiriéndose a la definición del texto.

a) Un entero **b)** Un número racional
c) Un número irracional **d)** Un número real

2. Enuncie cada una de estas propiedades de los números reales.

a) Propiedad conmutativa
b) Propiedad asociativa
c) Propiedad distributiva

3. ¿Qué es un intervalo abierto? ¿Qué es un intervalo cerrado? ¿Qué notación se utiliza para estos intervalos?

4. ¿Qué es el valor absoluto de un número?

5. a) En la expresión a^x, ¿cuál es la base y cuál es el exponente?
b) ¿Qué significa a^x si $x = n$, a un entero positivo?
(c) ¿Qué significa $x = 0$?
d) ¿Qué significa x es un entero negativo: $x = -n$, donde n es un entero positivo?
e) ¿Qué significa $x = m/n$, es un número racional?
f) Enuncie las leyes de los exponentes.

6. a) ¿Qué significa $\sqrt[n]{a} = b$?
b) ¿Por qué es $\sqrt{a^2} = |a|$?
c) ¿Cuántas raíces n-ésimas reales tiene un número real positivo si n es impar? ¿Y si es par?

7. Explique cómo funciona el procedimiento de racionalización de un denominador.

8. Enuncie las fórmulas de los productos especiales para $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)^3$ y $(a - b)^3$.

9. Enuncie cada fórmula para factorización especial.

a) Diferencia de cuadrados **b)** Diferencia de cubos
c) Suma de cubos

10. ¿Qué es la solución de una ecuación?

11. ¿Cómo se resuelve una ecuación que contiene radicales? ¿Por qué es importante comprobar las respuestas cuando se resuelven ecuaciones de este tipo?

12. ¿Cómo se resuelve una ecuación

a) algebraicamente? **b)** gráficamente?

13. Escriba la fórmula general de cada tipo de ecuación.

a) Una ecuación lineal **b)** Una ecuación cuadrática

14. ¿Cuáles son las tres maneras de resolver una ecuación cuadrática?

15. Enuncie la propiedad del producto nulo.

16. Describa el proceso de completar cuadrados.

17. Proporcione la fórmula cuadrática.

18. ¿Cuál es el discriminante de una ecuación cuadrática?

19. Enuncie las reglas para trabajar con desigualdades.

20. ¿Cómo resuelve

a) una desigualdad lineal?
b) ¿Y una desigualdad no lineal?

21. a) ¿Cómo resuelve una ecuación que contiene un valor absoluto?
b) ¿Cómo resuelve una desigualdad que contiene un valor absoluto?

22. a) Describa el plano coordenado.
b) ¿Cómo localiza puntos en el plano coordenado?

23. Escriba cada fórmula.

a) Fórmula de la distancia
b) Fórmula del punto medio

24. Dada una ecuación, ¿qué es su gráfica?

25. ¿Cómo calcula las intersecciones con el eje x y con el eje y de una gráfica?

26. Escriba una ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r.

27. Explique el significado de cada tipo de simetría. ¿Cómo la prueba?

a) Simetría con respecto al eje x
b) Simetría con respecto al eje y
c) Simetría con respecto al origen

28. Defina la pendiente de una recta.

29. Escriba cada forma de la ecuación de una recta.

a) Ecuación de la recta que pasa por un punto y tiene una pendiente dada

b) Ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen

30. a) ¿Cuál es la ecuación de una recta vertical?

b) ¿Cuál es la ecuación de una recta horizontal?

31. ¿Cuál es la ecuación general de una recta?

32. Sean dos rectas con pendientes m_1 y m_2, explique cómo puede decir si las rectas son

a) paralelas **b)** perpendiculares

33. Escriba una ecuación que exprese cada relación.

a) y es directamente proporcional a x.

b) y es inversamente proporcional a x.

c) z es conjuntamente proporcional a x y y.

Ejercicios

1–4 ■ Establezca la propiedad de los números reales que se aplicó.

1. $3x + 2y = 2y + 3x$

2. $(a + b)(a - b) = (a - b)(a + b)$

3. $4(a + b) = 4a + 4b$

4. $(A + 1)(x + y) = (A + 1)x + (A + 1)y$

5–6 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y grafique luego el intervalo.

5. $[-2, 6)$ **6.** $(-\infty, 4]$

7–8 ■ Exprese la desigualdad en la notación de intervalos y grafique después el intervalo correspondiente.

7. $x \geq 5$ **8.** $-1 < x \leq 5$

9–18 ■ Evalúe las expresiones.

9. $|3 - |-9||$ **10.** $1 - |1 - |-1||$

11. $2^{-3} - 3^{-2}$ **12.** $\sqrt[3]{-125}$

13. $216^{-1/3}$ **14.** $64^{2/3}$

15. $\dfrac{\sqrt{242}}{\sqrt{2}}$ **16.** $\sqrt[4]{4}\sqrt[4]{324}$

17. $2^{1/2}8^{1/2}$ **18.** $\sqrt{2}\sqrt{50}$

19–28 ■ Simplifique la expresión.

19. $\dfrac{x^2(2x)^4}{x^3}$ **20.** $(a^2)^{-3}(a^3b)^2(b^3)^4$

21. $(3xy^2)^3(\frac{2}{3}x^{-1}y)^2$ **22.** $\left(\dfrac{r^2s^{4/3}}{r^{1/3}s}\right)^6$

23. $\sqrt[3]{(x^3y)^2y^4}$ **24.** $\sqrt{x^2y^4}$

25. $\left(\dfrac{9x^3y}{y^{-3}}\right)^{1/2}$ **26.** $\left(\dfrac{x^{-2}y^3}{x^2y}\right)^{-1/2}\left(\dfrac{x^3y}{y^{1/2}}\right)^2$

27. $\dfrac{8r^{1/2}s^{-3}}{2r^{-2}s^4}$ **28.** $\left(\dfrac{ab^2c^{-3}}{2a^3b^{-4}}\right)^{-2}$

29. Escriba el número 78 250 000 000 en la notación científica.

30. Escriba el número 2.08×10^{-8} en la notación decimal común.

31. Si $a \approx 0.00000293$, $b \approx 1.582 \times 10^{-14}$, y $c \approx 2.8064 \times 10^{12}$, utilice una calculadora para determinar el valor aproximado del número ab/c.

32. Si su corazón late 80 veces por minuto y llega a vivir 90 años de edad, estime las veces que su corazón late durante toda su vida. Escriba la respuesta en notación científica.

33–48 ■ Factorice la expresión totalmente.

33. $12x^2y^4 - 3xy^5 + 9x^3y^2$ **34.** $x^2 - 9x + 18$

35. $x^2 + 3x - 10$ **36.** $6x^2 + x - 12$

37. $4t^2 - 13t - 12$ **38.** $x^4 - 2x^2 + 1$

39. $25 - 16t^2$ **40.** $2y^6 - 32y^2$

41. $x^6 - 1$ **42.** $y^3 - 2y^2 - y + 2$

43. $x^{-1/2} - 2x^{1/2} + x^{3/2}$ **44.** $a^4b^2 + ab^5$

45. $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ **46.** $8x^3 + y^6$

47. $(x^2 + 2)^{5/2} + 2x(x^2 + 2)^{3/2} + x^2\sqrt{x^2 + 2}$

48. $3x^3 - 2x^2 + 18x - 12$

49–64 ■ Desarrolle las operaciones indicadas y simplifique.

49. $(2x + 1)(3x - 2) - 5(4x - 1)$

50. $(2y - 7)(2y + 7)$

51. $(1 + x)(2 - x) - (3 - x)(3 + x)$

52. $\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)$

53. $x^2(x - 2) + x(x - 2)^2$

54. $\dfrac{x^2 - 2x - 3}{2x^2 + 5x + 3}$

55. $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 8x + 16} \cdot \dfrac{3x + 12}{x - 1}$

56. $\dfrac{t^3 - 1}{t^2 - 1}$

57. $\dfrac{x^2 - 2x - 15}{x^2 - 6x + 5} \div \dfrac{x^2 - x - 12}{x^2 - 1}$

58. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x - 2} + \dfrac{3}{(x - 2)^2}$

59. $\dfrac{1}{x - 1} - \dfrac{2}{x^2 - 1}$

60. $\dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{x^2 - 4} - \dfrac{2}{x^2 - x - 2}$

61. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}}{x - 2}$

62. $\dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}}{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1}}$

63. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ (racionalice el denominador)

64. $\dfrac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$ (racionalice el numerador)

65–80 ■ Determine todas las soluciones reales de la ecuación.

65. $7x - 6 = 4x + 9$

66. $8 - 2x = 14 + x$

67. $\dfrac{x + 1}{x - 1} = \dfrac{3x}{3x - 6}$

68. $(x + 2)^2 = (x - 4)^2$

69. $x^2 - 9x + 14 = 0$

70. $x^2 + 24x + 144 = 0$

71. $2x^2 + x = 1$

72. $3x^2 + 5x - 2 = 0$

73. $4x^3 - 25x = 0$

74. $x^3 - 2x^2 - 5x + 10 = 0$

75. $3x^2 + 4x - 1 = 0$

76. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x - 1} = 3$

77. $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{8}{x^2 - 4}$

78. $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

79. $|x - 7| = 4$

80. $|2x - 5| = 9$

81. El dueño de una tienda vende uva pasa a 3.20 dólares la libra y nueces a 2.40 dólares cada libra. Decide mezclar las uvas pasa y las nueces y vende 50 libras de la mezcla a 2.72 dólares cada libra. ¿Qué cantidades de uva pasa y de nueces debe usar?

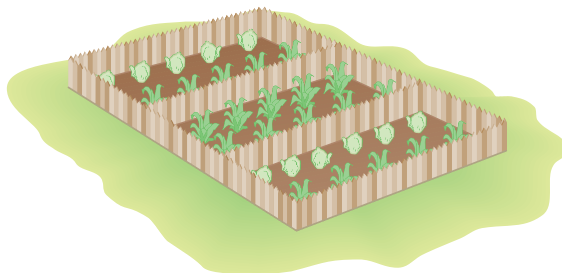
82. Anthony sale de Kingstown a las 2:00 PM y maneja su automóvil a 45 millas por hora hasta Queensville, a 160 millas de distancia. A las 2:15 PM, Helen sale de Queensville y se dirige a Kingstown a 40 millas/h. ¿En qué momento se cruzarán en la carretera?

83. Una mujer viaja en bicicleta 8 millas/h más rápido de lo que ella corre. Cada mañana recorre en bicicleta 4 millas y corre $2\frac{1}{2}$ millas durante un total de una hora de ejercicio. ¿Qué tan rápido corre?

84. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 20 cm. La suma de las longitudes de los catetos es 28. Calcule lo que mide cada cateto del triángulo.

85. Abbie pinta igual de rápido que Beth y tres veces más rápido que Cathie. Si se tardan 60 min en pintar una sala las tres trabajando juntas, ¿qué tanto se tardaría Abbie si trabajara sola?

86. La dueña de una casa desea cercar tres jardines adyacentes, uno para cada uno de sus niños, como se muestra en la figura. Si cada parcela es de 80 pies cuadrados de área, y tiene a la mano 88 pies de material para cercar, ¿qué dimensiones debe tener cada parcela?



87–94 ■ Resuelva la desigualdad. Exprese la solución usando notación de intervalos y grafique el conjunto solución en una recta de números reales.

87. $3x - 2 > -11$

88. $-1 < 2x + 5 \leq 3$

89. $x^2 + 4x - 12 > 0$

90. $x^2 \leq 1$

91. $\dfrac{x - 4}{x^2 - 4} \leq 0$

92. $\dfrac{5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} < 0$

93. $|x - 5| \leq 3$

94. $|x - 4| < 0.02$

95–98 ■ Resuelva la ecuación o la desigualdad mediante métodos gráficos.

95. $x^2 - 4x = 2x + 7$

96. $\sqrt{x + 4} = x^2 - 5$

97. $4x - 3 \geq x^2$

98. $x^3 - 4x^2 - 5x > 2$

99–100 ■ Se dan los puntos P y Q.

a) Grafique P y Q en un plano coordenado.
b) Calcule la distancia desde P hasta Q.
c) Determine el punto medio del segmento PQ.
d) Determine la recta definida por P y Q, y exprese su ecuación en la forma cuando se dan la pendiente y la ordenada al origen.
e) Grafique la circunferencia que pasa por Q y tiene centro en P, y encuentre la ecuación de dicha circunferencia.

99. $P(2, 0)$, $Q(-5, 12)$ **100.** $P(7, -1)$, $Q(2, -11)$

101–102 ■ Grafique la región definida por el conjunto.

101. $\{(x,y) \mid -4 < x < 4 \quad \text{y} \quad -2 < y < 2\}$

102. $\{(x,y) \mid x \geq 4 \quad \text{o} \quad y \geq 2\}$

103. ¿Cuál de los puntos $A(4, 4)$ o $B(5, 3)$ está más cerca al punto $C(-1, -3)$?

104. Encuentre una ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(2, -5)$ y radio $\sqrt{2}$.

105. Encuentre una ecuación de la circunferencia que tiene centro en $(-5, -1)$ y pasa por el origen.

106. Encuentre una ecuación de la circunferencia que contiene los puntos $P(2, 3)$ y $Q(-1, 8)$ y cuyo punto medio del segmento PQ es el centro.

107–110 ■ Determine si la ecuación representa una circunferencia, un punto o no tiene gráfica. Si la ecuación es una circunferencia determine el centro y el radio.

107. $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 9 = 0$

108. $2x^2 + 2y^2 - 2x + 8y = \frac{1}{2}$

109. $x^2 + y^2 + 72 = 12x$

110. $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

111–118 ■ Compruebe si la ecuación es simétrica y trace su gráfica.

111. $y = 2 - 3x$

112. $2x - y + 1 = 0$

113. $x + 3y = 21$

114. $x = 2y + 12$

115. $y = 16 - x^2$

116. $8x + y^2 = 0$

117. $x = \sqrt{y}$

118. $y = -\sqrt{1 - x^2}$

119–122 ■ Utilice una calculadora para graficar o una computadora para trazar la gráfica de la ecuación en un rectángulo de visión adecuado

119. $y = x^2 - 6x$

120. $y = \sqrt{5 - x}$

121. $y = x^3 - 4x^2 - 5x$

122. $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

123. Determine una ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, -6)$ y $(2, -4)$.

124. Determine una ecuación de la recta que pasa por el punto $(6, -3)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{2}$.

125. Determine una ecuación de la recta cuya intersección con el eje x es 4 y la intersección con el eje y es 12.

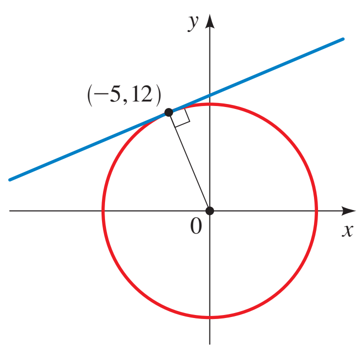
126. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 7)$ y es perpendicular a la recta $x - 3y + 16 = 0$.

127. Determine la ecuación de la recta que pasa por el origen y es paralela a la recta $3x + 15y = 22$.

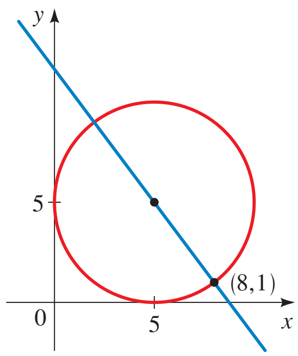
128. Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ y es paralela a la recta que pasa por $(-1, -3)$ y $(3, 2)$.

129–130 ■ Calcule las ecuaciones de la circunferencia y de la recta de la figura.

129.



130.



131. La ley de Hooke establece que si un peso w se engancha a un resorte que está colgando, entonces la longitud s que se estira el resorte está relacionada linealmente con w. En el caso de un resorte particular tenemos

$$s = 0.3w + 2.5$$

donde s se mide en pulgadas y w en libras.

a) ¿Qué representan en esta ecuación la pendiente y la intersección con el eje s?

b) ¿Qué tan largo es el resorte cuando se le coloca un peso de 5 libras?

132. Margarita empezó a trabajar en una compañía de contabilidad con un salario de 60 000 dólares por año. Tres años más tarde su salario anual se había incrementado a 70 500 dólares. Suponga que su salario se incrementa en forma lineal.

a) Determine una ecuación que relacione su salario anual S y el número de años t que ella trabajó para la compañía.

b) ¿Qué representan la pendiente y la intersección con el eje S?

c) ¿Cuál será su salario después de 12 años de trabajar en esa compañía?

133. Suponga que M varía directamente con z, y $M = 120$ cuando $z = 15$. Plantee la ecuación que expresa esta variación.

134. Suponga que z es inversamente proporcional a y, y que $z = 12$ cuando $y = 16$. Escriba una ecuación que exprese a z en función de y.

135. La intensidad de iluminación I de una luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d de la luz.

a) Escriba este enunciado como una ecuación.

b) Determine la constante de proporcionalidad si se sabe que una lámpara tiene una intensidad de 1000 candelas a una distancia de 8 m.

c) ¿Cuál será la intensidad de esta lámpara a una distancia de 20 m?

136. La frecuencia de una cuerda que vibra a tensión constante es inversamente proporcional a su longitud. Si la cuerda de un violín de 12 pulg de largo vibra 440 veces por segundo, ¿cuánto se le debe recortar para que vibre 660 veces por segundo?

137. La velocidad final de un paracaidista es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su peso. Un paracaidista de 160 libras de peso adquiere una velocidad final de 9 millas/h. ¿Cuál es la velocidad final de un paracaidista que pesa 240 lb?

138. El alcance máximo de un proyectil es directamente proporcional al cuadrado de su velocidad. Un pitcher lanza la pelota a 60 millas/h, con un alcance máximo de 242 pies. ¿Cuál será el alcance máximo si lanza la pelota a 70 millas/h?

1 Evaluación

1. a) Grafique los intervalos $(-5, 3]$ y $(2, \infty)$ sobre la recta de números reales.
b) Exprese las desigualdades $x \leq 3$ y $-1 \leq x < 4$ en la notación de intervalos.
c) Determine la distancia entre -7 y 9 en la recta numérica.

2. Evalúe cada expresión.
a) $(-3)^4$ b) -3^4 c) 3^{-4} d) $\dfrac{5^{23}}{5^{21}}$ e) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}$ f) $16^{-3/4}$

3. Escriba cada cantidad en notación científica.
a) 186 000 000 000 b) 0.0000003965

4. Simplifique cada expresión. Escriba su respuesta final sin exponentes negativos.
a) $\sqrt{200} - \sqrt{32}$ b) $(3a^3b^3)(4ab^2)^2$ c) $\left(\dfrac{3x^{3/2}y^3}{x^2y^{-1/2}}\right)^{-2}$
d) $\dfrac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$ e) $\dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x + 1}{x + 2}$ f) $\dfrac{\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}}{\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}}$

5. Racionalice el denominador y simplifique: $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{5} - 2}$

6. Ejecute las operaciones indicadas y simplifique.
a) $3(x + 6) + 4(2x - 5)$ b) $(x + 3)(4x - 5)$ c) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
d) $(2x + 3)^2$ e) $(x + 2)^3$

7. Factorice del todo cada expresión.
a) $4x^2 - 25$ b) $2x^2 + 5x - 12$ c) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
d) $x^4 + 27x$ e) $3x^{3/2} - 9x^{1/2} + 6x^{-1/2}$ f) $x^3y - 4xy$

8. Encuentre todas las soluciones reales.
a) $x + 5 = 14 - \frac{1}{2}x$ b) $\dfrac{2x}{x + 1} = \dfrac{2x - 1}{x}$ c) $x^2 - x - 12 = 0$
d) $2x^2 + 4x + 1 = 0$ e) $\sqrt{3 - \sqrt{x + 5}} = 2$ f) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$
g) $3|x - 4| = 10$

9. Mary maneja su automóvil desde Amity hasta Belleville a una velocidad de 50 millas/h. En el camino de regreso iba a una velocidad de 60 millas/h. El viaje total fue de $4\frac{2}{5}$ horas. Calcule la distancia entre estas dos ciudades.

10. Una parcela rectangular es 70 pies más larga de lo que mide el ancho. Cada diagonal mide 130 pies. ¿Cuáles son las dimensiones de la parcela?

11. Resuelva todas las desigualdades. Escriba la respuesta usando notación de intervalos, y grafique la solución en una recta numérica.
a) $-4 < 5 - 3x \leq 17$ b) $x(x - 1)(x + 2) > 0$
c) $|x - 4| < 3$ d) $\dfrac{2x - 3}{x + 1} \leq 1$

12. Un frasco de un medicamento se va a almacenar a una temperatura entre 5 °C y 10 °C. ¿Qué temperatura le corresponde en la escala Fahrenheit? [*Nota:* las temperaturas Fahrenheit (F) y Celsius (C) cumplen la relación $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.]

13. ¿Para qué valores de x la expresión $\sqrt{6x - x^2}$ está definida como un número real?

14. Resuelva la ecuación y la desigualdad gráficamente.

a) $x^3 - 9x - 1 = 0$ b) $x^2 - 1 \leq |x + 1|$

15. a) Grafique los puntos $P(0, 3)$, $Q(3, 0)$ y $R(6, 3)$ en el plano coordenado. ¿Dónde se debe localizar el punto S para que $PQRS$ sea un cuadrado?

b) Determine el área de $PQRS$.

16. a) Trace la gráfica de $y = x^2 - 4$.

b) Determine dónde corta la gráfica a los ejes x y y.

c) ¿La gráfica es simétrica con respecto al eje x, al eje y o al origen?

17. Sean $P(-3, 1)$ y $Q(5, 6)$ dos puntos en el plano coordenado.

a) Grafique P y Q en un plano de coordenadas.

b) Calcule la distancia entre P y Q.

c) Determine el punto medio del segmento PQ.

d) Determine la pendiente de la recta que contiene a P y Q.

e) Encuentre la bisectriz perpendicular a la recta que contiene a P y a Q.

f) Calcule la ecuación de la circunferencia para la cual el segmento PQ es un diámetro.

18. Calcule el centro y el radio de cada circunferencia y trace la gráfica.

a) $x^2 + y^2 = 25$ b) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ c) $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 6 = 0$

19. Escriba la ecuación lineal $2x - 3y = 15$ en la forma cuando se dan la pendiente y la ordenada al origen, y grafique. ¿Qué son la pendiente y la ordenada al origen?

20. Encuentre una ecuación para la recta con la propiedad dada.

a) Para por el punto $(3, -6)$ y es paralela a la recta $3x + y - 10 = 0$.

b) Corta al eje x en 6 y la ordenada al origen es 4.

21. Un geólogo utiliza una sonda para medir la temperatura T (en °C) del suelo a distintas profundidades por abajo de la superficie, y observa que a una profundidad de x cm, la temperatura está representada por la ecuación $T = 0.08x - 4$.

a) ¿Cuál es la temperatura a una profundidad de un metro (100 cm)?

b) Trace una gráfica de la ecuación lineal.

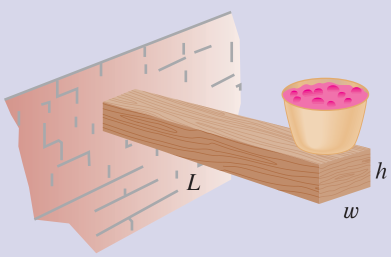
c) ¿Qué representan la pendiente, la intersección con el eje x y la intersección con el eje T de la gráfica de esta ecuación?

22. El peso máximo M que puede ser soportado por una viga es conjuntamente proporcional a su ancho w, y al cuadrado de su peralte h, e inversamente proporcional a su largo L.

a) Plantee una ecuación que exprese esta proporcionalidad.

b) Determine la constante de proporcionalidad si una viga de 4 pulg de ancho, 6 pulg de peralte y 12 pies de largo puede soportar un peso de 4800 lb.

c) Si una viga de 10 pies fabricada con el mismo material mide 3 pulg de ancho y 10 pulg de peralte, ¿cuál es el peso máximo que soporta?

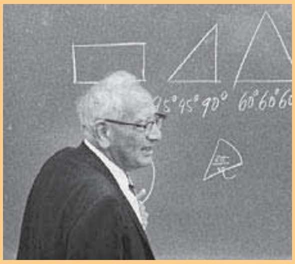


Si encontró dificultad en alguno de los problemas podría revisar la sección de este capítulo que se señala enseguida.

Si tuvo dificultad con este problema del examen	Repase esta sección
1	Sección 1.1
2, 3, 4(a), 4(b), 4(c)	Sección 1.2
4(d), 4(e), 4(f), 5	Sección 1.4
6, 7	Sección 1.3
8	Sección 1.5
9, 10	Sección 1.6
11, 12, 13	Sección 1.7
14	Sección 1.9
15, 16, 17(a), 17(b)	Sección 1.8
17(c), 17(d)	Sección 1.10
17(e), 17(f), 18	Sección 1.8
19, 20, 21	Sección 1.10
22	Sección 1.11

Enfoque en la resolución de problemas

Principios generales



Stanford University News Service

George Polya (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas acerca de la resolución de problemas. Sus conferencias acerca de la resolución de problemas en Stanford University atraían a grandes cantidades de personas a quienes mantenía al borde de sus asientos, llevándolos a descubrir soluciones por sí mismos. Era capaz de hacerlo debido a su profundo conocimiento de los fenómenos psicológicos que hay en el momento de resolver un problema. Su obra mejor conocida *How To Solve It* está traducida a 15 idiomas. Decía que Euler (véase pág. 288) era único entre los grandes matemáticos porque explicaba *cómo* había encontrado sus resultados. Polya decía a menudo a sus alumnos: "Sí, ya veo que tu demostración es correcta, pero ¿cómo la descubriste?" En el prefacio del libro *How To Solve It*, Polya escribe "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Su problema podrá ser modesto, pero si desafía a su curiosidad y lo lleva a poner en marcha sus facultades inventivas, y si usted resuelve el problema con sus propios medios, experimentará la fuerza y la alegría del triunfo del descubrimiento".

No hay reglas difíciles ni rápidas que aseguren el éxito al resolver problemas. Pero es posible esbozar unos pasos generales en el proceso de la resolución de problemas y dar principios que son útiles para resolver ciertos problemas. Estos pasos y principios son sólo sentido común hecho explícito. Además, son adaptaciones del agudo libro de George Polya *How To Solve It*.

1. Entienda el problema

El primer paso es leer el problema y estar seguro de que ya lo entendió. Hágase usted mismo las preguntas siguientes:

¿Cuál es la incógnita?
¿Cuáles son las cantidades dadas?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para cualquier problema es útil

hacer un diagrama

e identificar en el mismo diagrama las cantidades dadas y las requeridas.

Por lo regular es necesario

introducir una notación conveniente

Al elegir símbolos para las cantidades desconocidas, a menudo usamos letras como a, b, c, m, n, x y y, pero en algunos casos ayuda usar iniciales o símbolos sugerentes, por ejemplo, V para volumen o t para el tiempo.

2. Piense en un plan

Halle una conexión entre la información dada y la incógnita, que le permita calcularla. Muchas veces ayuda preguntarse uno mismo: "¿Cómo puedo relacionar la información dada con la incógnita?". Si usted no ve la conexión en forma inmediata, las ideas siguientes podrían ser útiles para trazar un plan.

- **Trate de identificar algo familiar**

Relacione la situación dada con un conocimiento anterior. Examine la incógnita y trate de recordar un problema más conocido que tiene una incógnita similar.

- **Intente identificar patrones**

Ciertos problemas se resuelven cuando se identifica que hay un patrón. El patrón podría ser geométrico o numérico o algebraico. Si puede ver regularidad o repetición en un problema, entonces usted sería capaz de adivinar qué patrón es y demostrarlo.

- **Use la analogía**

Trate de pensar en un problema análogo, es decir, que sea semejante o que esté relacionado, pero que sea más fácil que el original. Si puede resolver el problema similar más sencillo, entonces esto le podría dar las pistas que necesita para resolver el

problema original más difícil. Por ejemplo, si un problema contiene números muy grandes, podría primero intentar con un problema similar con números más pequeños. O bien, si el problema es de geometría tridimensional, podría buscar algo similar en geometría bidimensional. O si el problema con el que empieza es uno muy general, podría tratar primero con algún caso especial.

- **Introduzca algo nuevo**

Algunas veces necesitará introducir algo nuevo —un auxiliar— para lograr la co-nexión entre lo que se tiene y lo que se ignora. Por ejemplo, en un problema donde un diagrama es útil, la ayuda adicional sería una nueva línea dibujada en el diagra-ma. En la mayor parte de los problemas algebraicos la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relacione con la incógnita original.

- **Desglose el problema**

En algunas ocasiones podría dividir el problema en varias partes y elaborar un razonamiento distinto para cada parte. Por ejemplo, tenemos que usar a menudo esta estrategia al tratar con el valor absoluto.

- **Trabajar hacia atrás**

Es útil imaginar que su problema está resuelto y trabajar hacia atrás, paso por paso, hasta llegar a los datos originales. Entonces podría ser capaz de invertir los pasos y construir por lo tanto una solución para el problema original. Este procedimiento es muy común al resolver ecuaciones. Por ejemplo, al resolver la ecuación $3x - 5 = 7$, suponemos que x es un número que satisface a $3x - 5 = 7$ y trabajamos hacia atrás. Añadimos 5 a cada miembro de la ecuación y luego dividimos cada miembro entre 3 para obtener $x = 4$. Puesto que cada uno de estos pasos se puede invertir, ya resolvimos el problema.

- **Establecer metas secundarias**

Con frecuencia, en un problema complejo es útil establecer objetivos secundarios, en los cuales la situación deseada sólo se cumple en parte. Si usted logra o alcanza esta meta secundaria, entonces podría ser capaz de utilizarlas como base para alcanzar el objetivo final

- **Razonamiento indirecto**

Algunas veces es adecuado atacar un problema en forma indirecta. Al utilizar la **demostración por contradicción** para demostrar que P implica Q, suponemos que P es verdadera y que Q es falsa, y tratar de ver por qué no puede suceder. De alguna manera tenemos que usar esta información y llegar a una contradicción de lo que estamos absolutamente seguros de que es cierto.

- **Inducción matemática**

Al demostrar enunciados que contienen un entero positivo n, es frecuente que sea útil usar el Principio de la inducción matemática, la cual se estudia en la sección 11.5.

3. Poner en marcha el plan

En el paso 2, se diseñó un plan. Al ejecutarlo, debe verificar cada etapa del mismo y escribir los detalles que demuestran que la etapa es correcta.

4. Reflexione y revise

Al llegar a la solución, es prudente regresar y revisar, en parte para ver si hay errores y en parte para ver si hay una manera más sencilla de resolver el problema. Revisar lo hecho lo familiariza con el método de solución, lo cual podría ser útil para resolver un problema futuro. Descartes decía "Cada problema que he resuelto se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas".

Ilustramos algunos de estos principios de resolución de problemas mediante un ejemplo. Otros ejemplos de estos principios se presentan al final de capítulos seleccionados.

Problema Velocidad promedio

Una automovilista sale de viaje. En la primera mitad de la distancia, ella viaja pausadamente a la velocidad de 30 millas/h; en la segunda mitad maneja a 60 millas/h. ¿Cuál es la velocidad promedio en su viaje?

Razonamiento para el problema

Es tentador calcular el promedio de las velocidades y decir que la velocidad promedio de todo el viaje es

$$\frac{30 + 60}{2} = 45 \text{ millas/h}$$

¿Pero es este enfoque tan sencillo realmente correcto?

Intente con un caso especial

Veamos un caso especial que se calcula con facilidad. Supongamos que la distancia total recorrida es 120 millas. Puesto que las primeras 60 millas se recorren a 30 millas/h, el recorrido dura 2 h. Las segundas 60 millas se recorren a 60 millas/h, por lo que el recorrido dura una hora. Por lo tanto, el tiempo total es $2 + 1 = 3$ horas y la velocidad promedio es

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ millas/h}$$

De modo que la suposición de 45 millas/h es errónea.

Entienda el problema

Solución Necesitamos considerar con más cuidado el significado de velocidad promedio. Se define como

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Introduzca una notación

Sea d la distancia recorrida en cada mitad del viaje. Sean t_1 y t_2 los tiempos transcurridos en la primera y en la segunda mitad del viaje. Ya podemos escribir la información con la que contamos. Para la primera mitad del viaje, tenemos

Establezca lo que tiene

$$30 = \frac{d}{t_1} \tag{1}$$

y para la segunda mitad, tenemos

$$60 = \frac{d}{t_2} \tag{2}$$

Identifique la incógnita

A continuación identificamos la cantidad que nos piden determinar:

$$\text{velocidad promedio de todo el viaje} = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

Conecte lo conocido con lo desconocido

Para calcular esta cantidad necesitamos conocer t_1 y t_2, de modo que resolvemos las ecuaciones 1 y 2 para estos tiempos:

$$t_1 = \frac{d}{30} \qquad t_2 = \frac{d}{60}$$

Ahora tenemos los ingredientes necesarios para calcular la cantidad deseada:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}}$$

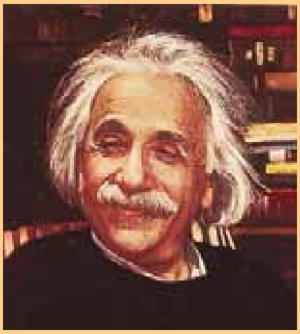
$$= \frac{60(2d)}{60\left(\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}\right)}$$

Multiplicación del numerador y del denominador por 60

$$= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40$$

Entonces, la velocidad promedio para todo el viaje es 40 millas por hora. ■

Problemas



Bettmann/Corbis

No se sienta mal si no resuelve correctamente estos problemas. Los problemas 2 y 6 fueron enviados a Albert Einstein por su amigo Wetheimer. Einstein y su amigo Bucky disfrutaban los problemas, y le contestaban a Wertheimer. He aquí una parte de la réplica:

> Su carta nos causó una gran diversión. La primera prueba de inteligencia nos engañó a Bucky y a mí. Sólo al trabajar en ella me di cuenta de que ¡no hay tiempo disponible para la carrera colina abajo! El segundo ejemplo también engañó al señor Bucky, pero a mí ya no. ¡Tales bromas nos mostraron cuán estúpidos somos!

(Véase *Mathematical Intelligencer*, primavera de 1990, pág. 41.)

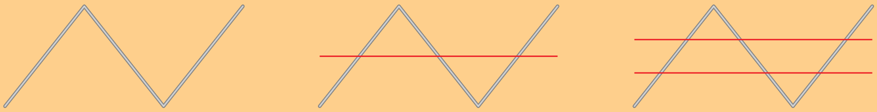
1. **Distancia, tiempo y velocidad** Un hombre viaja en su automóvil desde su casa hasta el trabajo a una velocidad de 50 millas/h. El viaje de regreso desde su trabajo a casa lo efectúa más despacio, a sólo 30 millas/h. ¿Cuál es la velocidad promedio del hombre para el recorrido completo?

2. **Distancia, tiempo y velocidad** Un viejo automóvil tiene que recorrer una ruta de 2 millas, colina arriba y colina abajo. Como es tan viejo, el vehículo puede subir la primera milla —el ascenso— no más rápido que a una velocidad promedio de 15 millas/h. ¿Qué tan rápido tiene que desplazarse el automóvil en la segunda milla —al descender, puede ir más rápido, naturalmente— para que llegue a una velocidad promedio de 30 millas/h en el viaje?

3. **Una mosca a exceso de velocidad** Un automóvil y un camión de mudanzas están estacionados a 120 millas uno de otro sobre una carretera recta. Cada uno de los conductores empieza a manejar en dirección al otro al mediodía, cada uno a una velocidad de 40 millas/h. Una mosca sale desde la defensa delantera del camión al mediodía y vuela hacia la defensa del automóvil, luego regresa de inmediato a la defensa del camión y de nuevo a la del automóvil, y así sucesivamente, hasta que se encuentran el automóvil y el camión de mudanzas. Si la mosca vuela a una velocidad de 100 millas/h, ¿cuál es la distancia total que recorre?

4. **Comparación de descuentos** ¿Qué precio es mejor para el comprador, uno de 40% o dos descuentos sucesivos de 20%?

5. **Corte de un alambre** Un trozo de alambre está doblado como se ilustra en la figura. Puede ver que un corte a través del trozo de alambre produce cuatro trozos, y que dos cortes paralelos producen siete pedacitos. ¿Cuántos pedacitos se obtendrán por medio de 142 cortes paralelos? Escriba una fórmula para la cantidad de pedacitos que se obtienen con n cortes paralelos.



6. **Propagación de las amebas** Una ameba se propaga mediante simple división; cada división tarda 3 minutos en completarse. Cuando tal ameba se coloca dentro de un recipiente de vidrio con un líquido con nutrientes, el recipiente se llena de amebas en una hora. ¿Cuánto tardaría en llenarse el recipiente si empezamos no con una ameba, sino con dos?

7. **Vuelta a un circuito** Dos corredores empiezan a correr por un circuito al mismo tiempo, desde la misma posición de salida. George completa una vuelta en 50 s; Sue corre una vuelta en 30 s .¿Cuándo los corredores estarán corriendo lado a lado?

8. **Promedios de bateo** El jugador A tiene un promedio de bateo superior al del jugador B durante la primera mitad de la temporada de béisbol. El jugador A también tiene un promedio de bateo superior al del jugador B en la segunda mitad de la temporada. ¿Es necesariamente cierto que el jugador A tiene un promedio de bateo superior al del jugador B en toda la temporada?

9. **Café con crema** Se toma una cucharada de crema de un recipiente y se vierte en una taza de café. El café se derrama. Entonces se toma una cucharada de esta mezcla y se vierte dentro del recipiente de la crema. ¿Hay ahora más crema en la taza de café o más café en el recipiente de la crema?

10. **Un cubo de hielo fundido** Un cubo de hielo está flotando en un vaso con agua, lleno hasta el borde, como se muestra en la figura. ¿Qué sucede cuando el hielo se funde? ¿El vaso se derrama o el nivel de agua baja o permanece igual? (Necesita saber el Principio de Arquímedes: un objeto que flota desplaza un volumen de agua cuyo peso es igual al peso del objeto.)

11. **Rodeando al mundo** Un listón rojo se amarra fuertemente alrededor del Ecuador de la Tierra. ¿Cuánto listón necesita de más si sube el listón un pie por encima del Ecuador? (No necesita saber el radio de la Tierra para resolver este problema.)

12. **Potencias irracionales** Demuestre que es posible elevar un número irracional a una potencia irracional y obtener un resultado racional. [*Sugerencia:* el número $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o irracional. Si a es racional, usted está acabado. Si a es irracional, considere $a^{\sqrt{2}}$.]

13. **Raíces cuadradas babilonias** Los antiguos babilonios idearon el siguiente proceso para determinar la raíz cuadrada de un número N. Primero hacían una suposición de la raíz cuadrada, llamémosla primera suposición r_1. Al observar que

$$r_1 \cdot \left(\frac{N}{r_1}\right) = N$$

concluyeron que la raíz cuadrada real debe estar en algún lugar entre r_1 y N/r_1, de modo que su siguiente suposición para la raíz cuadrada, r_2, era el promedio de estos dos números:

$$r_2 = \frac{1}{2}\left(r_1 + \frac{N}{r_1}\right)$$

Al continuar de esta manera, la siguiente aproximación era

$$r_3 = \frac{1}{2}\left(r_2 + \frac{N}{r_2}\right)$$

y así sucesivamente. En general, una vez que hemos hecho la n-ésima aproximación de la raíz cuadrada de N, encontramos la $(n + 1)$-ésima usando

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}\left(r_n + \frac{N}{r_n}\right)$$

Aplique este procedimiento para encontrar $\sqrt{72}$, con dos cifras decimales.

14. Un cubo perfecto Demuestre que si multiplica tres enteros consecutivos y luego suma el entero de en medio al resultado, obtiene un cubo perfecto.

15. Patrones numéricos Encuentre el último dígito del número 3^{459}. [*Sugerencia:* calcule las primeras potencias de 3 y busque un patrón.]

16. Patrones numéricos Aplique las técnicas de resolución de un problema más sencillo y busque un patrón para evaluar el número

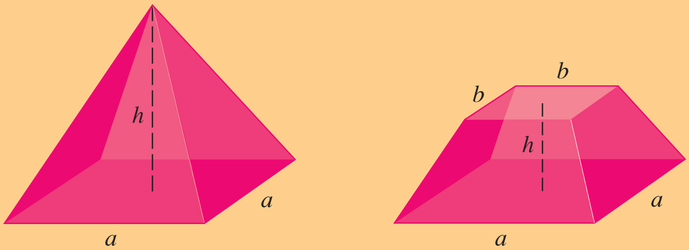
$$3999999999999^2$$

17. Triángulos rectángulos y primos Demuestre que todo número primo es un cateto de exactamente un triángulo rectángulo con lados enteros. (Este problema lo planteó primero Fermat; véase pág. 652.)

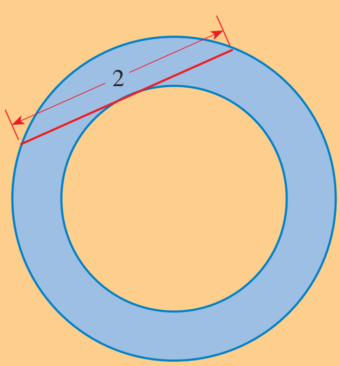
18. Una ecuación sin solución Demuestre que la ecuación $x^2 + y^2 = 4z + 3$ no tiene solución en los enteros. [*Sugerencia:* recuerde que un número par es de la forma $2n$ y un impar es de la forma $2n + 1$. Considere todos los casos posibles de x y de y par o impar.]

19. Terminar donde empezó Una mujer parte del punto P en la superficie de la Tierra, y camina 1 milla al Sur, luego 1 milla al Este, luego 1 milla al Norte y encuentra que regresó al punto P, el punto donde empezó. Describa todos los puntos P para los cuales esto es posible (hay una cantidad infinita).

20. Volumen de una pirámide truncada Los antiguos egipcios, como resultado de la construcción de sus pirámides, sabían que el volumen de una pirámide de altura h y base cuadrada de lado a es $V = \frac{1}{3}ha^2$. Fueron capaces de aplicar este hecho para demostrar que el volumen de una pirámide truncada es $V = \frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$, donde h es la altura y b y a son las longitudes de los lados de la parte cuadrada superior y de la base, como se muestra en la figura. Demuestre la fórmula del volumen de la pirámide truncada.

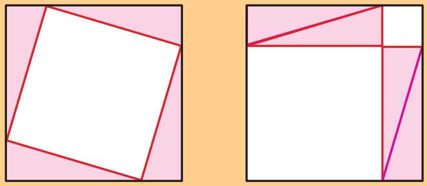


21. Área de un anillo Determine el área de la región entre los dos cículos concéntricos mostrados en la figura.



Bhaskara (nació en 1114) fue un matemático, astrónomo y astrólogo hindú. Entre sus muchos logros está una ingeniosa demostración del teorema de Pitágoras (véase el problema 22). Su importante libro de matemática, *Lilavati* [*Lo hermoso*] consiste en problemas de álgebra planteados en la forma de historias para su hija Lilavati. Muchos de los problemas empiezan con "¡Oh hermosa doncella!, imagina ..." Se dice que, usando la astrología, Bhaskara determinó la gran desgracia que sobrevendría a su hija si ésta se casaba en otro momento que no fuera una cierta hora y un cierto día. El día de la boda, mientras ella observaba con gran expectación el reloj de agua, cayó una perla de su tocado sin que ella se percatara. Esto detuvo el flujo de agua del reloj, lo que ocasionó que se pasara el momento oportuno para la boda. Bhaskara escribió la obra *Lilavati* para consolarla.

22. Demostración de Bhaskara El matemático hindú Bhaskara dibujó las dos figuras que se ilustran aquí y escribió abajo de ellas: "¡He aquí!" Explique cómo estos dibujos demuestran el teorema de Pitágoras.



23. Un entero interesante El número 1729 es el entero positivo más pequeño que puede ser representado en dos maneras distintas como la suma de dos cubos. ¿Cuáles son estas maneras?

24. Números simples

a) Utilice una calculadora para determinar el valor de la expresión

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

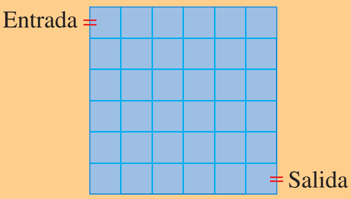
El número parece muy sencillo. Demuestre que el valor calculado es correcto.

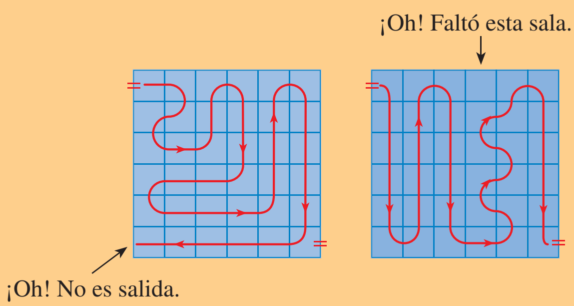
b) Mediante una calculadora evalúe

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}$$

Demuestre que el valor calculado es correcto.

25. Recorrido por el museo imposible Un museo tiene la forma de un cuadrado con seis salas a un lado; la entrada y la salida están en esquinas opuestas, como se muestra en la figura de la izquierda. Cada par de salas adyacentes está unido por una puerta. A algunos turistas muy eficientes les gustaría recorrer el museo visitando cada sala *exactamente* una vez. ¿Puede encontrar una trayectoria para tal recorrido? Aquí hay ejemplos de intentos que fallaron.





Aquí está cómo puede demostrar que el recorrido por el museo es imposible. Imagine que las salas están coloreadas en blanco y negro como en un tablero de ajedrez.

a) Muestre que los colores de las salas se alternan entre blanco y negro a medida que el turista camina por el museo.

b) Utilice el inciso a) y el hecho de que hay un número par de salas en el museo para concluir que el recorrido no puede terminar en la salida.

26. Iluminación del plano coordenado Suponga que cada punto en el plano coordenado está pintado de rojo o de azul. Demuestre que es necesario que haya siempre dos puntos del mismo color que están separados exactamente una unidad.

27. Bosque coordenado racional Suponga que cada punto (x, y) en el plano, cuyas coordenadas son números racionales, representan un árbol. Si usted está de pie en el punto $(0, 0)$, ¿qué tan lejos podría ver en este bosque?

28. Mil puntos Se grafican mil puntos en el plano coordenado. Explique por qué es posible dibujar una recta en el plano de modo que la mitad de los puntos están en un lado de la recta y la otra mitad en el otro lado. [*Sugerencia:* considere las pendientes de las rectas determinadas por cada *par* de puntos.]

29. Gráfica de una región en el plano Trace la región en el plano que consiste en todos los puntos (x, y) tales que

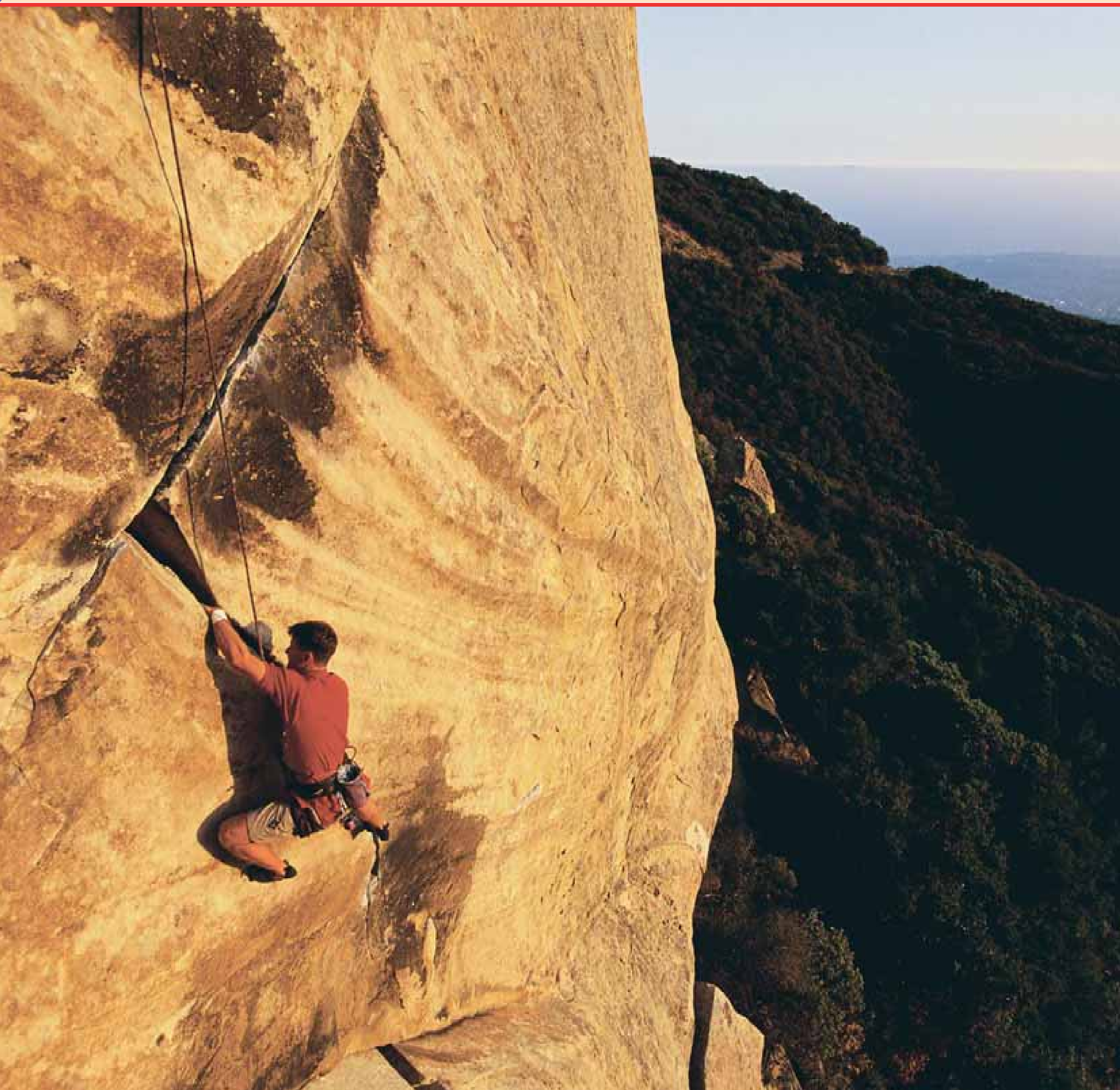
$$|x| + |y| \leq 1$$

30. Gráfica de una ecuación Grafique la ecuación

$$x^2y - y^3 - 5x^2 + 5y^2 = 0$$

[*Sugerencia:* factorice.]

2 Funciones

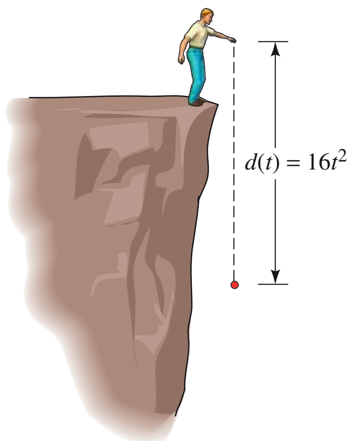


Esquema del capítulo

Quizá la idea matemática más útil para modelar el mundo real es el concepto de *función*, que se estudia en este capítulo. Para entender qué es una función, veremos un ejemplo.

Si un escalador de rocas deja caer una piedra desde un acantilado alto, ¿qué sucede con la piedra? Por supuesto la piedra cae; qué tanto ha caído en determinado momento depende del tiempo que ha estado descendiendo. Ésta es una descripción general, pero no indica de manera exacta cuándo la piedra choca con el suelo.

Descripción general: la piedra cae.



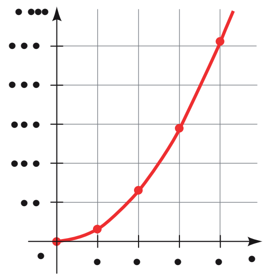
Función: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies.

Lo que necesitamos es una *regla* que relacione la posición de la piedra con el tiempo que ésta ha descendido. Los físicos saben que la regla es: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies. Si $d(t)$ representa la distancia que ha descendido la piedra en el instante t, entonces esta regla se puede expresar como

$$d(t) = 16t^2$$

Esta "regla" para hallar la distancia en términos del tiempo se llama *función*. Se dice que la distancia es una *función* del tiempo. Para entender mejor esta regla o función, se puede construir una tabla de valores o dibujar una gráfica. La gráfica permite ver con facilidad qué tan lejos y qué tan rápido cae la piedra.

Tiempo t	Distancia $d(t)$
0	0
1	16
2	64
3	144
4	256



Usted puede observar por qué son importantes las funciones. Por ejemplo, si un físico encuentra la "regla" o función que relaciona la distancia recorrida con el tiempo transcurrido, entonces puede predecir cuándo un misil chocará con el suelo. Si un biólogo halla la función o "regla" que relaciona el número de bacterias en un cultivo con el tiempo, entonces puede predecir el número de bacterias para algún tiempo futuro. Si un agricultor conoce la función o "regla" que relaciona la producción de manzanas con la cantidad de árboles por acre, entonces puede decidir cuántos árboles plantar por acre para maximizar la producción.

En este capítulo aprenderemos cómo se emplean las funciones para modelar situaciones del mundo real y cómo hallar esta clase de funciones.

2.1 ¿Qué es una función?

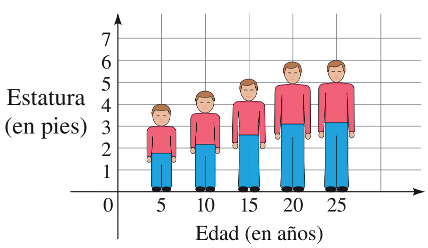
En esta sección se explora la idea de función y después se da su definición matemática.

Funciones en nuestro entorno

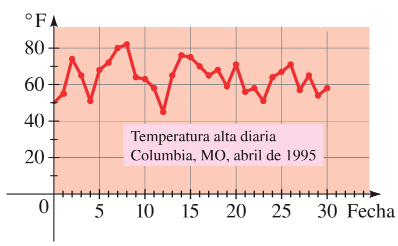
En casi todo fenómeno físico se observa que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura depende de la edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar por correo un paquete depende de su peso (véase figura 1). Se usa el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad sobre otra. Es decir, se expresa lo siguiente:

- La altura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar por correo un paquete es una función del peso.

La Oficina Postal de Estados Unidos emplea una regla simple para determinar el costo de enviar un paquete con base en su peso. Pero no es fácil describir la regla que relaciona el peso con la edad o la temperatura con la fecha.



La estatura es una función de la edad.



La temperatura es una función de la fecha.

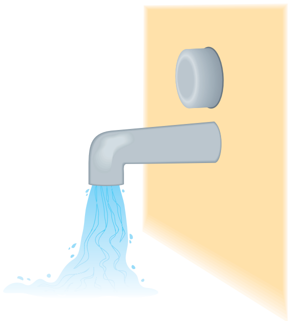
w (onzas)	Franqueo (dólares)
$0 < w$ 1	0.37
$1 < w$ 2	0.60
$2 < w$ 3	0.83
$3 < w$ 4	1.06
$4 < w$ 5	1.29
$5 < w$ 6	1.52

El franqueo es una función del peso.

Figura 1

¿Puede pensar en otras funciones? Aquí hay algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es una función del tiempo.
- El peso de un astronauta es una función de su elevación.
- El precio de un artículo es una función de la demanda de ese artículo.



La regla que describe cómo el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Incluso cuando no está disponible una regla o fórmula precisa que describe una función, se puede todavía describir la función mediante una gráfica. Por ejemplo, cuando se abre la llave del agua caliente, la temperatura del agua depende del tiempo que el agua haya estado corriendo. Así, se puede decir

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

En la figura 2 se muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como una función del tiempo t que ha trascurrido desde que se abrió la llave. En la gráfica se muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del depósito de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua se incrementa con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua en el depósito. Cuando se vacía el depósito, T disminuye a la temperatura del suministro de agua fría.

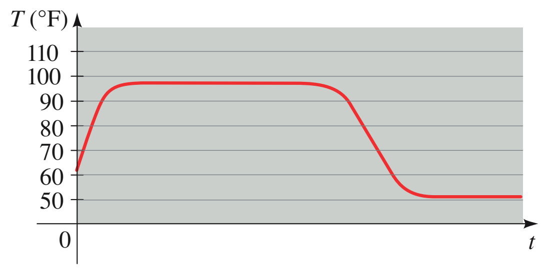


Figura 2
Gráfica de la temperatura T del agua como una función del tiempo t

Definición de función

Antes se emplearon letras para representar números. Aquí se hace algo muy diferente. Se emplean letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar acerca de una función, se requiere asignarle un nombre. Se emplearán letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, se puede usar la letra f para representar una regla como sigue:

"f" es la regla "cuadrado del número"

Cuando se escribe $f(2)$, se entiende "aplicar la regla f al número 2". Al aplicar la regla se obtiene $f(2) = 2^2 = 4$. De manera similar, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

Definición de función

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x en un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, en un conjunto B.

Por lo general, se consideran funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se llama el **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A se llama **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía a través de el dominio, es decir,

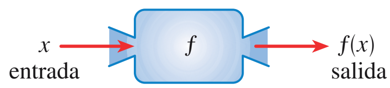
$$\text{rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario en el dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Así, si se escribe $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (véase figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando se introduce x en la máquina, es aceptada como una **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, se puede considerar al dominio como el conjunto de las entradas posibles y al rango como el conjunto de las salidas posibles.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ en la calculadora es un buen ejemplo de considerar una función como una máquina. Primero se introduce x en la pantalla. Luego, se oprime la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En la mayor parte de las calculadoras de *graficación*, el orden de estas operaciones es a la inversa.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece en la pantalla una aproximación a $\sqrt{x}$ correcta hasta cierto número de lugares decimales. (Por lo tanto, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ en la calculadora no es lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

Figura 3
Diagrama de máquina de f



Otra forma de ilustrar una función es mediante un **diagrama de flechas** como en la figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ se relaciona con x, $f(a)$ se relaciona con a, etcétera.

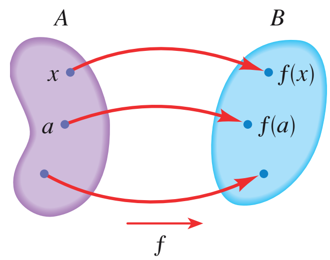


Figura 4
Diagrama de flechas de f

Ejemplo 1 La función cuadrática

La función cuadrática asigna a cada número real x su cuadrado x^2. Se define por

$$f(x) = x^2$$

a) Evaluar $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.
b) Hallar el dominio y el rango de f.
c) Trazar el diagrama de máquina para f.

Solución

a) Los valores de f se hallan al sustituir x en $f(x) = x^2$.

$$f(3) = 3^2 = 9 \qquad f(-2) = (-2)^2 = 4 \qquad f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 = 5$$

b) El dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. El rango de f consiste en los valores de $f(x)$, es decir, los números de la forma x^2. Puesto que $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, se puede ver que el rango de f es $\{y \mid y \geq 0\} = [0, \infty)$.

c) En la figura 5 se muestra un diagrama de máquina para esta función. ■

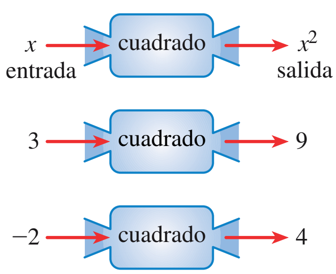


Figura 5
Diagrama de máquina

Evaluación de una función

En la definición de una función la variable independiente x desempeña el papel de "marcador de posición". Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, se sustituye el número para el marcador de posición.

Ejemplo 2 Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de función.

a) $f(-2)$ b) $f(0)$ c) $f(4)$ d) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

Solución Para evaluar f en un número, se sustituye x por el número en la definición de f.

a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

c) $f(4) = 3 \cdot 4^2 + 4 - 5 = 47$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$ ■

Ejemplo 3 Una función definida por partes

Un teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cada minuto adicional de uso cuesta 20¢. El costo mensual es una función de la cantidad de minutos empleados, y se expresa como

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.2(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Determine $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

Solución Recuerde que una función es una regla. A continuación se explica cómo aplicar la regla para esta función. Primero, se considera el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otro lado, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.2(x - 400)$.

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en partes diferentes de su dominio. La función C del ejemplo 3 es definida por partes.

Puesto que $100 \le 400$, se tiene $C(100) = 39$

Puesto que $400 \le 400$, se tiene $C(400) = 39$

Puesto que $480 > 400$, se tiene $C(480) = 39 + 0.2(480 - 400) = 55$.

Por lo tanto, el plan carga \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos. ■

Expresiones como la del inciso d) del ejemplo 4 se presentan con frecuencia en cálculo; se llaman *cocientes de diferencias,* y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

Ejemplo 4 Evaluar una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

a) $f(a)$ b) $f(-a)$

c) $f(a + h)$ d) $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Solución

a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

c) $$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 + 3(a+h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a+h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

d) Con los resultados de los incisos c) y a), se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

■

El peso de un objeto sobre o cerca de la Tierra es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre él. Cuando está en órbita alrededor de la Tierra, un astronauta experimenta la sensación de “ingravidez” porque la fuerza centrípeta que lo mantiene en órbita es exactamente la misma que la atracción gravitacional de la Tierra.

Ejemplo 5 Peso de un astronauta

Si un astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando está h millas arriba de la Tierra se expresa mediante la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

a) ¿Cuál es su peso cuando está 100 millas sobre la Tierra?

b) Construya una tabla de valores para función w que dé el peso a alturas de 0 a 500 millas. ¿Qué concluye de la tabla?

Solución

a) Se desea el valor de la función w cuando $h = 100$; es decir, se debe calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Por lo tanto, a una altura de 100 millas, pesa 124 lb.

b) La tabla proporciona el peso del astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla se calculan como en el inciso a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que mientras más alto vaya el astronauta pesa menos. ■

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de las entradas para la función. El dominio de una función se puede expresar de forma explícita. Por ejemplo, si se escribe

$$f(x) = x^2, \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de los números reales para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se enuncia de manera explícita, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica —es decir, el conjunto de los números reales para los que la expresión se define como un número real*. Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de las expresiones algebraicas se describen en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, así que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, así que su dominio es $\{x \mid x \neq 0\}$.

Ejemplo 6 Determinación de dominios de funciones

Halle el dominio de cada función..

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ b) $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ c) $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

Solución

a) La función no está definida cuando el denominador es 0. Puesto que

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

se puede observar que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Así, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio se puede escribir en notación de intervalo como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

b) No se puede sacar la raíz cuadrada de una cantidad negativa, así que se debe tener $9 - x^2 \ge 0$. Con los métodos de la sección 1.7, se puede resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \le x \le 3$. Así, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \le x \le 3\} = [-3, 3]$$

c) No se puede sacar la raíz cuadrada de un número negativo, y tampoco se puede dividir entre cero, así que se debe tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

■

Cuatro formas de representar una función

Para ayudar a entender lo que es una función, se han empleado diagramas de máquina y flechas. Se puede describir una función específica en las cuatro formas siguientes:

- verbal (mediante una descripción en palabras)
- algebraica (mediante una fórmula explícita)

- visual (por medio de una gráfica)
- numérica (por medio de una tabla de valores)

Una función simple se puede representar por las cuatro formas, y suele ser útil ir de una representación a otra para comprender mejor la función. Sin embargo, ciertas funciones se describen de manera más natural con un método que con otros. Un ejemplo de una descripción verbal es

$$P(t) \qquad \text{es} \qquad \text{“la población del mundo en el momento } t\text{”}$$

La función P se puede describir también de forma numérica si se da una tabla de valores (véase la tabla 1 en la página 386). Una representación útil del área de un círculo como una función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida mediante un sismógrafo (véase el cuadro) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe de forma verbal como “el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w”. La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente; es decir, con una tabla de valores.

En este libro se emplearán las cuatro representaciones de funciones. Se resumen en el siguiente cuadro.

Cuatro formas de representar una función

Verbal

Con palabras:

$P(t)$ es la “población del mundo en el instante t”

Relación de la población P y el tiempo t

Algebraica

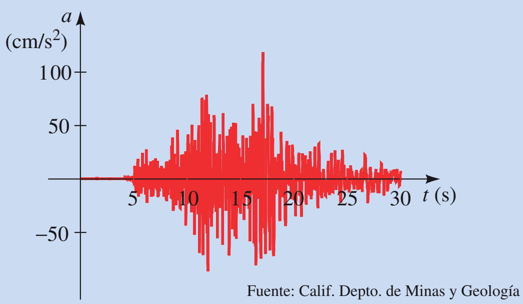
Por medio de una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Por medio de una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Por medio de una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leq 1$	0.37
$1 < w \leq 2$	0.60
$2 < w \leq 3$	0.83
$3 < w \leq 4$	1.06
$4 < w \leq 5$	1.29
⋮	⋮

Costo de enviar una carta por correo de primera clase

2.1 Ejercicios

1–4 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "eleve al cuadrado, luego reste 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

1. Sume 5, luego multiplique por 2
2. Divida entre 7, después reste 4
3. Reste 5, luego eleve al cuadrado
4. Saque la raíz cuadrada, sume 8, luego multiplique por $\frac{1}{3}$

5–8 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

5. $f(x) = \dfrac{x - 4}{3}$
6. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$
7. $h(x) = x^2 + 2$
8. $k(x) = \sqrt{x + 2}$

9–10 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

9. $f(x) = \sqrt{x - 1}$
10. $f(x) = \dfrac{3}{x - 2}$

11–12 ■ Complete la tabla.

11. $f(x) = 2(x - 1)^2$

x	$f(x)$
-1	
0	
1	
2	
3	

12. $g(x) = |2x + 3|$

x	$g(x)$
-3	
-2	
0	
1	
3	

13–20 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

13. $f(x) = 2x + 1$;
    $f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a + b)$
14. $f(x) = x^2 + 2x$;
    $f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$
15. $g(x) = \dfrac{1 - x}{1 + x}$;
    $g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a - 1), g(-1)$
16. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;
    $h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$
17. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;
    $f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x + 1), f(-x)$
18. $f(x) = x^3 - 4x^2$;
    $f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$
19. $f(x) = 2|x - 1|$;
    $f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x + 1), f(x^2 + 2)$
20. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;
    $f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

21–24 ■ Evalúe la función definida por partes en los valores indicados.

21. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
    $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$
22. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
    $f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$
23. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
    $f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$
24. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
    $f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

25–28 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

25. $f(x) = x^2 + 1$; $f(x + 2), f(x) + f(2)$
26. $f(x) = 3x - 1$; $f(2x), 2f(x)$
27. $f(x) = x + 4$; $f(x^2), (f(x))^2$
28. $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

29–36 ■ Halle $f(a)$, $f(a + h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

29. $f(x) = 3x + 2$
30. $f(x) = x^2 + 1$

31. $f(x) = 5$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

33. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

34. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

35. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

36. $f(x) = x^3$

37–58 ■ Encuentre el dominio de la función.

37. $f(x) = 2x$

38. $f(x) = x^2 + 1$

39. $f(x) = 2x, \quad -1 \le x \le 5$

40. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \le x \le 5$

41. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

42. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

43. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

44. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

45. $f(x) = \sqrt{x-5}$

46. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

47. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

48. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

49. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

50. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

51. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

52. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

53. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

54. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

55. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

56. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

57. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

58. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

Aplicaciones

59. Costo de producción El costo C en dólares de producir x yardas de cierta tela se expresa mediante la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

a) Halle $C(10)$ y $C(100)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos.*)

60. Área de una esfera El área de superficie S de una esfera es una función de su radio r dada por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

a) Determine $S(2)$ y $S(3)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

61. ¿Qué tan lejos puede ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia máxima D que una persona puede ver desde la parte alta de un edificio alto o desde un avión a la altura h está dada por la función

$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.

a) Determine $D(0.1)$ y $D(0.2)$.

b) ¿Qué tan lejos puede ver desde la terraza de la torre CN de Toronto, situada a 1135 pies desde el nivel del suelo?

c) La aviación comercial vuela a una altitud de cerca de 7 millas. ¿Qué tan lejos puede ver el piloto?

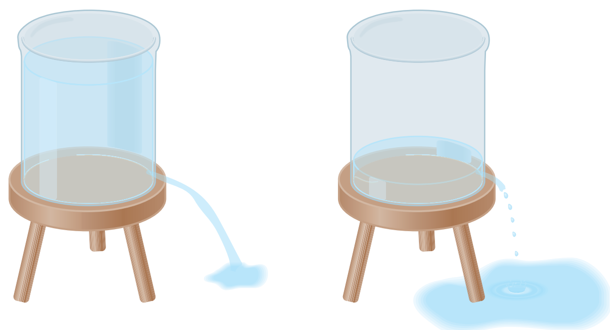
62. Ley de Torricelli Un depósito contiene 50 galones de agua, que drenan desde un orificio en el fondo, lo cual causa que el depósito se vacíe en 20 minutos. El depósito drena más rápido cuando está casi lleno porque la presión del orificio es mayor. La **ley de Torricelli** da el volumen de agua que permanece en el depósito después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

a) Determine $V(0)$ y $V(20)$.

b) ¿Qué representan sus respuestas del inciso a)?

c) Elabore una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.



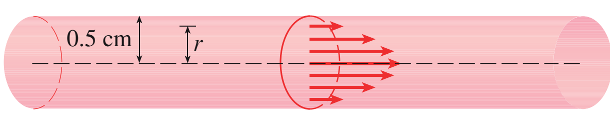
63. Flujo de sangre Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). La fórmula que da v como una función de r se llama **ley de flujo laminar.** Para una arteria con radio 0.5 cm, se tiene

$$v(r) = 18\,500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

a) Determine $v(0.1)$ y $v(0.4)$.

b) ¿Qué indican las respuestas del inciso a) acerca del flujo de sangre en esta arteria?

c) Construya una tabla de valores de $v(r)$ para $r = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

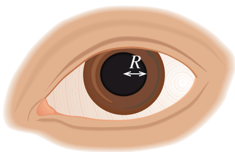


64. Tamaño de la pupila Cuando se incrementa la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona disminuyendo el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.

b) Elabore una tabla de valores de $R(x)$.



65. Relatividad De acuerdo con la teoría de la relatividad, la longitud L de un objeto es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un objeto cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz.

a) Determine $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.

b) ¿Cómo cambia la longitud de un objeto cuando se incrementa su velocidad?

66. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre la renta T se evalúa de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10\,000 \\ 0.08x & \text{si } 10\,000 < x \le 20\,000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20\,000 < x \end{cases}$$

a) Encuentre $T(5\,000)$, $T(12\,000)$ y $T(25\,000)$.

b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)?

67. Compras por Internet Una librería por Internet cobra $15 por envío para pedidos menores a $100, pero el envío es gratis para pedidos de $100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x de los libros comprados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.

(b) ¿Qué representan las respuestas al inciso a)?

68. Costo de estancia en un hotel Una cadena de hoteles cobra $75 por noche para las dos primeras noches y $50 por cada noche adicional. El costo total T es una función del número de noches x que permanece un huésped.

a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes.

$$T(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \boxed{} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Determine $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

c) ¿Qué representan las respuestas del inciso b)?

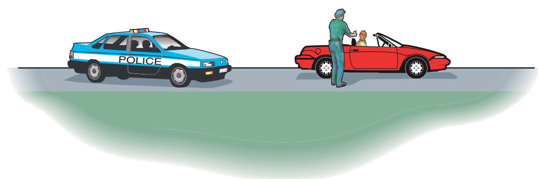
69. Multas por exceso de velocidad En cierto estado la velocidad máxima permitida en las autopistas es 65 millas/h y la mínima es 40. La multa F por violar estos límites es $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

a) Complete las expresiones en la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la que conduce una persona.

$$F(x) = \begin{cases} \boxed{} & \text{si } 0 < x < 40 \\ \boxed{} & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \boxed{} & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

b) Determine $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

c) ¿Qué representan las respuestas del inciso b)?



70. Altura del césped Una persona poda el césped todos los miércoles por la tarde. Bosqueje una gráfica aproximada de la altura del césped como una función del tiempo en el curso de un periodo de cuatro semanas comenzando en un domingo.

71. Cambio de temperatura Se coloca un pastel congelado en un horno y se calienta durante una hora. Luego se saca y se deja enfriar antes de comerlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como una función del tiempo.

72. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) se registraron cada dos horas desde la medianoche hasta el mediodía en Atlanta, Georgia, el día 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la media noche. Trace una gráfica aproximada de T como una función de t.

t	T
0	58
2	57
4	53
6	50
8	51
10	57
12	61

73. Crecimiento de la población La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla. (Se dan las estimaciones de medio año.) Dibuje una gráfica aproximada de P como una función del tiempo t.

t	P
1988	733
1990	782
1992	800
1994	817
1996	838
1998	861
2000	895

Descubrimiento • Debate

74. Ejemplos de funciones Al comienzo de esta sección se analizaron tres ejemplos de funciones ordinarias de la vida diaria: la estatura es una función de la edad, la temperatura es una función de la fecha y el costo postal es una función del peso. Dé tres ejemplos de funciones de la vida diaria.

75. Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 154 se representaron cuatro funciones diferentes de manera verbal, algebraica, visual y numérica. Considere una función que se pueda representar en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

2.2 Gráficas de funciones

La forma más importante de representar una función es por medio de su gráfica. En esta sección se investiga con más detalle el concepto de graficar funciones.

Graficación de funciones

La gráfica de una función

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; es decir, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

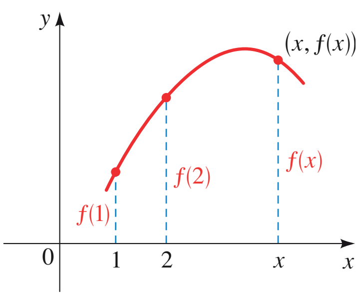


Figura 1
La altura de la gráfica arriba del punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función f da un cuadro del comportamiento o "historia de vida" de la función. Se puede leer el valor de $f(x)$ de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (véase figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se llama **función lineal** porque su gráfica es la de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y y-ordenada al origen b. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un determinado número, se llama **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, a saber, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. En la figura 2 se muestran las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.

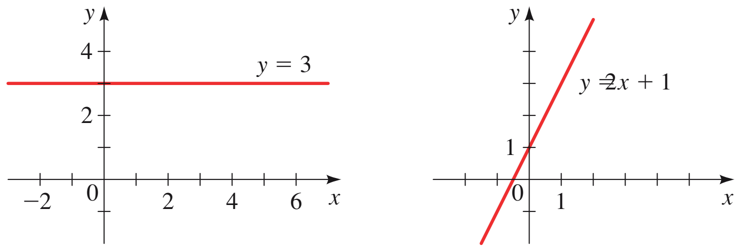


Figura 2 La función constante $f(x) = 3$ La función lineal $f(x) = 2x + 1$

Ejemplo 1 Graficación de funciones

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = x^2$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$

Solución Primero se construye una tabla de valores. Luego se grafican los puntos expresados en la tabla y se unen mediante una curva lisa para obtener la gráfica. Las gráficas se bosquejan en la figura 3.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

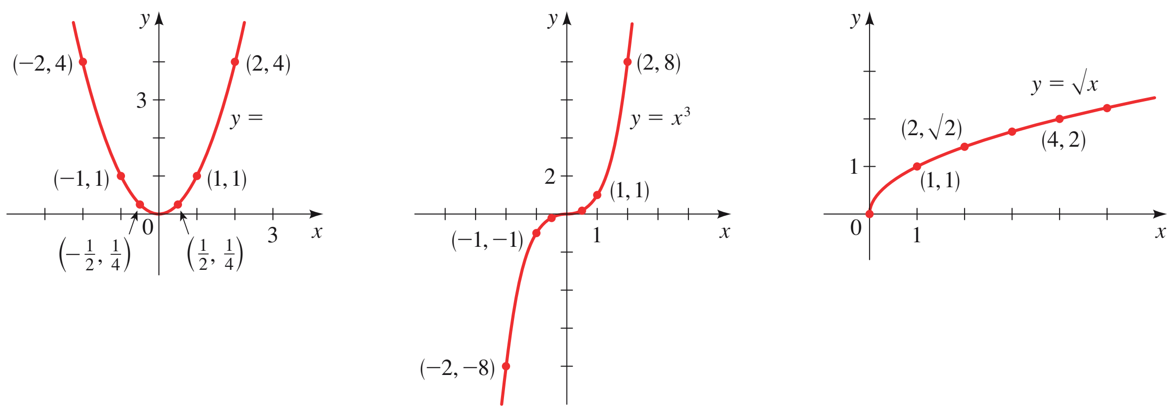
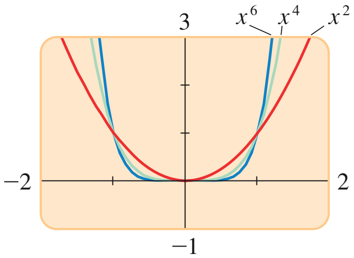
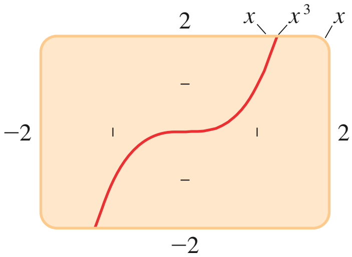


Figura 3 a) $f(x) =$ b) $g(x) = x^3$ c) $h(x) = \sqrt{x}$ ■

Una forma conveniente de graficar una función es usar una calculadora de graficación, como en el ejemplo siguiente.



a) Potencias pares de x



b) Potencias impares de x

Figura 4
Una familia de funciones exponenciales $f(x) = x^n$

Ejemplo 2 Una familia de funciones exponenciales

a) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2$, 4 y 6 en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

b) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1$, 3 y 5 en el rectángulo de visión $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

c) ¿Qué conclusiones puede sacar de estas gráficas?

Solución Las gráficas de los incisos a) y b) se muestran en la figura 4.

c) Se ve que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.
Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$. ■

Observe en la figura 4 que cuando n crece la gráfica de $y = x^n$ se vuelve más plana cerca de cero y más inclinada cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias menores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias mayores de x son las funciones dominantes.

Obtención de información de la gráfica de una función

Los valores de una función se representan por la altura de su gráfica arriba del eje x. Así, los valores de una función se pueden leer de su gráfica.

Ejemplo 3 Halle los valores de una función a partir de una gráfica

La función T graficada en la figura 5 da la temperatura entre el mediodía y las 6 P.M. en cierta estación meteorológica.

a) Determine $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

b) ¿Qué es más grande, $T(2)$ o $T(4)$?

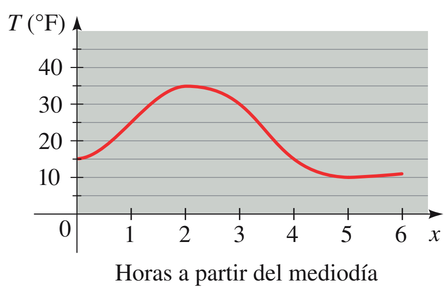


Figura 5
Función de temperatura

Solución

a) $T(1)$ es la temperatura a la 1 P.M. Está representada por la altura de la gráfica sobre el eje x en $x = 1$. Por lo tanto, $T(1) = 25$. De manera similar, $T(3) = 30$ y $T(5) = 10$.

b) Puesto que la gráfica es mayor en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es más grande que $T(4)$. ■

La gráfica de una función ayuda a ilustrar el dominio y el rango de la función en el eje x y el eje y como se muestra en la figura 6.

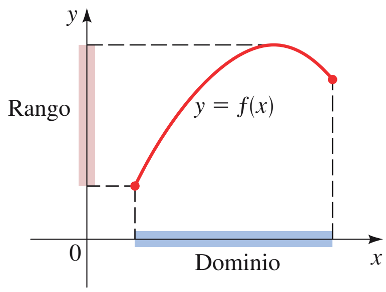


Figura 6
Dominio y rango de f

Ejemplo 4 Halle el dominio y el rango de una gráfica

a) Use una calculadora de graficación para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

b) Halle el dominio y el rango de f.

Solución

a) La gráfica se muestra en la figura 7.

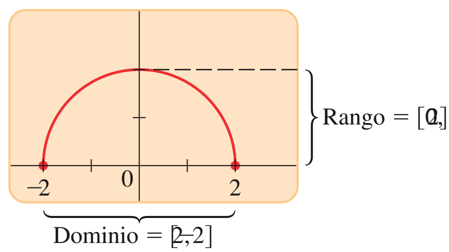


Figura 7
Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

b) De la gráfica de la figura 7 se ve que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$. ■

Graficación de funciones definidas por partes

Una función por partes se define mediante fórmulas distintas en diferentes partes de su dominio. Como se podría esperar, la gráfica de tal función consiste en trozos separados.

Ejemplo 5 Gráfica de una función definida por partes

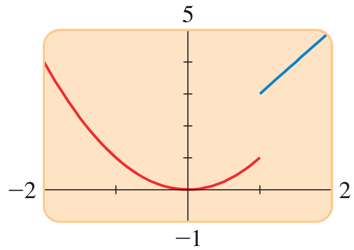
Bosqueje la gráfica de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución Si $x \leq 1$, entonces $f(x) = x^2$, así que la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que se bosquejó en la figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, de modo que la parte de la gráfica a la derecha

En muchas calculadoras de graficación, la gráfica de la figura 8 se puede producir por medio de funciones lógicas en la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

$\mathtt{Y_1} = (\mathtt{X} \le 1)\mathtt{X}\verb|^|2 + (\mathtt{X} > 1)(2\mathtt{X} + 1)$



(Para evitar la línea vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot` (punto).)

de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que se grafica en la figura 2. Esto permite trazar la gráfica en la figura 8.

El punto sólido en $(1, 1)$ indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en $(1, 3)$ indica que este punto está excluido de la gráfica.

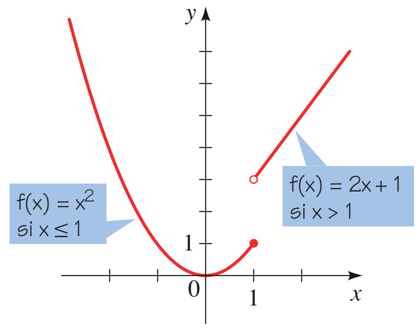


Figura 8

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

■

Ejemplo 6 Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

Solución Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con el mismo método del ejemplo 5, se nota que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (véase figura 9).

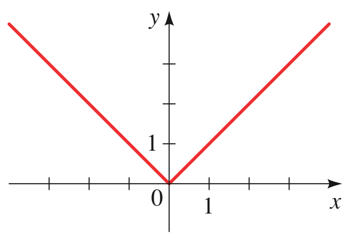


Figura 9
Gráfica de $f(x) = |x|$

■

La **función máximo entero** se define por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor que o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, $[\![-0.5]\!] = -1$.

Ejemplo 7 Gráfica de la función máximo entero

Bosqueje la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$.

Solución La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Note que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal como se muestra en la figura 10.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \le x < -1$	-2
$-1 \le x < 0$	-1
$0 \le x < 1$	0
$1 \le x < 2$	1
$2 \le x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

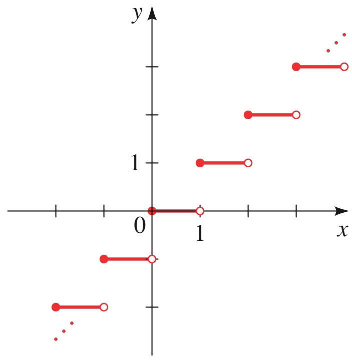


Figura 10
La función máximo entero, $y = [\![x]\!]$ ■

La función máximo entero es un ejemplo de una **función escalón**. En el ejemplo siguiente se da un ejemplo del mundo real de una función escalón.

Ejemplo 8 La función costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica diurna de larga distancia desde Toronto a Mumbai, India, es 69 centavos para el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Dibuje la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como una función del tiempo t (en minutos).

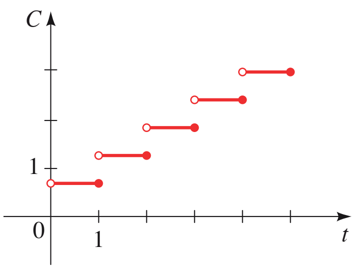


Figura 11
Costo de una llamada de larga distancia

Solución Sea $C(t)$ el costo por t minutos. Puesto que $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información suministrada, se tiene

$$
\begin{aligned}
C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \le 1 \\
C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \le 2 \\
C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \le 3 \\
C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \le 4
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la figura 11. ■

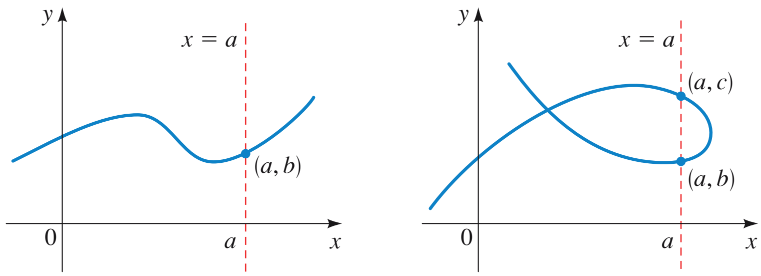
Prueba de la línea vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿qué curvas en el plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta mediante la prueba siguiente.

Prueba de la línea vertical

Una curva en el plano coordenado es la gráfica de una función si y sólo si ninguna línea vertical corta la curva más de una vez.

Se puede ver de la figura 12 por qué es cierta la prueba de la línea vertical. Si cada línea vertical $x = a$ corta una curva sólo una vez en (a, b), entonces $f(a) = b$ define exactamente un valor funcional. Pero si una línea $x = a$ corta la curva dos veces en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes para a.



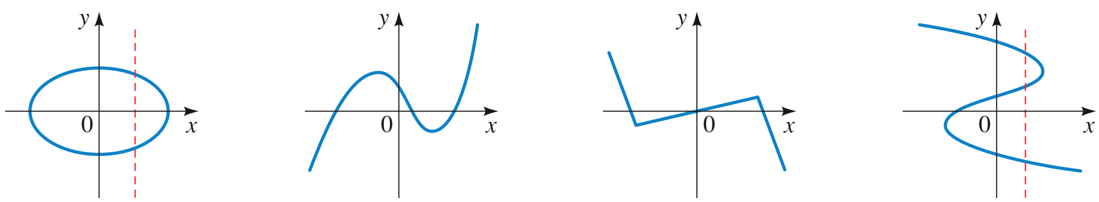
Gráfica de una función

No es una gráfica de una función

Figura 12
Prueba de la línea vertical

Ejemplo 9 Uso de la prueba de la línea vertical

Con la prueba de la línea vertical, se ve que las curvas de los incisos b) y c) de la figura 13 representan funciones, no así para el caso de los incisos a) y d).



a) b) c) d)

Figura 13

■

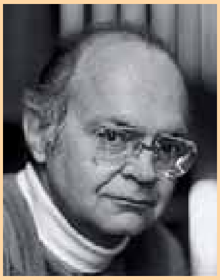
Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación en las variables x y y define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre y y x. ¿Esta ecuación define a y como una *función* de x? Para investigar, se despeja y, y se obtiene

$$y = x^2$$



Standford University News Service

Donald Knuth nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de computación en la Universidad de Stanford. Aún como estudiante de licenciatura en Caltech, comenzó a escribir una serie monumental de libros titulados *The art of Computer Programming*. El presidente Carter le otorgó la medalla nacional de Ciencia en 1979. Cuando Knuth era alumno de secundaria, se fascinó con las gráficas de funciones y de manera laboriosa trazó muchos cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (En la actualidad, por supuesto, es bastante fácil usar las computadoras y calculadoras de graficación para hacer esto.) Knuth es famoso por su invención de $\TeX$, un sistema de composición tipográfica asistido por computadora. Este sistema se empleó en la preparación del manuscrito para este libro. También escribió una novela titulada *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned On to Pure Mathemátics and Found Total Happiness.*

El doctor Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como asociado de la Academia Francesa de Ciencias y como profesor invitado de la Royal Society.

Se ve que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de y para cada valor de x. Se puede expresar esta regla en notación de función como

$$f(x) = x^2$$

Pero no toda ecuación define a y como una función de x, como se ve en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10 Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como una función de x?

a) $y - x^2 = 2$

b) $x^2 + y^2 = 4$

Solución

a) Si se expresa y en términos de x se obtiene

$$y - x^2 = 2$$

$$y = x^2 + 2 \qquad \text{Sumar } x^2$$

La última ecuación es una regla que da un valor de y para cada valor de x, así que define a y como una función de x. Se puede escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

b) Se intenta expresar y en términos de x:

$$x^2 + y^2 = 4$$

$$y^2 = 4 - x^2 \qquad \text{Restar } x^2$$

$$y = \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{Sacar las raíces cuadradas}$$

De la última ecuación se obtienen dos valores de y para un determinado valor de x. Por lo tanto, la ecuación no define a y como una función de x. ■

Las gráficas de las ecuaciones del ejemplo 10 se muestran en la figura 14. La prueba de la línea vertical muestra de forma gráfica que la ecuación del ejemplo 10(a) define una función pero la ecuación del ejemplo 10(b) no.

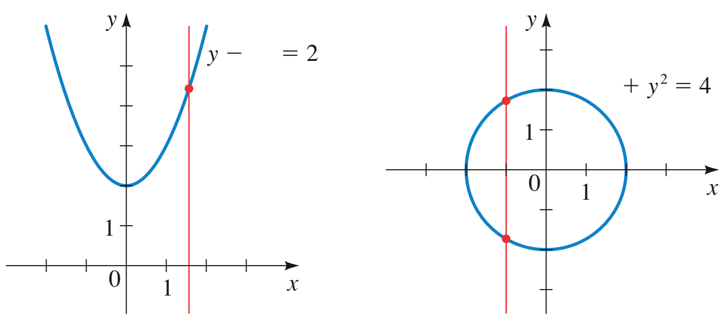
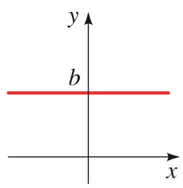


Figura 14 a) b)

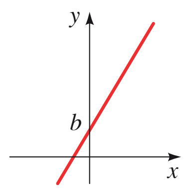
En la tabla siguiente se muestran las gráficas de algunas funciones que se verán con frecuencia en este libro.

Algunas funciones y sus gráficas

Funciones lineales
$f(x) = mx + b$

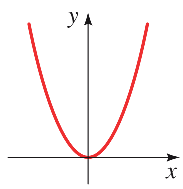


$f(x) = b$

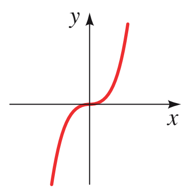


$f(x) = mx + b$

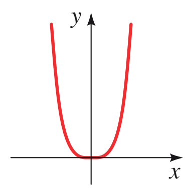
Funciones exponenciales
$f(x) = x^n$



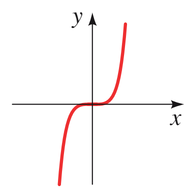
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$

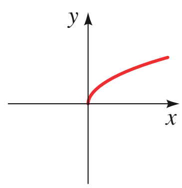


$f(x) = x^4$

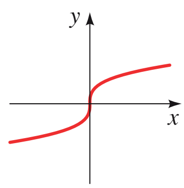


$f(x) = x^5$

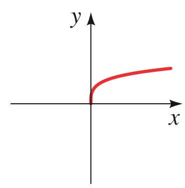
Funciones de raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



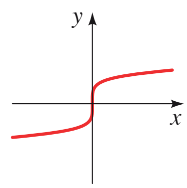
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

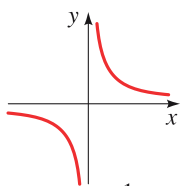


$f(x) = \sqrt[4]{x}$

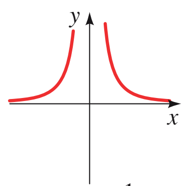


$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = 1/x^n$

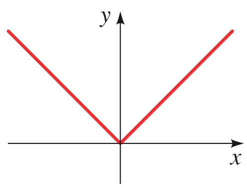


$f(x) = \dfrac{1}{x}$



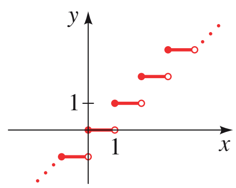
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero máximo
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

2.2 Ejercicios

1–22 ■ Trace la gráfica de la función construyendo primero una tabla de valores.

1. $f(x) = 2$

2. $f(x) = -3$

3. $f(x) = 2x - 4$

4. $f(x) = 6 - 3x$

5. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \le x \le 3$

6. $f(x) = \dfrac{x - 3}{2}, \quad 0 \le x \le 5$

7. $f(x) = -x^2$

8. $f(x) = x^2 - 4$

9. $g(x) = x^3 - 8$

10. $g(x) = 4x^2 - x^4$

11. $g(x) = \sqrt{x + 4}$

12. $g(x) = \sqrt{-x}$

13. $F(x) = \dfrac{1}{x}$

14. $F(x) = \dfrac{1}{x + 4}$

15. $H(x) = |2x|$

16. $H(x) = |x + 1|$

17. $G(x) = |x| + x$

18. $G(x) = |x| - x$

19. $f(x) = |2x - 2|$

20. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

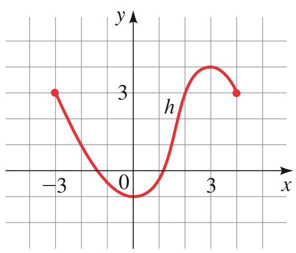
21. $g(x) = \dfrac{2}{x^2}$

22. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

23. Se da la gráfica de una función h.

a) Determine $h(-2)$, $h(0)$, $h(2)$ y $h(3)$.

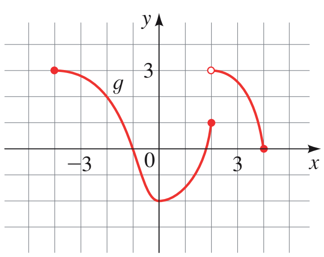
b) Halle el dominio y el rango de h.



24. Se da la gráfica de una función g.

a) Determine $g(-4)$, $g(-2)$, $g(0)$, $g(2)$ y $g(4)$.

b) Halle el dominio y el rango de g.

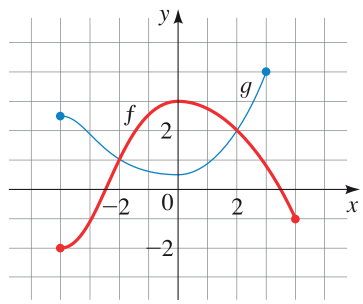


25. Se dan las gráficas de las funciones f y g.

a) ¿Cuál es más grande, $f(0)$ o $g(0)$?

b) ¿Cuál es más grande, $f(-3)$ o $g(-3)$?

c) ¿Para qué valores de x es $f(x) = g(x)$?

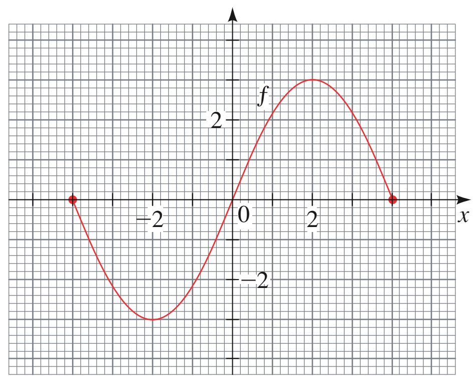


26. Se da la gráfica de la función f.

a) Estime $f(0.5)$ al décimo más próximo.

b) Estime $f(3)$ al décimo más próximo.

c) Encuentre los números x en el dominio de f para los que $f(x) = 1$.



27–36 ■ Se tiene una función f.

a) Emplee una calculadora de graficación para trazar la gráfica de f.

b) Halle el dominio y el rango de f a partir de la gráfica.

27. $f(x) = x - 1$

28. $f(x) = 2(x + 1)$

29. $f(x) = 4$

30. $f(x) = -x^2$

31. $f(x) = 4 - x^2$

32. $f(x) = x^2 + 4$

33. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

34. $f(x) = -\sqrt{25 - x^2}$

35. $f(x) = \sqrt{x - 1}$

36. $f(x) = \sqrt{x + 2}$

37–50 ■ Bosqueje la gráfica de la función definida por partes.

37. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

47. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

49. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

50. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

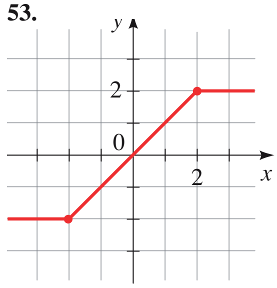
51–52 ■ Emplee un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la función definida por partes. (Véase la nota al margen en la página 162.)

51. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

52. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \le 1 \end{cases}$

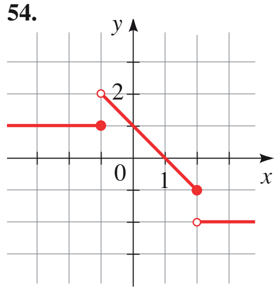
53–54 ■ Se da la gráfica de la función definida por partes. Determine una fórmula para la función en la forma indicada.

53.



$f(x) = \begin{cases} \square & \text{si } x < -2 \\ \square & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$

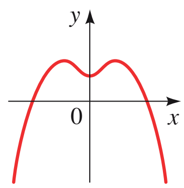
54.



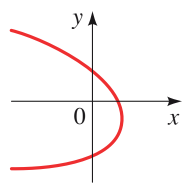
$f(x) = \begin{cases} \square & \text{si } x \le -1 \\ \square & \text{si } -1 < x \le 2 \\ \square & \text{si } x > 2 \end{cases}$

55–56 ■ Determine si la curva es la gráfica de una función de x.

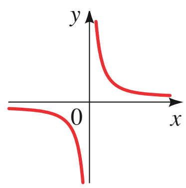
55. a)



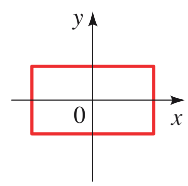
b)



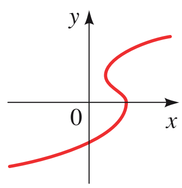
c)



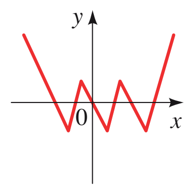
d)



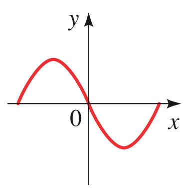
56. a)



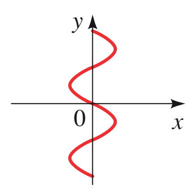
b)



c)

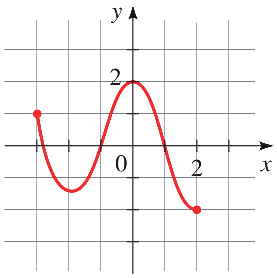


d)

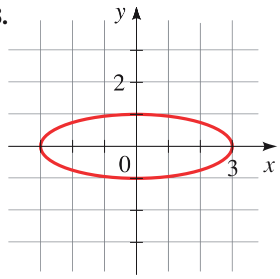


57–60 ■ Determine si la curva es la gráfica de una función x. En caso afirmativo, exprese el dominio y el rango de la función.

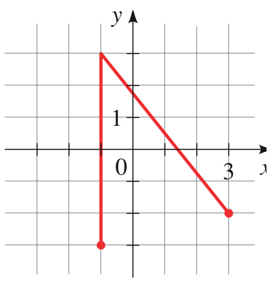
57.



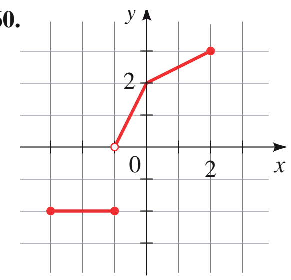
58.



59.



60.



61–72 ■ Determine si la ecuación define a y como una función de x. (Véase el ejemplo 10.)

61. $x^2 + 2y = 4$

62. $3x + 7y = 21$

63. $x = y^2$

64. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

65. $x + y^2 = 9$

66. $x^2 + y = 9$

67. $x^2y + y = 1$

68. $\sqrt{x} + y = 12$

69. $2|x| + y = 0$

70. $2x + |y| = 0$

71. $x = y^3$

72. $x = y^4$

73–78 ■ Se da una familia de funciones. En los incisos a) y b) grafique los miembros dados de la familia en el rectángulo de visión indicado. En el inciso c) exprese las conclusiones que pueda deducir de sus gráficas.

73. $f(x) = x^2 + c$

a) $c = 0, 2, 4, 6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -2, -4, -6$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

74. $f(x) = (x - c)^2$

a) $c = 0, 1, 2, 3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -1, -2, -3$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

75. $f(x) = (x - c)^3$

a) $c = 0, 2, 4, 6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 0, -2, -4, -6$; $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

76. $f(x) = cx^2$

a) $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

b) $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2$; $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

77. $f(x) = x^c$

a) $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$; $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$

b) $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$; $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de c?

78. $f(x) = 1/x^n$

a) $n = 1, 3$; $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$

b) $n = 2, 4$; $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$

c) ¿Cómo afecta la gráfica el valor de n?

79–82 ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

79. El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

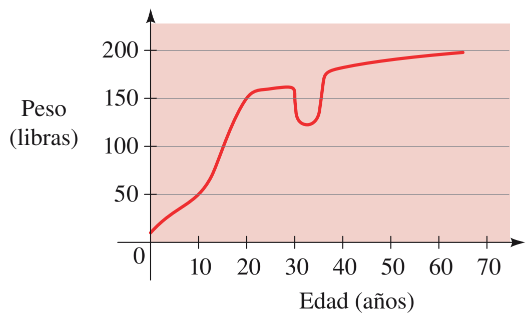
80. El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

81. La mitad superior del círculo $x^2 + y^2 = 9$

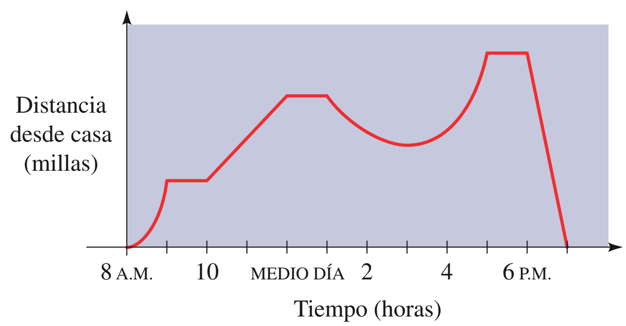
82. La mitad inferior del círculo $x^2 + y^2 = 9$

Aplicaciones

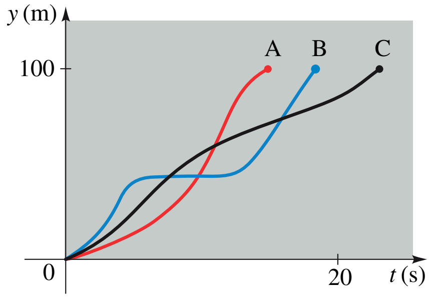
83. Función peso La gráfica da el peso de cierta persona como una función de la edad. Describa en palabras cómo el peso de esta persona ha variado con el tiempo. ¿Qué cree que sucedió cuando esta persona tenía 30 años de edad?



84. Función distancia La gráfica da una distancia del vendedor desde su casa como una función del tiempo en cierto día. Describa en palabras lo que indica la gráfica acerca de su viaje en este día.



85. Carrera con obstáculos Tres corredores compiten en una carrera de 100 metros con obstáculos. En la gráfica se ilustra la distancia como una función del tiempo para cada corredor. Describa en palabras lo que indica la gráfica acerca de esta competencia. ¿Quién ganó esta carrera? ¿Cada corredor termina la carrera? ¿Qué cree que le sucedió al corredor B?

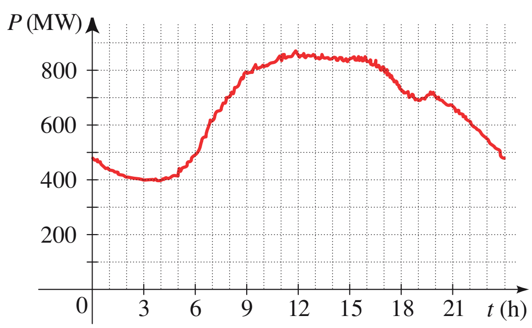


86. Consumo de energía En la figura se muestra el consumo de energía en San Francisco para el 19 de septiembre de 1996 (P se mide en megawatts; t se mide en horas comenzando a la medianoche).

a) ¿Cuál fue el consumo de energía a las 6 A.M.? ¿A las 6 P.M.?

b) ¿Cuándo fue mínimo el consumo de energía?

c) ¿Cuándo fue máximo el consumo de energía?



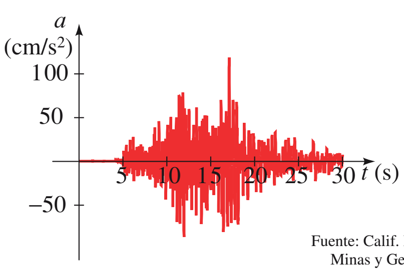
Fuente: Pacific Gas & Electric

87. Terremoto En la gráfica se muestra la aceleración vertical del suelo desde el terremoto de Northridge en 1994 en Los Ángeles, medida mediante un sismógrafo. (Aquí t representa el tiempo en segundos.)

a) ¿En qué tiempo t el terremoto produjo primero movimientos notables de la tierra?

b) ¿En qué tiempo t al parecer terminó el terremoto?

c) ¿En qué tiempo t el terremoto alcanzó la máxima intensidad?



Fuente: Calif. Dept. de Minas y Geología

88. Tarifas eléctricas Westside Energy cobra a sus clientes una tarifa base de \$6.00 por mes, más 10¢ por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh empleados y 6¢ por kWh para todo consumo mayor de 300 kWh. Suponga que un cliente utiliza x kWh de electricidad en un mes.

a) Exprese el costo mensual E como una función de x.

b) Grafique la función E para $0 \le x \le 600$.

89. Función para taxis Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de una milla) y 20 centavos por cada décima de milla sucesiva (o parte). Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como una función de la distancia x recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

90. Tarifas postales La tarifa doméstica de correos para cartas de primera clase que pesan 12 onzas o menos es 37 centavos por la primera onza (o parte de una onza). Exprese los gastos de envío P como una función del peso x de una carta, con $0 < x \le 12$, y trace la gráfica de esta función.

Descubrimiento • Debate

91. ¿Cuándo una gráfica representa una función? Para cada entero n, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, a saber $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no* es la gráfica de una función de x. ¿La gráfica de $x = y^3$ es la gráfica de una función de x? Si es así, ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué n enteros la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de x.

92. Funciones escalón En el ejemplo 8 y los ejercicios 89 y 90 se dan funciones cuyas gráficas consisten en segmentos de recta horizontales. Esta clase de funciones se llama *funciones escalón*, porque sus gráficas se asemejan a escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que surgen en la vida diaria.

93. Funciones escalón extendidas Bosqueje las gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo se relacionan las gráficas? Si n es un entero positivo, ¿a qué se parece la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

94. Gráfica del valor absoluto de una función

a) Dibuje las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 + x - 6$ y $g(x) = |x^2 + x - 6|$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g?

b) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo se relacionan las gráficas de f y g?

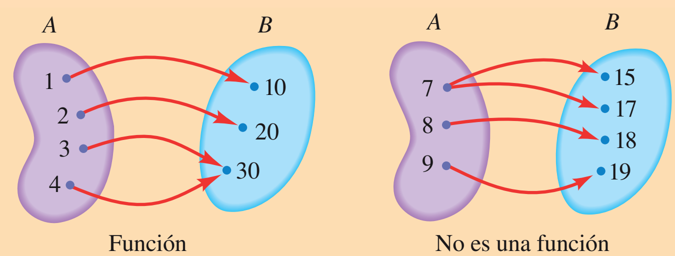
c) En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo se relacionan las gráficas de f y g ¿Dibuje las gráficas para ilustrar su respuesta.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

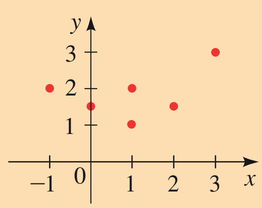
Relaciones y funciones

Una función f se puede representar como un conjunto de pares ordenados (x, y) donde x es la entrada y $y = f(x)$ es la salida. Por ejemplo, la función que eleva al cuadrado cada número natural se puede representar mediante los pares ordenados $\{(1, 1), (2, 4), (3, 9), \ldots\}$.

Una **relación** es *cualquier* colección de pares ordenados. Si los pares ordenados de una relación se denotan por (x, y) entonces el conjunto de valores de x (o entradas) es el **dominio** y el conjunto de valores de y (o salidas) es el **rango**. Con esta terminología una **función** es una relación donde para cada valor x hay *exactamente un* valor y (o para cada entrada hay *exactamente una* salida). Las correspondencias en la figura de abajo son relaciones: la primera es una función pero la segunda no porque la entrada 7 en A corresponde a dos salidas diferentes, 15 y 17, en B.



Se puede describir una relación si se listan los pares ordenados en la relación o si se da la regla de correspondencia. También, puesto que una relación consiste en pares ordenados se puede trazar su gráfica. Considérense las relaciones siguientes e intente decidir cuáles son funciones.



a) La relación que consiste en los pares ordenados $\{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 2)\}$.
b) La relación que consiste en los pares ordenados $\{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$.
c) La relación cuya gráfica se muestra a la izquierda.
d) La relación cuyos valores de entrada son los días de enero de 2005 y cuyos valores de salida son la temperatura máxima en Los Ángeles en ese día.
e) La relación cuyos valores de entrada son los días de enero de 2005 y cuyos valores de salida son las personas nacidas en Los Ángeles en ese día.

La relación del inciso a) es una función porque cada entrada corresponde a exactamente una salida. Pero la relación del inciso b) no lo es, porque la entrada 1 corresponde a dos salidas diferentes (2 y 3). La relación del inciso c) no es una función porque la entrada 1 corresponde a dos salidas diferentes (1 y 2). La relación en d) es una función porque cada día corresponde a exactamente una temperatura máxima. La relación en e) no es una función porque muchas personas (no sólo una) nacieron en Los Ángeles en muchos días de enero de 2005.

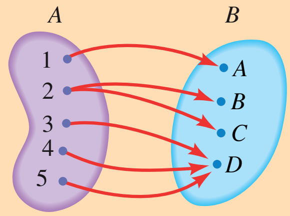
1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{-1, 0, 1\}$. ¿La relación dada es una función de A y B?

a) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (4, 1)\}$

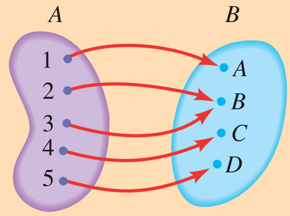
b) $\{(1, 0), (2, -1), (3, 0), (3, -1), (4, 0)\}$

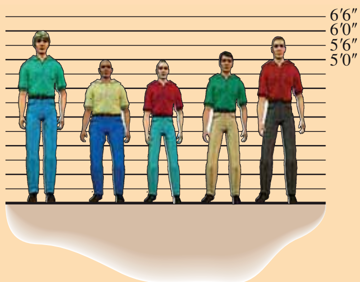
2. Determine si la correspondencia es una función.

a)



b)





3. Los datos siguientes se obtuvieron de miembros de una clase universitaria de precálculo. ¿Es una función el conjunto de pares ordenados (x, y)?

a)

x Altura	y Peso
72 pulg.	180 lb
60 pulg.	204 lb
60 pulg.	120 lb
63 pulg.	145 lb
70 pulg.	184 lb

b)

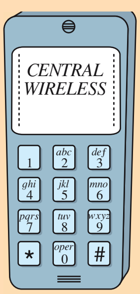
x Edad	y Número de ID
19	82-4090
21	80-4133
40	66-8295
21	64-9110
21	20-6666

c)

x Año de graduación	y Número de graduados
2005	2
2006	12
2007	18
2008	7
2009	1

4. Una ecuación en x y y define una relación, la cual puede ser una función o no (véase la página 164). Decida si la relación que consiste en los pares ordenados de números reales (x, y) que satisfacen la condición dada es una función.

a) $y = x^2$ b) $x = y^2$ c) $x \leq y$ d) $2x + 7y = 11$



5. En la vida diaria se encuentran muchas relaciones que pueden definir funciones o no. Por ejemplo, se hace corresponder a las personas con su número o números telefónicos, a los jugadores de béisbol con sus promedios de bateo o a los varones casados con sus esposas. ¿Esta última correspondencia define una función? En una sociedad en la que cada varón casado tiene exactamente una esposa la regla es una función. Pero la regla no es una función. ¿Cuáles de las siguientes relaciones cotidianas son funciones?

a) x es la hija de y (x y y son mujeres en Estados Unidos).

b) x es más alta que y (x y y son personas en California).

c) x ha recibido tratamiento dental de y (x y y son millonarios en Estados Unidos).

d) x es un dígito (0 a 9) en un número telefónico y y es una letra correspondiente.

2.3 Funciones crecientes y decrecientes; tasa de cambio promedio*

Las funciones se emplean con frecuencia para modelar cantidades cambiantes. En esta sección se aprende cómo determinar si una función es creciente o decreciente, y cómo hallar la tasa a la cual sus valores cambian cuando cambia la variable.

Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber dónde sube la gráfica de una función y donde baja. La gráfica mostrada en la figura 1 sube, baja, luego sube de nuevo conforme se va de izquierda a derecha: sube de A a B, baja de B a C, y sube de nuevo de C a D. Se dice que la función f es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando su gráfica baja.

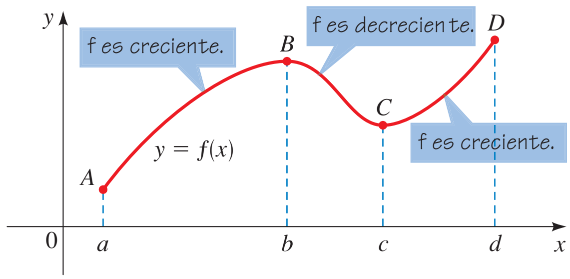


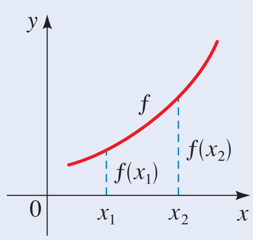
Figura 1
f es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$.
f es decreciente en $[b, c]$.

Se tiene la siguiente definición.

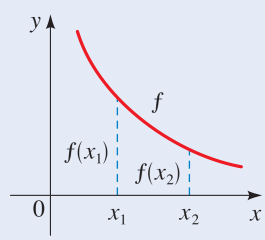
Definición de funciones crecientes y decrecientes

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.



f es creciente

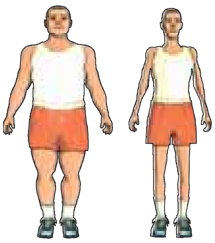


f es decreciente

* También se le llama *razón de cambio promedio*.

Ejemplo 1 Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la figura 2 da el peso W de una persona a la edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.



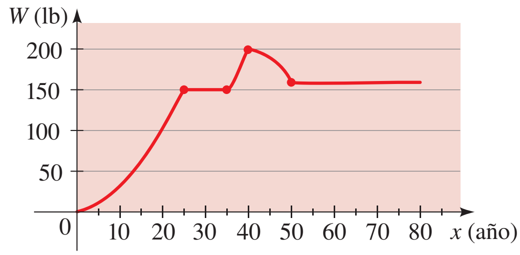


Figura 2
Peso como una función de la edad

Solución La función es creciente en [0, 25] y [35, 40]. Es decreciente en [40, 50]. La función es constante (ni creciente ni decreciente) en [25, 35] y [50, 80]. Esto significa que la persona ganó peso hasta la edad de 25 años, luego ganó peso de nuevo entre los 35 y 40 años. Perdió peso entre los 40 y 50 años. ■

Ejemplo 2 Uso de una gráfica para hallar intervalos donde la función crece y disminuye

a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.

b) Halle el dominio y el rango de la función.

c) Encuentre los intervalos en los que f crece y disminuye.

Solución

a) Se emplea una calculadora de graficación para trazar la gráfica de la figura 3.

b) De la gráfica se observa que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.

c) De la gráfica se ve que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$. ■

Algunas calculadoras de graficación, como la TI-82, no evalúan $x^{2/3}$ [introducida como x^(2/3)] para x negativa. Para graficar una función como $f(x) = x^{2/3}$, se introduce como $y_1 = (x$^(1/3))^2 porque estas calculadoras evalúan de manera correcta potencias de la forma x^(1/n). Las calculadoras más recientes, como la TI-83 y la TI-86, no tienen este problema.

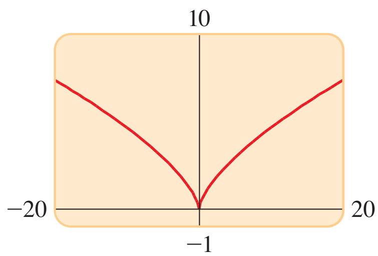


Figura 3
Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

Tasa de cambio promedio

Se está familiarizado con el concepto de velocidad: si conduce una distancia de 120 millas en dos horas, entonces su velocidad promedio, o tasa de recorrido, es $\frac{120 \text{ mi}}{2 \text{ h}} = 60$ mi/h.

Ahora suponga que realiza un viaje en automóvil y registra la distancia que recorre cada cierto número de minutos. La distancia s que ha recorrido es una función del tiempo t:

$$s(t) = \text{distancia total recorrida en el tiempo } t$$

Se grafica la función s como se muestra en la figura 4. En la gráfica se observa que se ha recorrido un total de 50 millas después de una hora, 75 millas después de dos horas, 140 millas después de tres horas, etc. Para hallar la velocidad *promedio* entre dos puntos cualesquiera en el viaje, se divide la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

Se calcula la velocidad promedio entre la 1:00 P.M. y 4:00 P.M. El tiempo transcurrido es $4 - 1 = 3$ horas. Para hallar la distancia recorrida, se resta la distancia a la 1:00 P.M. de la distancia a las 4:00 P.M., es decir, $200 - 50 = 150$ millas. Así, la velocidad promedio es

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{150 \text{ millas}}{3 \text{ horas}} = 65 \text{ millas/h}$$

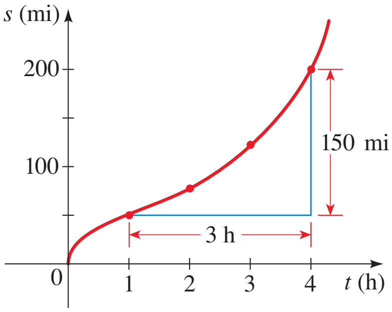


Figura 4
Velocidad promedio

La velocidad promedio recién calculada se puede expresar con notación de función:

$$\text{velocidad promedio} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{200 - 50}{3} = 50 \text{ millas/h}$$

Hay que observar que la velocidad promedio es diferente en intervalos de tiempo distintos. Por ejemplo, entre las 2:00 P.M. y 3:00 P.M. se encuentra que

$$\text{velocidad promedio} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{140 - 75}{1} = 65 \text{ millas/h}$$

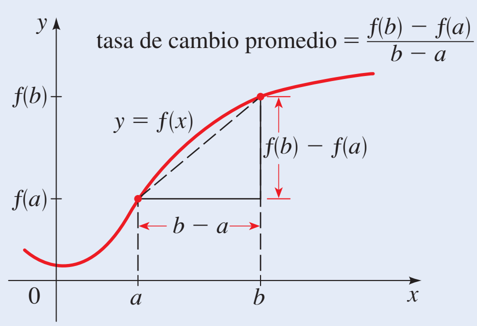
Determinar las tasas de cambio promedio es importante en muchos contextos. Por ejemplo, se puede tener interés en saber qué tan rápido desciende la temperatura del aire cuando se aproxima una tormenta, o qué tan rápido crecen los ingresos por la venta de un nuevo producto. Por lo tanto, se necesita saber cómo determinar la tasa de cambio promedio de funciones que modelan estas cantidades. De hecho, el concepto de tasa de cambio promedio se puede definir para cualquier función.

Tasa de cambio promedio

La **tasa de cambio promedio** de la función $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\text{tasa de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de cambio promedio es la pendiente de la **recta secante** entre $x = a$ y $x = b$ en la gráfica de f, es decir, la recta que pasa por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



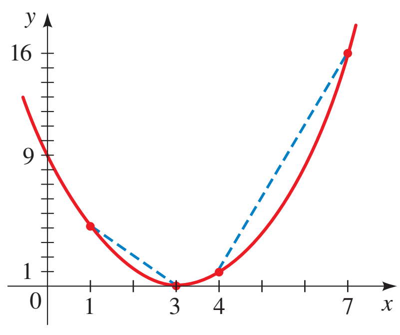


Figura 5
$f(x) = (x - 3)^2$

Ejemplo 3 Cálculo de la tasa de cambio promedio

Para la función $f(x) = (x - 3)^2$, cuya gráfica se muestra en la figura 5, encuentre la tasa de cambio promedio entre los puntos siguientes:

a) $x = 1$ y $x = 3$ b) $x = 4$ y $x = 7$

Solución

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} \quad \text{Definición}$$
$$= \frac{(3 - 3)^2 - (1 - 3)^2}{3 - 1} \quad \text{Emplee } f(x) = (x - 3)^2$$
$$= \frac{0 - 4}{2} = -2$$

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(7) - f(4)}{7 - 4} \quad \text{Definición}$$
$$= \frac{(7 - 3)^2 - (4 - 3)^2}{7 - 4} \quad \text{Emplee } f(x) = (x - 3)^2$$
$$= \frac{16 - 1}{3} = 5$$

■

Ejemplo 4 Velocidad promedio de un objeto en descenso

Si se deja caer un objeto desde un edificio alto, entonces la distancia que ha descendido después de t segundos está dada por la función $d(t) = 16t^2$. Encuentre su velocidad promedio (tasa de cambio promedio) en los siguientes intervalos:

a) Entre 1 s y 5 s b) Entre $t = a$ y $t = a + h$

Solución

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{d(5) - d(1)}{5 - 1} \quad \text{Definición}$$
$$= \frac{16(5)^2 - 16(1)^2}{5 - 1} \quad \text{Emplee } d(t) = 16t^2$$
$$= \frac{400 - 16}{4} = 96 \text{ pies/s}$$

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{d(a + h) - d(a)}{(a + h) - a} \quad \text{Definición}$$
$$= \frac{16(a + h)^2 - 16(a)^2}{(a + h) - a} \quad \text{Emplee } d(t) = 16t^2$$
$$= \frac{16(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} \quad \text{Desarrolle y factorice 16}$$
$$= \frac{16(2ah + h^2)}{h} \quad \text{Simplifique el numerador}$$
$$= \frac{16h(2a + h)}{h} \quad \text{Factorice } h$$
$$= 16(2a + h) \quad \text{Simplifique}$$

■

La tasa promedio de cambio calculada en el ejemplo 4(b) se conoce como *cociente de diferencias*. En cálculo se emplean los cocientes de diferencias para calcular las tasas de cambio *instantáneas*. Un ejemplo de una tasa de cambio instantánea es la velocidad mostrada en el odómetro de su automóvil. Ésta cambia de un instante al siguiente a medida que cambia la velocidad del automóvil.

Ejemplo 5 Tasa promedio de cambio de temperatura

En la tabla aparecen las temperaturas externas que un estudiante de ciencias observó en un día de primavera. Trace una gráfica de los datos y determine la tasa promedio de cambio de temperatura entre los siguientes tiempos:

a) 8:00 A.M. y 9:00 A.M.

b) 1:00 P.M. y 3:00 P.M.

c) 4:00 P.M. y 7:00 P.M.

Tiempo	Temperatura (°F)
8:00 A.M.	38
9:00 A.M.	40
10:00 A.M.	44
11:00 A.M.	50
12:00 MEDIODÍA	56
1:00 P.M.	62
2:00 P.M.	66
3:00 P.M.	67
4:00 P.M.	64
5:00 P.M.	58
6:00 P.M.	55
7:00 P.M.	51

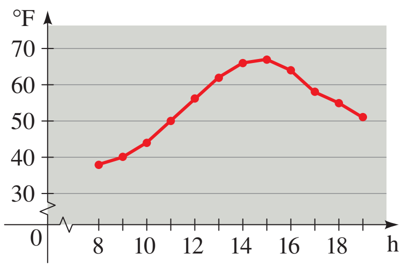


Figura 6

Solución En la figura 6 se muestra una gráfica de los datos de temperatura. Sea t el tiempo, medido en horas desde la medianoche (de modo que las 2:00 P.M., por ejemplo, corresponden $t = 14$). Defina la función F por

$$F(t) = \text{temperatura en el tiempo } t$$

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\text{temperatura a las 9 A.M.} - \text{temperatura a las 8 A.M.}}{9 - 8} = \frac{F(9) - F(8)}{9 - 8} = \frac{40 - 38}{9 - 8} = 2$$

La tasa de cambio promedio fue 2 °F por hora.

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\text{temperatura a las 3 P.M.} - \text{temperatura a las 1 P.M.}}{15 - 13} = \frac{F(15) - F(13)}{15 - 13} = \frac{67 - 62}{2} = 2.5$$

La tasa de cambio promedio fue 2.5 °F por hora.

c) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{\text{temperatura a las 7 P.M.} - \text{temperatura a las 4 P.M.}}{19 - 16} = \frac{F(19) - F(16)}{19 - 16} = \frac{51 - 64}{3} \approx -4.3$$

La tasa de cambio promedio fue de casi −4.3 °F por hora durante este intervalo de tiempo. El signo negativo indica que la temperatura descendió. ■

Matemáticas en el mundo moderno

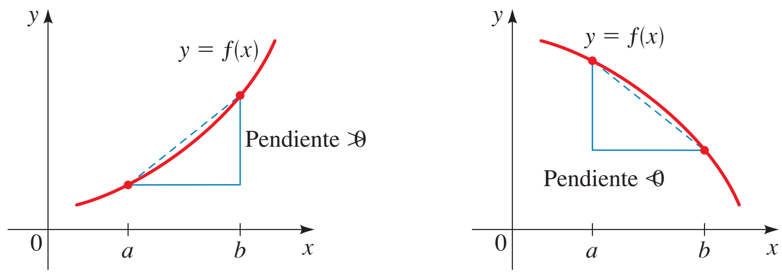
Computadoras

Durante siglos las máquinas han sido diseñadas para efectuar tareas específicas. Por ejemplo, una lavadora lava la ropa, una tejedora teje ropa, una sumadora suma números, etc. La computadora ha cambiado todo eso. La computadora es la máquina que no hace nada, hasta que recibe instrucciones sobre qué hacer. Así, su computadora puede jugar juegos, trazar imágenes o calcular π hasta un millón de cifras decimales; todo depende de qué programa (o instrucciones) le dé a la computadora. La computadora puede hacer todo esto porque puede aceptar y cambiar de manera lógica las instrucciones con base en los datos entrantes. Esta versatilidad hace a las computadoras útiles en casi todo aspecto del esfuerzo humano.

El matemático Allan Turing describió de manera teórica en la década de los cuarentas la idea de una computadora (véase la página 103) en lo que llamó una *máquina universal*. En 1945 el matemático John Von Neumann, ampliando las ideas de Turing, construyó una de las primeras computadoras electrónicas.

Los matemáticos continúan con el desarrollo de nuevas bases teóricas para el diseño de computadoras. El corazón de la computadora es el "chip", que es capaz de procesar instrucciones lógicas. Para tener una idea de la complejidad del chip, considere que el chip Pentium ¡tiene más de 3.5 millones de circuitos lógicos!

Las gráficas de la figura 7 muestran que si una función es creciente en un intervalo, entonces la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es positiva, mientras que si una función es decreciente en un intervalo, entonces la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es negativa.



f creciente
Tasa de cambio promedio positiva

f decreciente
Tasa de cambio promedio negativa

Figura 7

Ejemplo 6 Las funciones lineales tienen tasa de cambio constante

Sea $f(x) = 3x - 5$. Determine la tasa de cambio promedio de f entre los puntos siguientes.

a) $x = 0$ y $x = 1$ b) $x = 3$ y $x = 7$ c) $x = a$ y $x = a + h$

¿Qué conclusión puede sacar de sus respuestas?

Solución

a) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{(3 \cdot 1 - 5) - (3 \cdot 0 - 5)}{1} = \frac{(-2) - (-5)}{1} = 3$$

b) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(7) - f(3)}{7 - 3} = \frac{(3 \cdot 7 - 5) - (3 \cdot 3 - 5)}{4} = \frac{16 - 4}{4} = 3$$

c) $$\text{Tasa de cambio promedio} = \frac{f(a + h) - f(a)}{(a + h) - a} = \frac{[3(a + h) - 5] - [3a - 5]}{h} = \frac{3a + 3h - 5 - 3a + 5}{h} = \frac{3h}{h} = 3$$

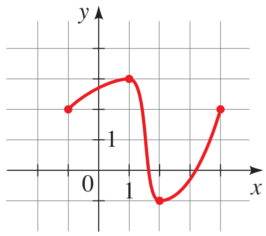
Al parecer la tasa de cambio promedio siempre es 3 para esta función. De hecho, el inciso c) provee la tasa de cambio entre dos puntos arbitrarios $x = a$ y $x = a + h$ es 3. ■

Como indica el ejemplo 6, para una función lineal $f(x) = mx + b$, la tasa de cambio promedio entre dos puntos cualesquiera es la pendiente m de la recta. Esto concuerda con lo aprendido en la sección 1.10, que la pendiente de una recta representa la tasa de cambio de y con respecto a x.

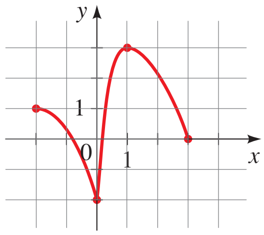
2.3 Ejercicios

1–4 ■ Se da la gráfica de una función. Determine los intervalos en los que la función es a) creciente y b) decreciente.

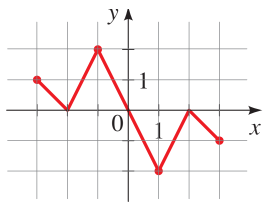
1.



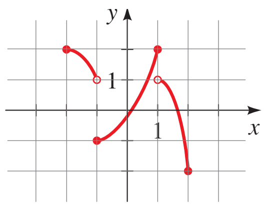
2.



3.



4.



5–12 ■ Se da una función f.

a) Emplee un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de f.

b) Exprese de forma aproximada los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

5. $f(x) = x^{2/5}$

6. $f(x) = 4 - x^{2/3}$

7. $f(x) = x^2 - 5x$

8. $f(x) = x^3 - 4x$

9. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

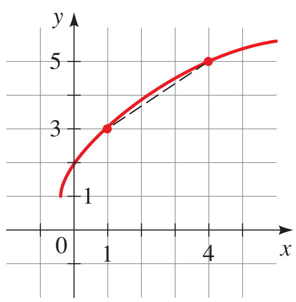
10. $f(x) = x^4 - 16x^2$

11. $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

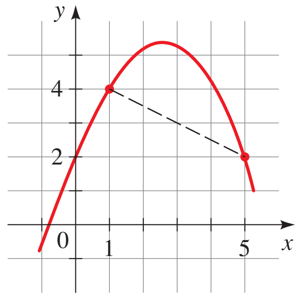
12. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3$

13–16 ■ Se da la gráfica de una función. Determine la tasa de cambio promedio de la función entre los valores indicados de la variable.

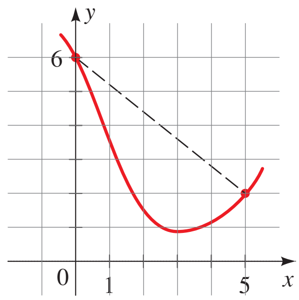
13.



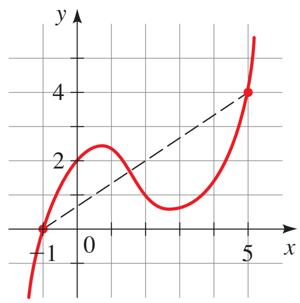
14.



15.



16.



17–28 ■ Dada una función, determine la tasa de cambio promedio de la función entre los valores dados de la variable.

17. $f(x) = 3x - 2; \quad x = 2, \ x = 3$

18. $g(x) = 5 + \frac{1}{2}x; \quad x = 1, x = 5$

19. $h(t) = t^2 + 2t; \quad t = -1, t = 4$

20. $f(z) = 1 - 3z^2; \quad z = -2, z = 0$

21. $f(x) = x^3 - 4x^2; \quad x = 0, x = 10$

22. $f(x) = x + x^4; \quad x = -1, x = 3$

23. $f(x) = 3x^2; \quad x = 2, x = 2 + h$

24. $f(x) = 4 - x^2; \quad x = 1, x = 1 + h$

25. $g(x) = \dfrac{1}{x}; \quad x = 1, x = a$

26. $g(x) = \dfrac{2}{x + 1}; \quad x = 0, x = h$

27. $f(t) = \frac{2}{t}$; $t = a, t = a + h$

28. $f(t) = \sqrt{t}$; $t = a, t = a + h$

29–30 ■ Se da una función lineal.

a) Encuentre la tasa de cambio promedio de la función entre $x = a$ y $x = a + h$.

b) Muestre que la tasa de cambio promedio es la misma que la pendiente de la recta.

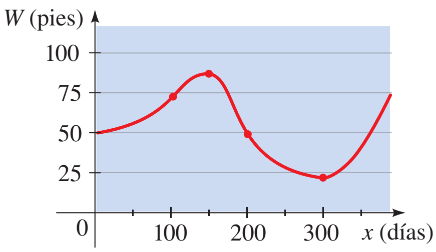
29. $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ **30.** $g(x) = -4x + 2$

Aplicaciones

31. Niveles de agua cambiantes En la gráfica se observa la profundidad del agua W en un depósito en un periodo de un año, como una función del número de días x desde el comienzo del año.

a) Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de W entre $x = 100$ y $x = 200$?

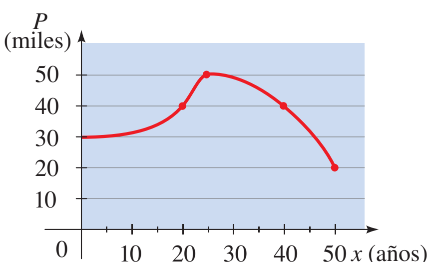


32. Crecimiento y disminución poblacional En la gráfica se muestra la población P en una pequeña ciudad industrial de 1950 a 2000. La variable x representa el número de años desde 1950.

a) Determine los intervalos en los que la función P es creciente y en los que es decreciente.

b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de P entre $x = 20$ y $x = 40$?

c) Interprete el valor de la tasa de cambio promedio que encontró en el inciso b).



33. Crecimiento y disminución poblacional En la tabla se da la población en una pequeña comunidad costera para el periodo 1997-2006. Las cifras mostradas son para el primero de enero de cada año.

a) ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población entre 1998 y 2001?

b) ¿Cuál fue la tasa de cambio promedio de la población entre 2002 y 2004?

c) ¿Para qué periodo la población fue creciente?

d) ¿Para qué periodo la población fue decreciente?

Año	Población
1997	624
1998	856
1999	1336
2000	1578
2001	1591
2002	1483
2003	994
2004	826
2005	801
2006	745

34. Velocidad de carrera Un hombre corre alrededor de una pista circular de 200 m. Un observador emplea un cronómetro para registrar el tiempo del corredor al final de cada vuelta, y obtiene los datos de la tabla siguiente.

a) ¿Cuál es la velocidad (tasa) promedio del hombre entre 68 s y 152 s?

b) ¿Cuál es la velocidad promedio del hombre entre 263 s y 412 s?

c) Calcule la velocidad del hombre para cada vuelta. ¿Baja su velocidad, aumenta o permanece constante?

Tiempo (s)	Distancia (m)
32	200
68	400
108	600
152	800
203	1000
263	1200
335	1400
412	1600

35. Ventas de reproductor de CD En la tabla se muestra el número de reproductores de CD vendidos en tiendas pequeñas de aparatos electrónicos en los años 1993 a 2003.

(a) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de ventas entre 1993 y 2003?

b) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de ventas entre 1993 y 1994?

c) ¿Cuál es la tasa de cambio promedio de ventas entre 1994 y 1996?

d) ¿Entre qué par de años sucesivos se *incrementaron* con más rapidez las ventas de reproductores de CD, *disminuyeron* con más rapidez?

Año	Reproductores de CD vendidos
1993	512
1994	520
1995	413
1996	410
1997	468
1998	510
1999	590
2000	607
2001	732
2002	612
2003	584

36. Colección de libros Entre 1980 y 2000, un coleccionista de libros raros compra libros para su colección a una tasa de 40 libros por año. Use esta información para completar la tabla siguiente. (Hay que observar que faltan los datos para algunos años.)

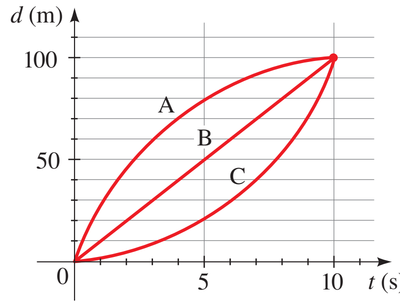
Año	Número de libros
1980	420
1981	460
1982	
1985	
1990	
1992	
1995	
1997	
1998	
1999	
2000	1220

Descubrimiento • Debate

37. Carrera de 100 metros Una carrera de 100 m termina en un empate triple por el primer lugar. En la gráfica se muestra la distancia como una función del tiempo para cada uno de los tres ganadores.

a) Halle la velocidad promedio para cada ganador.

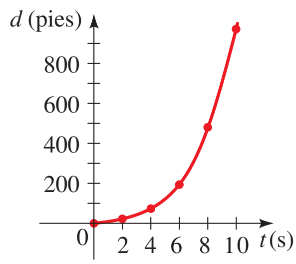
b) Describa las diferencias entre la manera en que los tres corredores corren la competencia.



38. Tasas de cambio variables: concavidad En las dos tablas y gráficas se dan las distancias que recorre un automóvil de carreras durante porciones de 10 s de una competencia. En cada caso, calcule la velocidad promedio a la que viaja el automóvil entre los puntos de datos observados. ¿La velocidad es creciente o decreciente? En otras palabras, ¿el automóvil *acelera* o *desacelera* en cada uno de estos intervalos? ¿Cómo la forma de la gráfica indica si el automóvil acelera o desacelera? (Se dice que la primera gráfica es *cóncava hacia arriba* y la segunda es *cóncava hacia abajo*.)

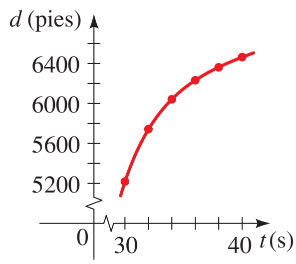
a)

Tiempo (s)	Distancia (pies)
0	0
2	34
4	70
6	196
8	490
10	964



b)

Tiempo (s)	Distancia (pies)
30	5208
32	5734
34	6022
36	6204
38	6352
40	6448



39. Funciones que son siempre crecientes o decrecientes Bosqueje las gráficas aproximadas de funciones que están definidas para los números reales y que exhiben el comportamiento indicado (o explique por qué es imposible el comportamiento).

a) f es creciente siempre y $f(x) > 0$ para toda x

b) f es decreciente siempre y $f(x) > 0$ para toda x

c) f es creciente siempre y $f(x) < 0$ para toda x

d) f es decreciente siempre $f(x) < 0$ para toda x

2.4 Transformaciones de funciones

En esta sección se estudia cómo ciertas transformaciones de una función afectan su gráfica. Esto proporciona una mejor comprensión de cómo graficar funciones. Las transformaciones que se estudian son desplazamiento, reflexión y estiramiento.

Desplazamiento vertical

Sumar una constante a una función desplaza su gráfica en dirección vertical: hacia arriba si la constante es positiva y hacia abajo si es negativa.

Ejemplo 1 **Desplazamientos verticales de gráficas**

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^2 + 3$ b) $h(x) = x^2 - 2$

Solución La función $f(x) = x^2$ se graficó en el ejemplo 1(a), sección 2.2. Se traza de nuevo en la figura 1.

a) Observe que

$$g(x) = x^2 + 3 = f(x) + 3$$

Así que la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de g está tres unidades arriba del punto correspondiente sobre la gráfica de f. Esto significa que para graficar g se desplaza la gráfica de f hacia arriba tres unidades, como en la figura 1.

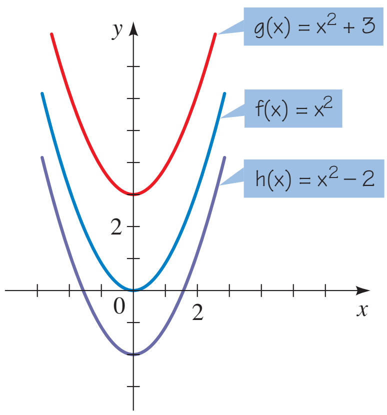


Figura 1

b) De manera similar, para graficar h se desplaza la gráfica de f hacia abajo dos unidades, como se muestra. ■

Recuerde que la gráfica de la función f es la misma que la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

En general, suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. Cómo se obtienen de ésta las gráficas de

$$y = f(x) + c \qquad \text{y} \qquad y = f(x) - c \qquad (c > 0)$$

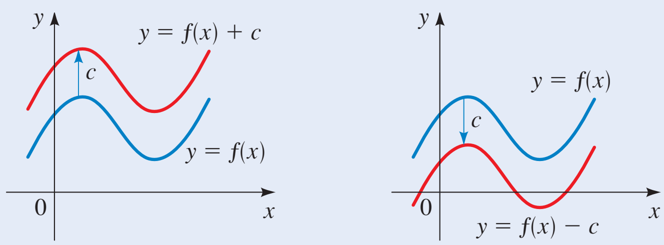
La coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = f(x) + c$ está c unidades arriba de la coordenada y del punto correspondiente sobre la gráfica de $y = f(x)$. Así, la gráfica de $y = f(x) + c$ se obtiene simplemente al desplazar c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$. De manera similar, se obtiene la gráfica de $y = f(x) - c$ al desplazar c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.

Desplazamientos verticales de gráficas

Suponga que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.

Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.



Ejemplo 2 Desplazamientos verticales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^3 - 9x$, que se trazó en el ejemplo 12, sección 1.8, para bosquejar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = x^3 - 9x + 10$ b) $h(x) = x^3 - 9x - 20$

Solución La gráfica de f se traza de nuevo en la figura 2.

a) Para graficar g la gráfica de f se desplaza 10 unidades hacia arriba, como se muestra.

b) Para graficar h la gráfica de f se desplaza 20 unidades hacia abajo, como se muestra.

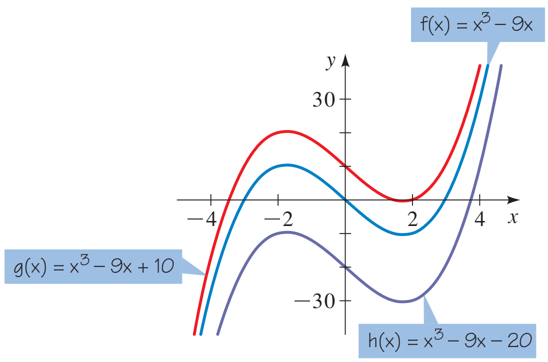


Figura 2

■

Desplazamiento horizontal

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de

$$y = f(x + c) \qquad \text{y} \qquad y = f(x - c) \qquad (c > 0)$$

El valor de $f(x - c)$ en x es el mismo que el valor de $f(x)$ en $x - c$. Puesto que $x - c$ está c unidades a la izquierda de x, se deduce que la gráfica de $y = f(x - c)$

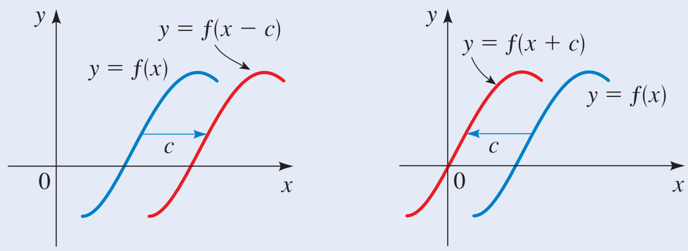
es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la derecha c unidades. Con un razonamiento similar se demuestra que la gráfica de $y = f(x + c)$ es la gráfica de $y = f(x)$ desplazada a la izquierda c unidades. En el cuadro siguiente se resumen estos hechos.

Desplazamientos horizontales de gráficas

Supóngase que $c > 0$.

Para graficar $y = f(x - c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades.

Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.



Ejemplo 3 Desplazamientos horizontales de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = (x + 4)^2$ b) $h(x) = (x - 2)^2$

Solución

a) Para graficar g, la gráfica de f se desplaza 4 unidades a la izquierda.

b) Para graficar h, la gráfica de f se desplaza 2 unidades a la derecha.

Las gráficas de g y h se bosquejan en la figura 3.

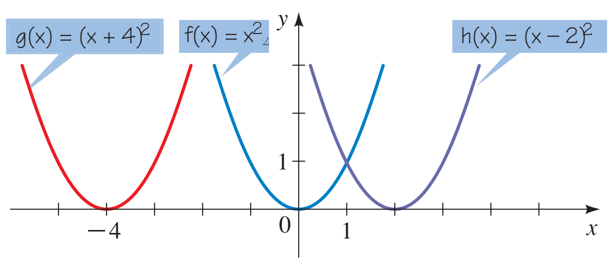


Figura 3

■

Ejemplo 4 Combinación de desplazamientos horizontales y verticales

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 3} + 4$.

Solución Se empieza con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c), sección 2.2) y se desplaza a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = \sqrt{x - 3}$. Luego, la

gráfica resultante se desplaza 4 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = \sqrt{x-3} + 4$ mostrada en la figura 4.

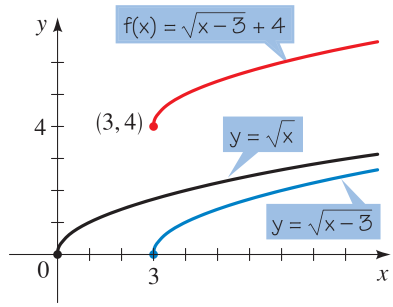


Figura 4

■

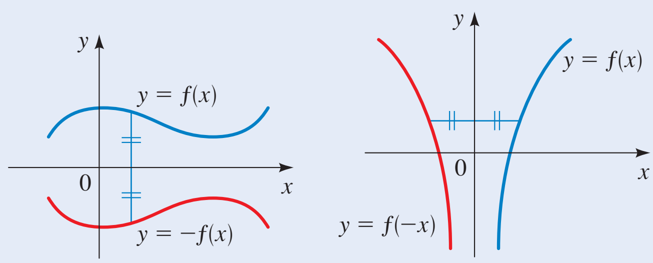
Reflexión de gráficas

Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se emplea para obtener las gráficas de $y = -f(x)$ y $y = f(-x)$? La coordenada y de cada punto sobre la gráfica de $y = -f(x)$ es simplemente el negativo de la coordenada y del punto correspondiente en la gráfica de $y = f(x)$. Por lo tanto, la gráfica deseada es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x. Por otro lado, el valor de $y = f(-x)$ en x es el mismo que el valor de $y = f(x)$ en $-x$ por consiguiente, la gráfica deseada aquí es la reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y. En el cuadro siguiente se resumen estas observaciones.

Reflexión de gráficas

Para graficar $y = -f(x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje x.

Para graficar $y = f(-x)$, refleje la gráfica de $y = f(x)$ en el eje y.



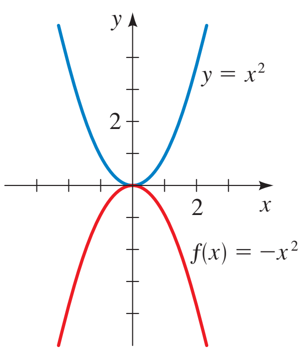


Figura 5

Ejemplo 5 Reflexión de gráficas

Trace la gráfica de cada función

(a) $f(x) = -x^2$ (b) $g(x) = \sqrt{-x}$

Solución

a) Se empieza con la gráfica de $y = x^2$. La gráfica de $f(x) = -x^2$ es la gráfica de $y = x^2$ reflejada en el eje x (véase figura 5).

b) Se inicia con la gráfica de $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c) en la sección 2.2). La gráfica de $g(x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de $y = \sqrt{x}$ reflejada en el eje y (véase figura 6). Note que el dominio de la función $g(x) = \sqrt{-x}$ es $\{x \mid x \leq 0\}$.

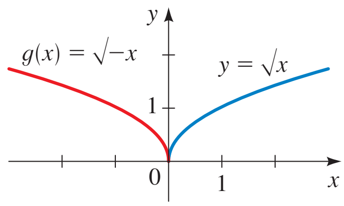


Figura 6

■

Estiramiento y acortamiento vertical

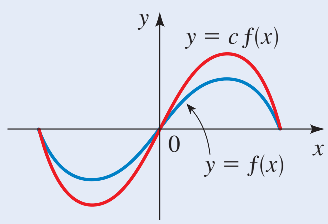
Suponga que se conoce la gráfica de $y = f(x)$. ¿Cómo se usa para obtener la gráfica de $y = cf(x)$? La coordenada y de $y = cf(x)$ en x es la misma que la coordenada y correspondiente de $y = f(x)$ multiplicada por c. Multiplicar las coordenadas y por c tiene el mismo efecto de alargar y acortar verticalmente la gráfica por un factor de c.

Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

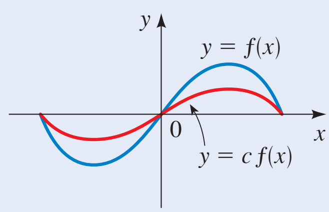
Para graficar $y = cf(x)$:

Si $c > 1$, alargue verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.

Si $0 < c < 1$, acorte verticalmente la gráfica de $y = f(x)$ por un factor de c.



$c > 1$



$0 < c < 1$

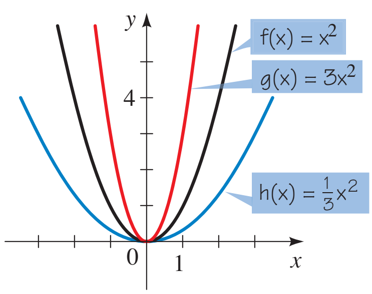


Figura 7

Ejemplo 6 Estiramiento y acortamiento vertical de gráficas

Use la gráfica de $f(x) = x^2$ para trazar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 3x^2$ b) $h(x) = \frac{1}{3}x^2$

Solución

a) La gráfica de g se obtiene al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de f por 3. Es decir, para obtener la gráfica de g se alarga la gráfica de f verticalmente por un factor de 3. El resultado es la parábola más estrecha en la figura 7.

b) La gráfica de h se obtiene al multiplicar la coordenada y de cada punto sobre la gráfica de f por $\frac{1}{3}$. Es decir, para obtener la gráfica de h se acorta verticalmente la gráfica de f por un factor de $\frac{1}{3}$. El resultado es la parábola más amplia en la figura 7. ■

En el ejemplo siguiente se ilustra el efecto de combinar desplazamientos, reflexiones y estiramiento.

Ejemplo 7 Combinación de desplazamiento, estiramiento y reflexión

Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$.

Solución Comenzando con la gráfica $y = x^2$, se desplaza primero a la derecha 3 unidades para obtener la gráfica de $y = (x - 3)^2$. Luego se refleja en el eje x y se alarga por un factor de 2 para obtener la gráfica de $y = -2(x - 3)^2$. Por último, se desplaza 1 unidad hacia arriba para obtener la gráfica de $f(x) = 1 - 2(x - 3)^2$ mostrada en la figura 8.

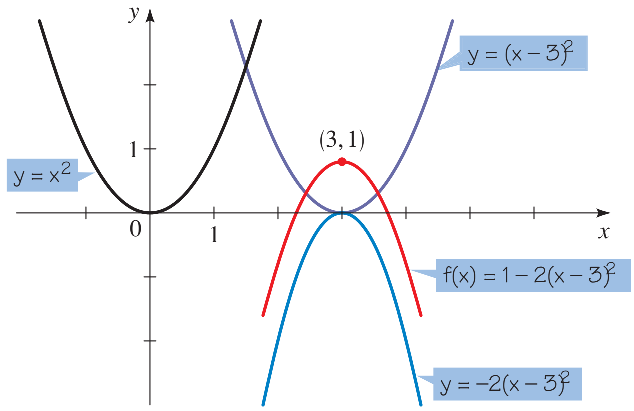


Figura 8 ■

Alargamiento y estiramiento horizontal

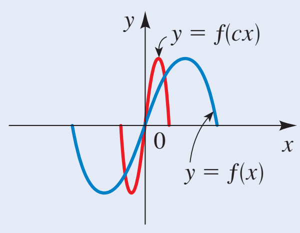
Ahora abordaremos el acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas. Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$, entonces ¿cómo se relaciona la gráfica de $y = f(cx)$ con ésta? La coordenada y de $y = f(cx)$ en x es la misma que la coordenada y de $y = f(x)$ en cx. Así, las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ corresponde a las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ multiplicadas por c. Considerado de otro modo, se puede observar que las coordenadas x en la gráfica de $y = f(cx)$ son las coordenadas x en la gráfica de $y = f(x)$ multiplicada por $1/c$. En otras palabras, para cambiar la gráfica de $y = f(x)$ a la gráfica de $y = f(cx)$, se debe acortar (o alargar) la gráfica horizontalmente por un factor de $1/c$, como se resume en el cuadro siguiente.

Acortamiento y alargamiento horizontal de gráficas

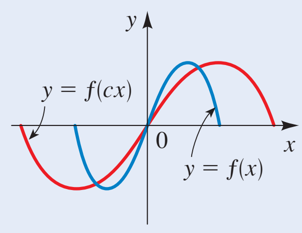
La gráfica de $y = f(cx)$:

Si $c > 1$, acorte la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.

Si $0 < c < 1$, alargue la gráfica de $y = f(x)$ horizontalmente por un factor de $1/c$.



$c > 1$



$0 < c < 1$

Sonya Kovalevsky (1850-1891) es considerada la matemática más importante del siglo XIX. Nació en Moscú en una familia aristócrata. En su infancia conoció el cálculo de una manera muy inusual, su recámara fue tapizada temporalmente con las páginas de un libro de cálculo. Ella escribió después que "pasó muchas horas enfrente de esa pared, tratando de entenderla". Puesto que la ley rusa prohibía a las mujeres estudiar en la universidad, tuvo un casamiento de conveniencia, que le permitió viajar a Alemania y obtener un doctorado en matemáticas de la Universidad de Göttingen. Finalmente obtuvo una plaza de profesor de tiempo completo en la universidad de Estocolmo, donde enseñó durante ocho años antes de morir de influenza a la edad de 41 años. Su investigación fue útil para colocar sobre una base sólida y lógica las ideas y aplicaciones de las funciones y el cálculo. Recibió muchas distinciones y premios por su trabajo de investigación.

Ejemplo 8 Alargamiento y acortamiento horizontal de gráficas

La gráfica de $y = f(x)$ se muestra en la figura 9. Trace la gráfica de cada función.

a) $y = f(2x)$ b) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

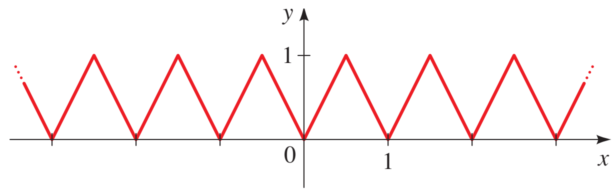


Figura 9
$y = f(x)$

Solución Con base en los principios descritos en el cuadro precedente, se obtienen las gráficas mostradas en las figuras 10 y 11.

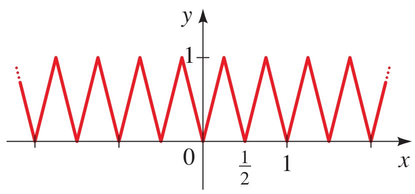


Figura 10
$y = f(2x)$

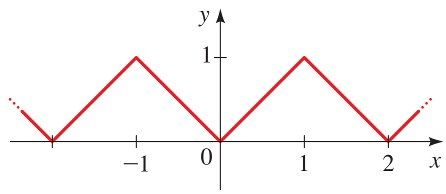


Figura 11
$y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$

■

Funciones par e impar

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = (-1)^2x^2 = x^2 = f(x)$$

La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y (véase figura 12). Esto significa que si se ha trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces se puede obtener la gráfica completa simplemente reflejando esta porción en el eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$ para todo número x en su dominio, entonces f se llama **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3x^3 = -x^3 = -f(x)$$

La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen (véase figura 13). Si se ha trazado la gráfica de f para $x \geq 0$, entonces se puede obtener la gráfica completa

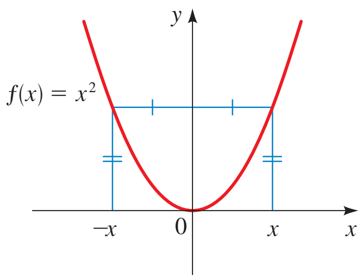


Figura 12
$f(x) = x^2$ es una función par.

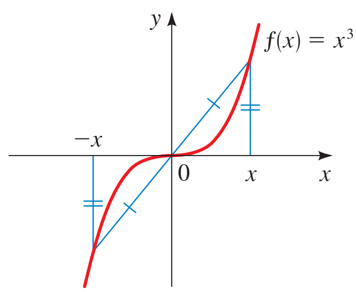


Figura 13
$f(x) = x^3$ es una función impar.

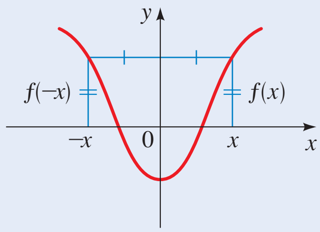
si se gira esta porción 180º respecto al origen. (Esto es equivalente a reflejar primero en el eje x luego en el eje y.)

Funciones par e impar

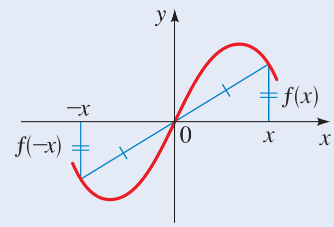
Sea f una función.

f es **par** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en el dominio de f.

f es **impar** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en el dominio de f



La gráfica de una función par es simétrica con respecto al eje y.



La gráfica de una función impar es simétrica con respecto al origen.

Ejemplo 9 Funciones par e impar

Determine si las funciones son par, impar o ni par ni impar.

a) $f(x) = x^5 + x$ b) $g(x) = 1 - x^4$ c) $h(x) = 2x - x^2$

Solución

a) $f(-x) = (-x)^5 + (-x)$
$= -x^5 - x = -(x^5 + x)$
$= -f(x)$

Por lo tanto, f es una función impar.

b) $g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$

Por lo tanto g es par.

c) $h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$

Puesto que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. ■

Las gráficas de las funciones del ejemplo 9 se muestran en la figura 14. La gráfica de f es simétrica respecto al origen, y la gráfica de g es simétrica con respecto al eje y. La gráfica de h no es simétrica respecto al eje y o al origen.

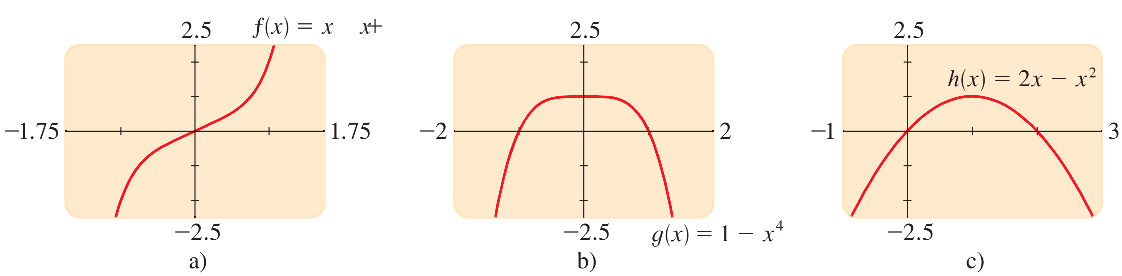


Figura 14

2.4 Ejercicios

1–10 ■ Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se puede obtener la gráfica de cada función a partir de la gráfica de f.

1. a) $y = f(x) - 5$ **b)** $y = f(x - 5)$

2. a) $y = f(x + 7)$ **b)** $y = f(x) + 7$

3. a) $y = f(x + \frac{1}{2})$ **b)** $y = f(x) + \frac{1}{2}$

4. a) $y = -f(x)$ **b)** $y = f(-x)$

5. a) $y = -2f(x)$ **b)** $y = -\frac{1}{2}f(x)$

6. a) $y = -f(x) + 5$ **b)** $y = 3f(x) - 5$

7. a) $y = f(x - 4) + \frac{3}{4}$ **b)** $y = f(x + 4) - \frac{3}{4}$

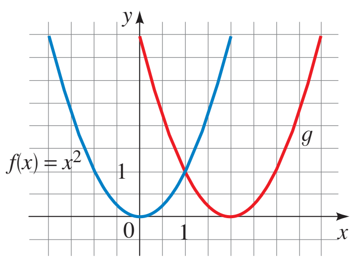
8. a) $y = 2f(x + 2) - 2$ **b)** $y = 2f(x - 2) + 2$

9. a) $y = f(4x)$ **b)** $y = f(\frac{1}{4}x)$

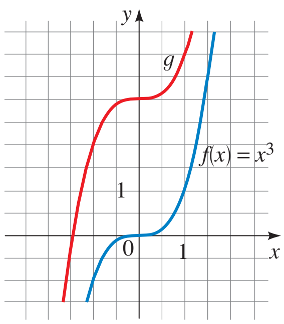
10. a) $y = -f(2x)$ **b)** $y = f(2x) - 1$

11–16 ■ Se dan las gráficas de f y g. Encuentre una fórmula para la función g.

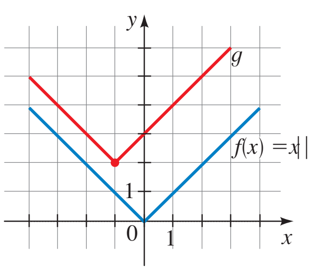
11.



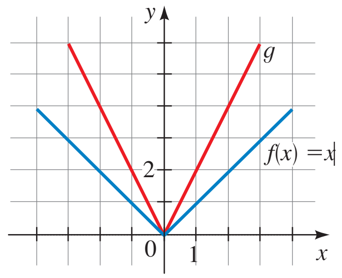
12.



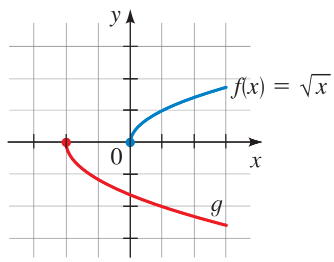
13.



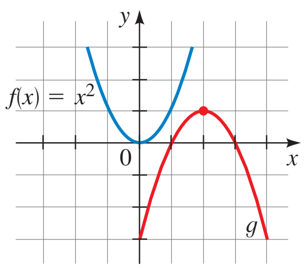
14.



15.



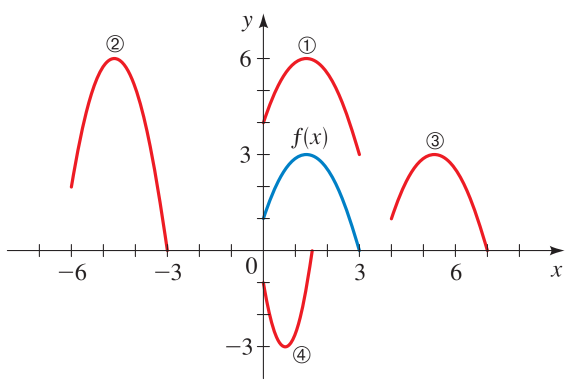
16.



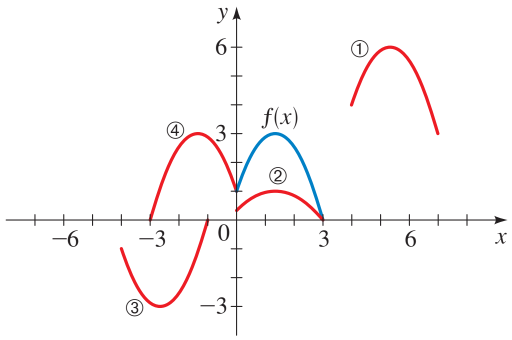
17–18 ■ Se da la gráfica de $y = f(x)$. Compare cada ecuación con su gráfica.

17. a) $y = f(x - 4)$ **b)** $y = f(x) + 3$

c) $y = 2f(x + 6)$ **d)** $y = -f(2x)$

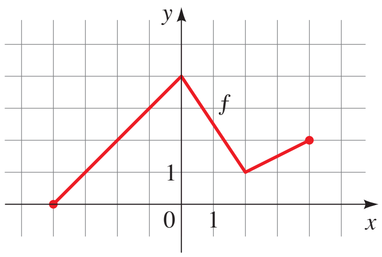


18. **a)** $y = \frac{1}{3}f(x)$ **b)** $y = -f(x + 4)$
c) $y = f(x - 4) + 3$ **d)** $y = f(-x)$



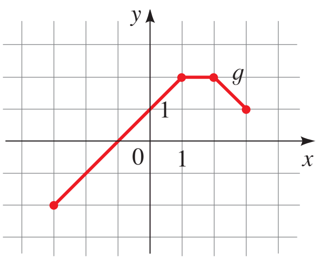
19. Se da la gráfica de f. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = f(x) - 2$
c) $y = 2f(x)$ **d)** $y = -f(x) + 3$
e) $y = f(-x)$ **f)** $y = \frac{1}{2}f(x - 1)$



20. Se da la gráfica de g. Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = g(x + 1)$ **b)** $y = -g(x + 1)$
c) $y = g(x - 2)$ **d)** $y = g(x) - 2$
e) $y = -g(x) + 2$ **f)** $y = 2g(x)$



21. **a)** Bosqueje la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ mediante la graficación de los puntos.

b) Use la gráfica de f para trazar las gráficas de las siguientes funciones.

i) $y = -\dfrac{1}{x}$ ii) $y = \dfrac{1}{x - 1}$

iii) $y = \dfrac{2}{x + 2}$ iv) $y = 1 + \dfrac{1}{x - 3}$

22. **a)** Bosqueje la gráfica de $g(x) = \sqrt[3]{x}$ graficando los puntos.

b) Use la gráfica de g para trazar las gráficas de las siguientes funciones.

i) $y = \sqrt[3]{x - 2}$ ii) $y = \sqrt[3]{x + 2} + 2$
iii) $y = 1 - \sqrt[3]{x}$ iv) $y = 2\sqrt[3]{x}$

23–26 ■ Explique cómo se obtiene la gráfica de g a partir de la gráfica de f.

23. **a)** $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 2)^2$
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 2$

24. **a)** $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 4)^3$
b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^3 - 4$

25. **a)** $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2\sqrt{x}$
b) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - 2}$

26. **a)** $f(x) = |x|$, $g(x) = 3|x| + 1$
b) $f(x) = |x|$, $g(x) = -|x + 1|$

27–32 ■ Se da una función f y se aplican a su gráfica las transformaciones indicadas (en el orden dado). Escriba la ecuación para la gráfica transformada final.

27. $f(x) = x^2$; desplace hacia arriba 3 unidades y 2 unidades a la derecha.

28. $f(x) = x^3$; desplace hacia abajo 1 unidad y 4 unidades a la izquierda.

29. $f(x) = \sqrt{x}$; desplace 3 unidades a la izquierda, alargue verticalmente por un factor de 5 y refleje en el eje x.

30. $f(x) = \sqrt[3]{x}$; refleje en el eje y, acorte verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$, y desplace hacia arriba $\frac{3}{5}$ unidades.

31. $f(x) = |x|$; desplace a la derecha $\frac{1}{2}$ unidad, acorte verticalmente por un factor de 0.1 y desplace hacia abajo 2 unidades.

32. $f(x) = |x|$; desplace a la izquierda 1 unidad, alargue verticalmente por un factor de 3 y desplace hacia arriba 10 unidades.

33–48 ■ Bosqueje la gráfica de la función, no mediante la graficación de puntos, sino iniciando con la gráfica de una función estándar y aplicando transformaciones.

33. $f(x) = (x - 2)^2$ **34.** $f(x) = (x + 7)^2$
35. $f(x) = -(x + 1)^2$ **36.** $f(x) = 1 - x^2$
37. $f(x) = x^3 + 2$ **38.** $f(x) = -x^3$
39. $y = 1 + \sqrt{x}$ **40.** $y = 2 - \sqrt{x + 1}$
41. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x + 4} - 3$ **42.** $y = 3 - 2(x - 1)^2$
43. $y = 5 + (x + 3)^2$ **44.** $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$
45. $y = |x| - 1$ **46.** $y = |x - 1|$
47. $y = |x + 2| + 2$ **48.** $y = 2 - |x|$

49–52 ■ Grafique las funciones en la misma pantalla con el rectángulo de visión dado. ¿Cómo se relaciona cada gráfica con la gráfica del inciso a)?

49. Rectángulo de visión $[-8, 8]$ por $[-2, 8]$

a) $y = \sqrt[4]{x}$ **b)** $y = \sqrt[4]{x + 5}$

c) $y = 2\sqrt[4]{x + 5}$ **d)** $y = 4 + 2\sqrt[4]{x + 5}$

50. Rectángulo de visión $[-8, 8]$ por $[-6, 6]$

a) $y = |x|$ **b)** $y = -|x|$

c) $y = -3|x|$ **d)** $y = -3|x - 5|$

51. Rectángulo de visión $[-4, 6]$ por $[-4, 4]$

a) $y = x^6$ **b)** $y = \frac{1}{3}x^6$

c) $y = -\frac{1}{3}x^6$ **d)** $y = -\frac{1}{3}(x - 4)^6$

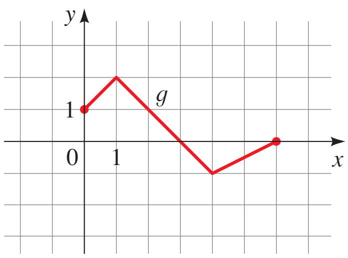
52. Rectángulo de visión $[-6, 6]$ por $[-4, 4]$

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 3}}$

c) $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}}$ **d)** $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x + 3}} - 3$

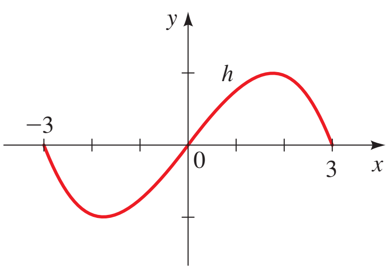
53. Se da la gráfica de g. Utilícela para graficar cada una de las siguientes funciones.

a) $y = g(2x)$ **b)** $y = g(\frac{1}{2}x)$



54. Se da la gráfica de h. Utilícela para graficar cada una de las funciones siguientes.

a) $y = h(3x)$ **b)** $y = h(\frac{1}{3}x)$

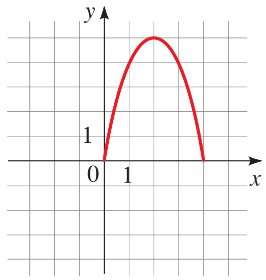


55–56 ■ Se da la gráfica de una función definida para $x \geq 0$. Complete la gráfica para $x < 0$ para construir

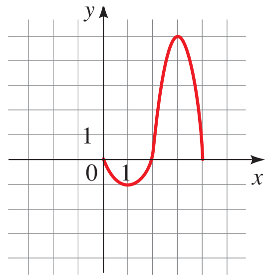
a) una función par

b) una función impar

55.



56.



57–58 ■ Use la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$ descrita en las páginas 162 a 163 para graficar la función indicada.

57. $y = [\![2x]\!]$ **58.** $y = [\![\frac{1}{4}x]\!]$

59. Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las siguientes funciones en el rectángulo de visión $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo se relaciona cada gráfica con la del inciso a)?

a) $y = f(x)$ **b)** $y = f(2x)$ **c)** $y = f(\frac{1}{2}x)$

60. Si $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, grafique las funciones siguientes en el rectángulo de visión $[-5, 5]$ por $[-4, 4]$. ¿Cómo se relaciona cada gráfica con la del inciso a)?

a) $y = f(x)$ **b)** $y = f(-x)$ **c)** $y = -f(-x)$

d) $y = f(-2x)$ **e)** $y = f(-\frac{1}{2}x)$

61–68 ■ Determine si la función f es par, impar o ninguna. Si f es par o impar, use la simetría para bosquejar su gráfica.

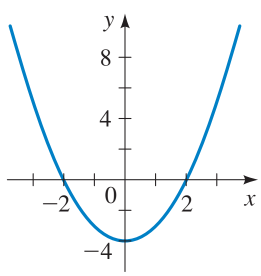
61. $f(x) = x^{-2}$ **62.** $f(x) = x^{-3}$

63. $f(x) = x^2 + x$ **64.** $f(x) = x^4 - 4x^2$

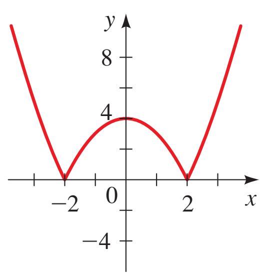
65. $f(x) = x^3 - x$ **66.** $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + 1$

67. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ **68.** $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

69. Se muestran las gráficas de $f(x) = x^2 - 4$ y $g(x) = |x^2 - 4|$. Explique cómo se obtiene la gráfica de g de la gráfica de f.

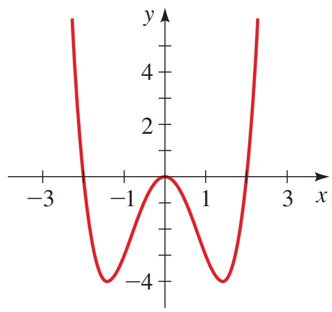


$f(x) = \quad - 4$



$g(x) = | \quad - 4 |$

70. Se muestra la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$. Use esta gráfica para trazar la gráfica de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.



71–72 ■ Bosqueje la gráfica de cada función.

71. a) $f(x) = 4x - x^2$ **b)** $g(x) = |4x - x^2|$

72. a) $f(x) = x^3$ **b)** $g(x) = |x^3|$

Aplicaciones

73. Crecimiento de las ventas Las ventas anuales de cierta compañía se pueden modelar mediante la función $f(t) = 4 + 0.01t^2$, donde t representa los años desde 1990 y $f(t)$ se mide en millones de dólares.

a) ¿Qué operaciones de desplazamiento y acortamiento se deben efectuar en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = f(t)$?

b) Suponga que desea que t represente los años desde 2000 en vez de 1990. ¿Qué transformación tendría que aplicar a la función $y = f(t)$ para llevar a cabo esto? Escriba la nueva función $y = g(t)$ que resulta de esta transformación.

74. Escalas de temperatura cambiantes La temperatura en cierta tarde se modela mediante la función

$$C(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + 2$$

donde t representa horas después de las 12 del día $(0 \le t \le 6)$ y C se mide en °C.

a) ¿Qué operaciones de desplazamiento y decrecimiento se tienen que desarrollar en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = C(t)$?

b) Suponga que en cambio desea medir la temperatura en °F. ¿Qué transformación tendría que aplicar a la función $y = C(t)$ para llevar a cabo esto? (Use el hecho de que la relación entre grados Celsius y Fahrenheit está dada por $F = \tfrac{9}{5}C + 32$.) Escriba la nueva función $y = F(t)$ que resulta de esta transformación.

Descubrimiento • Debate

75. Sumas de funciones par e impar Si f y g son funciones pares, ¿$f + g$ es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué puede decir acerca de la suma si una es impar y una es par? En cada caso, demuestre su respuesta.

76. Productos de funciones par e impar Conteste las mismas preguntas que en el ejercicio 75, excepto que esta vez considere el *producto* de f y g en lugar de la suma.

77. Funciones exponenciales par e impar ¿Qué debe ser cierto acerca del entero n si la función

$$f(x) = x^n$$

es una función par? ¿Si es una función impar? ¿Por qué considera que se eligieron los nombres "par" e "impar" para estas propiedades de función?

2.5 Funciones cuadráticas; máximos y mínimos

Un valor máximo o mínimo de una función es el valor más grande o más pequeño de la función en un intervalo. Para una función que representa la ganancia en un negocio, se estaría interesado en el valor máximo; para una función que representa la cantidad de material en un proceso de manufactura, se estaría interesado en el valor mínimo. En esta sección se aprende cómo hallar los valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas y otras.

Graficación de funciones cuadráticas usando la forma estándar

Una **función cuadrática** es una función f de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

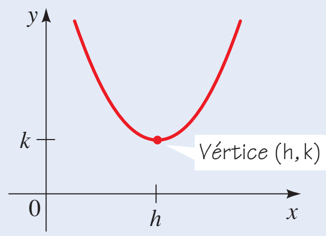
En particular, si se toma $a = 1$ y $b = c = 0$, se obtiene la función cuadrática simple $f(x) = x^2$ cuya gráfica es la parábola que se dibujó en el ejemplo 1 de la sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; se puede obtener de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la sección 2.4.

Forma estándar de una función cuadrática

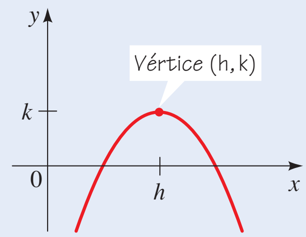
Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k); la parábola se abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k, \ a < 0$

Ejemplo 1 Forma estándar de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

Solución

En la sección 1.5 se explica cómo completar el cuadrado.

a) Puesto que el coeficiente de x^2 no es 1, se debe factorizar este coeficiente a partir de los términos relacionados con x antes de completar el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\ &= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 2 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 2(x - 3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

El vértice es (3, 5)

La forma estándar es $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$.

b) La forma estándar indica que la gráfica de f se obtiene tomando la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola por un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en $(3, 5)$ y la parábola abre hacia arriba. La gráfica se bosqueja en la figura 1 después de notar que el intersecto y es $f(0) = 23$.

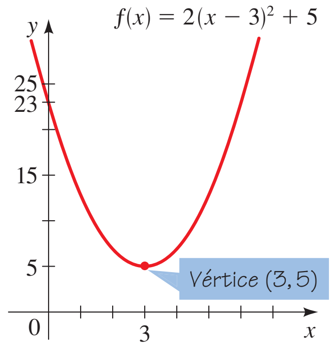


Figura 1

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

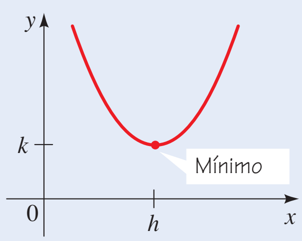
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si abre hacia arriba y un valor máximo en el vértice si abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la figura 1 tiene un valor mínimo 5 cuando $x = 3$, puesto que el vértice $(3, 5)$ es el punto mínimo sobre la gráfica.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

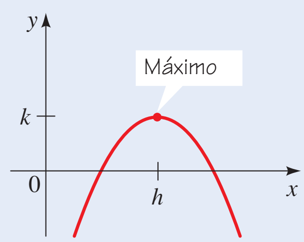
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 0+ k, a >$



$f(x) = a(x - h)^2 0+ k, a$

Ejemplo 2 Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

c) Halle el valor mínimo de f.

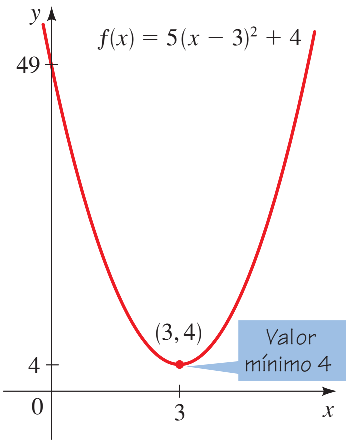


Figura 2

Solución

a) Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\
&= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de los términos en } x \\
&= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro del paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\
&= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique}
\end{aligned}
$$

b) La gráfica es una parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba, como se bosqueja en la figura 2.

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$. ■

Ejemplo 3 Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

a) Exprese f en la forma estándar.

b) Bosqueje la gráfica de f.

c) Encuentre el valor máximo de f.

Solución

a) Para expresar esta función cuadrática en la forma estándar, se completa el cuadrado.

$$
\begin{aligned}
y &= -x^2 + x + 2 \\
&= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice -1 de los términos en } x \\
&= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro del paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\
&= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique}
\end{aligned}
$$

b) De la forma estándar se puede observar que la gráfica es una parábola que abre hacia arriba y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, se encuentran las intersecciones. La intersección y es $f(0) = 2$. Para hallar las intersecciones con x, se establece $f(x) = 0$ y se factoriza la ecuación resultante.

$$
\begin{aligned}
-x^2 + x + 2 &= 0 \\
-(x^2 - x - 2) &= 0 \\
-(x - 2)(x + 1) &= 0
\end{aligned}
$$

Así, las intersecciones x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la figura 3.

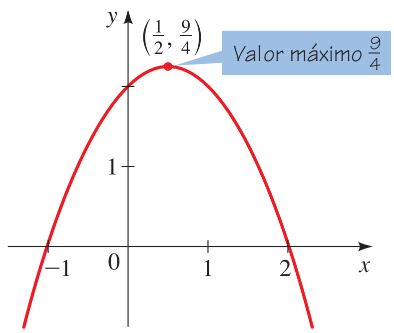


Figura 3
Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

c) Puesto que el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$. ■

Expresar una función cuadrática en la forma estándar ayuda a bosquejar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si se está interesado sólo en hallar el valor máximo o mínimo, entonces hay una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \tfrac{b^2}{4a^2} \text{ dentro del paréntesis, reste } \left(\tfrac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice}
\end{aligned}
$$

Esta ecuación está en la forma estándar con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Puesto que el valor máximo o mínimo ocurre en $x = h$, se tiene el resultado siguiente.

Valor máximo o mínimo de una función cuadrática

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Ejemplo 4 Hallar valores máximos y mínimos de funciones cuadráticas

Hallar el valor máximo o mínimo de cada función cuadrática.

a) $f(x) = x^2 + 4x$ b) $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

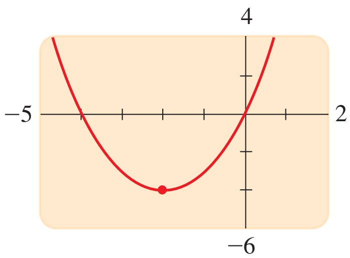
Solución

a) Esta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Por lo tanto, el valor máximo o mínimo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Puesto que $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



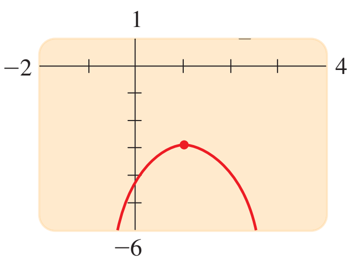
El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

b) Esta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Así, el valor máximo o mínimo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Puesto que $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

Muchos problemas del mundo real tienen que ver con hallar un valor máximo o mínimo para una función que modela una determinada situación. En el ejemplo siguiente se encuentra el valor máximo de una función cuadrática que modela la cantidad de millas recorridas de un automóvil.

Ejemplo 5 Millaje máximo de combustible para un automóvil

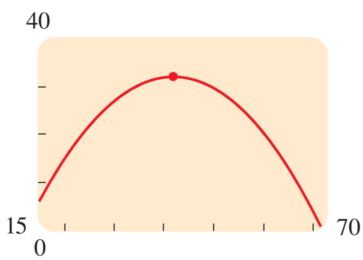
La mayor parte de los automóviles obtienen su mejor millaje de combustible cuando viajan a velocidad relativamente modesta. El millaje M para cierto automóvil nuevo se modela mediante la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \leq s \leq 70$$

donde s es la velocidad en millas/h y M se mide en millas/gal. ¿Cuál es el mejor millaje de combustible para el automóvil y a qué velocidad se obtiene?

Solución La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Así, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$



El millaje máximo de combustible ocurre a 42 km/h.

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Así que el mejor millaje de combustible del automóvil es 32 millas/gal, cuando está viajando a 42 millas/h. ■

Uso de dispositivos de graficación para hallar valores extremos

Los métodos analizados se aplican para hallar valores extremos de funciones cuadráticas solamente. Ahora se muestra cómo localizar valores extremos de cualquier función que se puede graficar con una calculadora o computadora.

Si hay un rectángulo de visión tal que el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f *dentro* del rectángulo de visión (no en el borde), entonces el número $f(a)$ se llama **valor máximo local** de f (véase figura 4). Observe que $f(a) \geq f(x)$ para todos los números x que están cerca de a.

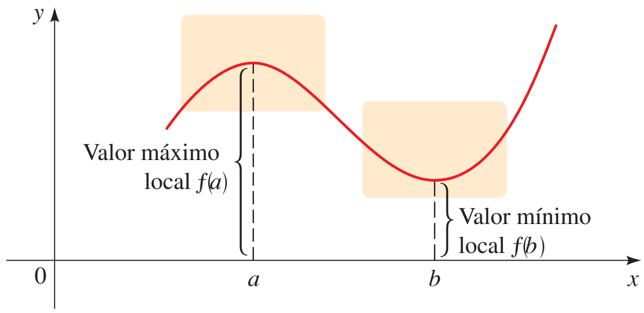


Figura 4

De manera similar, si hay un rectángulo de visión tal que el punto $(b, f(b))$ es el punto mínimo en la gráfica de f dentro del rectángulo de visión, entonces el número $f(b)$ se llama **valor mínimo local** de f. En este caso, $f(b) \leq f(x)$ para los números x que están cercanos a b.

Ejemplo 6 Hallar los máximos y mínimos locales de una gráfica

Hallar los valores máximos y mínimos locales de la función $f(x) = x^3 - 8x + 1$, correctos hasta tres decimales.

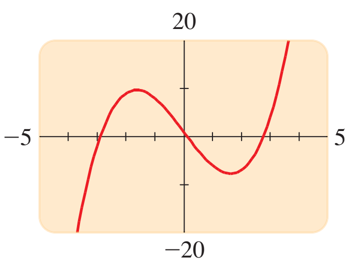


Figura 5
Gráfica de $f(x) = x^3 - 8x + 1$

Solución La gráfica de f se muestra en la figura 5. Al parecer hay un máximo local entre $x = -2$ y $x = -1$, y un mínimo local entre $x = 1$ y $x = 2$.

Primero se determinarán las coordenadas del punto máximo local. Se hace un acercamiento para agrandar el área cercana a este punto, como se muestra en la figura 6. Usando la característica TRACE en el dispositivo de graficación, se mueve el cursor a lo largo de la curva y se observa cómo cambian las coordenadas y. El valor máximo local de y es 9.709, y su valor ocurre cuando x es -1.633, correcto hasta tres decimales.

Se localiza el valor mínimo de una manera similar. Al realizar un acercamiento al rectángulo de visión mostrado en la figura 7, se encuentra que el valor máximo local es aproximadamente -7.709, y este valor ocurre cuando $x \approx 1.633$.

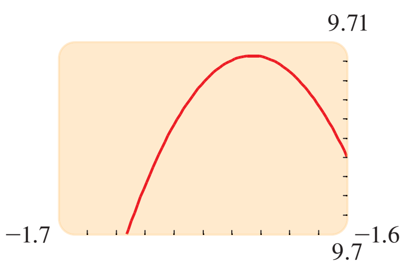


Figura 6

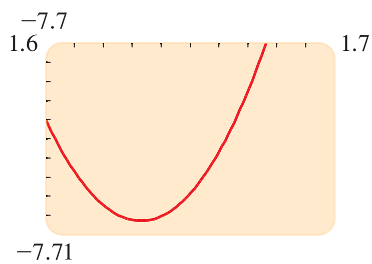


Figura 7

■

Los comandos `maximum` y `minimum` en una calculadora TI-82 o TI-83 proveen otro método para hallar valores extremos de funciones. En el ejemplo siguiente se usa este método.

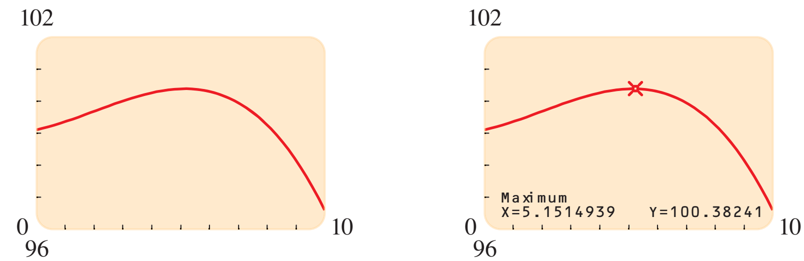
Ejemplo 7 Un modelo para el índice de precios de alimentos

Un modelo para el índice de precios de alimentos (el precio de una "canasta" representativa de alimentos) entre 1990 y 2000 está dado por la función

$$I(t) = -0.0113t^3 + 0.0681t^2 + 0.198t + 99.1$$

donde t se mide en años desde la mitad de 1990, así que $0 \leq t \leq 10$, e $I(t)$ se escala de modo que $I(3) = 100$. Estime el tiempo cuando la comida fue más cara durante el periodo 1990-2000.

Solución La gráfica de I como una función de t se muestra en la figura 8(a). Al parecer hay un máximo entre $t = 4$ y $t = 7$. Usando el comando `maximum` como se muestra en la figura 8(b), se puede observar que el valor máximo de I es casi 100.38, y ocurre cuando $t \approx 5.15$, que corresponde a agosto de 1995.



a) b)

Figura 8 ■

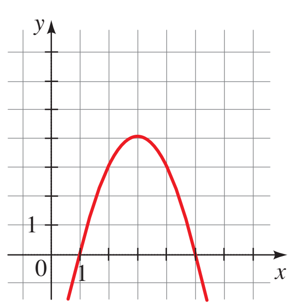
2.5 Ejercicios

1–4 ■ Se da la gráfica de una función cuadrática.

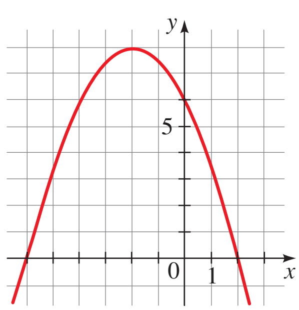
a) Determine las coordenadas del vértice.

b) Halle el valor máximo o mínimo de f.

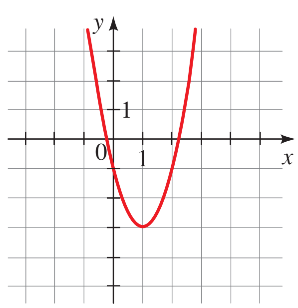
1. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



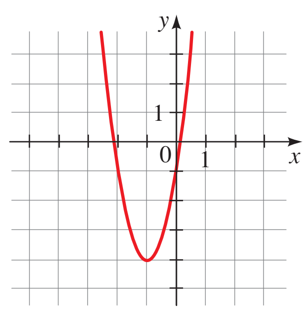
2. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



3. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



4. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



5–18 ■ Se da una función cuadrática.

a) Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

b) Halle su vértice y sus intersectos x y y.

c) Bosqueje su gráfica.

5. $f(x) = x^2 - 6x$

6. $f(x) = x^2 + 8x$

7. $f(x) = 2x^2 + 6x$

8. $f(x) = -x^2 + 10x$

9. $f(x) = x^2 + 4x + 3$

10. $f(x) = x^2 - 2x + 2$

11. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$

12. $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

13. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$

14. $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

15. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$

16. $f(x) = 2x^2 + x - 6$

17. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$

18. $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

19–28 ■ Se da una función cuadrática.

a) Exprese la función cuadrática en la forma estándar.

b) Bosqueje su gráfica.

c) Halle su valor máximo o mínimo.

19. $f(x) = 2x - x^2$

20. $f(x) = x + x^2$

21. $f(x) = x^2 + 2x - 1$

22. $f(x) = x^2 - 8x + 8$

23. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$

24. $f(x) = 1 - 6x - x^2$

25. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$

26. $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

27. $h(x) = 1 - x - x^2$

28. $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

29–38 ■ Halle el valor máximo o mínimo de la función.

29. $f(x) = x^2 + x + 1$

30. $f(x) = 1 + 3x - x^2$

31. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$

32. $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

33. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$

34. $g(x) = 100x^2 - 1500x$

35. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$

36. $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

37. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$

38. $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

39. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

40. Halle una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

41–44 ■ Halle el dominio y el rango de la función.

41. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

42. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

43. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$

44. $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

45–46 ■ Se da una función cuadrática.

(a) Use un dispositivo de graficación para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f, correcto a dos lugares decimales.

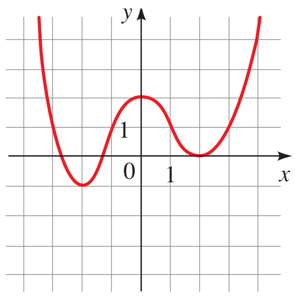
(b) Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f, y compare con su respuesta al inciso a).

45. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

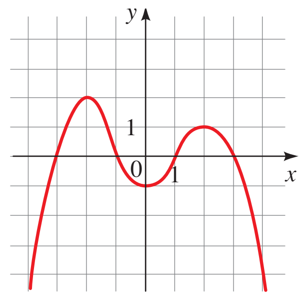
46. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

47–50 ■ Halle los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

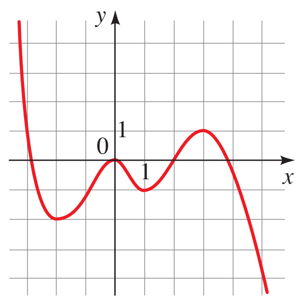
47.



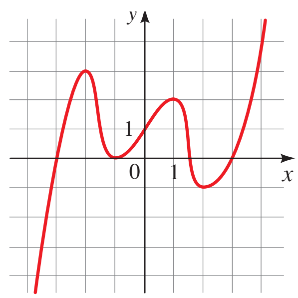
48.



49.



50.



51–58 ■ Encuentre los valores locales máximo y mínimo de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos decimales.

51. $f(x) = x^3 - x$

52. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

53. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

54. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

55. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

56. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

57. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

58. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

Aplicaciones

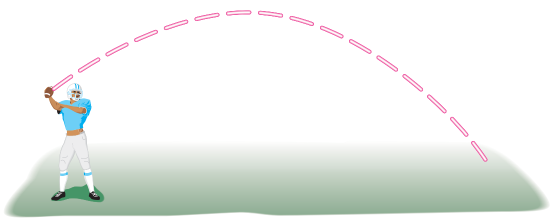
59. Altura de una bola Si se lanza una bola directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

60. Trayectoria de la bola Se lanza una bola en un campo de juego. Su trayectoria está dada por la ecuación

$y = -0.005x^2 + x + 5$, donde x es la distancia que la bola ha viajado horizontalmente, y y es la altura sobre el nivel del suelo, ambas medidas en pies.

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

b) ¿Qué tan lejos ha viajado horizontalmente la bola cuando choca con el suelo?



61. Ingreso Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierto artículo está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo y cuántas unidades se tienen que fabricar para obtener ese máximo?

62. Ventas Un vendedor de bebidas carbonatadas en una popular playa analiza sus registros de ventas, y encuentra que si vende x latas de bebida en un día, su ganancia (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su ganancia máxima por día, y cuántas latas debe vender para que la ganancia sea máxima?

63. Publicidad La efectividad de un comercial de televisión depende de cuántas veces lo vea un televidente. Después de algunos experimentos una agencia de publicidad encuentra que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces,

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

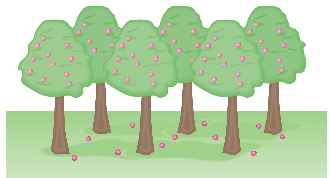
donde n es el número de veces que un televidente ve un determinado comercial. Para que un comercial tenga efectividad máxima, ¿cuántas veces lo debe ver un televidente?

64. Productos farmacéuticos Cuando cierto fármaco se toma oralmente, su concentración en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la concentración máxima, y cuál es esa concentración máxima?

65. Agricultura El número de manzanas que produce cada árbol en una huerta depende de la densidad de árboles plantados. Si se plantan n árboles en un acre de tierra, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Así que el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles se deben plantar por acre a fin de obtener la producción máxima de manzanas?



66. Peces migratorios Un pez nada a una velocidad v relativa al agua, contra una corriente de 5 millas/h. Con un modelo matemático de gasto de energía, se puede mostrar que la energía total E requerida para nadar una distancia de 10 millas está dada por

$$E(v) = 2.73v^3\frac{10}{v - 5}$$

Los biólogos creen que los peces migratorios tratan de reducir al mínimo la energía total requerida para nadar una distancia fija. Encuentre el valor de v que minimiza la energía requerida.

NOTA: este resultado ha sido comprobado; los peces migratorios nadan contra la corriente a una velocidad 50% mayor que la velocidad de la corriente.

67. Ingeniería de carreteras Un ingeniero desea calcular el número máximo de automóviles que pueden viajar de manera segura en una determinada carretera a una velocidad especificada. Se supone que cada automóvil mide 17 pies de longitud, viaja a una velocidad s y sigue al automóvil frente a él a la "distancia segura" para esa velocidad. Encuentra que el número N de automóviles que pueden pasar en determinado punto por minuto se modela mediante la función

$$N(s) = \frac{88s}{17 + 17\left(\frac{s}{20}\right)^2}$$

¿A qué velocidad puede el mayor número de automóviles viajar con seguridad por la carretera?

68. Volumen de agua Entre 0ºC y 30ºC, el volumen V (en centímetros cúbicos) de 1 kg de agua a una temperatura T está dado por la fórmula

$$V = 999.87 - 0.06426T + 0.0085043T^2 - 0.0000679T^3$$

Encuentre la temperatura a la cual el volumen de 1 kg de agua es un mínimo.

69. Tos Cuando un objeto extraño alojado en la tráquea fuerza a una persona a toser, el diafragma empuja hacia arriba causando un incremento de presión en los pulmones. Al mismo tiempo la tráquea se contrae, y provoca que el aire expelido se mueva más rápido e incremente la presión sobre el objeto extraño. De acuerdo con el modelo matemático de toser, la velocidad v de la corriente de aire por la tráquea de una persona de tamaño promedio se relaciona con el radio r de la tráquea (en centímetros) mediante la función

$$v(r) = 3.2(1 - r)r^2, \qquad \tfrac{1}{2} \le r \le 1$$

Determine el valor de r para el cual v es un máximo.

Descubrimiento • Debate

70. Máximos y mínimos En el ejemplo 5 se analizó una situación del mundo real en la que el valor máximo de una función es importante. Mencione otras situaciones cotidianas en las que un valor máximo o mínimo es importante.

71. Minimizar una distancia Cuando se busca un valor mínimo o máximo de una función, algunas veces se considera más fácil trabajar con una función más simple.

a) Suponga que $g(x) = \sqrt{f(x)}$, donde $f(x) \ge 0$ para toda x. Explique por qué los mínimos y máximos locales de f y g ocurren en los mismos valores de x.

b) Sea $g(x)$ la distancia entre el punto $(3, 0)$ y el punto (x, x^2) sobre la gráfica de la parábola $y = x^2$. Exprese a g como una función de x.

c) Encuentre el valor mínimo de la función g que encontró en el inciso b). Use el principio descrito en el inciso a) para simplificar su trabajo.

72. Máximo de un polinomio de cuarto grado Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + 4x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* sea $t = x^2$.]

2.6 Modelado con funciones

Muchos de los procesos estudiados en las ciencias físicas y sociales requieren entender cómo varía una cantidad respecto a otra. Hallar una función que describe la dependencia de una cantidad en otra se llama *modelado*. Por ejemplo, un biólogo observa que el número de bacterias en cierto cultivo se incrementa con el tiempo. Él intenta modelar este fenómeno mediante la determinación de la función precisa (o regla) que relaciona la población de bacterias con el tiempo transcurrido.

En esta sección se aprenderá cómo hallar modelos que se pueden construir con propiedades geométricas o algebraicas del objeto bajo estudio. (La determinación de modelos a partir de *datos* se estudia en la parte *Enfoque en el modelado* al final de este capítulo.) Una vez que se encuentra el modelo, se emplea para analizar y predecir propiedades del objeto o proceso bajo estudio.

Modelado con funciones

Empezaremos con una situación simple de la vida real que ilustra el proceso de modelado.

Ejemplo 1 Modelado del volumen de una caja

Una compañía productora de cereal fabrica cajas para empacar su producto. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: su amplitud es tres veces su profundidad y su altura es cinco veces su profundidad.

a) Halle una función que modele el volumen de la caja en términos de su profundidad.

b) Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulgadas.

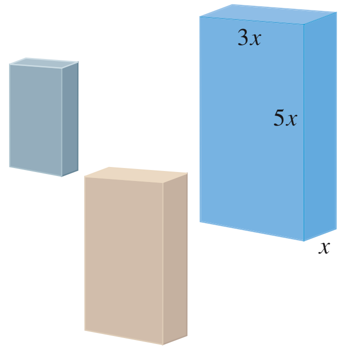
c) ¿Para qué profundidad el volumen es 90 pulg^3?

d) ¿Para qué profundidad el volumen es mayor que 60 pulg^3?

■ **Razonamiento acerca del problema**

Experimentemos con el problema. Si la profundidad es 1 pulg, entonces la amplitud es 3 pulg y la altura es 5 pulg. Así que en este caso, el volumen es $V = 1 \times 3 \times 5 = 15$ pulg^3. En la tabla se dan otros valores. Observe que todas las cajas tienen la misma forma, y mientras mayor es la profundidad mayor es el volumen.

Profundidad	Volumen
1	$1 \times 3 \times 5 = 15$
2	$2 \times 6 \times 10 = 120$
3	$3 \times 9 \times 15 = 405$
4	$4 \times 12 \times 20 = 960$



Solución

a) Para hallar la función que modela el volumen de la caja, se usan los siguientes pasos.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que el volumen de una caja rectangular es

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

■ **Elija la variable**

Hay tres cantidades variables: ancho, profundidad y altura. Puesto que la función que se desea depende de la profundidad, sea

$$x = \text{profundidad de la caja}$$

Entonces se expresan las otras dimensiones de la caja en términos de x.

En palabras	En álgebra
Profundidad	x
Ancho	$3x$
Altura	$5x$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función V que da el volumen de la caja en términos de la profundidad x.

$$\text{volumen} = \text{profundidad} \times \text{ancho} \times \text{altura}$$

$$V(x) = x \cdot 3x \cdot 5x$$

$$V(x) = 15x^3$$

El volumen de la caja se modela mediante la función $V(x) = 15x^3$. La función V se grafica en la figura 1.

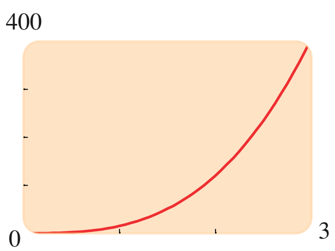
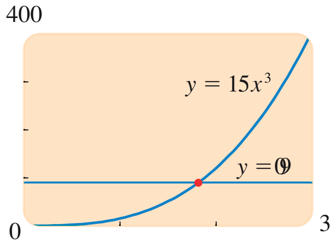
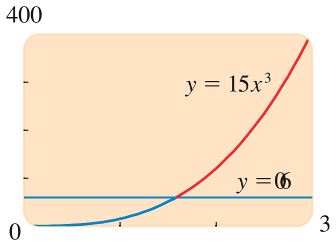


Figura 1



$15x^3 = 90$

Figura 2



$15x^3 > 60$

Figura 3

■ **Use el modelo**

Se usa el modelo para contestar las preguntas de los incisos b), c) y d).

b) Si la profundidad es 1.5 pulg, el volumen es $V(1.5) = 15(1.5)^3 = 50.625$ pulg^3.

c) Se necesita resolver la ecuación $V(x) = 90$ o bien

$$15x^3 = 90$$
$$x^3 = 6$$
$$x = \sqrt[3]{6} \approx 1.82 \text{ pulg.}$$

El volumen es 90 pulg^3 cuando su profundidad es cerca de 1.82 pulg. (Esta ecuación se puede resolver también de manera gráfica, como se muestra en la figura 2.)

d) Se requiere resolver la desigualdad $V(x) > 60$, o bien,

$$15x^3 > 60$$
$$x^3 > 4$$
$$x > \sqrt[3]{4} \approx 1.59$$

El volumen será mayor que 60 pulg^3 si la profundidad es mayor que 1.59 pulg. (Esta desigualdad se puede resolver también de manera gráfica, como se ilustra en la figura 3.) ■

Los pasos del ejemplo 1 son representativos de cómo modelar con funciones. Se resumen en el cuadro siguiente.

Normas para modelar con funciones

1. **Exprese el modelo en palabras.** Identifique la cantidad que quiere modelar y exprésela, en palabras, como una función de otras cantidades en el problema.

2. **Elija la variable.** Identifique las variables empleadas para expresar la función en el paso 1. Asigne un símbolo, como x, a una variable y exprese las otras variables en términos de este símbolo.

3. **Establezca el modelo.** Exprese la función en el lenguaje del álgebra al escribirla como una función de la única variable elegida en el paso 2.

4. **Use el modelo.** Emplee la función para contestar las preguntas planteadas en el problema. (Para hallar un máximo o un mínimo, use los métodos algebraico o gráfico descritos en la sección 2.5.)

Ejemplo 2 Cercado de un jardín

Un jardinero tiene 140 pies de cerca para un jardín de legumbres rectangular.

a) Encuentre una función de modele el área del jardín que puede cercar.

b) ¿Para qué intervalo de amplitudes el área es mayor o igual que 825 pies^2?

c) ¿Puede cercar un jardín con área de 1250 pies^2?

d) Encuentre las dimensiones del área más grande que puede cercar.

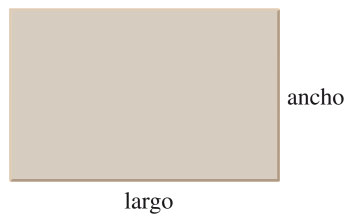
■ **Razonamiento acerca del problema**

Si el jardinero cerca una parcela de 10 pies de ancho, entonces la longitud debe ser de 60 pies, porque $10 + 10 + 60 + 60 = 140$. Por lo tanto, el área es

$$A = \text{ancho} \times \text{largo} = 10 \cdot 60 = 600 \text{ pies}^2$$

En la tabla se muestran varias elecciones para cercar el jardín. Se puede observar que cuando se incrementa la amplitud, se incrementa el área cercada, luego disminuye.

Ancho	Largo	Área
10	60	600
20	50	1000
30	40	1200
40	30	1200
50	20	1000
60	10	600



Solución

a) El modelo que se desea es una función que proporciona el área que se puede cercar.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que el área de un jardín rectangular es

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{largo}$$

■ **Elija la variable**

Hay dos cantidades variables, ancho y largo. Puesto que la función que se desea depende sólo de una variable, sea

$$x = \text{ancho del jardín}$$

Luego, se expresa la longitud en términos de x. El perímetro se fija en 140 pies, así que la longitud se determina una vez que se elige la amplitud. Si se permite que l sea la longitud, como en la figura 4, entonces $2x + 2l = 140$, de modo que $l = 70 - x$. Se resumen estos hechos.

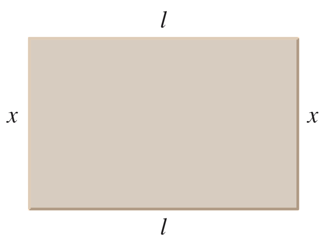


Figura 4

En palabras	En álgebra
Ancho	x
Largo	$70 - x$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función A que proporciona el área del jardín para cualquier ancho x.

$$\text{área} = \text{ancho} \times \text{largo}$$

$$A(x) = x(70 - x)$$

$$A(x) = 70x - x^2$$

El área que se puede cercar se modela mediante la función $A(x) = 70x - x^2$.

■ Use el modelo

Se usa el modelo para contestar las preguntas de los incisos b) a d).

Los valores máximos de funciones cuadráticas se estudian en la página 195.

b) Se requiere resolver la desigualdad $A(x) \geq 825$. Para resolver de forma gráfica, se traza $y = 70x - x^2$ y $y = 825$ en el mismo rectángulo de visión (véase figura 5). Se puede observar que $15 \leq x \leq 55$.

c) De la figura 6 se puede observar que la gráfica de $A(x)$ siempre yace debajo de la recta $y = 1250$, de modo que nunca se obtiene un área de 1250 pies^2.

d) Se necesita hallar el valor máximo de la función $A(x) = 70x - x^2$. Puesto que ésta es una función cuadrática con $a = -1$ y $b = 70$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{70}{2(-1)} = 35$$

En consecuencia, el área máxima que se puede cercar tiene una amplitud de 35 pies y una longitud de $70 - 35 = 35$ pies.

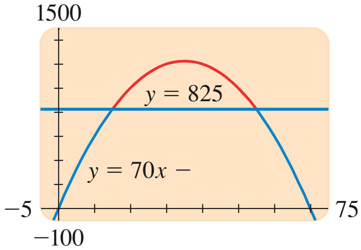


Figura 5

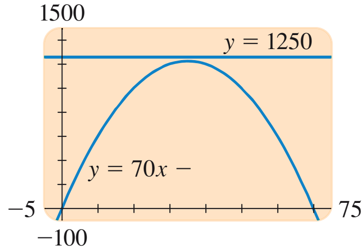


Figura 6

■

Ejemplo 3 Maximización del ingreso por ventas de boletos

Un equipo de hockey juega en una arena con una capacidad de 15 000 espectadores sentados. Con el precio del boleto establecido en \$14, la asistencia promedio a juegos recientes ha sido 9500. Una encuesta de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia promedio se incrementa en 1000.

a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.
b) ¿Qué precio de boleto es tan alto que nadie asiste y, por lo tanto, no se genera ningún ingreso?
c) Encuentre el precio que maximiza el ingreso por la venta de boletos.

■ Razonamiento acerca del problema

Con un precio de boleto de \$14, el ingreso es $9500 \times \$14 = \$133\,000$. Si baja el precio del boleto a \$13, la asistencia se incrementa a $9500 + 1000 = 10\,500$, así que el ingreso se convierte en $10\,500 \times \$13 = \$136\,500$. En la tabla se muestra el ingreso para varios precios de boleto. Note que si baja el precio del boleto, se incrementa el ingreso, pero si baja mucho, disminuye el ingreso.

Precio	Asistencia	Ingreso
\$15	8 500	\$127 500
\$14	9 500	\$133 500
\$13	10 500	\$136 500
\$12	11 500	\$138 500
\$11	12 500	\$137 500
\$10	13 500	\$135 500
\$9	14 500	\$130 500

Solución

a) El modelo que se quiere es una función que proporciona el ingreso para cualquier precio del boleto.

Exprese el modelo en palabras

Se sabe que

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencia}$$

Elija la variable

Hay dos cantidades variables: precio del boleto y asistencia. Puesto que la función que se desea depende del precio, sea

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, se debe expresar la asistencia en términos de x.

En palabras	En álgebra
Precio del boleto	x
Cantidad que disminuye el precio del boleto	$14 - x$
Incremento de la asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x) = 23\,500 - 1000x$

Establezca el modelo

El modelo es la función R que proporciona el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencia}$$

$$R(x) = x(23\,500 - 1000x)$$

$$R(x) = 23\,500x - 1000x^2$$

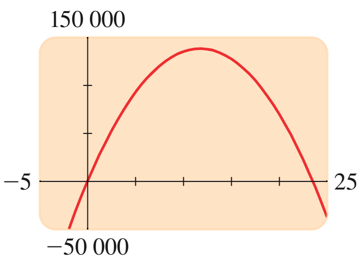


Figura 7

Los valores máximos de funciones cuadráticas se describen en la página 195.

Use el modelo

Se emplea el modelo para contestar las preguntas de los incisos b) y c).

b) Se desea hallar el precio x del boleto para el cual $R(x) = 23\,000x - 1000x^2 = 0$. Esta ecuación cuadrática se puede resolver de forma algebraica o gráfica. De la gráfica de la figura 7 se ve que $R(x) = 0$ cuando $x = 0$ o $x = 23.5$. Por lo tanto, de acuerdo con el modelo, el ingreso bajaría a cero si el precio del boleto es de \$23.50 o más alto. (Por supuesto, ¡el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero!)

c) Puesto que $R(x) = 23\,500x - 1000x^2$ es una función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23\,500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23\,500}{2(-1000)} = 11.75$$

Así, el precio de \$11.75 para el boleto produce el ingreso máximo. A este precio el ingreso es

$$R(11.75) = 23\,500(11.75) - 1000(11.75)^2 = \$138\,062.50$$ ■

Ejemplo 4 Reducir al mínimo el metal de una lata

Un fabricante elabora una lata de metal que contiene 1 L (litro) de aceite. ¿Qué radio reduce al mínimo la cantidad de metal en la lata?

■ **Razonamiento acerca del problema**

Para usar la mínima cantidad de metal, se debe reducir al mínimo el área de superficie de la lata, es decir, el área de la parte de arriba, el fondo y los lados. El área de la parte superior y el fondo es $2\pi r^2$ y el área de los lados es $2\pi rh$ (véase figura 8), de modo que el área de superficie de la lata es

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

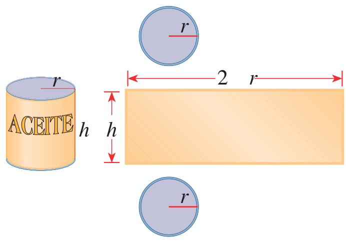


Figura 8

El radio y la altura de la lata se deben elegir de modo que el volumen sea exactamente 1 L o 1000 cm^3. Si se desea un radio pequeño, por ejemplo $r = 3$, entonces la altura debe ser la suficiente para hacer que el volumen total sean1000 cm^3. En otras palabras, se debe tener

$$\pi(3)^2 h = 1000 \qquad \text{El volumen de la lata es } \pi r^2 h$$

$$h = \frac{1000}{9\pi} \approx 35.4 \text{ cm} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora que se conoce el radio y la altura, se puede hallar el área de superficie de la lata:

$$\text{área de superficie} = 2\pi(3)^2 + 2\pi(3)(35.4) \approx 729.1 \text{ cm}^3$$

Si se desea un radio diferente, se puede hallar la altura correspondiente y el área superficial de un modo similar.

Solución El modelo que se desea es una función que da el área de superficie de la lata.

■ **Exprese el modelo en palabras**

Se sabe que para una lata cilíndrica

área superficial	=	área de la parte superior y el fondo	+	área de los lados

■ **Elija la variable**

Hay dos cantidades variables: radio y altura. Puesto que la función que se desea depende del radio, sea

$$r = \text{radio de la lata}$$

A continuación, se debe expresar la altura en términos del radio r. Puesto que el volumen de una lata cilíndrica es $V = \pi r^2 h$ y el volumen debe ser 1000 cm^3, se tiene

$$\pi r^2 h = 1000 \qquad \text{El volumen de la lata es 1000 cm}^3$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad \text{Despeje } h$$

Ahora se pueden expresar las áreas de la parte superior, el fondo y los lados en términos de r solamente.

En palabras	En álgebra
Radio de la lata	r
Altura de la lata	$\frac{1000}{\pi r^2}$
Área de la parte superior y el fondo	$2\pi r^2$
Área de los lados $(2\pi rh)$	$2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$

■ **Establezca el modelo**

El modelo es la función S que proporciona el área de superficie de la lata como una función del radio r.

área de superficie = área de la parte superior y el fondo + área de los lados

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{1000}{\pi r^2}\right)$$

$$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

■ **Use el modelo**

Se emplea el modelo para hallar el área de superficie mínima de la lata. Se grafica S en la figura 9 y se amplía en el punto mínimo para hallar que el valor mínimo de S es casi 554 cm^2 y ocurre cuando el radio es cercano a 5.4 cm. ■

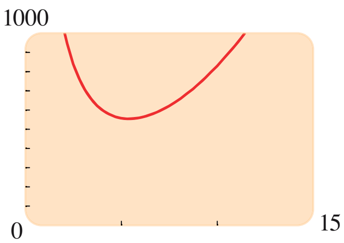


Figura 9

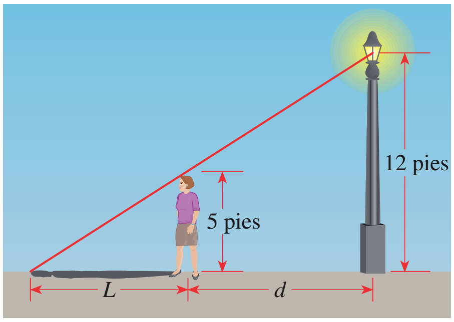
$S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$

2.6 Ejercicios

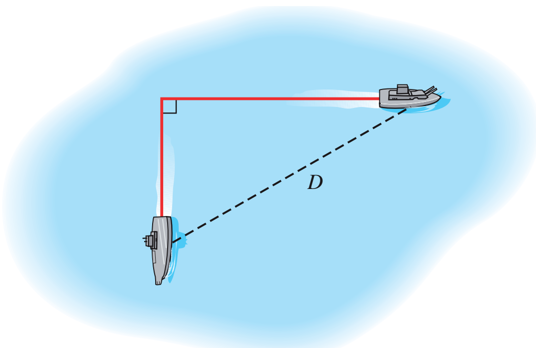
1–18 ■ En estos ejercicios se pide hallar una función que modela una situación de la vida real. Use las normas para modelado descritas en el texto como ayuda.

1. **Área** La longitud de un lote de edificación rectangular es tres veces su ancho. Encuentre una función que modela su área en términos de su ancho w.
2. **Área** Un cartel es 10 pulgadas más largo que su ancho. Encuentre una función que modele su área A en términos de su ancho w.
3. **Volumen** Una caja rectangular tiene una base cuadrada. Su altura es la mitad del ancho de la base. Encuentre una función que modele su volumen V en términos de su ancho w.
4. **Volumen** La altura de un cilindro es cuatro veces su radio. Encuentre una función que modele el volumen V del cilindro en términos de su radio r.
5. **Área** Un rectángulo tiene un perímetro de 20 pies. Encuentre una función que modele el área A en términos de la longitud x de uno de sus lados.
6. **Perímetro** Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x de uno de sus lados.
7. **Área** Determine una función que modele el área A de un triángulo equilátero en términos de la longitud x de uno de sus lados.
8. **Área** Encuentre una función que modele el área superficial de S de un cubo en términos de su volumen V.
9. **Radio** Encuentre una función que modele el radio r de un círculo en términos de su área A.
10. **Área** Halle una función que modele el área A de un círculo en términos de su circunferencia C.
11. **Área** Una caja rectangular con un volumen de 60 $pies^3$ tiene una base cuadrada. Encuentre una función que modele su área superficial S en términos de la longitud x de un lado de su base.
12. **Longitud** Una mujer de 5 pies de estatura está parada cerca de una lámpara del alumbrado público que tiene

12 pies de altura, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele la longitud L de su sombra en términos de su distancia d desde la base de la lámpara.



13. Distancia Dos barcos salen de puerto al mismo tiempo. Uno navega hacia el sur a 15 millas/h y el otro navega hacia el este a 20 millas/h. Encuentre la función que modela la distancia D entre los barcos en términos del tiempo t (en horas) transcurrido desde su partida.

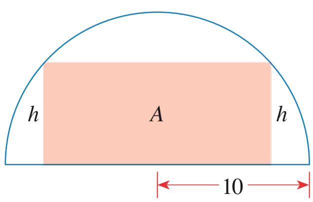


14. Producto La suma de dos números positivos es 60. Encuentre una función que modele su producto P en términos de x, uno de los números.

15. Área Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Encuentre una función que modele su área A en términos de la longitud de su base b.

16. Perímetro Un triángulo rectángulo tiene un cateto dos veces más grande que el otro. Encuentre una función que modele su perímetro P en términos de la longitud x del cateto más corto.

17. Área Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de radio 10, como se muestra en la figura. Encuentre una función que modele el área A del rectángulo en términos de su altura h.



18. Altura El volumen de un cono es 100 pulg^3. Encuentre una función que modele la altura h del cono en términos de su radio r.

19–36 ■ En estos problemas se pide hallar una función que modele una situación de la vida real, y después usar el modelo para contestar preguntas acerca de la situación. Use las normas de la página 205 como ayuda.

19. Maximización de un producto Considere el siguiente problema: Encuentre dos números cuya suma es 19 y cuyo producto es tan grande como sea posible.

a) Experimente con el problema construyendo una tabla parecida a la siguiente, que muestre el producto de pares diferentes de números que suman hasta 19. Con base en la evidencia de su tabla, estime la respuesta al problema.

Primer número	Segundo número	Producto
1	18	18
2	17	34
3	16	48
⋮	⋮	⋮

b) Encuentre una función que modele el producto en términos de uno de los dos números.

c) Use su modelo para resolver el problema, y compare con su respuesta al inciso a).

20. Minimizar una suma Encuentre dos números positivos cuya suma sea 100 y la suma de cuyos cuadrados sea un mínimo.

21. Maximización de un producto Halle dos números cuya suma sea -24 y cuyo producto sea un máximo.

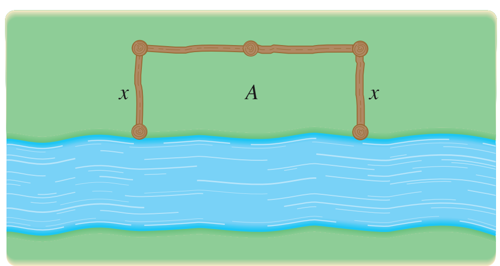
22. Maximización del área Entre los rectángulos que tienen un perímetro de 20 pies, encuentre las dimensiones del que tiene el área más grande.

23. Cercado de un campo Considere el siguiente problema: un agricultor tiene 2400 pies de cerca y desea cercar un campo rectangular que bordea un río recto. No necesita cercar a lo largo del río (véase la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del campo con el área más grande que puede cercar?

a) Experimente con el problema dibujando varios diagramas que ilustran la situación. Calcule el área de cada configuración, y use sus resultados para calcular las dimensiones del campo más grande posible.

b) Encuentre una función que modele el área del campo en términos de uno de sus lados.

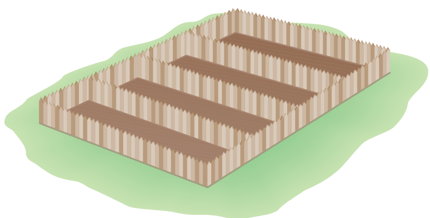
c) Use su modelo para resolver el problema, y compare con su respuesta al inciso a).



24. División de un corral Un ranchero con 750 pies de cerca quiere encerrar un área rectangular y dividirla después en cuatro corrales con cerca paralela a un lado del rectángulo (véase la figura).

a) Encuentre una función que modele el área total de los cuatro corrales.

b) Determine el área total más grande posible de los cuatro corrales.

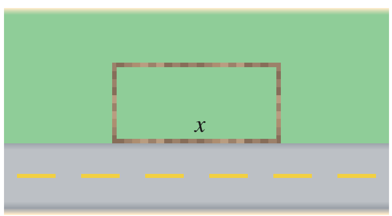


25. Cercado de una parcela de jardín El dueño de una casa quiere cercar una parcela de jardín adyacente a una carretera, como se muestra en la figura. La cerca junto a la carretera debe ser más robusta y cuesta \$5 por pie, pero la otra cerca cuesto sólo \$3 por pie. El jardín tendrá un área de 1200 pies cuadrados.

a) Encuentre una función que modele el costo de cercar el jardín.

b) Determine las dimensiones de jardín que reducen al mínimo el costo de cercar.

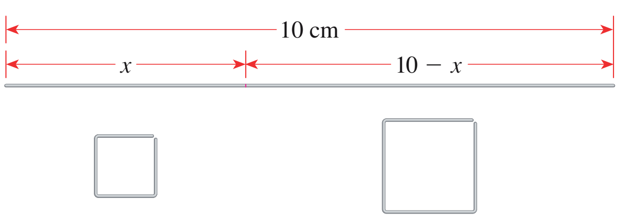
c) Si el dueño tiene a lo sumo \$600 para gastar en la cerca, encuentre el intervalo de longitudes que puede cercar a lo largo de la carretera.



26. Área máxima Un alambre de 10 cm de largo se corta en dos trozos, uno de longitud x y el otro de longitud $10 - x$, como se muestra en la figura. Cada trozo se dobla en la forma de un cuadro.

a) Encuentre una función que modele el área total encerrada por los dos cuadrados.

b) Halle el valor de x que reduce al mínimo el área total de los dos cuadrados.



27. Ingreso de un estadio Un equipo de beisbol juega en un estadio que aloja 55 000 espectadores. Con el precio del boleto a \$10, la asistencia promedio en juegos recientes ha sido 27 000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que se reduce al precio del boleto, la asistencia se incrementa en 3000.

a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

b) ¿Qué precio de boleto es tan alto que no se genera ningún ingreso?

c) Encuentre el precio que maximiza el ingreso por la venta de boletos.

28. Maximizar la ganancia Una sociedad dedicada a observar aves elabora y vende alimentadores simples para pájaros con el fin de reunir fondos para sus actividades de conservación. El costo del material para cada alimentador es \$6, y venden un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. Han estado considerando subir el precio, así que llevan a cabo un estudio y encuentran que por cada incremento de un dólar pierden dos ventas por semana.

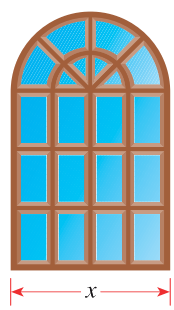
a) Encuentre una función que modele la ganancia semanal en términos del precio por alimentador.

b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador con el fin de maximizar las ganancias? ¿Cuál es la ganancia máxima?

29. Luz de una ventana Una ventana Normanda tiene la forma de un rectángulo rematado con un semicírculo, como se ilustra en la figura. Se construirá una ventana Normanda con perímetro de 30 pies.

a) Encuentre una función que modele el área de la ventana.

b) Determine las dimensiones de la ventana que admite la mayor cantidad de luz.

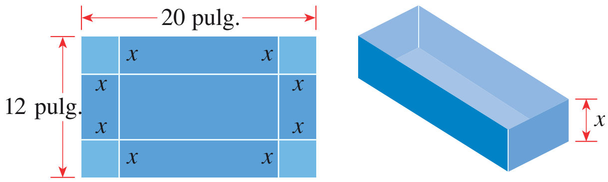


30. Volumen de una caja Se construirá una caja con una abertura en la parte superior a partir de una pieza rectangular de cartón con dimensiones de 12 por 20 pulg cortando cuadros iguales de lado x en cada esquina y luego doblando los lados hacia arriba (véase la figura).

a) Encuentre una función que modele el volumen de la caja.

b) Halle los valores de x para los que el volumen es mayor que 200 pulg^3.

c) Encuentre el volumen más grande que puede tener la caja.

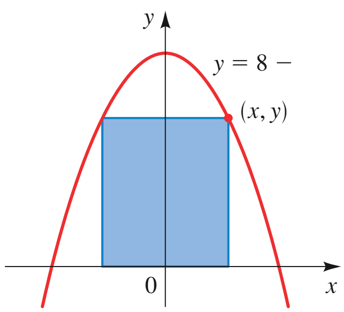


31. Área de una caja Se tiene previsto que una caja abierta con una base cuadrada tenga un volumen de 12 pies^3.

a) Halle el volumen que modela el área de superficie de la caja.

b) Encuentre las dimensiones que reducen al mínimo la cantidad de material empleado.

32. Rectángulo inscrito Encuentre las dimensiones que da el área más grande del rectángulo mostrado en la figura. Su base está sobre el eje x y sus otros dos vértices están arriba del eje x, sobre la parábola $y = 8 - x^2$.



33. Minimización de costos Un ranchero quiere construir un corral rectangular con un área de 100 m^2.

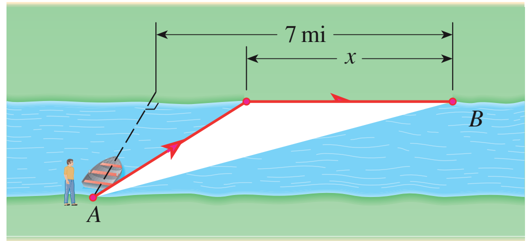
a) Encuentre una función que modele la longitud de la cerca requerida.

b) Determine las dimensiones del corral que requieren la cantidad mínima de cerca.

34. Reducción del tiempo Un hombre se encuentra parado en un punto A en la orilla de un río recto de dos millas de ancho. Para llegar al punto B, 7 millas corriente abajo en la orilla opuesta, rema primero en su bote hasta el punto P en la orilla opuesta y luego camina la distancia restante x hasta B, como se muestra en la figura. Él puede remar a una velocidad de 2 millas/h y caminar a una velocidad de 5 millas/h.

a) Encuentre una función que permita modelar el tiempo necesario para el recorrido.

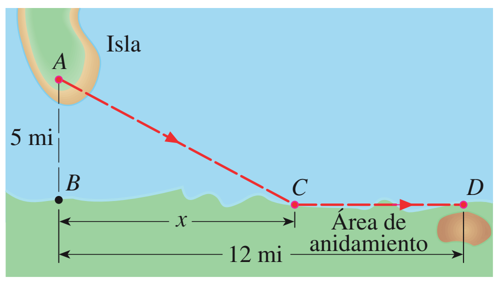
b) ¿Dónde debe desembarcar de modo que llegue a B lo más pronto posible?



35. Vuelo de un ave Se libera a un pájaro en el punto A de una isla, 5 millas desde el punto B más próximo en una ribera recta. El pájaro vuela hasta un punto C sobre la ribera y luego vuela a lo largo de la ribera hasta su área de anidamiento D (véase la figura). Suponga que el área requiere 10 kcal/milla de energía para volar sobre tierra y 14 kcal/milla para volar sobre el agua (véase el ejemplo 9 de la sección 1.6).

a) Encuentre una función que modele el gasto de energía del pájaro.

b) Si por instinto el pájaro elige una trayectoria que minimiza su gasto de energía, ¿hasta qué punto vuela?

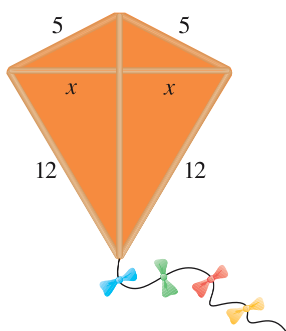


36. Área de una cometa Se construirá el marco de una cometa a partir de seis piezas de madera. Las cuatro piezas que forman su borde se cortaron a las longitudes indicadas en la figura. Sea x como se muestra en la figura.

a) Muestre que el área de la cometa está dada por la función

$$A(x) = x(\sqrt{25 - x^2} + \sqrt{144 - x^2})$$

b) ¿Cuál debe ser la longitud de las piezas cruzadas a fin de maximizar el área de la cometa?



2.7 Combinación de funciones

En esta sección se estudian diferentes formas de combinar funciones para construir nuevas.

Sumas, diferencias, productos y cocientes

La suma de f y g se define mediante

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es "$f+g$." Por lo tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*. El signo + del lado derecho, sin embargo, representa la suma de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

Dos funciones f y g se pueden combinar para formar nuevas funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g de una manera similar a la forma en que se suma, resta, multiplica y divide números reales. Por ejemplo, se define la función $f+g$ por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

La nueva función $f+g$ se llama **suma** de las funciones f y g; su valor en x es $f(x)+g(x)$. Por supuesto, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si x pertenece al dominio de f y también al dominio de g. Así, si el dominio de f es A y el dominio de g es B, entonces el dominio de $f+g$ es la intersección de estos dominios, es decir, $A \cap B$. De manera similar, se puede definir la **diferencia** $f-g$, el **producto** fg, y el **cociente** f/g de las funciones f y g. Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente se debe recordar no dividir entre cero.

Álgebra de funciones

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g se definen como sigue.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	Dominio $A \cap B$
$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	Dominio $A \cap B$
$(fg)(x) = f(x)g(x)$	Dominio $A \cap B$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	Dominio $\{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$

Ejemplo 1 Combinaciones de funciones y sus dominios

Sean $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g y sus dominios.

b) Encuentre $(f+g)(4)$, $(f-g)(4)$, $(fg)(4)$ y $(f/g)(4)$.

Solución

a) El dominio de f es $\{x \mid x \neq 2\}$ y el dominio de g es $\{x \mid x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de f y g es

$$\{x \mid x \geq 0 \ \text{ y } \ x \neq 2\} = [0,2) \cup (2,\infty)$$

Para dividir fracciones, invierta el denominador y multiplique:

$$\frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}} = \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}/1} = \frac{1}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$$

Así, se tiene

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \ge 0 \text{ y } x \ne 2\}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \ge 0 \text{ y } x \ne 2\}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \ge 0 \text{ y } x \ne 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x > 0 \text{ y } x \ne 2\}$$

Hay que observar que en el dominio de f/g se excluye 0 porque $g(0) = 0$.

b) Cada uno de estos valores existe porque $x = 4$ está en el dominio de cada función.

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f-g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

■

La gráfica de la función $f + g$ se puede obtener de las gráficas de f y g mediante **adición gráfica**. Esto significa que se suman las coordenadas y correspondientes, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

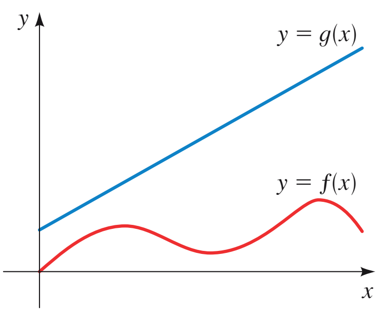


Figura 1

Ejemplo 2 Uso de la adición gráfica

Las gráficas de f y g se muestran en la figura 1. Use la suma gráfica para trazar la función $f + g$.

Solución Se obtiene la gráfica de $f + g$ al "sumar gráficamente" el valor de $f(x)$ a $g(x)$ como se muestra en la figura 2. Esto se pone en práctica al copiar el segmento de recta PQ en la parte superior PR para obtener el punto S sobre la gráfica de $f + g$.

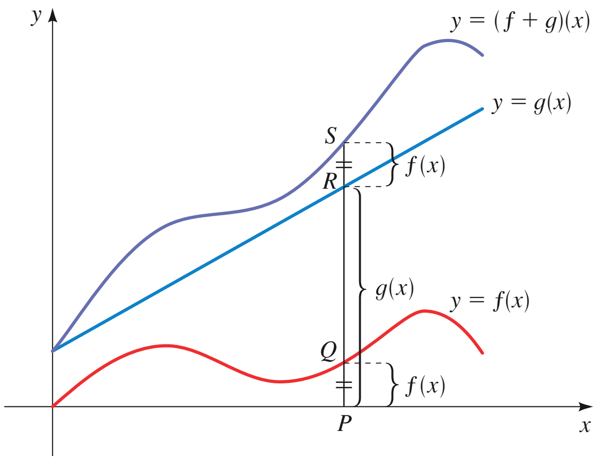


Figura 2
Suma gráfica

■

Composición de funciones

Ahora, considérese una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Se puede definir una función h como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función h está compuesta de las funciones f y g de una manera interesante: dado un número x, se aplica primero a la función g, luego se aplica f al resultado. En este caso, f es la regla "sacar la raíz cuadrada", g es la regla "elevar al cuadrado" después sumar 1", y h es la regla "elevar al cuadrado, a continuación sumar 1, luego sacar la raíz cuadrada". En otras palabras, se obtiene la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f. En la figura 3 se muestra un diagrama de máquina para h.

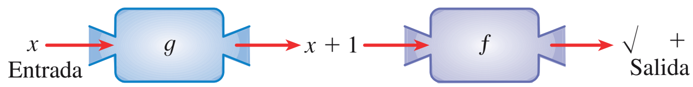


Figura 3

La máquina h está compuesta de la máquina g (primero) y después la máquina f.

En general, dadas dos funciones cualesquiera f y g, comience con un número x en el dominio de g y encuentre su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, se puede calcular entonces el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ obtenida al sustituir g en f. Se llama la *composición* (o *compuesta*) de f y g y se denota mediante $f \circ g$ ("f compuesta con g").

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (denominada también la **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras $(f \circ g)(x)$ se define siempre que $g(x)$ y $f(g(x))$ estén definidas. Se puede ilustrar $f \circ g$ por medio de un diagrama de flecha (figura 4).

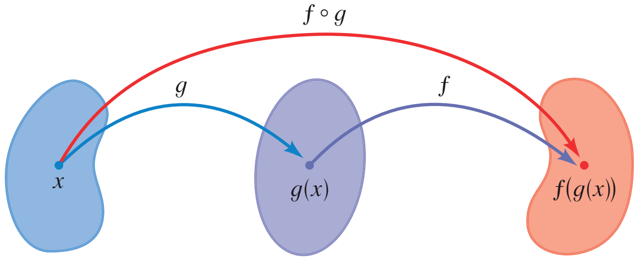


Figura 4

Diagrama de flechas para $f \circ g$

Ejemplo 3 Determine la composición de funciones

Sea $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

a) Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

b) Halle $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

En el ejemplo 3, f es la regla "elevar al cuadrado" y g es la regla "restar 3". La función $f \circ g$ *primero* resta 3 y *después* eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ *primero* eleva al cuadrado y *luego* resta 3.

Solución

a) Se tiene

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(x - 3) && \text{Definición de } g \\
&= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\
&= g(x^2) && \text{Definición de } f \\
&= x^2 - 3 && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Los dominios de $f \circ g$ y $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

b) Se tiene

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(5) &= f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4 \\
(g \circ f)(7) &= g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46
\end{aligned}
$$

■

Del ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ significa que la función g se aplica primero y después f.

Ejemplo 4 Determine la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

Solución

a)

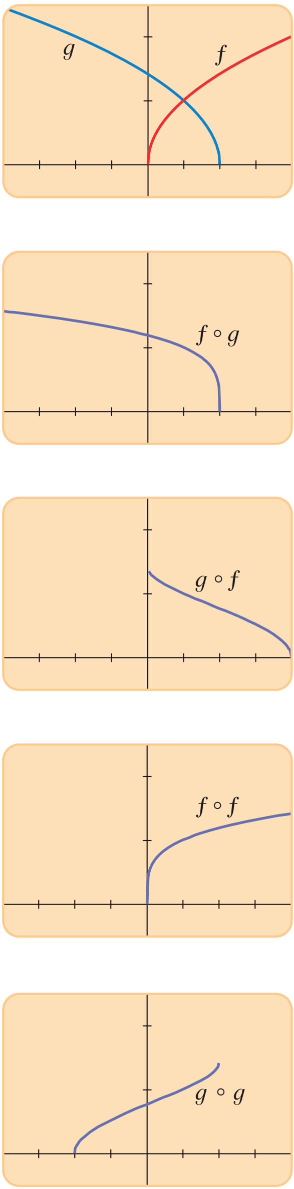
$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\
&= \sqrt{\sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt[4]{2 - x}
\end{aligned}
$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

b)

$$
\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f \\
&= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\
&= \sqrt{2 - \sqrt{x}} && \text{Definición de } g
\end{aligned}
$$

Las gráficas de f y g del ejemplo 4, así como $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$, se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones bastante diferentes de las funciones originales.



Para que $\sqrt{x}$ esté definida, se debe tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida, se debe tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o bien $x \leq 4$. Así, se tiene $0 \leq x \leq 4$, por lo tanto el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

c)

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f \\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f \\ &= \sqrt[4]{x} \end{aligned}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

d)

$$\begin{aligned} (g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g \\ &= g(\sqrt{2 - x}) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}} && \text{Definición de } g \end{aligned}$$

Esta expresión se define cuando $2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad significa $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por lo tanto, $-2 \leq x \leq 2$, así que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$. ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar h, luego g y después f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

Ejemplo 5 Una composición de tres funciones

Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

Solución

$$\begin{aligned} (f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h \\ &= f(g(x + 3)) && \text{Definición de } h \\ &= f((x + 3)^{10}) && \text{Definición de } g \\ &= \frac{(x + 3)^{10}}{(x + 3)^{10} + 1} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

■

Hasta aquí se ha usado la composición para construir funciones complicadas a partir de las más simples. Pero en cálculo es útil poder "descomponer" una función complicada en funciones más simples, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 6 Cómo reconocer una composición de funciones

Dada $F(x) = \sqrt[4]{x + 9}$, encuentre las funciones f y g tales que $F = f \circ g$.

Solución Puesto que la fórmula para F indica sumar primero 9 y luego sacar la raíz cuarta, sea

$$g(x) = x + 9 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(x + 9) && \text{Definición de } g \\
&= \sqrt[4]{x + 9} && \text{Definición de } f \\
&= F(x)
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 7 Una aplicación de la composición de funciones

Un barco está viajando a 20 millas/h paralela a una ribera recta. El barco está a 5 millas de la orilla. Pasa un faro a mediodía.

a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como una función de d, la distancia que ha recorrido el barco desde mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.

b) Exprese a d como una función de t, el tiempo transcurrido desde mediodía; es decir, encuentre g tal que $d = g(t)$.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

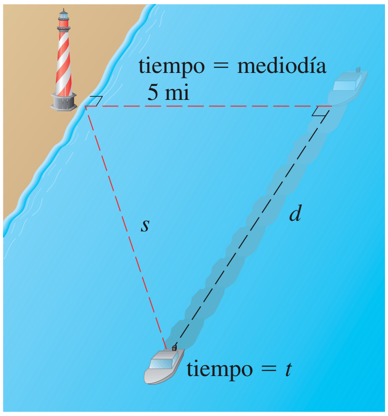


Figura 5

Solución Primero se traza un diagrama como en la figura 5.

a) Se pueden relacionar las distancias s y d mediante el teorema de Pitágoras. Así, s puede ser expresada como una función de d por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

distancia = velocidad × tiempo

b) Puesto que la nave está viajando a 20 millas/h, la distancia d que ha recorrido es una función de t como sigue:

$$d = g(t) = 20t$$

c) Se tiene

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g \\
&= f(20t) && \text{Definición de } g \\
&= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f
\end{aligned}
$$

La función $f \circ g$ da la distancia del barco desde el faro como una función del tiempo. ■

2.7 Ejercicios

1–6 ■ Encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g y sus dominios.

1. $f(x) = x - 3, \quad g(x) = x^2$

2. $f(x) = x^2 + 2x, \quad g(x) = 3x^2 - 1$

3. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{1 + x}$

4. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{4}{x + 4}$

6. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

7–10 ■ Encuentre el dominio de la función.

7. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1 - x}$

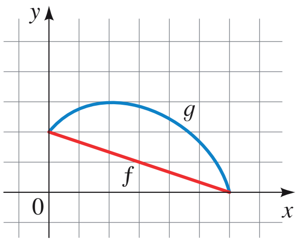
8. $g(x) = \sqrt{x + 1} - \dfrac{1}{x}$

9. $h(x) = (x - 3)^{-1/4}$

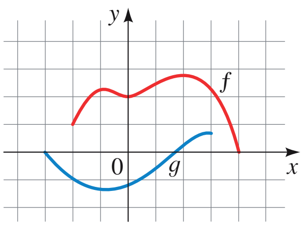
10. $k(x) = \dfrac{\sqrt{x + 3}}{x - 1}$

11–12 ■ Use la adición gráfica para bosquejar la gráfica de $f + g$.

11.



12.



13–16 ■ Dibuje las gráficas de f, g y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la suma gráfica.

13. $f(x) = \sqrt{1 + x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - x}$

14. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$

15. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{1}{3}x^3$

16. $f(x) = \sqrt[4]{1 - x}, \quad g(x) = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9}}$

17–22 ■ Use $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$ para evaluar la expresión.

17. a) $f(g(0))$ **b)** $g(f(0))$

18. a) $f(f(4))$ **b)** $g(g(3))$

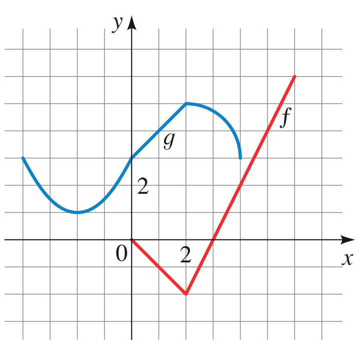
19. a) $(f \circ g)(-2)$ **b)** $(g \circ f)(-2)$

20. a) $(f \circ f)(-1)$ **b)** $(g \circ g)(2)$

21. a) $(f \circ g)(x)$ **b)** $(g \circ f)(x)$

22. a) $(f \circ f)(x)$ **b)** $(g \circ g)(x)$

23–28 ■ Use las gráficas de f y g para evaluar la expresión.



23. $f(g(2))$

24. $g(f(0))$

25. $(g \circ f)(4)$

26. $(f \circ g)(0)$

27. $(g \circ g)(-2)$

28. $(f \circ f)(4)$

29–40 ■ Encuentre las funciones, $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

29. $f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 4x - 1$

30. $f(x) = 6x - 5, \quad g(x) = \dfrac{x}{2}$

31. $f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$

32. $f(x) = x^3 + 2, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = 2x + 4$

34. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x - 3}$

35. $f(x) = |x|, \quad g(x) = 2x + 3$

36. $f(x) = x - 4, \quad g(x) = |x + 4|$

37. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}, \quad g(x) = 2x - 1$

38. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = x^2 - 4x$

39. $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = \sqrt[4]{x}$

40. $f(x) = \dfrac{2}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

41–44 ■ Encuentre $f \circ g \circ h$.

41. $f(x) = x - 1, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad h(x) = x - 1$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = x^2 + 2$

43. $f(x) = x^4 + 1, \quad g(x) = x - 5, \quad h(x) = \sqrt{x}$

44. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{x}{x - 1}, \quad h(x) = \sqrt[3]{x}$

45–50 ■ Exprese la función en la forma $f \circ g$.

45. $F(x) = (x - 9)^5$

46. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

47. $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 4}$

48. $G(x) = \dfrac{1}{x + 3}$

49. $H(x) = |1 - x^3|$

50. $H(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

51–54 ■ Exprese la función en la forma $f \circ g \circ h$.

51. $F(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

52. $F(x) = \sqrt[3]{\sqrt{x} - 1}$

53. $G(x) = (4 + \sqrt[3]{x})^9$

54. $G(x) = \dfrac{2}{(3 + \sqrt{x})^2}$

Aplicaciones

55–56 ■ **Ingreso, costo y ganancia** Una imprenta elabora calcomanías para las campañas electorales. Si se piden x calcomanías (donde $x < 10\,000$), entonces el precio por calcomanía es $0.15 - 0.000002x$ dólares, y el costo total de producir la orden es $0.095x - 0.0000005x^2$ dólares.

55. Use el hecho de que

ingreso = precio por artículo × número de artículos vendidos

para expresar $R(x)$, el ingreso de una orden de x calcomanías, como un producto de dos funciones de x.

56. Use el hecho de que

ganancia = ingreso − costo

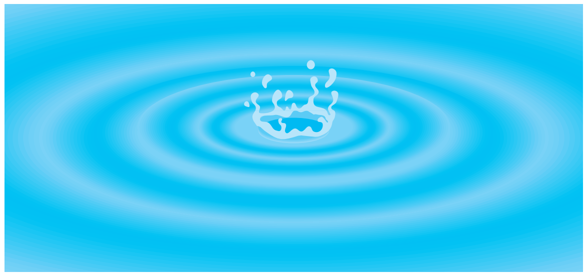
para expresar $P(x)$, la ganancia en un pedido de x calcomanías, como una diferencia de dos funciones de x.

57. Área de una onda Se deja caer una piedra en un lago, que crea una onda circular que viaja hacia fuera a una velocidad de 60 cm/s.

a) Encuentre una función g que modele el radio como una función del tiempo.

b) Encuentre una función f que modele el área del círculo como una función del radio.

c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?



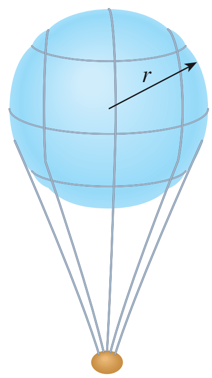
58. Inflado de un globo Un globo esférico está siendo inflado. El radio del globo crece a la velocidad de 1 cm/s.

a) Encuentre una función f que modele el radio como una función del tiempo.

b) Encuentre una función g que modele el volumen como una función del radio.

c) Encuentre $g \circ f$. ¿Qué representa esta función?

59. Área de un globo Se está inflando un globo meteorológico esférico. El radio del globo se incrementa a la velocidad de 2 cm/s. Exprese el área superficial del globo como una función del tiempo t (en segundos).



60. Descuentos múltiples Se tiene un cupón de \$50 de un fabricante bueno por la compra de un teléfono celular. La tienda donde compra su teléfono celular ofrece un descuento de 20% en todos los teléfonos celulares. Sea x el precio normal del teléfono celular.

a) Suponga que sólo se aplica el 20% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del teléfono celular como una función del precio regular x.

b) Suponga que sólo se aplica el cupón de \$50. Encuentre una función g que modele el precio de compra del teléfono celular como una función del precio de etiqueta x.

c) Si puede usar el cupón y el descuento, entonces el precio de compra es $f \circ g(x)$ o $g \circ f(x)$, dependiendo del orden en el que se apliquen al precio. Encuentre $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$. ¿Qué composición da el precio más bajo?

61. Descuentos múltiples Un vendedor de aparatos anuncia un descuento de 10% en todas sus lavadoras. Además, el fabricante ofrece una rebaja de 100 dólares en la compra de una lavadora. Sea x que representa el precio de etiqueta de la lavadora.

a) Suponga que sólo se aplica el 10%. Encuentre una función f que modele el precio de compra de la lavadora como una función del precio de etiqueta x.

b) Suponga que sólo se aplica la rebaja de 100 dólares. Encuentre una función g que modele el precio de compra de la lavadora como una función del precio de etiqueta x.

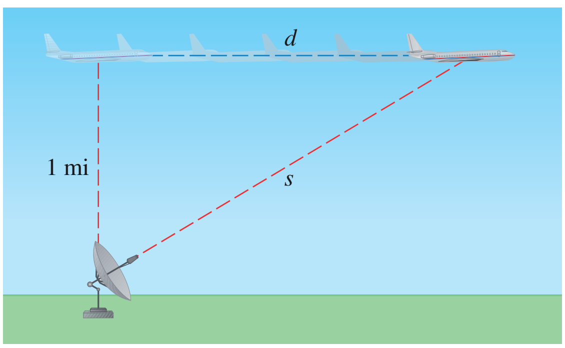
c) Encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Qué representan estas funciones? ¿Cuál es el mejor trato?

62. Trayectoria de un avión Un avión está volando a una velocidad de 350 millas/h a una altitud de una milla. El avión pasa directamente arriba de una estación de radar en el tiempo $t = 0$.

a) Exprese la distancia s (en millas) entre el avión y la estación de radar como una función de la distancia horizontal d (en millas) que ha volado el avión.

b) Exprese d como una función del tiempo t (en horas) que ha volado el avión.

c) Use la composición para expresar s como una función de t.



Descubrimiento • Debate

63. Interés compuesto Una cuenta de ahorros gana 5% de interés compuesto anualmente. Si invierte x dólares en tal cuenta, luego la cantidad $A(x)$ de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5%; es decir, $A(x) = x + 0.05x = 1.05x$. Encuentre

$$A \circ A$$
$$A \circ A \circ A$$
$$A \circ A \circ A \circ A$$

¿Qué representan estas composiciones? Encuentre una fórmula para lo que obtiene cuando compone n copias de A.

64. Composición de funciones lineales Las gráficas de las funciones

$$f(x) = m_1x + b_1$$
$$g(x) = m_2x + b_2$$

son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. ¿La gráfica de $f \circ g$ es una recta? En caso afirmativo, ¿cuál es la pendiente?

65. Resolución de una ecuación para una función desconocida Suponga que

$$g(x) = 2x + 1$$
$$h(x) = 4x^2 + 4x + 7$$

Encuentre una función f tal que $f \circ g = h$. (Considere qué operaciones tendría que realizar en la fórmula para g a fin de terminar con la fórmula para h.) Ahora suponga que

$$f(x) = 3x + 5$$
$$h(x) = 3x^2 + 3x + 2$$

Use la misma clase de razonamiento para hallar una función g tal que $f \circ g = h$.

66. Composiciones de funciones impares y pares Suponga que

$$h = f \circ g$$

Si g es una función par, ¿h es necesariamente par? Si g es impar, ¿h es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es impar? ¿Qué pasa si g es impar y f es par?

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Iteración y caos

Las **iteraciones** de una función f en el punto x_0 son $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, y así sucesivamente. Se escribe

$$x_1 = f(x_0) \qquad \text{Primera iteración}$$

$$x_2 = f(f(x_0)) \qquad \text{Segunda iteración}$$

$$x_3 = f(f(f(x_0))) \qquad \text{Tercera iteración}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, entonces las iteraciones de f en 2 son $x_1 = 4$, $x_2 = 16$, $x_3 = 256$, etc. (Compruebe esto.) Las iteraciones se pueden describir en forma gráfica como en la figura 1. Empiece con x_0 en el eje x muévase verticalmente a la gráfica de f, luego horizontalmente a la recta $y = x$, después verticalmente a la gráfica de f, etc. Las coordenadas x en los puntos sobre la gráfica de f son las iteraciones de f en x_0.

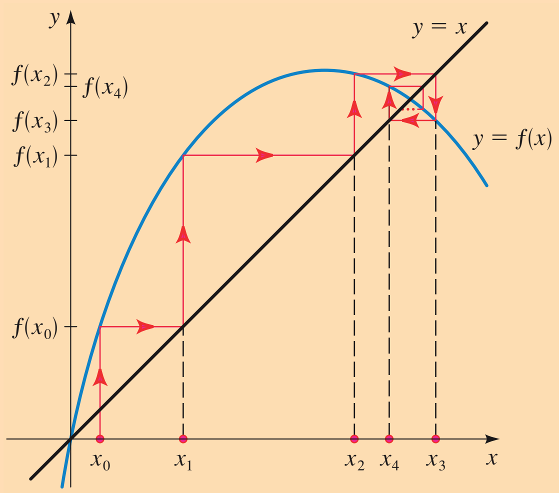


Figura 1

Las iteraciones son importantes en el estudio de la **función logística**

$$f(x) = kx(1 - x)$$

que modela la población de una especie con potencial limitado para crecimiento (p. ej., conejos en una isla o peces en un estanque). En este modelo la población máxima que puede soportar el medio es 1 (es decir, 100%). Si se comienza con una fracción de esa población, por ejemplo 0.1 (10%), entonces las iteraciones de f en 0.1 dan la población después de cada intervalo de tiempo (días, meses o años, dependiendo de las especies). La constante k depende de la tasa de crecimiento de la especie que está siendo modelada; se llama **constante de crecimiento**. Por ejemplo, para $k = 2.6$ y $x_0 = 0.1$ las iteraciones mostradas en la tabla a la izquierda dan la población de las especies para los primeros 12 intervalos de tiempo. La población se estabiliza al parecer alrededor de 0.615 (es decir, 61.5% del máximo).

n	x_n
0	0.1
1	0.234
2	0.46603
3	0.64700
4	0.59382
5	0.62712
6	0.60799
7	0.61968
8	0.61276
9	0.61694
10	0.61444
11	0.61595
12	0.61505

En las tres gráficas de la figura 2, se grafican las iteraciones de f en 0.1 para diferentes valores de la constante de crecimiento k. Para $k = 2.6$ la población

al parecer se estabiliza en un valor 0.615 del máximo, para $k = 3.1$ la población parece oscilar entre dos valores, y para $k = 3.8$ no surge ningún patrón obvio. Este última situación se describe de forma matemática mediante la palabra **caos**.

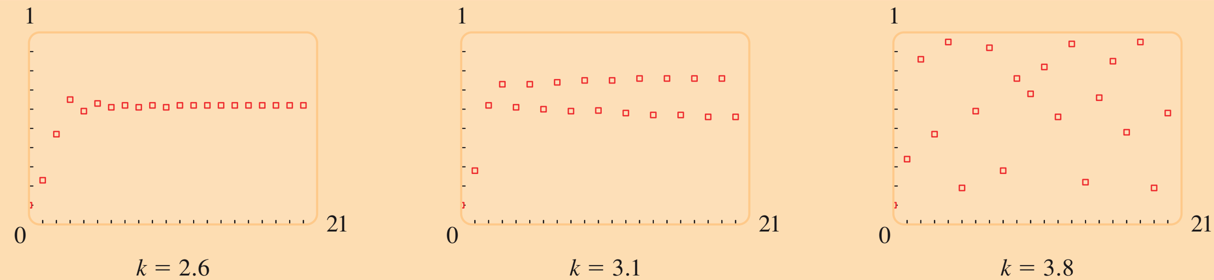


Figura 2

El siguiente programa de la TI-83 traza la primera gráfica de la figura 2. Las otras gráficas se obtienen eligiendo el valor apropiado para K en el programa.

```
PROGRAM:ITERATE
:ClrDraw
:2.6→K
:0.1→X
:For(N,1,20)
:K*X*(1-X)→Z
:Pt-On(N,Z,2)
:Z→X
:End
```

1. Use el procedimiento gráfico ilustrado en la figura 1 para las primeras cinco iteraciones de $f(x) = 2x(1 - x)$ en $x = 0.1$.

2. Encuentre las iteraciones de $f(x) = x^2$ en $x = 1$.

3. Encuentre las iteraciones de $f(x) = 1/x$ en $x = 2$.

4. Encuentre las seis primeras iteraciones de $f(x) = 1/(1 - x)$ en $x = 2$. ¿Cuál es la iteración número 1000 de f en 2?

5. Encuentre las primeras 10 iteraciones de la función logística en $x = 0.1$ para el valor dado de k. ¿La población se estabiliza, oscila o es caótica?

a) $k = 2.1$ b) $k = 3.2$ c) $k = 3.9$

6. Es fácil hallar iteraciones por medio de una calculadora graficadora. Los pasos siguientes muestran cómo encontrar las iteraciones de $f(x) = kx(1 - x)$ en 0.1 para $k = 3$ en una calculadora TI-83. (El procedimiento se puede adaptar a cualquier calculadora graficadora.)

`Y₁ = K * X * (1 − X)`	Introduzca f Y₁ en la lista de gráficas
`3 → K`	Almacene 3 en la variable K
`0.1 → X`	Almacene 0.1 en la variable X
`Y₁ → X`	Evalúe f en X y guarde de nuevo el resultado en X
`0.27`	Oprima ENTER y obtenga la primera iteración
`0.5913`	Mantenga oprimida la tecla ENTER para volver a ejecutar el comando y obtener iteraciones sucesivas
`0.72499293`	
`0.59813454435`	

El programa en el margen se puede usar también para graficar las iteraciones y estudiarlas de manera visual.

Use una calculadora de graficación para experimentar cómo el valor de k afecta las iteraciones de $f(x) = kx(1 - x)$ en 0.1. Encuentre varios valores diferentes de k que hacen que las iteraciones se estabilicen en un valor, oscilen entre dos valores y exhiban caos. (Use valores de k entre 1 y 4.) ¿Puede hallar valores de k que hacen que las iteraciones oscilen entre *cuatro* valores?

2.8 Funciones uno a uno y sus inversas

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Así, la inversa "deshace" o invierte lo que ha hecho la función. No todas las funciones tienen inversas; las que sí la tienen se llaman funciones *uno a uno*.

Funciones uno a uno

Compárense las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la figura 1. Hay que observar que f nunca toma el mismo valor dos veces (dos números cualesquiera en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (tanto 2 como 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se llaman *uno a uno*.

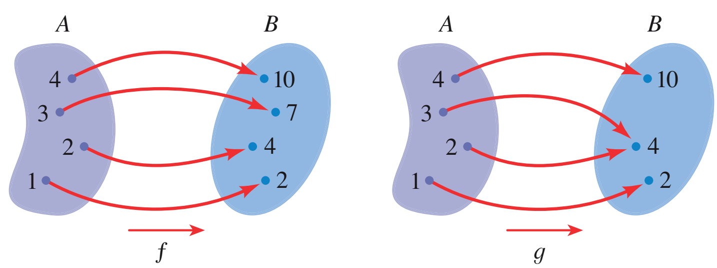


Figura 1 f es uno a uno — g no es uno a uno

Definición de una función uno a uno

Una función con dominio A se llama **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, es decir,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición de una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

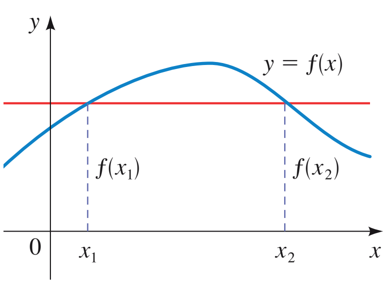


Figura 2
La función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces se puede observar en la figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, se tiene el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

Prueba de la recta horizontal

Una función es uno a uno si y sólo si ninguna recta horizontal cruza su gráfica más de una vez.

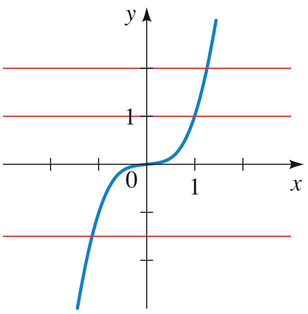


Figura 3
$f(x) = x^3$ es uno a uno.

Ejemplo 1 Decidir si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

Solución 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

Solución 2 En la figura 3 se puede observar que ninguna recta horizontal cruza la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, mediante la prueba de la recta horizontal, f es uno a uno. ■

Observe que la función f del ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede probar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno.*

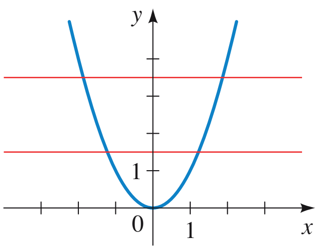


Figura 4
$f(x) = x^2$ no es uno a uno.

Ejemplo 2 Decidir si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

Solución 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(-1) = 1$$

y, por lo tanto, 1 y -1 tienen la misma imagen.

Solución 2 De la figura 4 se puede observar que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la prueba de la recta horizontal, g no es uno a uno. ■

Aunque la función g del ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de modo que la función resultante sea uno a uno. De hecho, si se define

$$h(x) = x^2, \qquad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede observar en la figura 5 y la prueba de la recta horizontal.

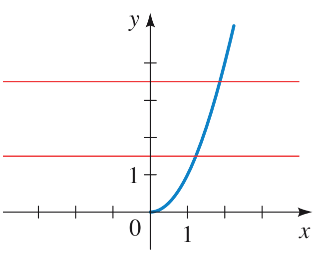


Figura 5
$f(x) = x^2 \quad (x \geq 0)$ es uno a uno.

Ejemplo 3 Mostrar que una función es uno a uno

Muestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

Solución
Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4 &= 3x_2 + 4 && \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2) \\
3x_1 &= 3x_2 && \text{Reste 4} \\
x_1 &= x_2 && \text{Divida entre 3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, f es uno a uno. ■

La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

No confunda el -1 en f^{-1} con un exponente.

$$f^{-1} \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

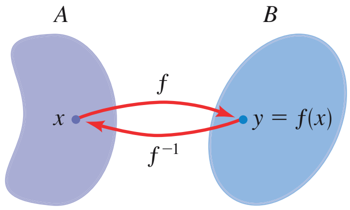


Figura 6

Definición de la inversa de una función

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

Esta definición establece que si f envía x a y, entonces f^{-1} envía a y de nuevo a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manea única.) El diagrama de flechas en la figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. De la definición se tiene

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$

$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

Ejemplo 4 Encuentre f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$ encuentre $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$, y $f^{-1}(-10)$.

Solución De la definición de f^{-1} se tiene

$$f^{-1}(5) = 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5$$

$$f^{-1}(7) = 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7$$

$$f^{-1}(-10) = 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10$$

En la figura 7 se muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

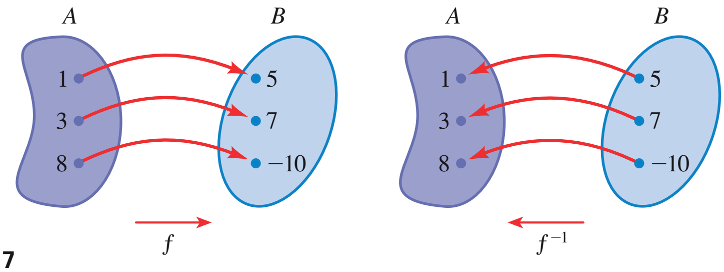


Figura 7 ■

Por definición la función inversa f^{-1} deshace lo que hace f si se empieza con x, se aplica f, y luego se aplica f^{-1}, se llega de nuevo a x, donde se inició. De manera similar, f deshace lo que hace f^{-1}. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f. Estas observaciones se expresan con precisión como sigue.

Propiedad de la función inversa

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación.

$$f^{-1}(f(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \qquad \text{para toda } x \text{ en } B$$

A la inversa, cualquier función f^{-1} que satisface estas ecuaciones es la inversa de f.

Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1}, por lo tanto se dice que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

Ejemplo 5 Verificar que dos funciones son inversas

Muestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

Solución Observe que el dominio y el rango de f y g es $\mathbb{R}$. Se tiene

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por consiguiente, por la propiedad de las funciones inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente expresan que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando se componen, se cancelan entre sí. ■

Ahora se examinará cómo se calculan las funciones inversas. Se observa primero de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

En consecuencia, si $y = f(x)$ y si se puede resolver esta ecuación para x en términos de y, entonces se debe tener $x = f^{-1}(y)$. Si luego se intercambian x y y, se tiene $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

Cómo hallar la inversa de una función uno a uno

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Resuelva esta ecuación para x en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

Hay que observar que se pueden invertir los pasos 2 y 3. En otras palabras, se puede intercambiar x y y primero y luego resolver para y en términos de x.

En el ejemplo 6 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "multiplicar por 3, luego restar 2", mientras que f^{-1} es la regla "sumar 2, luego dividir entre 3".

Ejemplo 6 Cómo determinar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

Solución Primero se escribe $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

Luego, de esta ecuación se despeja x:

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$
$$x = \frac{y + 2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Por último, se intercambian x y y:

$$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$. ■

Compruebe su respuesta

Se usa la propiedad de la función inversa.

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(3x - 2) = \frac{(3x - 2) + 2}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x + 2}{3}\right) = 3\left(\frac{x + 2}{3}\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \quad ✓$$

Ejemplo 7 Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

Solución Primero se escribe $y = (x^5 - 3)/2$ y se despeja x.

$$y = \frac{x^5 - 3}{2} \qquad \text{Ecuación que define la función}$$

$$2y = x^5 - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x^5 = 2y + 3 \qquad \text{Sume 3}$$

$$x = (2y + 3)^{1/5} \qquad \text{Tome las raíces quintas}$$

Luego se intercambia x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$. ■

En el ejemplo 7 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que f^{-1} es la regla "multiplique entre 2, sume 3, luego tome la raíz quinta".

Compruebe su respuesta

Se emplea la propiedad de la función inversa.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) \\ &= \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} \\ &= (x^5 - 3 + 3)^{1/5} \\ &= (x^5)^{1/5} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f((2x + 3)^{1/5}) \\ &= \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} \\ &= \frac{2x + 3 - 3}{2} \\ &= \frac{2x}{2} = x \end{aligned}$$ ✓

El principio de intercambiar x y y para encontrar la función inversa también proporciona un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está sobre la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está sobre la gráfica de f^{-1}. Pero el punto (b, a) se obtiene del punto (a, b) al reflejar en la línea $y = x$ (véase figura 8). Por lo tanto, como se ilustra en la figura 9, lo siguiente es cierto.

> La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

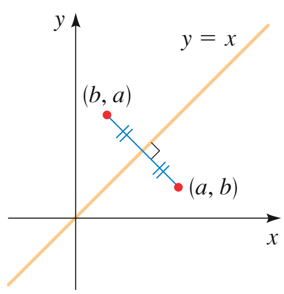


Figura 8

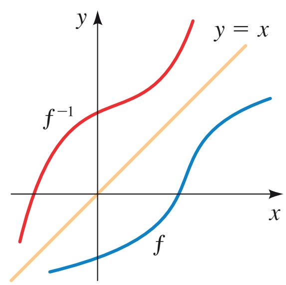


Figura 9

Ejemplo 8 Encontrar la inversa de una función

a) Bosqueje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

b) Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

Solución

a) Con las transformaciones de la sección 2.4, se bosqueja la gráfica de $y = \sqrt{x - 2}$ al trazar la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (ejemplo 1(c) en la sección 2.2) y moverla a la derecha dos unidades.

b) La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f en el inciso a) reflejándola en la recta $y = x$, como se muestra en la figura 10.

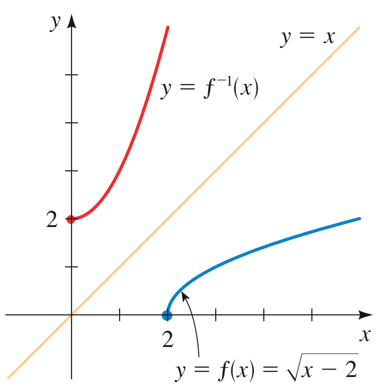


Figura 10

c) De $y = \sqrt{x-2}$ despeje x, notando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x-2} = y$$

$$x - 2 = y^2 \qquad \text{eleve al cuadrado ambos miembros}$$

$$x = y^2 + 2, \quad y \geq 0 \qquad \text{Sume 2}$$

Intercambie x y y:

$$y = x^2 + 2, \qquad x \geq 0$$

Por consiguiente, $\quad f^{-1}(x) = x^2 + 2, \qquad x \geq 0$

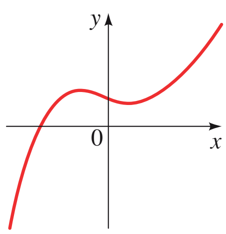
Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la figura 10, esto parece razonable. ■

En el ejemplo 8 se puede observar cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "reste 2, luego tome la raíz cuadrada", mientras que f^{-1} es la regla "eleve al cuadrado, después sume 2".

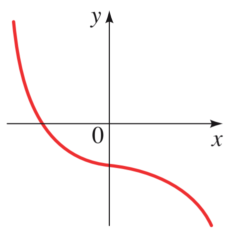
2.8 Ejercicios

1–6 ■ Se da la gráfica de una función f. Determine si f es uno a uno.

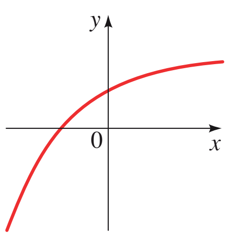
1.



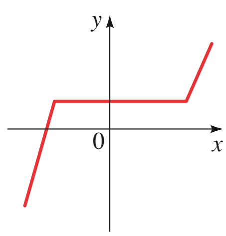
2.



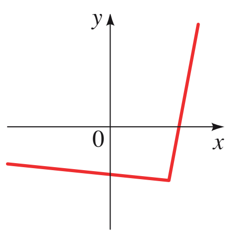
3.



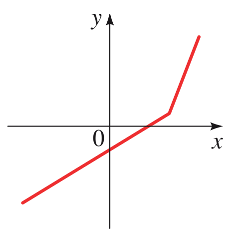
4.



5.



6.



7–16 ■ Determine si la función es uno a uno.

7. $f(x) = -2x + 4$

8. $f(x) = 3x - 2$

9. $g(x) = \sqrt{x}$

10. $g(x) = |x|$

11. $h(x) = x^2 - 2x$

12. $h(x) = x^3 + 8$

13. $f(x) = x^4 + 5$

14. $f(x) = x^4 + 5, \quad 0 \leq x \leq 2$

15. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

16. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

17–18 ■ Suponga que f es una función uno a uno.

17. a) Si $f(2) = 7$, encuentre $f^{-1}(7)$.

b) Si $f^{-1}(3) = -1$, encuentre $f(-1)$.

18. a) Si $f(5) = 18$, encuentre $f^{-1}(18)$.

b) Si $f^{-1}(4) = 2$, encuentre $f(2)$.

19. Si $f(x) = 5 - 2x$, encuentre $f^{-1}(3)$.

20. Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \geq -2$, encuentre $g^{-1}(5)$.

21–30 ■ Use la propiedad de la función inversa para mostrar que f y g son inversas entre sí.

21. $f(x) = x - 6, \quad g(x) = x + 6$

22. $f(x) = 3x, \quad g(x) = \dfrac{x}{3}$

23. $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \dfrac{x+5}{2}$

24. $f(x) = \dfrac{3-x}{4}; \quad g(x) = 3 - 4x$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

26. $f(x) = x^5, \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$

27. $f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0;$

$g(x) = \sqrt{x+4}, \quad x \geq -4$

28. $f(x) = x^3 + 1; \quad g(x) = (x - 1)^{1/3}$

29. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}, \quad x \neq 1;$

$g(x) = \dfrac{1}{x} + 1, \quad x \neq 0$

30. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2;$

$g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 2$

31–50 ■ Encuentre la función inversa de f.

31. $f(x) = 2x + 1$

32. $f(x) = 6 - x$

33. $f(x) = 4x + 7$

34. $f(x) = 3 - 5x$

35. $f(x) = \dfrac{x}{2}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

37. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

38. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x + 2}$

39. $f(x) = \dfrac{1 + 3x}{5 - 2x}$

40. $f(x) = 5 - 4x^3$

41. $f(x) = \sqrt{2 + 5x}$

42. $f(x) = x^2 + x, \quad x \geq -\frac{1}{2}$

43. $f(x) = 4 - x^2, \quad x \geq 0$

44. $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

45. $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$

46. $f(x) = (2 - x^3)^5$

47. $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$

48. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad 0 \leq x \leq 3$

49. $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

50. $f(x) = 1 - x^3$

51–54 ■ Se da una función f.

a) Bosqueje la gráfica de f.

b) Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre f^{-1}.

51. $f(x) = 3x - 6$

52. $f(x) = 16 - x^2, \quad x \geq 0$

53. $f(x) = \sqrt{x + 1}$

54. $f(x) = x^3 - 1$

55–60 ■ Trace una gráfica de f y empléela para determinar si la función es uno a uno.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = x^3 + x$

57. $f(x) = \dfrac{x + 12}{x - 6}$

58. $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$

59. $f(x) = |x| - |x - 6|$

60. $f(x) = x \cdot |x|$

61–64 ■ Se da una función uno a uno.

a) Encuentre la inversa de la función.

b) Grafique tanto la función como su inversa en la misma pantalla para comprobar que las gráficas son reflexiones entre sí en la recta $y = x$.

61. $f(x) = 2 + x$

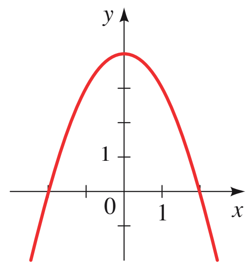
62. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}x$

63. $g(x) = \sqrt{x + 3}$

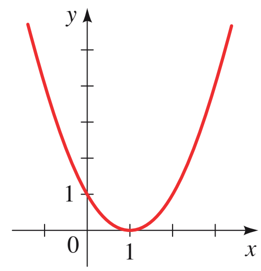
64. $g(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$

65–68 ■ La función dada no es uno a uno. Restrinja su dominio de modo que la función resultante *sea* uno a uno. Encuentre la inversa de la función con el dominio restringido. (Hay más de una respuesta correcta.)

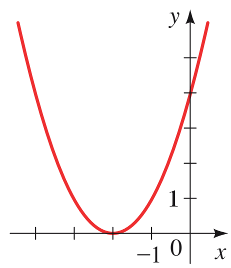
65. $f(x) = 4 - x^2$



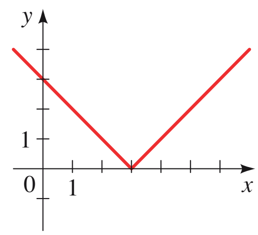
66. $g(x) = (x - 1)^2$



67. $h(x) = (x + 2)^2$

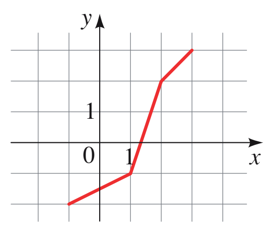


68. $k(x) = |x - 3|$

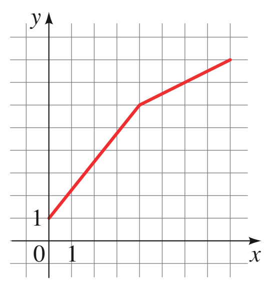


69–70 ■ Use la gráfica de f para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

69.



70.



Aplicaciones

71. Cuota por servicio Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de \$500 más \$80 por hora. Sea x el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.

a) Halle una función f que modela la cuota del investigador como una función de x.

b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?

c) Encuentre $f^{-1}(1220)$. ¿Qué representa su respuesta?

72. Ley de Torricelli Un recipiente contiene 100 galones de agua, que salen de una fuga en el fondo, lo que causa que el recipiente se vacíe en 40 minutos. La ley de Torricelli proporciona el volumen de agua que permanece en el recipiente después de t minutos como

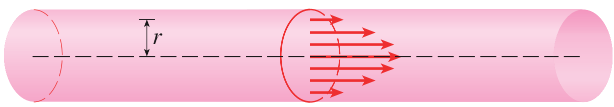
$$V(t) = 100\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2$$

a) Encuentre V^{-1}. ¿Qué representa V^{-1}?
b) Determine $V^{-1}(15)$. ¿Qué representa su respuesta?

73. Flujo de sangre Cuando la sangre se mueve por una vena o arteria, su velocidad v es mayor a lo largo del eje central y disminuye a medida que se incrementa la distancia r desde el eje central (véase la figura). Para una arteria con radio 0.5 cm, v está dada como una función de r por

$$v(r) = 18\,500(0.25 - r^2)$$

a) Encuentre v^{-1}. ¿Qué representa v^{-1}?
b) Determine $v^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?



74. Función de demanda La cantidad vendida de un artículo se llama *demanda* del artículo. La demanda D para cierto artículo es una función del precio dada por

$$D(p) = -3p + 150$$

a) Encuentre D^{-1}. ¿Qué representa D^{-1}?
b) Determine $D^{-1}(30)$. ¿Qué representa su respuesta?

75. Escalas de temperatura La relación entre las escalas Fahrenheit (F) y Celsius (C) esta dada por

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

a) Encuentre F^{-1}. ¿Qué representa F^{-1}?
b) Determine $F^{-1}(86)$. ¿Qué representa su respuesta?

76. Tasas de intercambio El valor relativo de las monedas circulantes fluctúa día con día. Cuando se escribió este problema, un dólar canadiense valía 0.8159 de dólar estadounidense.

a) Encuentre una función f que proporciona el valor $f(x)$ en dólares estadounidenses de x dólares canadienses.
b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?
c) ¿Cuánto serían 12 250 dólares canadienses en moneda estadounidense actual?

77. Impuesto Sobre la Renta. En cierto país, el impuesto por ingresos menores o iguales que 20 000 euros es 10%. Para ingresos de más de 20 000 euros, el impuesto es 2000 euros más 20% de la cantidad sobre 20 000 euros.

a) Encuentre una función f que proporciona el Impuesto Sobre la Renta por un ingreso x. Exprese f como una función definida por partes.
b) Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa f^{-1}?
c) ¿Cuánto ingreso requeriría pagar un impuesto de 10 000 euros?

78. Descuentos múltiples Un vendedor de automóviles anuncia un descuento de 15% en todos sus autos nuevos. Además, el fabricante ofrece una rebaja de \$1000 en la compra de un automóvil nuevo. Sea x el precio de venta del automóvil.

a) Suponga que sólo se aplica el 15% de descuento. Encuentre una función f que modele el precio de compra del automóvil como una función del precio de etiqueta x.
b) Suponga que sólo se aplica una rebaja de \$1000. Encuentre una función g que modele el precio de compra del automóvil como una función del precio de etiqueta x.
c) Encuentre una fórmula para $H = f \circ g$.
d) Encuentre H^{-1}. ¿Qué representa H^{-1}?
e) Determine $H^{-1}(13\,000)$. ¿Qué representa su respuesta?

79. Costo de una pizza Marcello's Pizza fijó como precio base de la pizza grande \$7 más \$2 por cada ingrediente. Por tanto, si usted ordena una pizza grande con x ingredientes, el precio lo dará la función $f(x) = 7 + 2x$. Encuentre f^{-1}. ¿Qué representa la función f^{-1}?

Descubrimiento • Debate

80. Determinar cuándo una función lineal tiene una inversa Para la función lineal $f(x) = mx + b$ sea uno a uno, ¿qué debe ser cierto acerca de su pendiente? Si es uno a uno, encuentre su inversa. ¿La inversa es lineal? En caso afirmativo, ¿cuál es su pendiente?

81. Hallar una inversa "en su cabeza" En las notas del margen de esta sección se señaló que la inversa de una función se puede encontrar revirtiendo las operaciones que constituyen la función. Por ejemplo, en el ejemplo 6 se vio que la inversa de

$$f(x) = 3x - 2 \qquad \text{es} \qquad f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{3}$$

porque el "inverso" de "multiplicar por 3 y restar 2" es "sumar 2 y dividir entre 3". Use el mismo procedimiento para hallar la inversa de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{5}$ **b)** $f(x) = 3 - \dfrac{1}{x}$
c) $f(x) = \sqrt{x^3 + 2}$ **d)** $f(x) = (2x - 5)^3$

Ahora considere otra función:

$$f(x) = x^3 + 2x + 6$$

¿Es posible usar la misma clase de inversión simple de operaciones para hallar la inversa de esta función? En caso afirmativo, hágalo. Si no, explique qué es diferente acerca de esta función que hace difícil esta tarea.

82. La función identidad La función $I(x) = x$ se llama **función identidad**. Muestre que para cualquier función f se tiene $f \circ I = f$, $I \circ f = f$ y $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$. (Esto significa que la función identidad I se comporta para funciones y composición de la misma forma que el número 1 se comporta para números reales y multiplicación.)

83. Solución de una ecuación para una función desconocida En el ejercicio 65 de la sección 2.7 se pidió resolver la ecuación en la que las incógnitas fueron funciones. Ahora que se sabe acerca de las inversas y la función identidad (véase el ejercicio 82), se puede usar álgebra para resolver tales ecuaciones. Por ejemplo, para resolver $f \circ g = h$ para la función desconocida f, se efectúan los pasos siguientes:

$f \circ g = h$	Problema: despejar f
$f \circ g \circ g^{-1} = h \circ g^{-1}$	Componer con g^{-1} a la derecha
$f \circ I = h \circ g^{-1}$	$g \circ g^{-1} = I$
$f = h \circ g^{-1}$	$f \circ I = f$

Por lo tanto, la solución es $f = h \circ g^{-1}$. Use esta técnica para resolver la ecuación $f \circ g = h$ para la función desconocida indicada.

a) Resuelva para f, donde $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$

b) Resuelva para g, donde $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$

2 Repaso

Comprobación de conceptos

1. Defina cada concepto en sus propias palabras. (Compruebe refiriéndose a la definición en el texto.)

a) Función
b) Dominio y rango de una función
c) Gráfica de una función
d) Variables independiente y dependiente

2. Dé un ejemplo de cada tipo de función.

a) Función constante.
b) Función lineal
c) Función cuadrática

3. Trace a mano, en los mismos ejes, las gráficas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = x$ **b)** $g(x) = x^2$
c) $h(x) = x^3$ **d)** $j(x) = x^4$

4. a) Exprese la prueba de la recta vertical
b) Exprese la prueba de la recta horizontal.

5. ¿Cómo se define la tasa promedio de cambio de la función f entre dos puntos?

6. Defina cada concepto en sus propias palabras.

a) Función creciente
b) Función decreciente
c) Función constante

7. Suponga que se da la gráfica de f. Escriba una ecuación para cada gráfica que se obtiene de la gráfica de f como sigue.

a) Desplace 3 unidades hacia arriba
b) Desplace 3 unidades hacia abajo
c) Desplace 3 unidades a la derecha
d) Desplace 3 unidades a la izquierda
e) Refleje en el eje x
f) Refleje en el eje y
g) Alargue verticalmente por un factor de 3
h) Acorte verticalmente por un factor de $\frac{1}{3}$
i) Alargue horizontalmente por un factor de 2
j) Acorte horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$

8. a) ¿Qué es una función par? ¿Qué simetría posee su gráfica? Dé un ejemplo de una función par.
b) ¿Qué es una función impar? ¿Qué simetría posee su gráfica? Dé un ejemplo de una función impar.

9. Escriba la forma estándar de una función cuadrática.

10. ¿Qué significa decir $f(3)$ es un valor máximo local de f?

11. Suponga que f tiene dominio A y g tiene dominio B.

a) ¿Cuál es el dominio de $f + g$?
b) ¿Cuál es el dominio de fg?
c) ¿Cuál es el dominio de f/g?

12. ¿Cómo está definida la función compuesta $f \circ g$?

13. a) ¿Qué es una función uno a uno?

b) ¿Cómo se puede decir si la gráfica de una función es uno a uno?

c) Suponga que f es una función uno a uno con dominio A y rango B. ¿Cómo se define la función inversa f^{-1}? ¿Cuál es el dominio de f^{-1}? ¿Cuál es el rango de f^{-1}?

d) Si se tiene una fórmula para f, ¿cómo encuentra una fórmula para f^{-1}?

e) Si se tiene la gráfica de f, ¿cómo encontraría la gráfica de f^{-1}?

Ejercicios

1. Si $f(x) = x^2 - 4x + 6$, encuentre $f(0)$, $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(x + 1)$, $f(2x)$ y $2f(x) - 2$.

2. Si $f(x) = 4 - \sqrt{3x - 6}$ encuentre $f(5)$, $f(9)$, $f(a + 2)$, $f(-x)$, $f(x^2)$, y $[f(x)]^2$.

3. Se da la gráfica de una función f.

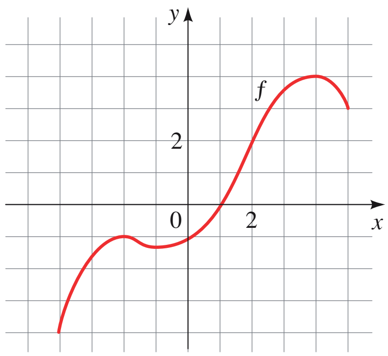
a) Encuentre $f(-2)$ y $f(2)$.

b) Determine el dominio de f.

c) Encuentre el rango de f.

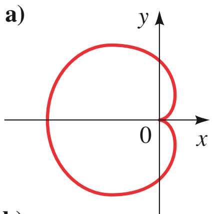
d) ¿En qué intervalos f es creciente? ¿En qué intervalos f es decreciente?

e) ¿f es uno a uno?

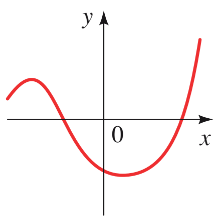


4. ¿Cuáles de las siguientes figuras son gráficas de funciones? ¿Cuál de las funciones son uno a uno?

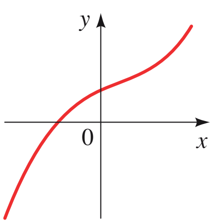
a)



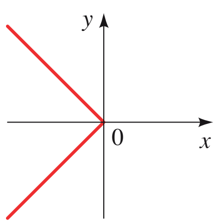
b)



b)



d)



5–6 ■ Encuentre el dominio y el rango de la función.

5. $f(x) = \sqrt{x + 3}$ **6.** $F(t) = t^2 + 2t + 5$

7–14 ■ Encuentre el dominio de la función.

7. $f(x) = 7x + 15$ **8.** $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

9. $f(x) = \sqrt{x + 4}$ **10.** $f(x) = 3x - \dfrac{2}{\sqrt{x + 1}}$

11. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2}$ **12.** $g(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 3}{2x^2 - 5x - 3}$

13. $h(x) = \sqrt{4 - x} + \sqrt{x^2 - 1}$ **14.** $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 1}}{\sqrt[3]{2x} + 2}$

15–32 ■ Bosqueje la gráfica de la función.

15. $f(x) = 1 - 2x$

16. $f(x) = \frac{1}{3}(x - 5),\ 2 \le x \le 8$

17. $f(t) = 1 - \frac{1}{2}t^2$ **18.** $g(t) = t^2 - 2t$

19. $f(x) = x^2 - 6x + 6$ **20.** $f(x) = 3 - 8x - 2x^2$

21. $g(x) = 1 - \sqrt{x}$ **22.** $g(x) = -|x|$

23. $h(x) = \frac{1}{2}x^3$ **24.** $h(x) = \sqrt{x + 3}$

25. $h(x) = \sqrt[3]{x}$ **26.** $H(x) = x^3 - 3x^2$

27. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **28.** $G(x) = \dfrac{1}{(x - 3)^2}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

30. $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ 2x - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

32. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

33. Determine cuál de los rectángulos de visión producen la gráfica más apropiada de la función $f(x) = 6x^3 - 15x^2 + 4x - 1$.

(i) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$ (ii) $[-8, 8]$ por $[-8, 8]$

(iii) $[-4, 4]$ por $[-12, 12]$ (iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

34. Determine cuál rectángulo de visión produce la gráfica más apropiada de la función $f(x) = \sqrt{100 - x^3}$.

i) $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

ii) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

iii) $[-10, 10]$ por $[-10, 40]$

iv) $[-100, 100]$ por $[-100, 100]$

35–38 ■ Dibuje la gráfica de la función en un rectángulo de visión apropiado.

35. $f(x) = x^2 + 25x + 173$

36. $f(x) = 1.1x^3 - 9.6x^2 - 1.4x + 3.2$

37. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}$

38. $f(x) = |x(x + 2)(x + 4)|$

39. Encuentre, aproximadamente, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$.

40. Determine en forma aproximada el rango de la función $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 3x - 6$.

41–44 ■ Encuentre la tasa de cambio promedio de la función entre los puntos dados.

41. $f(x) = x^2 + 3x; \quad x = 0, x = 2$

42. $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}; \quad x = 4, x = 8$

43. $f(x) = \dfrac{1}{x}; \quad x = 3, x = 3 + h$

44. $f(x) = (x + 1)^2; \quad x = a, x = a + h$

45–46 ■ Dibuje la gráfica de la función f, y determine los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

45. $f(x) = x^3 - 4x^2$

46. $f(x) = |x^4 - 16|$

47. Suponga que se da la gráfica de f. Describa cómo se pueden obtener las gráficas de las siguientes funciones a partir de f.

a) $y = f(x) + 8$ **b)** $y = f(x + 8)$

c) $y = 1 + 2f(x)$ **d)** $y = f(x - 2) - 2$

e) $y = f(-x)$ **f)** $y = -f(-x)$

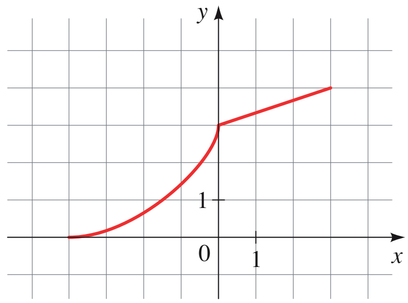
g) $y = -f(x)$ **h)** $y = f^{-1}(x)$

48. Se da la gráfica de f. Trace las gráficas de las siguientes funciones.

a) $y = f(x - 2)$ **b)** $y = -f(x)$

c) $y = 3 - f(x)$ **d)** $y = \frac{1}{2}f(x) - 1$

e) $y = f^{-1}(x)$ **f)** $y = f(-x)$



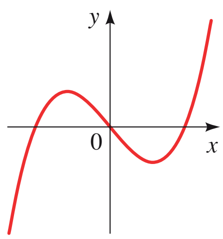
49. Determine si f es par, impar o ninguna.

a) $f(x) = 2x^5 - 3x^2 + 2$ **b)** $f(x) = x^3 - x^7$

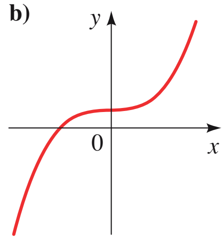
c) $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **d)** $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$

50. Determine si la función de la figura es par, impar o ninguna.

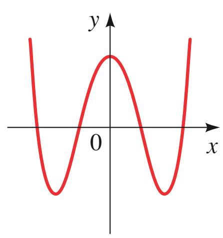
a)



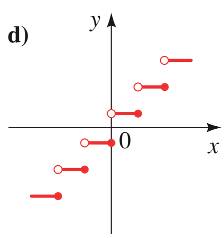
b)



c)



d)



51. Exprese la función cuadrática $f(x) = x^2 + 4x + 1$ en la forma estándar.

52. Exprese la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 12x + 12$ en la forma estándar.

53. Encuentre el valor mínimo de la función $g(x) = 2x^2 + 4x - 5$.

54. Determine el valor máximo de la función $f(x) = 1 - x - x^2$.

55. Se lanza una piedra hacia arriba desde la parte superior de un edificio. Su altura (en pies) sobre el suelo después de t segundos está dada por $h(t) = -16t^2 + 48t + 32$. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

56. La ganancia P (en dólares) que se genera al vender x unidades de cierto artículo está dada por

$$P(x) = -1500 + 12x - 0.0004x^2$$

¿Cuál es la ganancia máxima, y cuántas unidades se deben vender para generarla?

57–58 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y los valores de x en los que ocurren. Exprese cada respuesta correcta hasta dos lugares decimales.

57. $f(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

58. $f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$

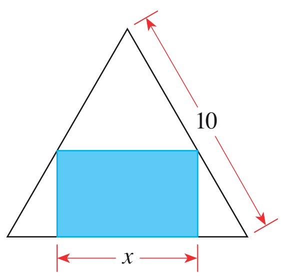
59. El número de acondicionadores de aire que vende una tienda de aparatos depende de la época del año. Bosqueje una gráfica aproximada del número de unidades A/C vendidas como una función de la época del año.

60. Un triángulo isósceles tiene un perímetro de 8 cm. Exprese el área A del triángulo como una función de la longitud b de la base del triángulo.

61. Un rectángulo está inscrito en un triángulo equilátero con un perímetro de 30 cm como en la figura.

a) Exprese el área A del rectángulo como una función de la longitud x mostrada en la figura.

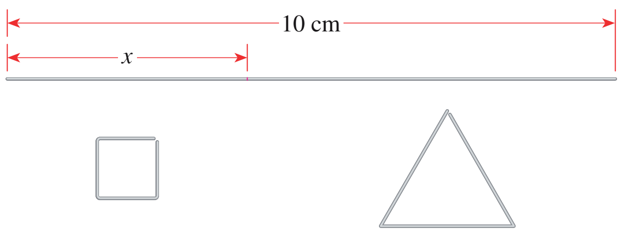
b) Encuentre las dimensiones del rectángulo con el área más grande.



62. Una pieza de alambre de 10 m de largo se corta en dos piezas. Una de longitud x, se dobla en la forma de un cuadrado. La otra pieza se dobla en la forma de un triángulo equilátero.

a) Exprese el área total encerrada como una función de x.

b) ¿Para qué valor de x el área total es un mínimo?



63. Si $f(x) = x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = 4 - 3x$, encuentre las siguientes funciones.

a) $f + g$ **b)** $f - g$ **c)** fg
d) f/g **e)** $f \circ g$ **f)** $g \circ f$

64. Si $f(x) = 1 + x^2$ y $g(x) = \sqrt{x - 1}$, encuentre lo siguiente.

a) $f \circ g$ **b)** $g \circ f$ **c)** $(f \circ g)(2)$
d) $(f \circ f)(2)$ **e)** $f \circ g \circ f$ **f)** $g \circ f \circ g$

65–66 ■ Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$ y sus dominios.

65. $f(x) = 3x - 1, \quad g(x) = 2x - x^2$

66. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \dfrac{2}{x - 4}$

67. Encuentre $f \circ g \circ h$, donde $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = 1 - x^2$, y $h(x) = 1 + \sqrt{x}$.

68. Si $T(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$, encuentre funciones f, g y h tales que $f \circ g \circ h = T$.

69–74 ■ Determine si la función es uno a uno.

69. $f(x) = 3 + x^3$

70. $g(x) = 2 - 2x + x^2$

71. $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$

72. $r(x) = 2 + \sqrt{x + 3}$

73. $p(x) = 3.3 + 1.6x - 2.5x^3$

74. $q(x) = 3.3 + 1.6x + 2.5x^3$

75–78 ■ Encuentre la inversa de la función.

75. $f(x) = 3x - 2$

76. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3}$

77. $f(x) = (x + 1)^3$

78. $f(x) = 1 + \sqrt[5]{x - 2}$

79. a) Bosqueje la gráfica de la función

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0$$

b) Use el inciso a) para bosquejar la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

80. a) Muestre que la función $f(x) = 1 + \sqrt[4]{x}$ es uno a uno.

b) Bosqueje la gráfica de f.

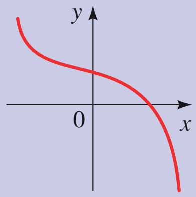
c) Use el inciso b) para trazar la gráfica de f^{-1}.

d) Encuentre una ecuación para f^{-1}.

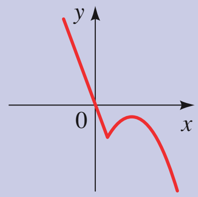
2 Evaluación

1. ¿Cuáles de las siguientes son gráficas de funciones? Si la gráfica corresponde a la de una función, ¿Es uno a uno?

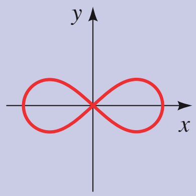
a)



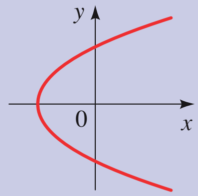
b)



c)



d)



2. Sea $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$.

(a) Evalúe $f(3)$, $f(5)$ y $f(a-1)$.

(b) Encuentre el dominio de f.

3. Determine la tasa promedio de cambio para la función $f(t) = t^2 - 2t$ entre $t = 2$ y $t = 5$.

4. a) Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = x^3$.

b) Use el inciso a) para graficar la función $g(x) = (x-1)^3 - 2$.

5. a) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(x-3) + 2$ a partir de la gráfica de f?

b) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $y = f(-x)$ a partir de la gráfica de f?

6. a) Escriba la función cuadrática $f(x) = 2x^2 - 8x + 13$ en la forma estándar.

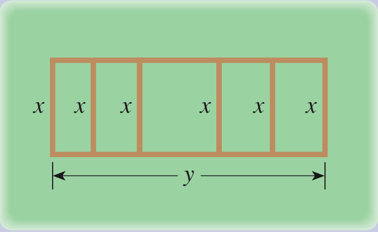
b) Bosqueje una gráfica de f.

c) ¿Cuál es el valor mínimo de f?

7. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Evalúe $f(-2)$ y $f(1)$.

b) Bosqueje la gráfica de f.



8. a) Si 1800 pies de cerca están disponibles para construir cinco corrales adyacentes, como se ilustra en el diagrama de la izquierda, exprese el área total de los corrales como una función de x.

b) ¿Qué valor de x maximizará el área total?

9. Si $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 3$, encuentre lo siguiente.

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$

c) $f(g(2))$ d) $g(f(2))$

e) $g \circ g \circ g$

10. a) Si $f(x) = \sqrt{3 - x}$, encuentre la función inversa f^{-1}.

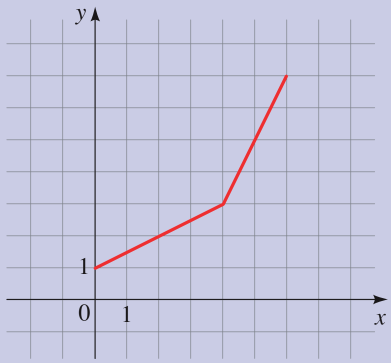
b) Bosqueje las gráficas de f y f^{-1} en los mismos ejes de coordenadas.

11. Se da la gráfica de una función f.

a) Encuentre el dominio y el rango de f.

b) Bosqueje la gráfica de f^{-1}.

c) Encuentre la tasa de cambio promedio de f entre $x = 2$ y $x = 6$.



12. Sea $f(x) = 3x^4 - 14x^2 + 5x - 3$.

a) Dibuje la gráfica de f en un rectángulo de visión apropiado.

b) ¿Es f uno a uno?

c) Encuentre los valores locales máximo y mínimo de f y los valores de x en los que ocurren. Exprese cada respuesta correcta a dos decimales.

d) Use la gráfica para determinar el rango de f.

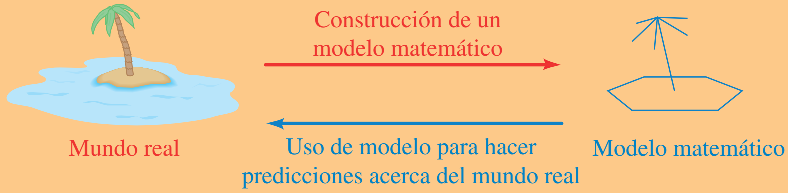
e) Encuentre los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

Enfoque en el modelado

Ajuste de líneas a datos

Un modelo es una representación de un objeto o proceso. Por ejemplo, un juguete Ferrari es un *modelo* del automóvil real; un mapa urbano es un modelo de las calles y autopistas de una ciudad. Un modelo representa por lo común sólo un aspecto del objeto original. El juguete Ferrari no es un automóvil real, pero representa lo que se parece a un Ferrari real; un mapa de carreteras no contiene las calles reales de una ciudad, pero representa la relación de las calles entre sí.

Un **modelo matemático** es una representación matemática de un objeto o proceso. Con frecuencia un modelo matemático es una función que describe cierto fenómeno. En el ejemplo 12 de la sección 1.10 se encontró que la función $T = -10h + 20$ modela la temperatura atmosférica T a la altura h. Después se utilizó esta función para predecir la temperatura a cierta altura. En la figura siguiente se ilustra el proceso de modelado matemático.



Los modelos matemáticos son útiles porque permiten aislar aspectos críticos del objeto bajo estudio y predecir cómo se comportará. Los modelos se emplean de forma extensa en ingeniería, industria y manufactura. Por ejemplo, los ingenieros emplean modelos de computadora de rascacielos para predecir su resistencia y cómo se comportarían en un terremoto. Los fabricantes de aviones usan elaborados modelos matemáticos para predecir las propiedades aerodinámicas de un nuevo diseño *antes* de construir en realidad el avión.

¿Cómo se desarrollan los modelos matemáticos? ¿Cómo se usan para predecir el comportamiento de un proceso? En las páginas siguientes y en las secciones posteriores de *Enfoque en el modelado*, se explica cómo se pueden construir los modelos matemáticos a partir de datos del mundo real, y se describen algunas de sus aplicaciones.

Ecuaciones lineales como modelos

Los datos de la tabla 1 se obtuvieron midiendo la presión a varias profundidades en el océano. En la tabla se observa que la presión se incrementa con la profundidad. Para ver mejor esta tendencia, se construye una **gráfica de dispersión** como en la figura 1. Al parecer los datos yacen más o menos a lo largo de una recta. Se puede intentar ajustar una recta en forma visual para aproximar los puntos en la gráfica de dis-

Tabla 1

Profundidad (pies)	Presión (lb/pulg^2)
5	15.5
8	20.3
12	20.7
15	20.8
18	23.2
22	23.8
25	24.9
30	29.3

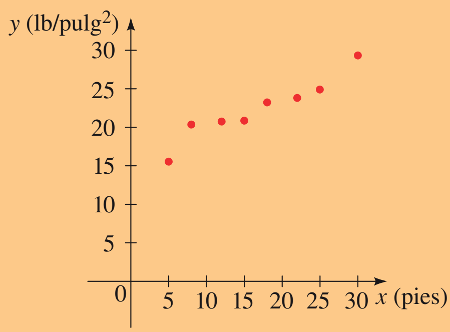


Figura 1

Diagrama de dispersión

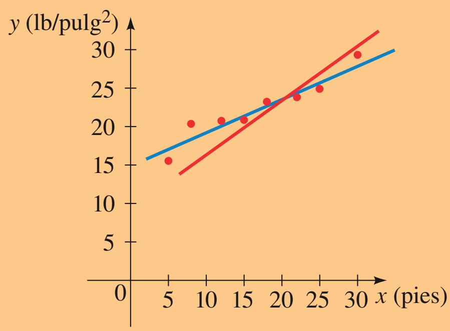


Figura 2

Intentos para ajustar de manera visual la recta a los datos

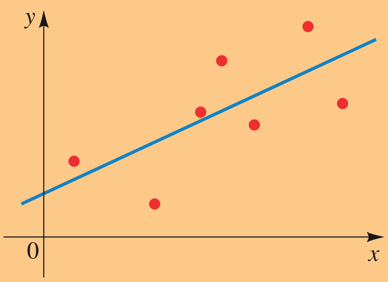


Figura 3
Distancias desde los puntos a la recta

persión (véase fiura 2), pero este método no es exacto. Así que, ¿cómo se encuentra la recta que ajusta los datos lo mejor posible?

Parece razonable elegir la recta que se acerca lo más posible a todos los puntos. Esta es la recta para la cual la suma de las distancias desde los puntos de datos a la recta es tan pequeña como sea posible (véase figura 3). Por razones técnicas es mejor hallar la recta donde la suma de los cuadrados de estas distancias es la más pequeña. La recta resultante se llama **recta de regresión**. La fórmula para la recta de regresión se encuentra por medio del cálculo. Por fortuna, esta fórmula se programa en la mayor parte de las calculadoras de graficación. Con una calculadora (véase figura 4(a)), se encuentra que la recta de regresión para los datos de profundidad-presión en la tabla 1 es

$$P = 0.45d + 14.7 \qquad \text{Modelo}$$

La recta de regresión y el diagrama de dispersión se grafican en la figura 4(b).

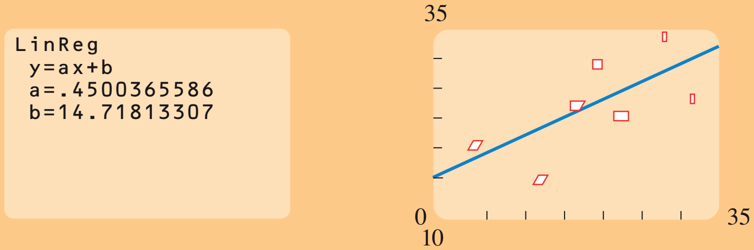


Figura 4
Regresión lineal en una calculadora de graficación

a) Resultado del comando `LinReg` en una calculadora TI-83

b) Diagrama de dispersión y recta de regresión para los datos de profundidad-presión

Ejemplo 1 Salto olímpico con pértiga

En la tabla 2 se dan los registros de salto olímpico con pértiga para varones hasta 2004.

a) Encuentre la recta de regresión para los datos.

b) Elabore una gráfica de dispersión de los datos y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser un modelo adecuado para los datos?

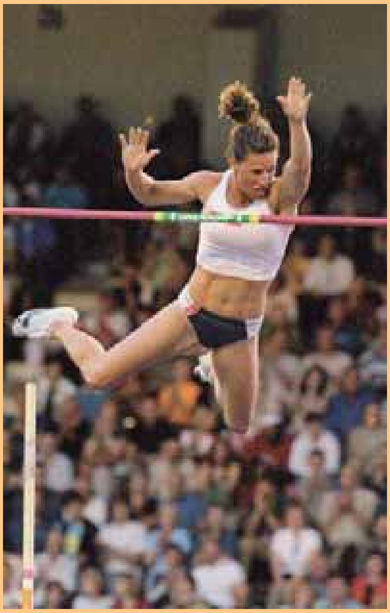
c) Use el modelo para predecir la altura ganadora de salto con pértiga para los Juegos Olímpicos de 2008.

Tabla 2

Año	Medallista de oro	Altura (m)	Año	Medallista de oro	Altura (m)
1896	William Hoyt, USA	3.30	1956	Robert Richards, USA	4.56
1900	Irving Baxter, USA	3.30	1960	Don Bragg, USA	4.70
1904	Charles Dvorak, USA	3.50	1964	Fred Hansen, USA	5.10
1906	Fernand Gonder, Francia	3.50	1968	Bob Seagren, USA	5.40
1908	A. Gilbert, E. Cook, USA	3.71	1972	W. Nordwig, E. Alemania	5.64
1912	Harry Babcock, USA	3.95	1976	Tadeusz Slusarski, Polonia	5.64
1920	Frank Foss, USA	4.09	1980	W. Kozakiewicz, Polonia	5.78
1924	Lee Barnes, USA	3.95	1984	Pierre Quinon, Francia	5.75
1928	Sabin Carr, USA	4.20	1988	Sergei Bubka, USSR	5.90
1932	William Miller, USA	4.31	1992	M. Tarassob, Equipo unificado	5.87
1936	Earle Meadows, USA	4.35	1996	Jean Jalfione, Francia	5.92
1948	Guinn Smith, USA	4.30	2000	Nick Hysong, USA	5.90
1952	Robert Richards, USA	4.55	2004	Timothy Mack, USA	5.95

```
LinReg
 y=ax+b
 a=.0265652857
 b=3.400989881
```

Resultado de la función `LinReg` en la TI-83 Plus



Alexandr Satinsky/AFP/Getty Images

Solución

a) Sea x = año – 1900, de modo que 1896 corresponde a $x = -4$, 1900 a $x = 0$, etcétera. Con una calculadora, encuentre la recta de regresión:

$$y = 0.0266x + 3.40$$

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión se muestran en la figura 5. La recta de regresión parece ser un buen modelo para los datos.

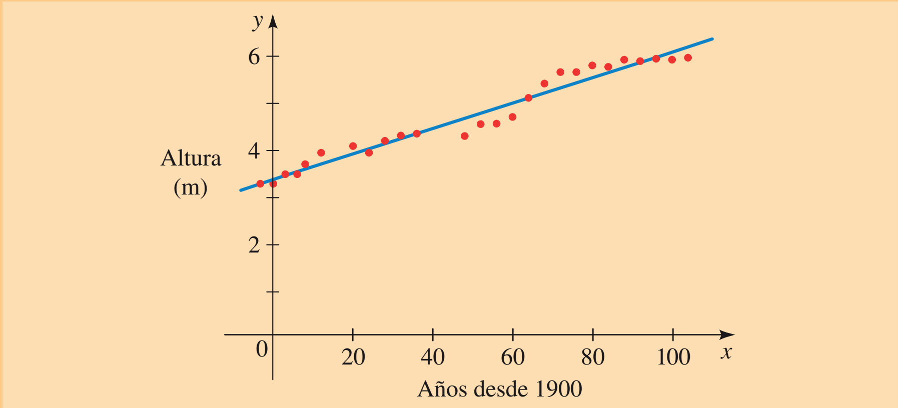


Figura 5
Diagrama de dispersión y recta de regresión para los datos de salto con pértiga.

c) El año 2008 corresponde a $x = 108$ en el modelo. El modelo da

$$y = 0.0266(108) + 3.40 \approx 6.27 \text{ m}$$

■

Si al momento de leer esto ya pasaron los Juegos Olímpicos de 2008, busque el registro real para 2008 y compare con esta predicción. Esta clase de predicciones son razonables para puntos cercanos a los datos medidos, pero no se pueden hacer predicciones muy apartadas respecto de los datos medidos. ¿Es razonable usar este modelo para predecir el registro 100 años a partir de ahora?

Ejemplo 2 Fibras de asbesto y cáncer

Cuando las ratas de laboratorio se exponen a fibras de asbesto, en algunas de ellas se forman tumores pulmonares. En la tabla 3 se listan los resultados de varios experimentos realizados por varios científicos.

a) Encuentre la recta de regresión para los datos.

b) Construya una gráfica de dispersión de los datos y grafique la recta de regresión. ¿La recta de regresión parece ser un modelo adecuado para los datos?

Eric & David Hosking/Corbis

Tabla 3

Exposición a asbestos (fibras/mL)	Porcentaje que desarrolla tumores pulmonares
50	2
400	6
500	5
900	10
1100	26
1600	42
1800	37
2000	28
3000	50

Solución

a) Con una calculadora, se encuentra la recta de regresión (véase figura 6(a)):

$$y = 0.0177x + 0.5405$$

b) La gráfica de dispersión y la recta de regresión se muestran en la figura 6(b). La recta de regresión parece ser un modelo razonable para los datos.

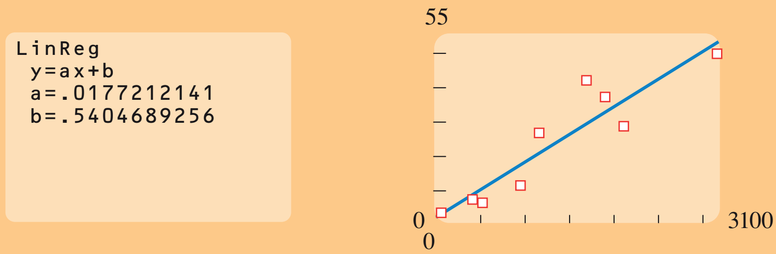


Figura 6
Regresión lineal para los datos de asbestos-tumor

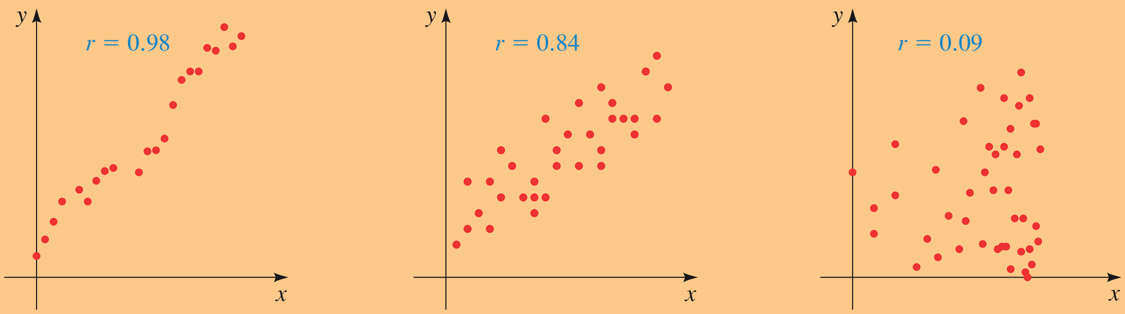
a) Resultado del comando `LinReg` en una calculadora TI-83

b) Diagrama de dispersión y recta de regresión

¿Qué tan bueno es el ajuste?

Para cualquier conjunto dado de datos siempre es posible encontrar la recta de regresión, incluso si los datos no tienden a encontrarse a lo largo de una recta. Considere las tres gráficas de dispersión de la figura 7.

Figura 7



Los datos de la primera gráfica de dispersión al parecer se encuentran a lo largo de una recta. En la segunda gráfica también parecen mostrar una tendencia lineal, pero se ve más dispersa. La tercera no tiene una tendencia discernible. Se pueden hallar con facilidad las rectas de regresión para cada gráfica de dispersión con una calculadora para gráficas. ¿Pero qué tan bien representan estas líneas los datos? La calculadora proporciona un **coeficiente de correlación** r, que es una medida estadística de cuán bien se ajustan los datos a la recta de regresión, o cuán bien se **correlacionan** dos variables. El coeficiente de correlación es un número entre -1 y 1. Un coeficiente de correlación r cercano a 1 o -1 indica correlación fuerte y un coeficiente cercano a 0 indica muy poca correlación; la pendiente de la recta determina si el coeficiente de correlación es positivo o negativo. También, mientras más datos se tengan, más significativo será el coeficiente de correlación. Por medio de una calculadora se encuentra que el coeficiente de correlación entre fibras de asbestos y tumores pulmonares en las ratas del ejemplo 2 es $r = 0.92$. Se puede concluir de manera razonable que están relacionados la presencia de asbestos y el riesgo de tumores pulmonares en las ratas. ¿Se concluye que los asbestos *causan* tumores pulmonares en las ratas?

Si dos variables están correlacionadas, no necesariamente significa que un cambio en una variable *causa* un cambio en la otra. Por ejemplo, el matemático John Allen Paulos señala que el tamaño del zapato está relacionado de manera estrecha con las

calificaciones de matemáticas entre los escolares. ¿Esto significa que por tener los pies grandes se obtienen altas calificaciones en matemáticas? De hecho no, tanto el tamaño del zapato como las habilidades matemáticas se incrementan de manera independiente conforme crecen los niños. Por lo tanto, es importante no adelantar conclusiones: la correlación y la causa no son lo mismo. La correlación es una herramienta útil para sacar a la luz relaciones importantes de causa y efecto, pero para probar la causa, se debe explicar el mecanismo mediante el cual una variable afecta a la otra. Por ejemplo, el vínculo entre fumar y el cáncer pulmonar se observó como una correlación mucho antes de que la ciencia encontrara el mecanismo por el que fumar causa cáncer pulmonar.

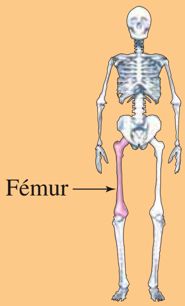
Problemas

1. Longitud del fémur y estatura Los antropólogos usan un modelo lineal que relaciona la longitud del fémur con la estatura. El modelo permite a un antropólogo determinar la estatura de un individuo cuando sólo se encuentra un esqueleto parcial (incluso el fémur). En este problema se encuentra el modelo analizando los datos de la longitud del fémur y la estatura para los ocho varones dados en la tabla.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

c) Un antropólogo encuentra un fémur de 59 cm de longitud. ¿Qué tan alta era la persona?



Longitud del fémur (cm)	Estatura (cm)
50.1	178.5
48.3	173.6
45.2	164.8
44.7	163.7
44.5	168.3
42.7	165.0
39.5	155.4
38.0	155.8

2. Demanda de bebidas carbonatadas Un administrador de tiendas de abarrotes observa que las ventas de bebidas carbonatadas son mucho más altas en días cálidos, así que reúne los datos de la tabla.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

c) Use el modelo para predecir ventas de bebidas carbonatadas si la temperatura es 95ºF.

Temperatura alta (°F)	Número de latas vendidas
55	340
58	335
64	410
68	460
70	450
75	610
80	735
84	780

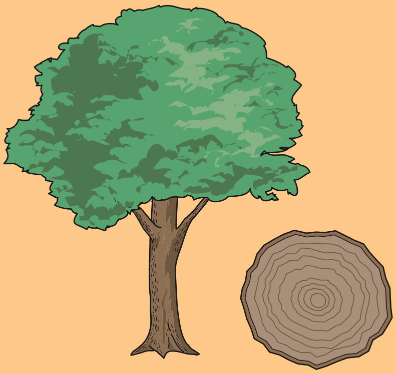
3. Diámetro de un árbol y su edad Para estimar las edades de los árboles, los guardabosques emplean un modelo lineal que relaciona el diámetro del árbol con la edad. El modelo es útil porque es mucho más fácil medir el diámetro del árbol que su

edad (lo cual requiere herramientas especiales para extraer una sección transversal representativa del árbol y contar los anillos). Para encontrar el modelo, use los datos de la tabla reunidos para cierta variedad de robles.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique una función lineal que modele los datos.

c) Use el modelo para estimar la edad de un roble cuyo diámetro es de 18 pulgadas.



Diámetro (pulg.)	Edad (años)
2.5	15
4.0	24
6.0	32
8.0	56
9.0	49
9.5	76
12.5	90
15.5	89

4. Concentraciones de dióxido de carbono En la tabla se listan las concentraciones de dióxido de carbono (CO_2) en la atmósfera, medidas en partes por millón (ppm) en el observatorio Mauna Loa de 1984 a 2000.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la concentración de CO_2 en la atmósfera en 2001. Compare su respuesta con la concentración real de CO_2 de 371.1 medida en 2001.

Año	Concentración de CO_2 (ppm)
1984	344.3
1986	347.0
1988	351.3
1990	354.0
1992	356.3
1994	358.9
1996	362.7
1998	366.5
2000	369.4

5. Temperatura y grillos chirreadores Los biólogos han observado que la tasa de chirrido de ciertas especies parece estar relacionada con la temperatura. En la tabla se muestran las tasas de chirrido para varias temperaturas.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la tasa de chirrido a 100°F.

Temperatura (°F)	Tasa de chirrido (chirridos/min)
50	20
55	46
60	79
65	91
70	113
75	140
80	173
85	198
90	211

Ingreso	Tasa de úlcera
$4 000	14.1
$6 000	13.0
$8 000	13.4
$12 000	12.4
$16 000	12.0
$20 000	12.5
$30 000	10.5
$45 000	9.4
$60 000	8.2

6. Tasas de úlcera En la tabla del margen se muestran las tasas de úlcera péptica (por cada 100 personas) para varios ingresos familiares según el informe de 1989 de la Nacional Health Interview Survey.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

Matemáticas en el mundo moderno

Ed Kashi/Corbis

Aviones modelo

Cuando se considera la palabra “modelo”, con frecuencia se piensa en un modelo de automóvil o un modelo de aeroplano. De hecho, este uso cotidiano de la palabra *modelo* corresponde a su uso en matemáticas. Un modelo representa por lo general cierto aspecto del objeto original. Así, un modelo de avión representa el aspecto real del avión. Antes de 1980 los fabricantes de aviones construían maquetas a escala completa de nuevos diseños de aviones para probar sus propiedades aerodinámicas. En la actualidad, los fabricantes “construyen” modelos matemáticos de aviones, que son almacenados en la memoria de las computadoras. Las propiedades aerodinámicas de los “aeroplanos matemáticos” corresponden a las de los aviones reales, pero los aviones matemáticos se pueden volar y probar sin salir de la memoria de la computadora.

c) Estime la tasa de úlcera péptica para un nivel de ingreso de $25 000 de acuerdo con el modelo lineal del inciso b).

d) Calcule la tasa de úlcera péptica para un nivel de ingresos de $80 000 de acuerdo con el modelo lineal del inciso b).

7. Preponderancia del mosquito En la tabla se muestra la abundancia relativa de mosquitos (medida por la tasa de preponderancia del mosquito) contra el caudal (medido como un porcentaje del caudal máximo) de redes de canales en la ciudad de Saga, Japón.

a) Construya una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la tasa positiva de mosquitos si el caudal de canal es 70% del máximo.

Caudal (%)	Tasa positiva de mosquitos (%)
0	22
10	16
40	12
60	11
90	6
100	2

8. Ruido e inteligibilidad Los audiólogos estudian la inteligibilidad de los enunciados hablados en diferentes condiciones de ruido. La inteligibilidad, la puntuación MRT, se mide como el por ciento de un enunciado hablado que la persona que escucha puede descifrar a cierto nivel de ruido en decibeles (dB). En la tabla se muestran los resultados de una de estas pruebas.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Encuentre el coeficiente de correlación. ¿Es apropiado un modelo lineal?

d) Use el modelo lineal del inciso b) para estimar la inteligibilidad de un enunciado a un nivel de ruido de 94 dB.

Nivel de ruido (dB)	Puntuación MRT(%)
80	99
84	91
88	84
92	70
96	47
100	23
104	11

Año	Esperanza de vida
1920	54.1
1930	59.7
1940	62.9
1950	68.2
1960	69.7
1970	70.8
1980	73.7
1990	75.4
2000	76.9

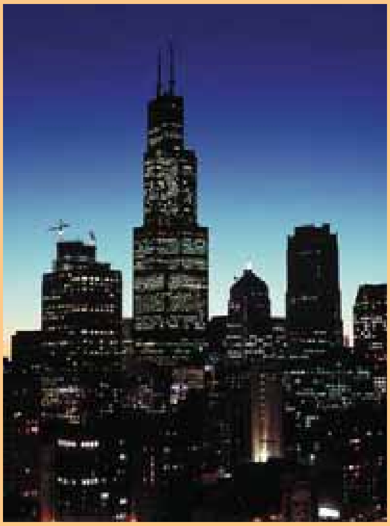
9. Esperanza de vida La esperanza de vida promedio en Estados Unidos ha estado subiendo de forma permanente en las últimas décadas, como se muestra en la tabla.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) Use el modelo lineal que encontró en el inciso b) para predecir la esperanza de vida en el año 2004.

d) Busque en Internet o en la biblioteca la esperanza de vida promedio de 2004. Compare con su respuesta del inciso c).


Phil Shemeister/Corbis

10. Alturas de edificios altos En la tabla se dan las alturas y el número de pisos de 11 edificios altos.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre y grafique la recta de regresión.

c) ¿Cuál es la pendiente de su recta de regresión? ¿Qué indica su valor?

Edificio	Altura (pies)	Pisos
Empire State Building, Nueva York	1250	102
One Liberty Place, Filadelfia	945	61
Canada Trust Tower, Toronto	863	51
Bank of America Tower, Seattle	943	76
Sears Tower, Chicago	1450	110
Petronas Tower I, Malasia	1483	88
Commerzbank Tower, Alemania	850	60
Palace of Culture and Science, Polonia	758	42
Republic Plaza, Singapur	919	66
Transamerica Pyramid, San Francisco	853	48
Taipei 101 Building, Taiwán	1679	101

11. Registros de nado olímpico En la tabla se dan los tiempos de medalla de oro en el evento de nado olímpico de 100 m estilo libre para varones y mujeres.

a) Encuentre las rectas de regresión para los datos de varones y los datos de mujeres.

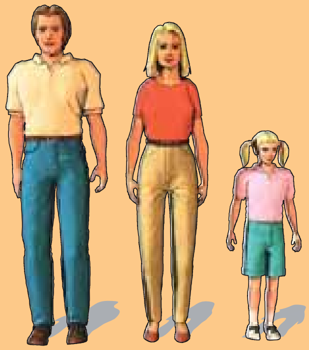
b) Bosqueje ambas rectas de regresión en la misma gráfica. ¿Cuándo estas rectas predicen que las mujeres vencerán a los varones en el evento? ¿Esta conclusión parece ser razonable?

VARONES

Año	Medallista de oro	Tiempo (s)
1908	C. Daniels, USA	65.6
1912	D. Kahanamoku, USA	63.4
1920	D. Kahanamoku, USA	61.4
1924	J. Weissmuller, USA	59.0
1928	J. Weissmuller, USA	58.6
1932	Y. Miyazaki, Japón	58.2
1936	F. Csik, Hungría	57.6
1948	W. Ris, USA	57.3
1952	C. Scholes, USA	57.4
1956	J. Henricks, Australia	55.4
1960	J. Devitt, Australia	55.2
1964	D. Schollander, USA	53.4
1968	M. Wenden, Australia	52.2
1972	M. Spitz, USA	51.22
1976	J. Montgomery, USA	49.99
1980	J. Woithe, E. Alemania	50.40
1984	R. Gaines, USA	49.80
1988	M. Biondi, USA	48.63
1992	A. Popov, Russia	49.02
1996	A. Popov, Russia	48.74
2000	P. van den Hoogenband, Países bajos	48.30
2004	P. van den Hoogenband, Países bajos	48.17

MUJERES

Año	Medallista de oro	Tiempo (s)
1912	F. Durack, Australia	82.2
1920	E. Bleibtrey, USA	73.6
1924	E. Lackie, USA	72.4
1928	A. Osipowich, USA	71.0
1932	H. Madison, USA	66.8
1936	H. Mastenbroek, Holanda	65.9
1948	G. Andersen, Dinamarca	66.3
1952	K. Szoke, Hungría	66.8
1956	D. Fraser, Australia	62.0
1960	D. Fraser, Australia	61.2
1964	D. Fraser, Australia	59.5
1968	J. Henne, USA	60.0
1972	S. Nielson, USA	58.59
1976	K. Ender, E. Alemania	55.65
1980	B. Krause, E. Alemania	54.79
1984	(Tie) C. Steinseifer, USA	55.92
	N. Hogshead, USA	55.92
1988	K. Otto, E. Alemania	54.93
1992	Z. Yong, China	54.64
1996	L. Jingyi, China	54.50
2000	I. DeBruijn, Holanda	53.83
2004	J. Henry, Australia	53.84



12. Estatura de los padres y estatura de sus hijos En 1885, Sir Francis Galton comparó la estatura de los hijos con la de sus padres. Su estudio es considerado uno de los primeros usos de la regresión. En la tabla se prorpocionan algunos de los datos originales de Galton. El término “estatura promedio de los padres” significa el promedio de estaturas del padre y de la madre.

a) Encuentre una ecuación lineal que modele los datos.

b) ¿Qué tan bien predice el modelo su propia estatura (con base en las estaturas de sus padres)?

Estatura promedio de los padres (pulg.)	Estatura de los hijos (pulg.)
64.5	66.2
65.5	66.2
66.5	67.2
67.5	69.2
68.5	67.2
68.5	69.2
69.5	71.2
69.5	70.2
70.5	69.2
70.5	70.2
72.5	72.2
73.5	73.2

13. Medida del zapato y estatura ¿Considera que están relacionadas la medida del zapato y la estatura? Investigue mediante una encuesta acerca de la medida del zapato y la estatura de los integrantes de su grupo de clases. (Por supuesto, los datos para los varones deben ir aparte de los de las mujeres.) Encuentre el coeficiente de correlación.

14. Demanda de caramelos En este problema se determinará una ecuación de demanda lineal que describe la demanda de caramelos en su grupo de clases. Encueste a sus compañeros para determinar qué precio estarían dispuestos a pagar por cada caramelo. La forma de su encuesta podría asemejarse a la que se muestra a la izquierda.

a) Construya una tabla del número de encuestados que responden “sí” en cada nivel de precio.

b) Construya una gráfica de dispersión de sus datos.

c) Encuentre y grafique la recta de regresión $y = mp + b$, que proporcione el número de encuestados y que comprarían un caramelo si el precio fuera p centavos. Esta es la *ecuación de demanda*. ¿Por qué es negativa la pendiente m?

d) ¿Cuál es el intersecto p de la ecuación de demanda? ¿Qué indica el interfecto acerca el precio de los caramelos?

¿Compraría un caramelo de la máquina del pasillo si el precio es el que se indica?

Precio	Sí o no
30¢	
40¢	
50¢	
60¢	
70¢	
80¢	
90¢	
$1.00	
$1.10	
$1.20	

3 Funciones polinomiales y racionales

J. L. Amos/SuperStock

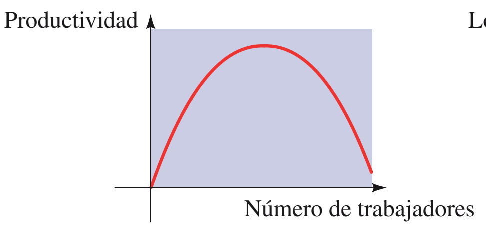
Esquema del capítulo

Las funciones definidas por expresiones polinomiales se llaman funciones polinomiales. Por ejemplo,

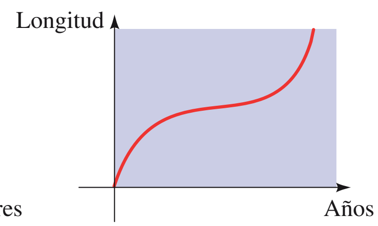
$$P(x) = 2x^3 - x + 1$$

es una función polinomial. Las funciones polinomiales son fáciles de evaluar porque están definidas con sólo suma, resta y multiplicación. Esta propiedad hace que sean las funciones más útiles en matemáticas.

Las gráficas de funciones polinomiales pueden aumentar y disminuir varias veces. Por esta razón son útiles para modelar muchas situaciones del mundo real. Por ejemplo, el dueño de una fábrica nota que si incrementa el número de trabajadores, se incrementa la productividad, pero si hay demasiados trabajadores, la productividad comienza a disminuir. Esta situación se modela mediante una función polinomial de grado 2 (un polinomio cuadrático). En muchas especies animales los jóvenes experimentan un crecimiento acelerado inicial, seguido de un periodo de crecimiento lento, seguido de otro crecimiento acelerado. Este fenómeno se modela mediante una función polinomial de grado 3 (un polinomio cúbico).

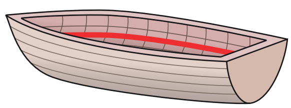


La productividad se modela mediante un polinomio de grado 2.



El crecimiento se modela mediante un polinomio de grado 3.

Las gráficas de funciones polinomiales son hermosas curvas lisas que se emplean en procesos de diseño. Por ejemplo, los constructores de botes juntan porciones de gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas splines cúbicos) con el fin de diseñar las curvas naturales para el casco del bote.



En este capítulo se estudian funciones racionales, que son cocientes de funciones polinomiales. Se verá que las funciones racionales también tienen muchas aplicaciones útiles.

3.1 Funciones polinomiales y sus gráficas

Antes de trabajar con funciones polinomiales, se debe acordar acerca de cierta terminología.

Funciones polinomiales

Una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la potencia más alta, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Es común referirse a las funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Coeficiente constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6

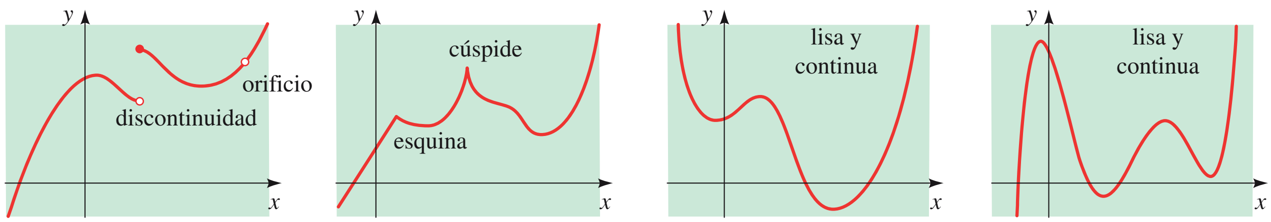
Aquí hay algunos ejemplos más de polinomios.

$P(x) = 3$	Grado 0
$Q(x) = 4x - 7$	Grado 1
$R(x) = x^2 + x$	Grado 2
$S(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10$	Grado 3

Si un polinomio consta de un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son monomios.

Gráficas de polinomios

Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (sección 1.10), y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (sección 2.5). Mientras mayor sea el grado del polinomio, más complicada será la gráfica. Sin embargo, la gráfica de una función polinomial es siempre una curva lisa; es decir, no tiene discontinuidades en las esquinas (véase figura 1). La demostración de este hecho requiere cálculo.



No es la gráfica de una función polinomial

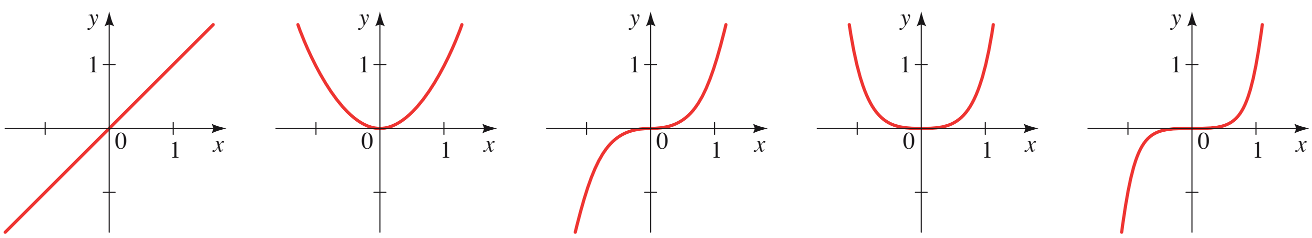
No es la gráfica de una función polinomial

Gráfica de una función polinomial

Gráfica de una función polinomial

Figura 1

Las funciones polinomiales más simples son los polinomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se muestran en la figura 2. Según indica la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que, $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, a medida que el grado n es más grande, las gráficas se vuelven más planas respecto al origen y más inclinadas en otra parte.



a) $y = x$ b) $y =$ c) $y = x^3$ d) $y = x^4$ e) $y = x$

Figura 2
Gráficas de monomios

Ejemplo 1 Transformaciones de monomios

Bosqueje las gráficas de las siguientes funciones.

a) $P(x) = -x^3$ b) $Q(x) = (x - 2)^4$

c) $R(x) = -2x^5 + 4$

Solución Se usan las gráficas de la figura 2 y se transforman con las técnicas de la sección 2.4.

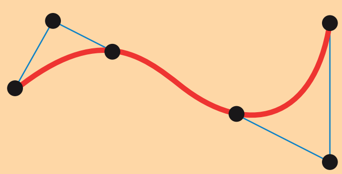
a) La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ en el eje x, como se muestra en la figura 3(a) en la página siguiente.

Matemáticas en el mundo moderno

Curvígrafos (splines)

Un curvígrafo es una tira larga de madera que se curva mientras se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado, los constructores de buques empleaban curvígrafos para crear la forma curvada del casco de un barco. Los curvígrafos se empleaban también para hacer las curvas de un piano, violín o el pico de una tetera.

Los matemáticos descubrieron que las formas de los curvígrafos se obtienen al juntar partes de polinomios. Por ejemplo, la gráfica de un polinomio cúbico se puede hacer para ajustar puntos especificados ajustando los coeficientes de los polinomios (véase el ejemplo 10, página 261). Las curvas obtenidas de esta manera se llaman splines cúbicos. En los modernos programas de diseño por computadora, como Adobe Illustrator o Microsoft Paint, una curva se puede trazar fijando dos puntos, luego, se usa el ratón para arrastrar uno o más puntos de anclaje. Mover los puntos de anclaje equivale a ajustar los coeficientes polinomiales de un polinomio cúbico.



b) La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada a la derecha 2 unidades, como se muestra en la figura 3(b).

c) Se comienza con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene alargando la gráfica verticalmente y reflejándola en el eje x (véase la gráfica azul discontinua en la figura 3(c)). Por último la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene por un desplazamiento hacia arriba de 4 unidades (véase la gráfica en rojo de la figura 3(c)).

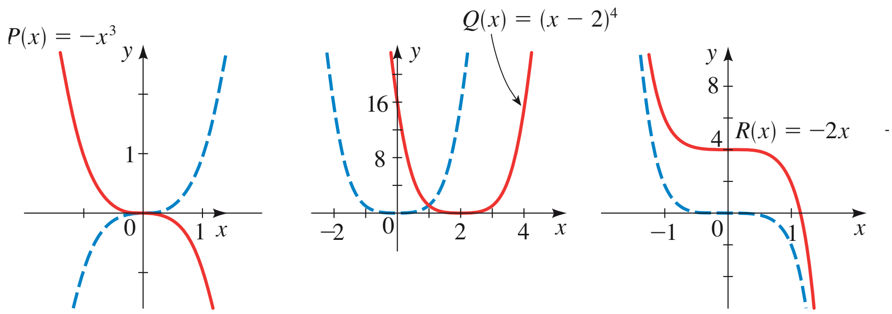


Figura 3

Comportamiento extremo y el término principal

El **comportamiento extremo** de un polinomio es una descripción de lo que sucede cuando x se vuelve grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento extremo, se usa la siguiente notación:

$x \to \infty$	significa	"x se hace grande en la dirección positiva"
$x \to -\infty$	significa	"x se hace grande en la dirección negativa"

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la figura 2(b) tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

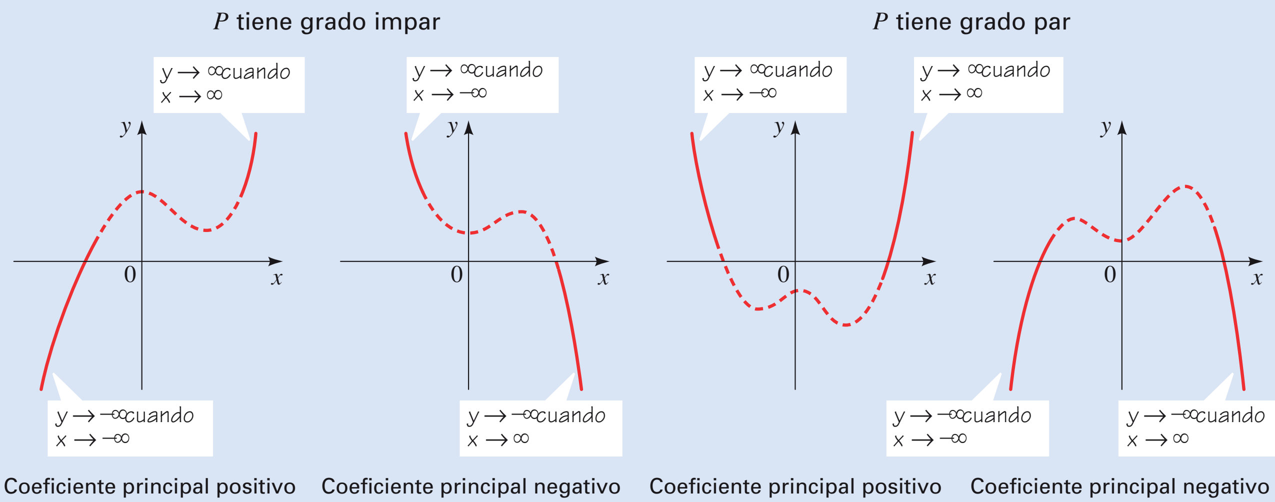
El monomio $y = x^3$ en la figura 2(c) tiene el comportamiento extremo

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Para cualquier polinomio, *el comportamiento extremo está determinado por el término que contiene la potencia más alta de x*, porque cuando x es grande, los otros términos son de tamaño relativamente insignificante. En el cuadro siguiente se muestran los cuatro tipos posibles de comportamiento extremo, con base en la potencia más alta y el signo de su coeficiente.

Comportamiento extremo de polinomios

El comportamiento extremo del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ se determina por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n, como se indica en las siguientes gráficas.



Ejemplo 2 Comportamiento extremo de un polinomio

Determine el comportamiento final del polinomio

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

Solución El polinomio P tiene grado 4 y coeficiente principal -2. Así, P tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo* de modo que tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

En la gráfica de la figura 4 se ilustra el comportamiento extremo de P.

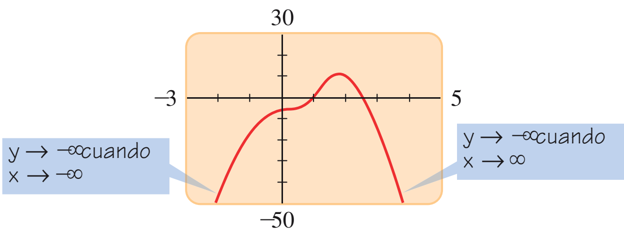


Figura 4
$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

■

Ejemplo 3 Comportamiento extremo de un polinomio

a) Determine el comportamiento extremo del polinomio $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.

b) Confirme que P y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tiene el mismo comportamiento extremo graficándolos juntos.

Solución

a) Puesto que P tiene grado impar y coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

b) En la figura 5 se muestran las gráficas de P y Q en rectángulos de visión cada vez más grandes. Mientras más grande sea el rectángulo de visión, más se parecen las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento extremo.

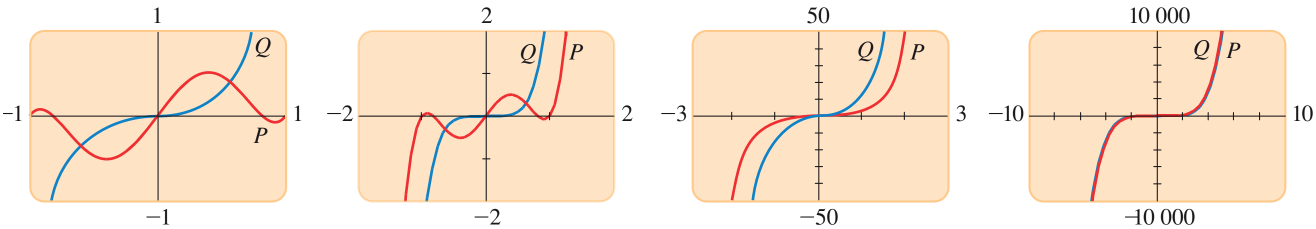


Figura 5
$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$

Para ver de forma algebraica por qué P y Q en el ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento extremo, factorice a P como sigue y compare con Q.

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) \qquad\qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando x es grande, los términos $5/3x^2$ y $2/3x^4$ se aproximan a 0 (véase el ejercicio 79 en la página 12). Por lo tanto para x grande, se tiene

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

Así, cuando x es grande, P y Q tienen aproximadamente los mismos valores. Se puede observar esto también en forma numérica mediante la construcción de una tabla como la que se presenta al margen.

x	$P(x)$	$Q(x)$
15	2 261 280	2 278 125
30	72 765 060	72 900 000
50	936 875 100	937 500 000

Por el mismo razonamiento se puede mostrar que el comportamiento extremo de cualquier polinomio se determina por su término principal.

Uso de ceros para graficar polinomios

Si P es una función polinomial, entonces c se llama un **cero** de P si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Hay que observar que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de P tiene una intersección con el eje x en $x = c$, así que las intersecciones en x de la gráfica son los ceros de la función.

Ceros reales de polinomios

Si P es un polinomio y c es un número real, entonces los enunciados siguientes son equivalentes.

1. c es un cero de P.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. $x = c$ es una intersección en x de la gráfica de P.

Para hallar los ceros de un polinomio P, se factoriza y luego se usa la propiedad del producto nulo (véase la página 47). Por ejemplo, para hallar los ceros de $P(x) = x^2 + x - 6$, se factoriza P para obtener

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

De esta forma factorizada se puede observar fácilmente que

1. 2 es un cero de P.

2. $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.

3. $x - 2$ es un factor de $x^2 + x - 6$.

4. $x = 2$ es una intersección en x de la gráfica de P.

Los mismos hechos son ciertos para el otro cero, -3.

El siguiente teorema tiene muchas consecuencias importantes. (Véase, por ejemplo, el Proyecto de descubrimiento de la página 283.) Aquí se emplea como ayuda para graficar funciones polinomiales.

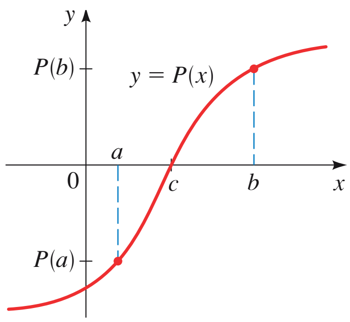


Figura 6

Teorema del valor intermedio para polinomios

Si P es una función polinomial y $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos opuestos, entonces existe por lo menos un valor c entre a y b para el cual $P(c) = 0$.

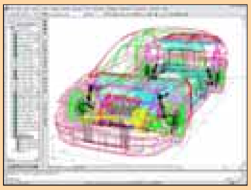
No se demostrará este teorema, pero en la figura 6 se muestra por qué es intuitivamente plausible.

Una consecuencia importante de este teorema es que entre dos ceros sucesivos cualesquiera, los valores de un polinomio son todos positivos o negativos. Es decir, entre dos ceros sucesivos la gráfica de un polinomio yace *por completo arriba* o *abajo* del eje x. Para ver por qué, suponga que c_1 y c_2 son ceros sucesivos de P. Si P tiene ambos valores positivos y negativos entre c_1 y c_2, entonces por el teorema del valor intermedio P debe tener un cero entre c_1 y c_2. Pero eso no es posible porque c_1 y c_2 son ceros sucesivos. Esta observación permite usar las siguientes normas para graficar polinomios.

Normas para graficar funciones polinomiales

1. **Ceros.** Factorizar el polinomio para hallar todos sus ceros reales; estos son las intersecciones con el eje x de la gráfica.
2. **Puntos de prueba.** Construir una tabla de valores para el polinomio. Incluir los puntos de prueba para determinar si la gráfica del polinomio yace arriba o abajo del eje x en los intervalos determinados por ceros. Incluya la intersección y en la tabla.
3. **Comportamiento extremo.** Determine el comportamiento extremo del polinomio.
4. **Gráfica.** Trace las intersecciones y otros puntos que encontró en la tabla. Bosqueje una curva lisa que pase por estos puntos y exhiba el comportamiento extremo requerido

Matemáticas en el mundo moderno



Diseño automotriz

El diseño auxiliado por computadora (DAC) ha cambiado por completo la forma en que las compañías diseñan y fabrican automóviles. Antes de 1980 los ingenieros automotrices construirían un modelo “esencial” a escala completa de un nuevo automóvil propuesto; ésta era en realidad la única forma para decidir si el diseño era factible. Los ingenieros automotrices de hoy día construyen un modelo matemático, uno que existe sólo en la memoria de una computadora. El modelo incorpora todas las características principales de diseño del automóvil. Ciertas curvas polinomiales, llamadas *splines*, se emplean para dar forma al cuerpo del automóvil. El “automóvil matemático” resultante se puede probar para estabilidad estructural, manejo, aerodinámica, respuesta de la suspensión y más. Todas estas pruebas se hacen antes de que sea construido un prototipo. Como puede imaginar, el DAC ahorra a los fabricantes millones de dólares cada año. Lo que es más importante, el DAC da a los ingenieros automotrices mucha más flexibilidad en el diseño; los cambios deseados pueden ser creados y probados en segundos. Con la ayuda de gráficas de computadora, los diseñadores pueden ver qué tan bien se ve el “automóvil matemático” antes de que construyan el real. Además, el automóvil matemático se puede examinar desde cualquier perspectiva; puede ser movido, girado o visto desde el interior. Estas manipulaciones del automóvil en el monitor de la computadora se traducen matemáticamente al resolver grandes sistemas de ecuaciones lineales.

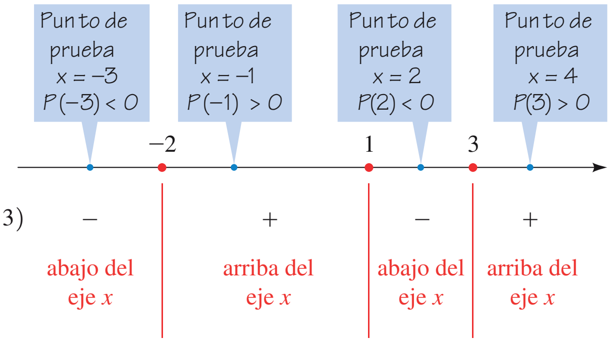
Ejemplo 4 Uso de ceros para graficar una función polinomial

Bosqueje la gráfica de la función polinomial $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

Solución Los ceros son $x = -2$, 1 y 3. Éstos determinan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Si se emplean estos puntos de prueba en estos intervalos, se obtiene la información del siguiente diagrama de signos (véase la sección 1.7).

Signo de $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

Gráfica de P



Graficar algunos puntos adicionales y conectarlos con una curva uniforme ayuda a completar la gráfica de la figura 7.

	x	$P(x)$
Punto de prueba →	−3	−24
	−2	0
Punto de prueba →	−1	8
	0	6
	1	0
Punto de prueba →	2	−4
	3	0
Punto de prueba →	4	18

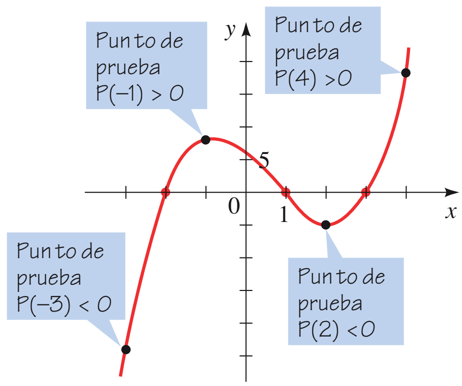


Figura 7

$P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

Ejemplo 5 Localización de ceros y graficación de una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

a) Encuentre los ceros de P. b) Bosqueje la gráfica de P.

Solución

a) Para hallar los ceros, se factoriza por completo.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x \\ &= x(x^2 - 2x - 3) && \text{Factorizar } x \\ &= x(x - 3)(x + 1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

Por lo tanto, los ceros son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$.

b) Las intersecciones en x son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$. La intersección en y es $P(0) = 0$. Se construye una tabla de valores de $P(x)$, asegurándose de elegir puntos de prueba entre (y a la derecha e izquierda de) ceros sucesivos.

Puesto que P es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Se grafican los puntos de la tabla y se unen mediante una curva uniforme para completar la gráfica, como se muestra en la figura 8.

	x	$P(x)$
Punto de prueba →	-2	-10
	-1	0
Punto de prueba →	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
	0	0
Punto de prueba →	1	-4
	2	-6
	3	0
Punto de prueba →	4	20

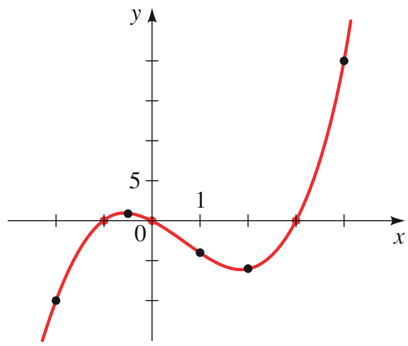


Figura 8
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

■

Ejemplo 6 Localización de ceros y graficación de una función polinomial

Sea $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

a) Encuentre los ceros de P. b) Bosquejar la gráfica de P.

Solución

a) Para hallar los ceros, se factoriza por completo.

$$\begin{aligned} P(x) &= -2x^4 - x^3 + 3x^2 \\ &= -x^2(2x^2 + x - 3) && \text{Factorizar } -x^2 \\ &= -x^2(2x + 3)(x - 1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

En consecuencia, los ceros son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$.

b) Las intersecciones en x son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. La intersección en y es $P(0) = 0$. Se construye una tabla de valores de $P(x)$, asegurándose de elegir puntos de prueba entre (y a la derecha e izquierda de) ceros sucesivos.

Puesto que P es de grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Se grafican los puntos de la tabla y se unen mediante una curva uniforme para completar la gráfica, como se muestra en la figura 9.

La tabla de valores se calcula con más facilidad si se emplea una calculadora programable o una calculadora para gráficas.

x	$P(x)$
-2	-12
-1.5	0
-1	2
-0.5	0.75
0	0
0.5	0.5
1	0
1.5	-6.75

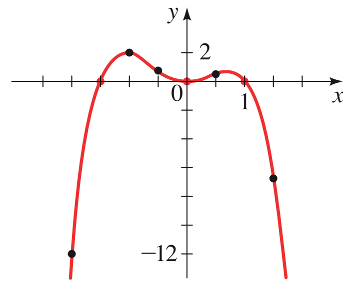


Figura 9
$P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$ ■

Ejemplo 7 Hallar los ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 8$.

a) Hallar los ceros de P. b) Bosquejar la gráfica de P.

Solución

a) Para hallar los ceros se factoriza por completo.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\ &= x^2(x-2) - 4(x-2) && \text{Agrupe y factorice} \\ &= (x^2-4)(x-2) && \text{Factorice } x-2 \\ &= (x+2)(x-2)(x-2) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= (x+2)(x-2)^2 && \text{Simplifique} \end{aligned}$$

En consecuencia, los ceros son $x = -2$ y $x = 2$.

b) Las intersecciones en x son $x = -2$ y $x = 2$. La intersección en y es $P(0) = 8$. Se construye una tabla de valores de $P(x)$.

Puesto que P es de grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Se unen los puntos mediante una curva uniforme para completar la gráfica de la figura 10.

x	$P(x)$
-3	-25
-2	0
-1	9
0	8
1	3
2	0
3	5

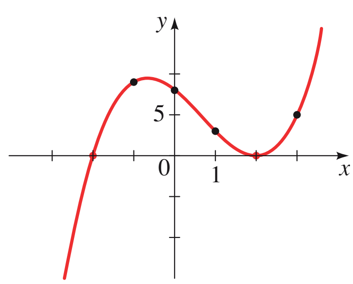


Figura 10
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ ■

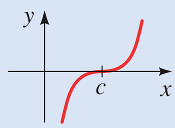
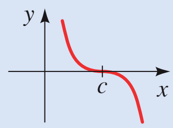
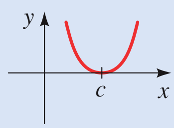
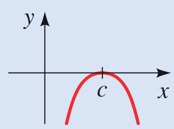
Forma de la gráfica cerca de un cero

Aunque $x = 2$ es un cero del polinomio del ejemplo 7, la gráfica no cruza el eje x en la intersección con el eje x en $x = 2$. Esto es porque el factor $(x - 2)^2$ que corresponde a ese cero está elevado a una potencia, así que no cambia de signo cuando se prueban los puntos en cualquier lado de 2. En la misma forma, la gráfica no cruza el eje x en $x = 0$ en el ejemplo 6.

En general, si c es un cero de P y el factor correspondiente $x - c$ ocurre exactamente m veces en la factorización de P entonces se dice que c es un **cero de multiplicidad m**. Al considerar puntos de prueba en cualquier lado del cruzamiento $x = c$, se concluye que la gráfica cruza el eje x en c si la multiplicidad m es impar o no cruza el eje x si m es par. Además, se puede demostrar por medio del cálculo que cerca de $x = c$ la gráfica tiene la misma forma general que $A(x - c)^m$.

Forma de la gráfica cerca de un cero de multiplicidad *m*

Suponga que c es un cero de P de multiplicidad m. Entonces la forma de la gráfica de P cerca de c es como sigue.

Multiplicidad de c	Forma de la gráfica de P cerca de la intersección con el eje x en $x = c$
m impar, $m > 1$	 o 
m par, $m > 1$	 o 

Ejemplo 8 Graficación de una función polinomial usando sus ceros

Grafique el polinomio $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$.

Solución Los ceros de P son -1, 0 y 2, con multiplicidades 2, 4 y 3, respectivamente.

0 es un cero de multiplicidad 4.

2 es un cero de multiplicidad 3.

−1 es un cero de multiplicidad 2.

$$P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$$

El cero 2 tiene multiplicidad *impar*, así que la gráfica cruza el eje x en la intersección en $x = 2$. Pero los ceros 0 y -1 tienen multiplicidad *par*, así que la gráfica no cruza el eje x en las intersecciones en $x = 0$ y en $x = -1$.

Puesto que P es un polinomio de grado 9 y tiene coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento extremo:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Con esta información y una tabla de valores, se bosqueja la gráfica en la figura 11.

x	$P(x)$
-1.3	-9.2
-1	0
-0.5	-3.9
0	0
1	-4
2	0
2.3	8.2

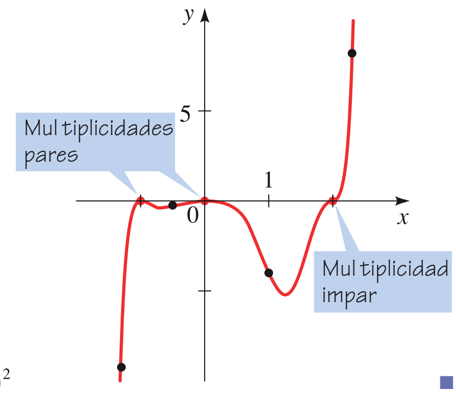


Figura 11
$P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$

Máximos y mínimos locales de polinomios

Recuerde de la sección 2.5 que si el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f dentro del rectángulo de visión, entonces $f(a)$ es un valor máximo local de f, y si $(b, f(b))$ es el punto mínimo en la gráfica de f dentro de un rectángulo de visión, entonces $f(b)$ es un valor mínimo local (véase la figura 12). Se dice que tal punto $(a, f(a))$ es un **punto máximo local** en la gráfica y que $(b, f(b))$ es un **punto mínimo local**. El conjunto de todos los puntos locales máximos y mínimos sobre la gráfica de una función se conocen como sus **extremos locales**.

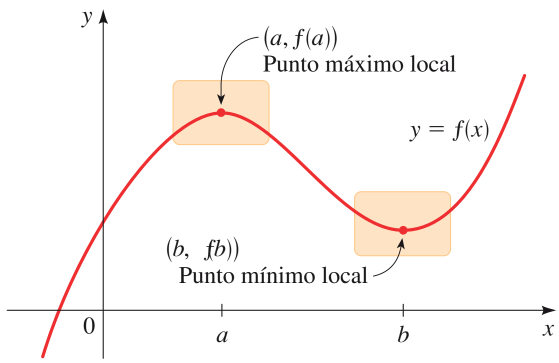


Figura 12

Para una función polinomial el número de extremos locales debe ser menor que el grado, como indica el siguiente principio. (Una demostración de este principio requiere cálculo.)

Extremos locales de polinomios

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es un polinomio de grado n, entonces la gráfica de P tiene a lo sumo $n - 1$ extremos locales.

Un polinomio de grado n puede tener de hecho menos de $n - 1$ extremos locales. Por ejemplo, $P(x) = x^5$ (graficada en la figura 2) *no* tiene extremos locales, aun

cuando es de grado 5. El principio precedente indica sólo que un polinomio de grado n puede tener no más de $n - 1$ extremos locales.

Ejemplo 9 Número de extremos locales

Determine cuántos extremos locales tiene cada polinomio.

a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$

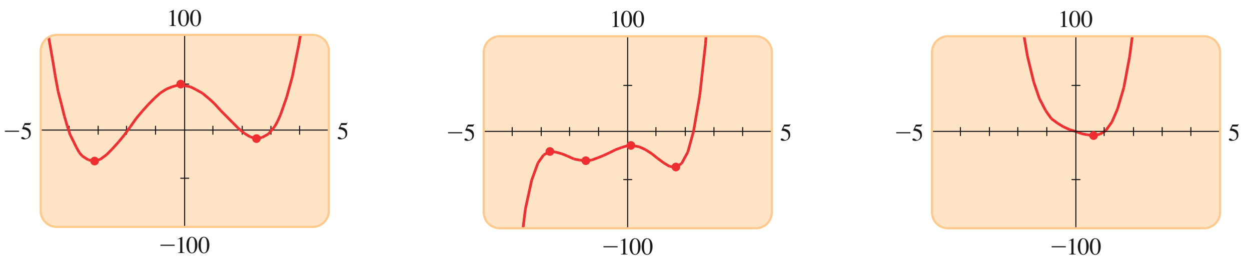
c) $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

Solución Las gráficas se muestran en la figura 13.

a) P_1 tiene dos puntos mínimos locales y un punto máximo local, para un total de tres extremos locales.

b) P_2 tiene dos puntos mínimos locales y dos puntos máximos locales, para un total de cuatro extremos locales.

c) P_3 tiene sólo un extremo local, un mínimo local.



a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16\quad - 4x + 48$

b) $P_2(x) = x\quad + 3x^4 - 5x^3 - 15\quad + 4x - 15$

c) $P_3(x) = 7x^4 + 3\quad - 10x$

Figura 13

■

Con una calculadora para gráficas se pueden trazar rápidamente las gráficas de muchas funciones a la vez, en la misma pantalla de visión. Esto permite ver cómo cambiar un valor en la definición de las funciones, afecta la forma de su gráfica. En el ejemplo siguiente se aplica el principio a una familia de polinomios de tercer grado.

Ejemplo 10 Una familia de polinomios

Bosqueje la familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$ para $c = 0, 1, 2$ y 3. ¿Cómo afecta a la gráfica cambiar el valor de c?

Solución Los polinomios

$$P_0(x) = x^3 \qquad P_1(x) = x^3 - x^2$$

$$P_2(x) = x^3 - 2x^2 \qquad P_3(x) = x^3 - 3x^2$$

se grafican en la figura 14. Se puede observar que incrementar el valor de c ocasiona que la gráfica desarrolle un "valle" cada vez más profundo a la derecha del eje y, lo cual crea un máximo local en el origen y un mínimo local en un punto en el cuadrante IV. Este mínimo local se mueve hacia abajo y a la derecha a medida que se incrementa c. Para ver por qué sucede esto, factorice a $P(x) = x^2(x - c)$. El polinomio P tiene ceros en 0 y c, y más a la derecha estará el mínimo entre 0 y c y mientras más grande sea c más a la derecha estará el mínimo entre 0 y c. ■

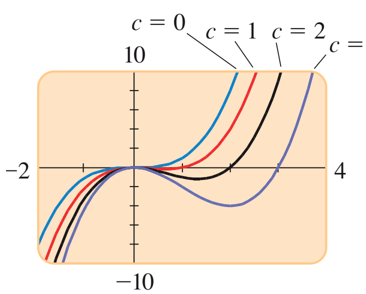


Figura 14

Una familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$

3.1 Ejercicios

1–4 ■ Bosqueje la gráfica de cada función transformando la gráfica de una función apropiada de la forma $y = x^n$ de la figura 2. Indique las intersecciones con los ejes x y y en cada gráfica.

1. **a)** $P(x) = x^2 - 4$ **b)** $Q(x) = (x - 4)^2$
c) $R(x) = 2x^2 - 2$ **d)** $S(x) = 2(x - 2)^2$

2. **a)** $P(x) = x^4 - 16$ **b)** $Q(x) = (x + 2)^4$
c) $R(x) = (x + 2)^4 - 16$ **d)** $S(x) = -2(x + 2)^4$

3. **a)** $P(x) = x^3 - 8$ **b)** $Q(x) = -x^3 + 27$
c) $R(x) = -(x + 2)^3$ **d)** $S(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^3 + 4$

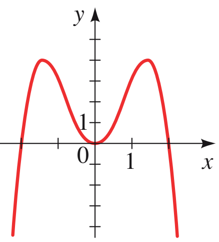
4. **a)** $P(x) = (x + 3)^5$ **b)** $Q(x) = 2(x + 3)^5 - 64$
c) $R(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5$ **d)** $S(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5 + 16$

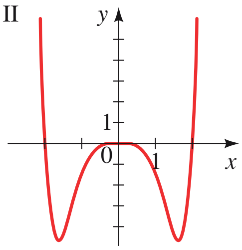
5–10 ■ Compare la función polinomial con una de las gráficas I-VI. Dé razones para su elección.

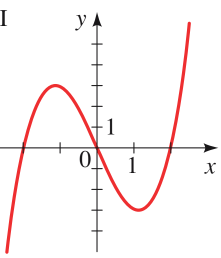
5. $P(x) = x(x^2 - 4)$ **6.** $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

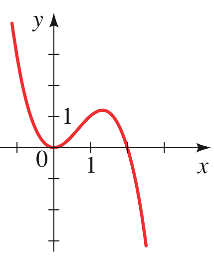
7. $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$ **8.** $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$

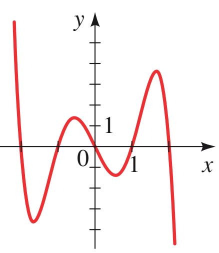
9. $T(x) = x^4 + 2x^3$ **10.** $U(x) = -x^3 + 2x^2$

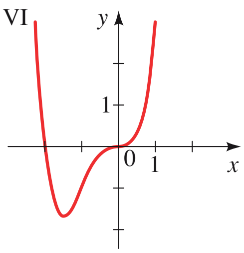
I


II


III


IV


V


VI


11–22 ■ Bosqueje la gráfica de la función polinomial. Asegúrese de que su gráfica muestre las intersecciones con los ejes y exhiba el comportamiento extremo apropiado.

11. $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

12. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

13. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

14. $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

15. $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

16. $P(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

17. $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$

18. $P(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^3(x - 3)$

19. $P(x) = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$

20. $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

21. $P(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$

22. $P(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

23–36 ■ Factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros. Luego, bosqueje la gráfica.

23. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$

24. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

25. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$

26. $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

27. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$

28. $P(x) = x^5 - 9x^3$

29. $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

30. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

31. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

32. $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

33. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

34. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

35. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$

36. $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

37–42 ■ Determine el comportamiento extremo de P. Compare las gráficas de P y Q en rectángulos de visión grandes y pequeños, como en el ejemplo 3(b).

37. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$; $Q(x) = 3x^3$

38. $P(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x$; $Q(x) = -\frac{1}{8}x^3$

39. $P(x) = x^4 - 7x^2 + 5x + 5;\quad Q(x) = x^4$

40. $P(x) = -x^5 + 2x^2 + x;\quad Q(x) = -x^5$

41. $P(x) = x^{11} - 9x^9;\quad Q(x) = x^{11}$

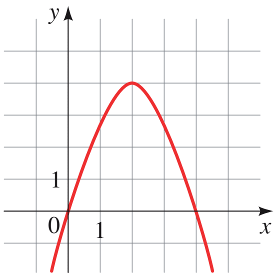
42. $P(x) = 2x^2 - x^{12};\quad Q(x) = -x^{12}$

43–46 ■ Se da la gráfica de una función polinomial. De la gráfica, encuentre

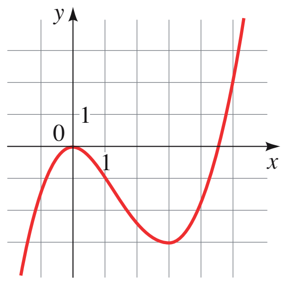
a) las intersecciones con los ejes x y y

b) las coordenadas de los extremos locales

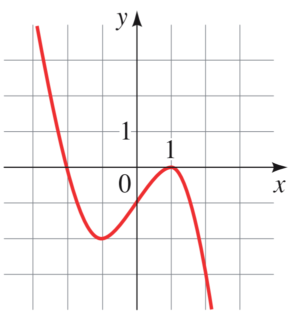
43. $P(x) = -x^2 + 4x$



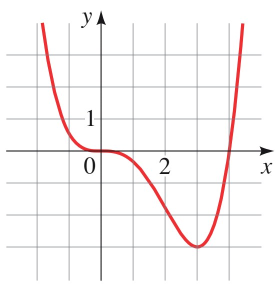
44. $P(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2$



45. $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$



46. $P(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$



47–54 ■ Grafique el polinomio en el rectángulo de visión dado. Encuentre las coordenadas de los extremos locales. Exprese cada respuesta correcta hasta dos lugares decimales.

47. $y = -x^2 + 8x,\quad [-4, 12]$ por $[-50, 30]$

48. $y = x^3 - 3x^2,\quad [-2, 5]$ por $[-10, 10]$

49. $y = x^3 - 12x + 9,\quad [-5, 5]$ por $[-30, 30]$

50. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 32,\quad [-5, 5]$ por $[-60, 30]$

51. $y = x^4 + 4x^3,\quad [-5, 5]$ por $[-30, 30]$

52. $y = x^4 - 18x^2 + 32,\quad [-5, 5]$ por $[-100, 100]$

53. $y = 3x^5 - 5x^3 + 3,\quad [-3, 3]$ por $[-5, 10]$

54. $y = x^5 - 5x^2 + 6,\quad [-3, 3]$ por $[-5, 10]$

55–64 ■ Grafique el polinomio y determine cuántos máximos y mínimos locales tiene.

55. $y = -2x^2 + 3x + 5$

56. $y = x^3 + 12x$

57. $y = x^3 - x^2 - x$

58. $y = 6x^3 + 3x + 1$

59. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

60. $y = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$

61. $y = (x - 2)^5 + 32$

62. $y = (x^2 - 2)^3$

63. $y = x^8 - 3x^4 + x$

64. $y = \frac{1}{3}x^7 - 17x^2 + 7$

65–70 ■ Grafique la familia de polinomios en el mismo rectángulo de visión, con los valores dados de c. Explique cómo el hecho de cambiar el valor de c afecta la gráfica.

65. $P(x) = cx^3;\quad c = 1, 2, 5, \frac{1}{2}$

66. $P(x) = (x - c)^4;\quad c = -1, 0, 1, 2$

67. $P(x) = x^4 + c;\quad c = -1, 0, 1, 2$

68. $P(x) = x^3 + cx;\quad c = 2, 0, -2, -4$

69. $P(x) = x^4 - cx;\quad c = 0, 1, 8, 27$

70. $P(x) = x^c;\quad c = 1, 3, 5, 7$

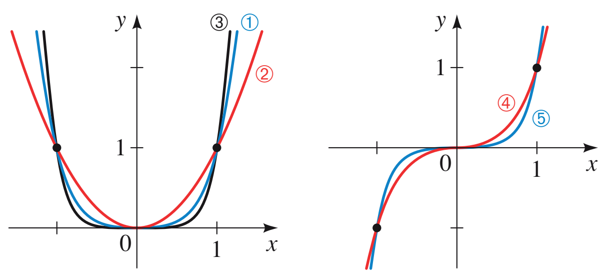
71. a) En los mismos ejes coordenados, bosqueje las gráficas (lo más exacto posible) de las funciones

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -x^2 + 5x + 2$$

b) Con base en su dibujo del inciso a), ¿en cuántos puntos al parecer cruza la gráfica?

c) Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección.

72. Las porciones de las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ y $y = x^6$ se grafican en las figuras. Determine qué función pertenece a cada gráfica.



73. Recuerde que una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ o *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x.

a) Muestre que un polinomio $P(x)$ que contiene sólo potencias impares de x es una función impar.

b) Muestre que un polinomio $P(x)$ que contiene sólo potencias pares de x es una función par.

c) Muestre que si un polinomio $P(x)$ contiene potencias impares y pares de x, entonces no es una función impar ni par.

d) Exprese la función

$$P(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 2x + 5$$

como la suma de una función impar y una función par.

74. a) Grafique la función $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ y encuentre los extremos locales, correctos hasta el décimo más próximo.

b) Grafique la función

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4) + 5$$

y utilice sus respuestas del inciso a) para hallar los extremos locales, correctos hasta el décimo más próximo.

75. a) Grafique la función $P(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ y determine cuántos extremos locales tiene.

b) Si $a < b < c$, explique por qué la función

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

debe tener dos extremos locales.

76. a) ¿Cuantas intersecciones con el eje x y cuántos extremos locales tiene el polinomio $P(x) = x^3 - 4x$?

b) ¿Cuántas intersecciones con el eje x y cuántos extremos locales tiene el polinomio $Q(x) = x^3 + 4x$?

c) Si $a > 0$, ¿cuantas intersecciones con el eje x y cuántos extremos locales tiene cada uno de los polinomios $P(x) = x^3 - ax$ y $Q(x) = x^3 + ax$? Explique su respuesta.

Aplicaciones

77. Investigación de mercado Un analista de mercado que trabaja para un fabricante de aparatos pequeños encuentra que si la empresa produce y vende x licuadoras anualmente, la ganancia total (en dólares) es

$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Grafique la función P en un rectángulo de visión apropiado y emplee la gráfica para contestar las siguientes preguntas.

a) Cuando se fabrican sólo algunas licuadoras, la empresa pierde dinero (ganancia negativa). (Por ejemplo, $P(10) = -263.3$, así que la empresa pierde \$263.30 si produce y vende sólo 10 licuadoras.) ¿Cuántas licuadoras debe producir la empresa para terminar sin pérdidas?

b) ¿La ganancia se incrementa de manera indefinida cuando se producen o venden más licuadoras? Si no, ¿cuál es la ganancia más grande posible que podría tener la empresa?

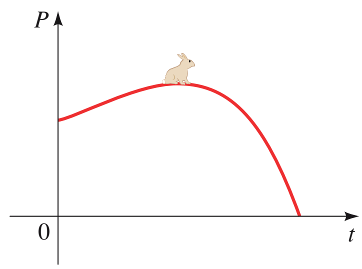
78. Cambio de población Se observa que la población de conejos en una isla pequeña está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$$

donde t es el tiempo (en meses) desde que comenzaron las observaciones en la isla.

a) ¿Cuándo se obtiene la máxima población, y cuál es esa población máxima?

b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

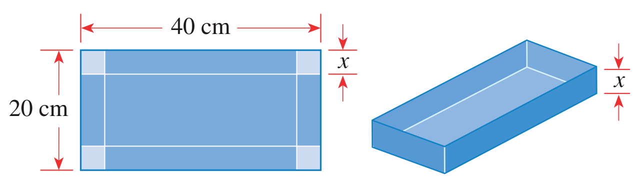


79. Volumen de una caja Se construye una caja abierta de una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm cortando cuadrados de longitud lateral x de cada esquina y doblando hacia arriba los lados, como se muestra en la figura.

a) Exprese el volumen V de la caja como una función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el hecho de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

c) Dibuje una gráfica de la función V y empléela para estimar el volumen máximo para tal caja.

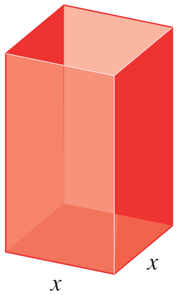


80. Volumen de una caja Una caja de cartón tiene una base cuadrada. Cada lado de la base tiene x pulgadas de longitud, como se muestra en la figura. La longitud total de los 12 lados de la caja es 144 pulgadas.

a) Muestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$.

b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el hecho de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

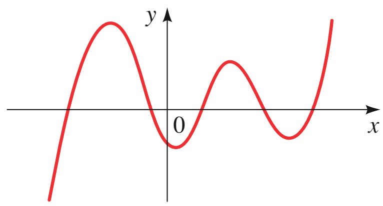
c) Dibuje la gráfica de la función V y utilícela para estimar el volumen máximo para tal caja.



Descubrimiento • Debate

81. Gráficas de potencias grandes Grafique las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \leq x \leq 1$, en los mismos ejes de coordenadas. ¿A qué se asemejaría la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Qué se podría decir acerca de $y = x^{101}$? Construya una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

82. Número máximo de extremos locales ¿Cuál es el grado más pequeño que el polinomio cuya gráfica se muestra? Explique.



83. Número posible de extremos locales ¿Es posible que un polinomio de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Un polinomio de cuarto grado puede tener exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener los polinomios de tercero, cuarto, quinto y sexto grado? (Considere el comportamiento extremo de tales polinomios.) Ahora dé un ejemplo de un polinomio que tiene seis extremos locales.

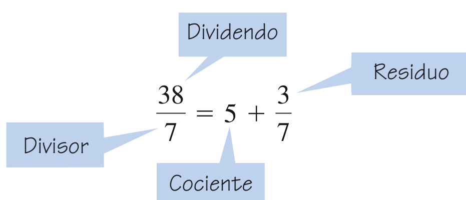
84. ¿Situación imposible? ¿Es posible que un polinomio tenga dos máximos locales y ningún mínimo local? Explique.

3.2 División de polinomios

Hasta aquí en este capítulo se han estado estudiando de manera *gráfica* funciones polinomiales. En esta sección se comienza a estudiar los polinomios en forma *algebraica*. La mayor parte del trabajo será en relación con la factorización de polinomios, y para factorizar, se requiere saber cómo dividir polinomios.

División larga de polinomios

La división de polinomios es similar al proceso familiar de dividir números. Cuando se divide 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Se escribe



Para dividir polinomios, se usa la división larga, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1 División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

Solución El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Se comienza por disponerlos como sigue:

$$x - 4\overline{\smash{)}6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación divida el término principal en el dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. Luego, multiplique el divisor entre $6x$ reste el resultado del dividendo.

$$\begin{array}{rl} & 6x \\ x - 4 & \overline{\smash{)}6x^2 - 26x + 12} \\ & \underline{6x^2 - 24x} \\ & \qquad -2x + 12 \end{array}$$

Divida los términos principales: $\dfrac{6x^2}{x} = 6x$

Multiplicar: $6x(x - 4) = 6x^2 - 24x$

Reste y "baje" el 12

Se repite el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{rl} & 6x - 2 \\ x - 4 & \overline{\smash{)}6x^2 - 26x + 12} \\ & \underline{6x^2 - 24x} \\ & \qquad -2x + 12 \\ & \qquad \underline{-2x + 8} \\ & \qquad\qquad 4 \end{array}$$

Divida los términos principales: $\dfrac{-2x}{x} = -2$

Multiplicar: $-2(x - 4) = -2x + 8$

Reste

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. Entonces el último renglón contiene el *residuo*, y el renglón superior contiene el *cociente*. El resultado de la división se puede interpretar en cualquiera de dos formas.

$$\frac{6x^2 - 26x + 12}{x - 4} = 6x - 2 + \frac{4}{x - 4}$$

o bien

$$6x^2 - 26x + 12 = (x - 4)(6x - 2) + 4$$

Dividendo Divisor Cociente Residuo

■

Se resume el proceso de la división larga en el siguiente teorema.

Algoritmo de la división

Si $P(x)$ y $D(x)$ son polinomios, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor que el grado de $D(x)$, tal que

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Dividendo Divisor Cociente Residuo

Los polinomios $P(x)$ y $D(x)$ se llaman **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente**, y $R(x)$ es el **residuo**.

Para escribir de otra forma el algoritmo de la división, divida entre $D(x)$:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

Ejemplo 2 División larga de polinomios

Sea $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre los polinomios $Q(x)$ y $R(x)$ tal que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

Solución Se usa la división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas se alineen correctamente.

$$
\begin{array}{rl}
 & 4x^2 + 2x \\
2x^2 - x + 2 & \overline{)\,8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1} \\
 & \underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \qquad \text{Multiplicar el divisor por } 4x^2 \\
 & \qquad 4x^3 - 2x^2 - 3x \qquad \text{Restar} \\
 & \qquad \underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \qquad \text{Multiplicar el divisor por } 2x \\
 & \qquad\qquad -7x + 1 \qquad \text{Restar}
\end{array}
$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga anterior se ve que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, por lo tanto

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$ ■

División sintética

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor está en la forma $x - c$. En la división sintética se escriben sólo las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones larga y sintética, en las que se divide $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$. (En el ejemplo 3 se explicará cómo llevar a cabo la división sintética.)

División larga

$$
\begin{array}{rl}
 & 2x^2 - x - 3 \quad \leftarrow \text{Cociente} \\
x - 3 & \overline{)\,2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} \\
 & \underline{2x^3 - 6x^2} \\
 & \qquad -x^2 + 0x \\
 & \qquad \underline{-x^2 + 3x} \\
 & \qquad\qquad -3x + 5 \\
 & \qquad\qquad \underline{-3x + 9} \\
 & \qquad\qquad\qquad -4 \quad \leftarrow \text{Residuo}
\end{array}
$$

División sintética

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & 2 & -1 & -3 & -4
\end{array}
$$

Cociente: $2 \quad -1 \quad -3$ Residuo: -4

Observe que en la división sintética se abrevia $2x^3 - 7x^2 + 5$ escribiendo sólo los coeficientes: 2 -7 0 5, y, en lugar de $x - 3$, se escribe simplemente 3. (Escribir 3 en lugar de -3 permite sumar en lugar de restar, pero esto cambia el signo de los números que aparecen en los cuadros dorados.)

En el ejemplo siguiente se muestra la división sintética efectuada.

Ejemplo 3 División sintética

Use la división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

Solución Se comienza por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

Divisor $x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Dividendo $2x^3 - 7x^2 + 0x + 5$

Se baja el 2, se multiplica $3 \cdot 2 = 6$, y se escribe el resultado en el renglón de en medio:
Luego se suma:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & & \\ \hline & \boxed{2} & -1 & & \end{array}$$

Multiplicar: $3 \cdot 2 = 6$

Sumar: $-7 + 6 = -1$

Se repite este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & \end{array}$$

Multiplicar: $3(-1) = -3$

Sumar: $0 + (-3) = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ \hline & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{-3} & -4 \end{array}$$

Multiplicar: $3(-3) = 9$

Sumar: $5 + (-9) = -4$

Cociente $2x^2 - x - 3$

Residuo -4

De la última línea de la división sintética, se puede observar que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es -4. Por consiguiente

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

■

Teoremas del residuo y del factor

El siguiente teorema muestra cómo se puede usar la división sintética para evaluar polinomios fácilmente.

Teorema del residuo

Si el polinomio $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

■ **Demostración** Si el divisor en el algoritmo de la división es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser una constante (puesto que el grado del residuo es menor que el grado del divisor.) Si a esta constante se le denomina r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Si se establece $x = c$ en esta ecuación, se obtiene
$P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$, es decir, $P(c)$ es el residuo r. ■

Ejemplo 4 Uso del teorema del residuo para hallar el valor de un polinomio

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

a) Encuentre el cociente y el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

b) Use el teorema del residuo para hallar $P(-2)$.

Solución

a) Puesto que $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El residuo es 5, por lo tanto $P(-2) = 5$.

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ y el residuo es 5.

b) Por el teorema del residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. Del inciso a) el residuo es 5, por lo tanto $P(-2) = 5$. ■

El teorema siguiente establece que los *ceros* de polinomios corresponden a *factores*; se utilizó este hecho en la sección 3.1 para graficar polinomios.

Teorema del factor

c es un cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

■ **Demostración** Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

A la inversa, si $P(c) = 0$, entonces por el teorema del residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

por lo tanto $x - c$ es un factor de $P(x)$. ■

Ejemplo 5 Factorización de un polinomio por medio del teorema del factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Muestre que $P(1) = 0$, y use este hecho para factorizar $P(x)$ por completo.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Solución Sustituyendo, se ve que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el teorema del factor, esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando la división sintética

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x - 1\overline{)x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \quad\quad\quad\quad \\ x^2 - 7x \quad\quad \\ \underline{x^2 - x} \quad\quad \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

o la división larga (mostrada en el margen), se ve que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) && \text{Véase el margen} \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3) && \text{Factor cuadrático } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

■

Ejemplo 6 Hallar un polinomio con ceros especificados

Hallar un polinomio de grado 4 que tiene ceros -3, 0, 1 y 5.

Solución Por el teorema del factor, $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben ser factores del polinomio deseado, así que

$$P(x) = (x + 3)(x - 0)(x - 1)(x - 5) = x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Puesto que $P(x)$ es de grado 4 es una solución del problema. Cualquier otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, ya que sólo la multiplicación por una constante no cambia el grado. ■

El polinomio P del ejemplo 6 se grafica en la figura 1. Hay que observar que los ceros de P corresponden a las intersecciones con el eje x de la gráfica.

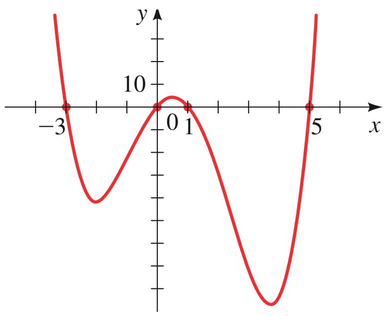


Figura 1
$P(x) = (x + 3)x(x - 1)(x - 5)$ tiene ceros -3, 0, 1 y 5.

3.2 Ejercicios

1–6 ■ Se dan dos polinomios P y D. Use la división sintética o la división larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese P en la forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

1. $P(x) = 3x^2 + 5x - 4$, $D(x) = x + 3$
2. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1$, $D(x) = x - 1$
3. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x$, $D(x) = 2x - 3$
4. $P(x) = 4x^3 + 7x + 9$, $D(x) = 2x + 1$
5. $P(x) = x^4 - x^3 + 4x + 2$, $D(x) = x^2 + 3$
6. $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - x - 3$, $D(x) = x^2 - 2$

7–12 ■ Se dan dos polinomios P y D. Use la división sintética o la división larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese el cociente $P(x)/D(x)$ en la forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

7. $P(x) = x^2 + 4x - 8$, $D(x) = x + 3$
8. $P(x) = x^3 + 6x + 5$, $D(x) = x - 4$
9. $P(x) = 4x^2 - 3x - 7$, $D(x) = 2x - 1$
10. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5$, $D(x) = 3x - 4$
11. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2$, $D(x) = x^2 + 4$
12. $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1$, $D(x) = x^2 + x - 1$

13–22 ■ Encontrar el cociente y el residuo usando la división larga.

13. $\dfrac{x^2 - 6x - 8}{x - 4}$
14. $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 6}{x - 2}$
15. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$
16. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$
17. $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$
18. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 20x - 5}{x^2 + x + 3}$
19. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$
20. $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$
21. $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$
22. $\dfrac{2x^5 - 7x^4 - 13}{4x^2 - 6x + 8}$

23–36 ■ Encontrar el cociente y el residuo usando la división sintética.

23. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$
24. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$
25. $\dfrac{3x^2 + 5x}{x - 6}$
26. $\dfrac{4x^2 - 3}{x + 5}$
27. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$
28. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$
29. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$
30. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$

31. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$

32. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

33. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

34. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

35. $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

36. $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

37–49 ■ Use la división sintética y el teorema del residuo para evaluar $P(c)$.

37. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

38. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

39. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

40. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

41. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

42. $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

43. $P(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

44. $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

45. $P(x) = x^7 - 3x^2 - 1, \quad c = 3$

46. $P(x) = -2x^6 + 7x^5 + 40x^4 - 7x^2 + 10x + 112, \quad c = -3$

47. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

48. $P(x) = x^3 - x + 1, \quad c = \frac{1}{4}$

49. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8, \quad c = 0.1$

50. Sea

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ **a)** con la división sintética y **b)** sustituyendo $x = 7$ en el polinomio y evaluando de manera directa.

51–54 ■ Use el teorema del factor para mostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para valores dados de c.

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

52. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

53. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

54. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

55–56 ■ Mostrar que los valores dados para c son ceros de $P(x)$, hallar los otros ceros de $P(x)$.

55. $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

56. $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{3}, -2$

57–60 ■ Encuentre un polinomio de grado especificado que tenga los ceros dados.

57. Grado 3; ceros $-1, 1, 3$

58. Grado 4; ceros $-2, 0, 2, 4$

59. Grado 4; ceros $-1, 1, 3, 5$

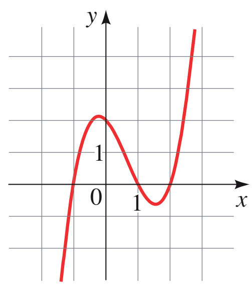
60. Grado 5; ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

61. Encuentre un polinomio de grado 3 que tenga ceros $1, -2$ y 3, y en el cual el coeficiente de x^2 sea 3.

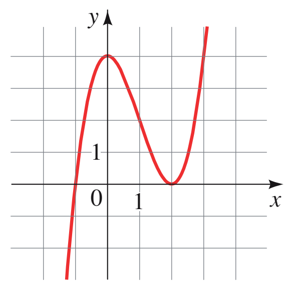
62. Encuentre un polinomio de grado 4 que tenga coeficientes enteros y ceros $1, -1, 2$ y $\frac{1}{2}$.

63–66 ■ Encuentre un polinomio de grado especificado cuya gráfica se muestra.

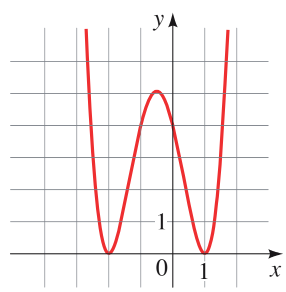
63. Grado 3



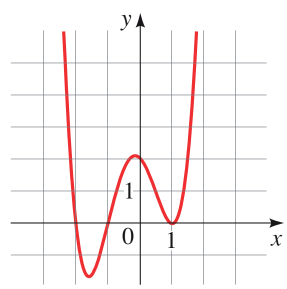
64. Grado 3



65. Grado 4



66. Grado 4



Descubrimiento • Debate

67. ¿División imposible? Suponga que se le pidió resolver los dos problemas siguientes en una prueba:

A. Encuentre el residuo cuando $6x^{1000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

B. ¿$x - 1$ es un factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente, es imposible resolver estos problemas dividiendo, porque los polinomios son de grado grande. Use uno o más de los teoremas de esta sección para resolver estos problemas *sin* dividir en realidad.

68. Forma anidada de un polinomio Desarrolle Q para probar que los polinomios P y Q son los mismos.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$

$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Intente evaluar $P(2)$ y $Q(2)$ en su cabeza, usando las formas dadas. ¿Cuál es más fácil? Ahora escriba el polinomio $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma "anidada", como el polinomio Q. Use la forma anidada para determinar $R(3)$ en su cabeza.

¿Vea cómo calcular con la forma anidada sigue los mismos pasos aritméticos que calcular el valor de un polinomio con la división sintética?

3.3 Ceros reales de polinomios

El teorema del factor indica que hallar los ceros de un polinomio es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección se estudian algunos métodos algebraicos que ayudan a encontrar los ceros reales de un polinomio y, por lo tanto, a factorizar el polinomio. Se comienza con los ceros *racionales* de un polinomio.

Ceros racionales de polinomios

Para entender este teorema, considérese el polinomio

$$P(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4) \qquad \text{Forma factorizada}$$

$$= x^3 - x^2 - 14x + 24 \qquad \text{Forma desarrollada}$$

De la forma factorizada se puede observar que los ceros de P son 2, 3 y -4. Cuando se desarrolla el polinomio, la constante 24 se obtiene al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que los ceros de un polinomio son factores del término constante. Lo siguiente generaliza esta observación.

Teorema de ceros racionales

Si el polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0

y q es un factor del coeficiente principal a_n.

■ **Demostración** Si p/q es un cero racional, en términos mínimos, del polinomio P, entonces se tiene

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0 q^n \text{ y factorice el miembro izquierdo}$$

Ahora p es un factor del lado izquierdo, así que también debe ser un factor del lado derecho. Puesto que p/q está en términos mínimos, p y q no tienen factor común y, por lo tanto, p debe ser un factor de a_0. Una demostración similar muestra que q es un factor de a_n. ■

Se puede observar del teorema de ceros racionales que si el coeficiente principal es 1 o -1, entonces los ceros racionales deben ser factores del término constante.

Evariste Galois (1811-1832) es uno de los pocos matemáticos que tiene una teoría nombrada en su honor. Aún no cumplía los 21 años cuando murió, pero estableció por completo el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela si una ecuación polinomial se puede resolver mediante operaciones algebraicas. Galois fue uno de los más grandes matemáticos del mundo en ese entonces, aunque sólo él lo sabía. En repetidas ocasiones envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson, quienes perdieron sus cartas o no entendieron sus ideas. Galois escribía en un estilo conciso e incluía pocos detalles, lo cual probablemente influyó en su fracaso para pasar el examen de admisión a la Escuela Politécnica de París. Como político radical, Galois, pasó varios meses en prisión por sus actividades revolucionarias. Su breve vida tuvo un trágico fin cuando murió en un duelo por una cuestión amorosa. La noche antes del duelo, con el temor de morir, Galois escribió la esencia de sus ideas y las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "... habrá, espero, personas que sabrán aprovechar el descifrar todo este enredo". Esto lo hizo 14 años después el matemático Camille Jordan.

Ejemplo 1 Hallar ceros racionales (coeficiente principal 1)

Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

Solución Puesto que el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Por consiguiente, los posibles ceros racionales son ± 1 y ± 2. Se prueba cada una de estas posibilidades.

$$P(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$
$$P(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$
$$P(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 4$$
$$P(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$$

Los ceros racionales de P son 1 y -2. ■

Ejemplo 2 Uso del teorema de ceros racionales para factorizar un polinomio

Factorice el polinomio $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$.

Solución Por el teorema de ceros racionales, los ceros racionales de P son de la forma

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factores del término constante}}{\text{factores del coeficiente principal}}$$

El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, por lo tanto

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factores de 6}}{\text{factores de 2}}$$

Los factores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ y los factores de 2 son $\pm 1, \pm 2$. Así, los posibles ceros racionales de P son

$$\pm\frac{1}{1}, \quad \pm\frac{2}{1}, \quad \pm\frac{3}{1}, \quad \pm\frac{6}{1}, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{2}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{6}{2}$$

Si se simplifican las fracciones y se eliminan duplicados, se obtiene la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}$$

Para comprobar cuáles de estos *posibles* ceros *son* en realidad ceros, es necesario evaluar P en cada uno de estos números. Una forma eficaz de hacer esto es usar la división sintética

Prueba de si 1 es un cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 2 & 3 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -10 & -4 \end{array}$$

El residuo *no es* 0, así que 1 *no es* un cero.

Prueba de si 2 es un cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

El residuo *es* 0, por lo tanto 2 *es* un cero.

De la última división sintética se puede observar que 2 es un cero de P y que P se factoriza como

$$
\begin{aligned}
P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\
&= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) \\
&= (x-2)(2x-1)(x+3) \qquad \text{Factorice } 2x^2 + 5x - 3
\end{aligned}
$$

■

En el cuadro siguiente se explica cómo usar el teorema de los ceros racionales con la división sintética para factorizar un polinomio.

Encontrar los ceros racionales de un polinomio

1. **Listar los posibles ceros.** Liste los posibles ceros racionales usando el teorema de ceros racionales.
2. **Dividir.** Use la división sintética para evaluar el polinomio en cada uno de los candidatos para ceros racionales que encontró en el paso 1. Cuando el residuo es 0, observe el cociente que obtuvo.
3. **Repetir.** Repita los pasos 1 y 2 para el cociente. Pare cuando llegue al cociente que es cuadrático o se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice para hallar los demás ceros

Ejemplo 3 Uso del teorema de ceros racionales y la fórmula cuadrática

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Bosqueje la gráfica de P.

1	1	−5	−5	−23	−10
		1	−4	−9	14
	1	−4	−9	14	24

2	1	−5	−5	23	10
		2	−6	−22	2
	1	−3	−11	1	12

5	1	−5	−5	23	10
		5	0	−25	−10
	1	0	−5	−2	0

−2	1	−0	−5	−2
		−2	4	2
	1	−2	−1	0

Solución

a) El coeficiente principal de P es 1, así que los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Por consiguiente, los candidatos posibles son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Con la división sintética (véase al margen) se encuentra que 1 y 2 no son ceros, pero que 5 es un cero y que P se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x-5)(x^3 - 5x - 2)$$

Ahora se intenta factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus ceros posibles son los divisores de -2, a saber,

$$\pm 1, \quad \pm 2$$

Puesto que se sabe que 1 y 2 no son ceros del polinomio original P, no se requiere probarlos de nuevo. Al comprobar los demás candidatos -1 y -2, se ve que -2 es un cero (véase al margen), y que P se factoriza como

$$
\begin{aligned}
x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x-5)(x^3 - 5x - 2) \\
&= (x-5)(x+2)(x^2 - 2x - 1)
\end{aligned}
$$

Ahora se usa la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de P son $5, -2, 1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.

b) Ahora que se conocen los ceros de P, se pueden usar los métodos de la sección 3.1 para trazar la gráfica. Si en cambio se quiere usar una calculadora para gráficas, conocer los ceros permite elegir un rectángulo de visión apropiado, uno que sea lo suficientemente ancho para contener las intersecciones con el eje x de P. Las aproximaciones numéricas a los ceros de P son

$$5, \qquad -2, \qquad 2.4 \qquad \text{y} \qquad -0.4$$

Por lo tanto, en este caso se elige el rectángulo $[-3, 6]$ por $[-50, 50]$ y se traza la gráfica mostrada en la figura 1. ■

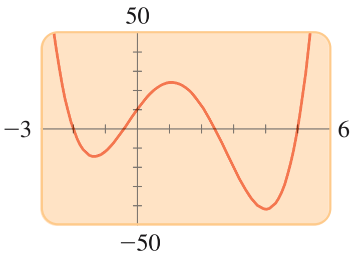


Figura 1
$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$

Regla de Descartes de los signos y límites superiores e inferiores para raíces

En algunos casos, la siguiente regla, descubierta por el filósofo francés y matemático René Descartes alrededor de 1637 (véase la página 112), es útil para eliminar los candidatos de listas largas de posibles raíces racionales. Para escribir esta regla, se necesita el concepto de *variación de signo*. Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, escrito con potencias descendentes de x (y omitiendo las potencias con coeficiente 0), entonces una **variación de signo** ocurre siempre que los coeficientes adyacentes tengan signos opuestos. Por ejemplo,

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones de signo.

Polinomio	Variación de signo
$x^2 + 4x + 1$	0
$2x^3 + x - 6$	1
$x^4 - 3x^2 - x + 4$	2

Regla de los signos de Descartes

Sea P un polinomio con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(x)$ o menor que eso por un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones de signo en $P(-x)$ o es menor que eso por número entero par.

Ejemplo 4 Uso de la regla de Descartes

Use la regla de Descartes de los signos para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos del polinomio

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

Solución El polinomio tiene una variación de signo y, por lo tanto, tiene un cero positivo. Ahora bien

$$P(-x) = 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3$$

$$= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3$$

Así, $P(-x)$ tiene tres variaciones de signo. Por lo tanto, $P(x)$ tiene tres ceros o un cero negativo, lo que hace un total de dos o cuatro ceros reales. ■

Se dice que a es una **cota inferior** y b es una **cota superior** para los ceros de un polinomio si todo cero real c del polinomio satisface $a \le c \le b$. El siguiente teorema ayuda a encontrar tales cotas para los ceros de un polinomio.

Teorema de las cotas superior e inferior

Sea P un polinomio con coeficientes reales.

1. Si se divide $P(x)$ entre $x - b$ (con $b > 0$) por medio de la división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo son elementos no negativos, entonces b es una cota superior para los ceros reales de P.
2. Si se divide $P(x)$ entre $x - a$ (con $a < 0$) por medio de la división sintética, y si el renglón que contiene el cociente y el residuo tiene elementos que son alternativamente no positivos y no negativos entonces a es una cota inferior para los ceros reales de P.

En el ejercicio 91 se sugiere una demostración de este teorema. La frase "alternativamente no positivos y no negativos" significa que se alternan los signos de los números, con 0 considerado como positivo o negativo según se requiera.

Ejemplo 5 Cotas superiores e inferiores para ceros de un polinomio

Demuestre que los ceros reales del polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se encuentran entre -3 y 2.

Solución Se divide $P(x)$ entre $x - 2$ y $x + 3$ por medio de la división sintética.

2	1	0	-3	2	-5
		2	4	2	8
	1	2	1	4	3

Los elementos son positivos

-3	1	0	-3	2	-5
		-3	9	-18	48
	1	-3	6	-16	43

Los elementos alternan en signo

Por el teorema de las cotas superiores e inferiores, -3 es una cota inferior y 2 es una cota superior para los ceros. Puesto que ni -3 ni 2 son un cero (los residuos no son 0 en la tabla de división), los ceros reales se ubican entre estos números. ■

Ejemplo 6 Factorización de un polinomio de quinto grado

Factorice por completo el polinomio

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

Solución Los posibles ceros racionales de P son $\pm\frac{1}{2}, \pm1, \pm\frac{3}{2}, \pm3, \pm\frac{9}{2}$ y ±9. Primero se comprueban los candidatos positivos, comenzando con el más pequeño.

$\frac{1}{2}$	2	5	-8	-14	6	9
		1	3	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{33}{4}$	$-\frac{9}{8}$
	2	6	-5	$-\frac{33}{2}$	$-\frac{9}{4}$	$\frac{63}{8}$

$\frac{1}{2}$ no es un cero

1	2	5	-8	-14	6	9
		2	7	-1	-15	-9
	2	7	-1	-15	-9	0

$P(1) = 0$

Así que 1 es un cero y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Se continúa factorizando el cociente. Aún se tiene la misma lista de ceros posibles excepto que $\frac{1}{2}$ ha sido eliminado.

1	2	7	−1	−15	−9
		2	9	8	−7
	2	9	8	−7	−16

1 no es un cero.

$\frac{3}{2}$	2	7	−1	−15	−9
		3	15	21	9
	2	10	14	6	0

$P(\frac{3}{2}) = 0$, todos los elementos son no negativos

Se puede observar que $\frac{3}{2}$ es un cero y una cota superior para los ceros de $P(x)$, así que no se necesita comprobar nada más para ceros positivos, porque los candidatos restantes son mayores que $\frac{3}{2}$.

$$P(x) = (x - 1)(x - \tfrac{3}{2})(2x^3 + 10x^2 + 14x + 6)$$

$$= (x - 1)(2x - 3)(x^3 + 5x^2 + 7x + 3) \qquad \text{Factorice 2 del último factor, multiplique en el segundo factor}$$

Por la regla de los signos de Descartes, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene ceros positivos, por lo tanto sus únicos ceros racionales posibles son -1 y -3.

−1	1	5	7	3
		−1	−4	−3
	1	4	3	0

$P(-1) = 0$

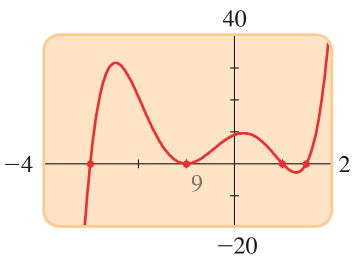


Figura 2

$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$
$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3)$

Por lo tanto

$$P(x) = (x - 1)(2x - 3)(x + 1)(x^2 + 4x + 3)$$

$$= (x - 1)(2x - 3)(x + 1)^2(x + 3) \qquad \text{Factor cuadrático}$$

Esto significa que los ceros de P son $1, \frac{3}{2}, -1$ y -3. La gráfica del polinomio se muestra en la figura 2. ■

Uso de álgebra y dispositivos de graficación para resolver ecuaciones polinomiales

En la sección 1.9 se emplearon dispositivos de graficación para resolver ecuaciones en modo gráfico. Ahora se pueden usar las técnicas algebraicas aprendidas para seleccionar un rectángulo de visión apropiado al resolver de modo gráfico una ecuación polinomial.

Ejemplo 7 Resolver de modo gráfico una ecuación de cuarto grado

Encuentre las soluciones reales de la siguiente ecuación, correctas hasta el décimo más próximo.

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

Solución Para resolver la ecuación de manera gráfica, se traza

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Se emplea el teorema de las cotas superior e inferior para ver dónde se pueden hallar las raíces.

Primero se usa el teorema de las cotas superior e inferior para hallar dos números entre los cuales deben estar las soluciones. Esto permite elegir un rectángulo de visión que con seguridad contiene todas las intersecciones con el eje x de P. Se usa la división sintética y se procede por prueba y error.

Para hallar una cota superior, se prueban los números enteros 1, 2, 3,. . . como posibles candidatos. Se ve que 2 es una cota superior para las raíces.

2	3	4	−7	−2	−3
		6	20	26	48
	3	10	13	24	45

Todos positivos

Ahora se busca una cota inferior, y se prueban los números −1, −2 y −3 como posibles candidatos. Se ve que −3 es una cota inferior para las raíces.

−3	3	4	−7	−2	−3
		−9	15	−24	78
	3	−5	8	−26	75

Los elementos alternan signo.

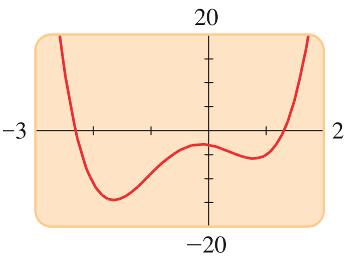


Figura 3
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Así, las raíces están entre −3 y 2. Por lo tanto, el rectángulo de visión $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene las intersecciones con el eje x de P. La gráfica de la figura 3 tiene intersecciones con x, uno entre −3 y −2 y el otro entre 1 y 2. Al hacer un acercamiento se encuentra que las soluciones de la ecuación, hasta el décimo más próximo, son −2.3 y 1.3. ■

Ejemplo 8 Determinar el tamaño de un recipiente de combustible

Un depósito de combustible consta de una sección central cilíndrica de 4 pies de largo y dos secciones extremas semiesféricas, como se ilustra en la figura 4. Si el recipiente tiene un volumen de 100 pies^3, ¿cuál es el radio r, mostrado en la figura, correcto hasta el centésimo más próximo de un pie?

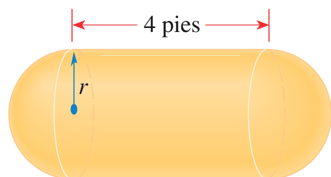


Figura 4

Solución Si se emplea la fórmula del volumen listada en la segunda de forros de este libro, se ve que el volumen de la sección cilíndrica del depósito es

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera completa cuyo volumen es

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Debido a que el volumen total del depósito es 100 pies^3, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para r no tendría sentido en esta situación física, y por sustitución se puede comprobar que $r = 3$ origina un depósito con más de 226 pies^3 de volumen, mucho más grande que los 100 pies^3 requeridos. Así, se sabe que el radio correcto se encuentra en alguna parte entre 0 y 3 pies y, por lo tanto, se usa un rec-

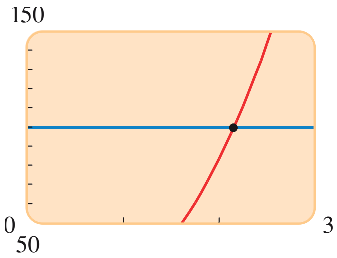


Figura 5
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

tángulo de visión de [0, 3] por [50, 150] para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$, como se muestra en la figura 5. Puesto que se desea que el valor de esta función sea 100, se grafica también la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo de visión. El radio correcto será la coordenada x del punto de intersección de la curva y la recta. Con el cursor y el acercamiento, se ve que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, correcto hasta dos decimales. Así, el depósito tiene un radio de casi 2.5 pies. ■

Hay que observar que se podría haber resuelto la ecuación del ejemplo 8 escribiéndola primero como

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y después hallar la intersección con x de la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 - 100$.

3.3 Ejercicios

1–6 ■ Liste los posibles ceros racionales dados por el teorema de ceros racionales (no compruebe cuáles en realidad son ceros).

1. $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

2. $Q(x) = x^4 - 3x^3 - 6x + 8$

3. $R(x) = 2x^5 + 3x^3 + 4x^2 - 8$

4. $S(x) = 6x^4 - x^2 + 2x + 12$

5. $T(x) = 4x^4 - 2x^2 - 7$

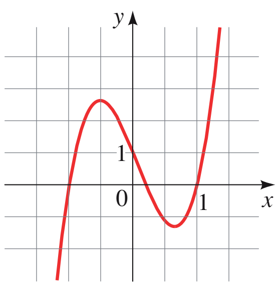
6. $U(x) = 12x^5 + 6x^3 - 2x - 8$

7–10 ■ Se dan una función polinomial y su gráfica.

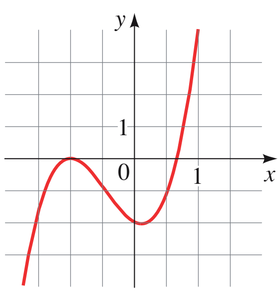
a) Liste los posibles ceros racionales de P dados por el teorema de los ceros racionales.

b) De la gráfica, determine cuáles de los posibles ceros racionales resultan ser en realidad ceros.

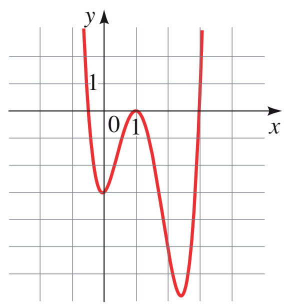
7. $P(x) = 5x^3 - x^2 - 5x + 1$



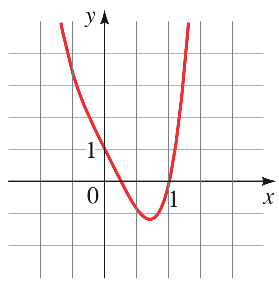
8. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - x - 2$



9. $P(x) = 2x^4 - 9x^3 + 9x^2 + x - 3$



10. $P(x) = 4x^4 - x^3 - 4x + 1$



11–40 ■ Encuentre los ceros racionales del polinomio.

11. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

12. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$

13. $P(x) = x^3 - 3x - 2$

14. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 18$

15. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

16. $P(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$

17. $P(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$

18. $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + 10$

19. $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 4$

20. $P(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

21. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

22. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

23. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x - 8$

24. $P(x) = x^4 - x^3 - 23x^2 - 3x + 90$

25. $P(x) = 4x^4 - 25x^2 + 36$

26. $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6$

27. $P(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16$

28. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 4x - 4$

29. $P(x) = 4x^3 + 4x^2 - x - 1$

30. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$

31. $P(x) = 4x^3 - 7x + 3$

32. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - x - 3$

33. $P(x) = 4x^3 + 8x^2 - 11x - 15$

34. $P(x) = 6x^3 + 11x^2 - 3x - 2$

35. $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 8x - 4$

36. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 12x^2 + 3x + 2$

37. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 31x^2 + 36$

38. $P(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24$

39. $P(x) = 3x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 43x + 10$

40. $P(x) = 2x^6 - 3x^5 - 13x^4 + 29x^3 - 27x^2 + 32x - 12$

41–50 ■ Encuentre los ceros reales del polinomio. Use la fórmula cuadrática si es necesario, como en el ejemplo 3(a).

41. $P(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 2$

42. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 12$

43. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 4x^2 + 15x + 4$

44. $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2$

45. $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 3x - 9$

46. $P(x) = x^5 - 4x^4 - x^3 + 10x^2 + 2x - 4$

47. $P(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$

48. $P(x) = 3x^3 - 5x^2 - 8x - 2$

49. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 17x^2 + 3x - 1$

50. $P(x) = 4x^5 - 18x^4 - 6x^3 + 91x^2 - 60x + 9$

51–58 ■ Se da un polinomio P.

a) Encuentre los ceros reales de P.

b) Bosqueje la gráfica de P.

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

52. $P(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 6$

53. $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 4$

54. $P(x) = 3x^3 + 17x^2 + 21x - 9$

55. $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$

56. $P(x) = -x^4 + 10x^2 + 8x - 8$

57. $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$

58. $P(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3$

59–64 ■ Use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y negativos puede tener el polinomio.

59. $P(x) = x^3 - x^2 - x - 3$

60. $P(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 7$

61. $P(x) = 2x^6 + 5x^4 - x^3 - 5x - 1$

62. $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$

63. $P(x) = x^5 + 4x^3 - x^2 + 6x$

64. $P(x) = x^8 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

65–68 ■ Muestre que los valores dados para a y b son las cotas interior y superior para los ceros reales del polinomio.

65. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2; \quad a = -3, b = 1$

66. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 9x^2 + 2x + 8; \quad a = -3, b = 5$

67. $P(x) = 8x^3 + 10x^2 - 39x + 9; \quad a = -3, b = 2$

68. $P(x) = 3x^4 - 17x^3 + 24x^2 - 9x + 1; \quad a = 0, b = 6$

69–72 ■ Encuentre los enteros que son las cotas superior e inferior para los ceros reales del polinomio.

69. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

70. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

71. $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 9x + 2$

72. $P(x) = x^5 - x^4 + 1$

73–78 ■ Encuentre los ceros racionales del polinomio y después los ceros irracionales, si existen. Siempre que sea apropiado, use el teorema de los ceros racionales, el teorema de las cotas superior e inferior, la regla de los signos de Descartes, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización.

73. $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 3x + 2$

74. $P(x) = 2x^4 + 15x^3 + 31x^2 + 20x + 4$

75. $P(x) = 4x^4 - 21x^2 + 5$

76. $P(x) = 6x^4 - 7x^3 - 8x^2 + 5x$

77. $P(x) = x^5 - 7x^4 + 9x^3 + 23x^2 - 50x + 24$

78. $P(x) = 8x^5 - 14x^4 - 22x^3 + 57x^2 - 35x + 6$

79–82 ■ Muestre que el polinomio no tiene ningún cero racional.

79. $P(x) = x^3 - x - 2$

80. $P(x) = 2x^4 - x^3 + x + 2$

81. $P(x) = 3x^3 - x^2 - 6x + 12$

82. $P(x) = x^{50} - 5x^{25} + x^2 - 1$

83–86 ■ Las soluciones reales de la ecuación dada son racionales. Liste las posibles raíces racionales por medio del teorema de ceros racionales y luego grafique el polinomio en el rectángulo de visión dado para determinar qué valores son en realidad soluciones. (Todas las soluciones se pueden ver en el rectángulo de visión dado.)

83. $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-15, 15]$

84. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $[-4, 4]$ por $[-30, 30]$

85. $2x^4 - 5x^3 - 14x^2 + 5x + 12 = 0$; $[-2, 5]$ por $[-40, 40]$

86. $3x^3 + 8x^2 + 5x + 2 = 0$; $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$

87–90 ■ Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones reales de la ecuación, correctas hasta dos decimales.

87. $x^4 - x - 4 = 0$

88. $2x^3 - 8x^2 + 9x - 9 = 0$

89. $4.00x^4 + 4.00x^3 - 10.96x^2 - 5.88x + 9.09 = 0$

90. $x^5 + 2.00x^4 + 0.96x^3 + 5.00x^2 + 10.00x + 4.80 = 0$

91. Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales y sea $b > 0$. Use el algoritmo de división para escribir

$$P(x) = (x - b) \cdot Q(x) + r$$

Suponga que $r \geq 0$ y que los coeficientes en $Q(x)$ son no negativos. Sea $z > b$.

a) Demuestre que $P(z) > 0$.

b) Demuestre la primera parte del teorema de las cotas superior e inferior.

c) Use la primera parte del teorema de las cotas superior e inferior para demostrar la segunda parte. [*Sugerencia:* demuestre que si $P(x)$ satisface la segunda parte del teorema, entonces $P(-x)$ satisface la primera parte.]

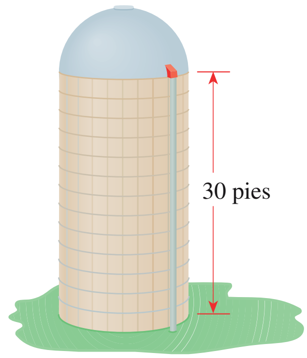
92. Demuestre que la ecuación

$$x^5 - x^4 - x^3 - 5x^2 - 12x - 6 = 0$$

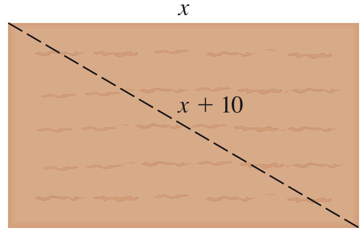
tiene exactamente una raíz racional; luego, demuestre que debe tener dos o cuatro raíces irracionales.

Aplicaciones

93. Volumen de un silo Un silo de granos consta de una sección principal cilíndrica y un techo semiesférico. Si el volumen total del silo (inclusive la parte interior de la sección del techo) es 15 000 pies^3 y la parte cilíndrica tiene 30 pies de alto, ¿cuál es el radio del silo, correcto hasta la décima de pie más próxima?



94. Dimensiones de un lote Una parcela rectangular de tierra tiene un área de 5000 pies^2. Una diagonal entre esquinas opuestas mide 10 pies más que un lado de la parcela. ¿Cuáles son las dimensiones de la tierra, correctas hasta el pie más próximo?



95. Profundidad de la nieve A mediodía del domingo comenzó a caer nieve. La cantidad de nieve en el suelo en cierto lugar en el instante t se determina mediante la función

$$h(t) = 11.60t - 12.41t^2 + 6.20t^3 - 1.58t^4 + 0.20t^5 - 0.01t^6$$

donde t se mide en días desde el momento en que comienza a caer nieve y $h(t)$ es la profundidad de la nieve en pulgadas. Trace una gráfica de esta función y empléela para contestar las siguientes preguntas

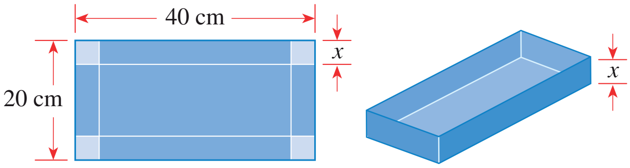
a) ¿Qué sucedió poco después del mediodía del martes?

b) ¿Había más de 5 pulgadas de nieve en el suelo? En caso afirmativo, ¿en qué día o días?

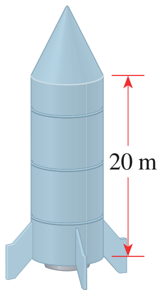
c) ¿En qué día y a qué hora (hasta la hora más próxima) la nieve desapareció por completo?

96. Volumen de una caja Una caja abierta con un volumen de 1500 cm^3 se construirá con una pieza de cartón de 20 por 40 cm, cortando cuadros de longitud lateral x cm en cada esquina, y doblando los lados hacia arriba. Muestre que esto

se puede hacer en dos formas distintas y encuentre las dimensiones exactas de la caja en cada caso.



97. Volumen de un cohete Un cohete consta de un cilindro circular recto de 20 m de alto rematado con un cono cuya altura y diámetro son iguales y cuyo radio es el mismo que el de la sección cilíndrica. ¿Cuál debe ser el radio (correcto hasta dos decimales) si el volumen total debe ser $500\pi/3$ m^3?

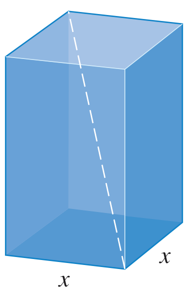


98. Volumen de una caja Una caja rectangular con un volumen de $2\sqrt{2}$ pies^3 tiene una base cuadrada como se muestra a continuación. La diagonal de la caja (entre un par de esquinas opuestas) es 1 pie más grande que cada lado de la base.

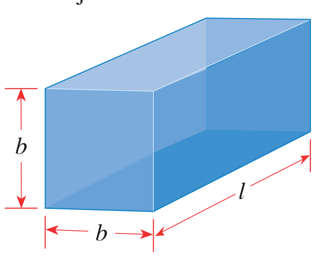
a) Si la base tiene lados de x pies de largo, muestre que

$$x^6 - 2x^5 - x^4 + 8 = 0$$

b) Muestre que dos cajas diferentes satisfacen las condiciones dadas. Encuentre las dimensiones en cada caso, correctas hasta el centésimo más próximo de un pie.



99. Contorno de una caja Una caja con una base cuadrada tiene una longitud más perímetro de 108 pulg. (El contorno o perímetro es la distancia "alrededor" de la caja.) ¿Cuál es la longitud de la caja si su volumen es 2200 pulg^3?



Descubrimiento • Debate

100. ¿Cuántos ceros reales puede tener un polinomio? Dé ejemplos de polinomios que tengan las siguientes propiedades, o explique por qué es imposible hallar tal polinomio.

a) Un polinomio de grado 3 que no tiene ceros reales.

b) Un polinomio de grado 4 que no tiene ceros reales.

c) Un polinomio de grado 3 que tiene tres ceros reales, sólo uno de los cuales es racional.

d) Un polinomio de grado 4 que tiene cuatro ceros reales, ninguno de los cuales es racional.

¿Qué debe ser cierto acerca del grado de un polinomio con coeficientes enteros si no tiene ceros reales?

101. Ecuación cúbica degradada La ecuación cúbica (tercer grado) más general con coeficientes racionales se puede escribir como

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

a) Muestre que si se reemplaza x por $X - a/3$ y se simplifica, se tiene una ecuación sin término X^2, es decir, una ecuación de la forma

$$X^3 + pX + q = 0$$

Ésta se llama *ecuación cúbica degradada*, porque se ha "suprimido" el término cuadrático.

b) Use el procedimiento descrito en el inciso a) para degradar la ecuación $x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0$.

102. La fórmula cúbica La fórmula cuadrática se puede usar para resolver cualquier ecuación cuadrática (o de segundo grado). Quizá se ha preguntado si existen fórmulas similares para las ecuaciones cúbicas (tercer grado), de cuarto grado o superiores. Para la ecuación cúbica degradada $x^3 + px + q = 0$, Cardano (página 296) encontró la fórmula siguiente para una solución:

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

En 1540 el matemático italiano Ferrari descubrió una fórmula para las ecuaciones de cuarto grado. En 1824, el matemático noruego Niels Henrik Abel demostró que es imposible escribir una fórmula para las ecuaciones de quinto grado. Por último, Galois (página 273) dio un criterio para determinar cuáles ecuaciones se pueden resolver mediante una fórmula en la que intervienen radicales.

Use la fórmula cúbica para hallar una solución para las ecuaciones siguientes. Luego, resuelva las ecuaciones con los métodos que aprendió en esta sección. ¿Cuál método es más fácil?

a) $x^3 - 3x + 2 = 0$

b) $x^3 - 27x - 54 = 0$

c) $x^3 + 3x + 4 = 0$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Centrarse en un cero

Se ha visto cómo hallar los ceros de un polinomio de manera algebraica o gráfica. Se utiliza un **método numérico** para hallar los ceros. Con este método se puede hallar el valor de cualquier cero real hasta los decimales que se desee.

El teorema del valor intermedio establece: si P es un polinomio y si $P(a)$ y $P(b)$ son de signo opuesto, entonces P tiene un cero entre a y b. (véase la página 255). El teorema del valor intermedio es un ejemplo de un **teorema de existencia**: indica que existe un cero, no indica exactamente dónde está. Sin embargo, se puede usar el teorema para centrarse en el cero.

Por ejemplo, considere el polinomio $P(x) = x^3 + 8x - 30$. Observe que $P(2) < 0$ y $P(3) > 0$. Por el teorema del valor intermedio P debe tener un cero entre 2 y 3. Para "atrapar" el cero en un intervalo más pequeño, se evalúa P en décimos sucesivos entre 2 y 3 hasta que se encuentra el lugar donde P cambia de signo, como en la tabla 1. En la tabla se ve que el cero que se está buscando se ubica entre 2.2 y 2.3, como se muestra en la figura 1.

Tabla 1

x	$P(x)$
2.1	-3.94
2.2	-1.75
2.3	0.57

}cambio de signo (entre 2.2 y 2.3)

Tabla 2

x	$P(x)$
2.26	-0.38
2.27	-0.14
2.28	0.09

}cambio de signo (entre 2.27 y 2.28)

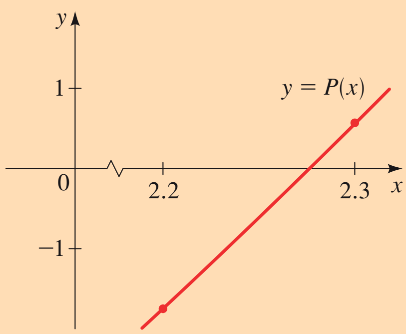


Figura 1

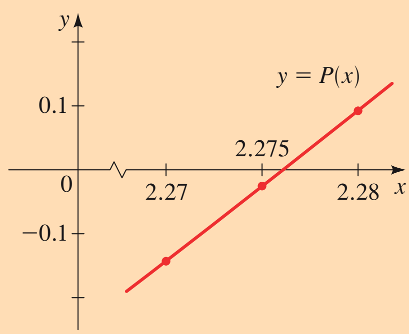


Figura 2

Se puede repetir este proceso evaluando P en centésimos sucesivos entre 2.2 y 2.3, como en la tabla 2. Si este proceso se repite una y otra vez, se puede obtener un valor numérico para el cero de forma tan exacta como se quiera. De la tabla 2 se ve que el cero está entre 2.27 y 2.28. Para ver si está más cerca de 2.27 o 2.28, se comprueba el valor de P a la mitad entre estos dos números: $P(2.275) \approx -0.03$. Puesto que este valor es negativo, el cero que se está buscando se ubica entre 2.275 y 2.28, como se ilustra en la figura 2. Correcto hasta el centésimo más próximo, el cero es 2.28.

1. a) Muestre que $P(x) = x^2 - 2$ tiene un cero entre 1 y 2.

b) Encuentre el cero de P hasta el décimo más próximo.

c) Encuentre el cero de P hasta el centésimo más próximo.

d) Explique por qué el cero que encontró es una aproximación a $\sqrt{2}$. Repita el proceso varias veces para obtener $\sqrt{2}$ correcto hasta tres decimales. Compare sus resultados para $\sqrt{2}$ obtenidos con una calculadora.

2. Encuentre un polinomio que tiene $\sqrt[3]{5}$ como un cero. Use el proceso descrito aquí para centrarse en $\sqrt[3]{5}$ hasta cuatro decimales.

3. Muestre que el polinomio tiene un cero entre los enteros dados, y luego céntrese en ese cero, correcto hasta dos decimales.

a) $P(x) = x^3 + x - 7$; entre 1 y 2

b) $P(x) = x^3 - x^2 - 5$; entre 2 y 3

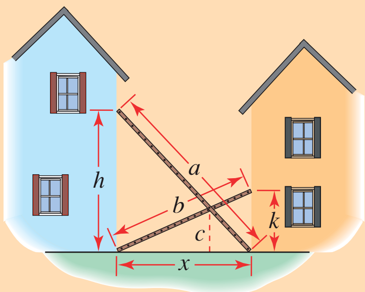
c) $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$; entre 1 y 2

d) $P(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$; entre -1 y 0

4. Encuentre el cero irracional indicado, correcto hasta dos decimales.

a) El cero positivo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$

b) El cero negativo de $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 1$



5. En un pasillo entre dos edificios, dos escaleras se apoyan de la base de cada edificio hasta la pared del otro de modo que se cruzan, como se ilustra en la figura. Si las escaleras tienen longitudes $a = 3$ m y $b = 2$ m y el punto de cruce está a una altura $c = 1$ m, entonces se puede mostrar que la distancia x entre los edificios es una solución de la ecuación

$$x^8 - 22x^6 + 163x^4 - 454x^2 + 385 = 0$$

a) Esta ecuación tiene dos soluciones positivas, que se encuentran entre 1 y 2. Use la técnica de "centrarse en" para hallar ambas correctas hasta el décimo más próximo.

b) Dibuje dos diagramas a escala, como en la figura, uno para cada uno de los dos valores de x que encontró en el inciso a). Mida la altura del punto de cruce en cada uno. ¿Qué valor de x al parecer es el correcto?

c) A continuación se describe cómo obtener la ecuación anterior. Primero, use triángulos similares para mostrar que

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{h} + \frac{1}{k}$$

Luego, use el teorema de Pitágoras para rescribir esto como

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

Sustituya $a = 3$, $b = 2$ y $c = 1$, luego simplifique para obtener la ecuación deseada. [Observe que hay que elevar al cuadrado dos veces en este proceso para eliminar ambas raíces cuadradas. Éste es el porqué se obtiene una solución extraña en el inciso a). (Véase la *Advertencia* en la página 53.)]

3.4 Números complejos

En la sección 1.5 se vio que si el discriminante de una ecuación cuadrática es negativo, la ecuación no tiene solución real. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

no tiene solución real. Si se intenta resolver esta ecuación, se obtiene $x^2 = -4$, por lo tanto

$$x = \pm\sqrt{-4}$$

Pero esto es imposible, puesto que el cuadrado de cualquier número real es positivo. [Por ejemplo $(-2)^2 = 4$, un número positivo.] Así, los números negativos no tienen raíces cuadradas reales.

Para hacer posible que *todas* las ecuaciones cuadráticas tengan solución, los matemáticos inventaron un sistema de números desarrollado, llamado *sistema de números complejos.* Primero, definieron el número

Véase la nota sobre Cardano, página 296, para un ejemplo de cómo se emplean los números complejos para hallar soluciones reales de ecuaciones polinomiales.

$$i = \sqrt{-1}$$

Esto significa que $i^2 = -1$. Un número complejo es entonces un número de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales.

Definición de números complejos

Un **número complejo** es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales e $i^2 = -1$. La **parte real** de este número complejo es a y la **parte imaginaria** es b. Dos números complejos son **iguales** si y sólo si sus partes reales son iguales y sus partes imaginarias son iguales.

Hay que observar que las partes real e imaginaria de un número complejo son números reales.

Ejemplo 1 Números complejos

Los siguientes son ejemplos de números complejos.

$3 + 4i$	Parte real 3, parte imaginaria 4
$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$	Parte real $\frac{1}{2}$, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$
$6i$	Parte real 0, parte imaginaria 6
-7	Parte real -7, parte imaginaria 0

■

Un número como $6i$, que tiene parte real 0, se llama **número imaginario puro**. Un número real como -7 se puede considerar como un número complejo con parte imaginaria 0.

En el sistema de números complejos toda ecuación cuadrática tiene soluciones. Los números $2i$ y $-2i$ son soluciones de $x^2 = -4$ porque

$$(2i)^2 = 2^2 i^2 = 4(-1) = -4 \quad \text{y} \quad (-2i)^2 = (-2)^2 i^2 = 4(-1) = -4$$

Aunque se usa el término *imaginario* en este contexto, los números imaginarios no deben ser considerados como algo menos "real" (en el sentido ordinario más que matemático de la palabra) que los números negativos o irracionales. Todos los números (excepto posiblemente los enteros positivos) son creaciones de la mente humana, los números -1 y $\sqrt{2}$ así como el número i. Se estudian los números complejos porque completan, de un modo útil y elegante, el estudio de las soluciones de ecuaciones. De hecho, los números imaginarios son útiles no sólo en álgebra y matemáticas, sino en otras ciencias también. Para dar sólo un ejemplo, en teoría eléctrica la *reactancia* de un circuito es una cantidad cuya medida es un número imaginario.

Operaciones matemáticas sobre números complejos

Los números complejos se suman, restan, multiplican y dividen del mismo modo como se haría con cualquier número de la forma $a + b\sqrt{c}$. La única diferencia que se requiere tener en mente es $i^2 = -1$. Así, los cálculos siguientes son válidos.

$$(a + bi)(c + di) = ac + (ad + bc)i + bdi^2$$ Multiplique y reúna los términos semejantes

$$= ac + (ad + bc)i + bd(-1)$$ $i^2 = -1$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)i$$ Combine las partes reales y las imaginarias

Por lo tanto, se define la suma, diferencia y el producto de números complejos como sigue.

Sumar, restar y multiplicar números complejos

Definición	Descripción
Suma	
$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$	Para sumar números complejos, sume las partes reales y las partes imaginarias.
Resta	
$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$	Para restar números complejos, reste las partes reales y las partes imaginarias.
Multiplicación	
$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$	Multiplique los números complejos como binomios, con $i^2 = -1$.

Las calculadoras para gráficas pueden efectuar operaciones aritméticas en números complejos.

```
(3+5i)+(4-2i)
            7+3i
(3+5i)*(4-2i)
           22+14i
```

Ejemplo 2 Suma, resta y multiplicación de números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

a) $(3 + 5i) + (4 - 2i)$ b) $(3 + 5i) - (4 - 2i)$

c) $(3 + 5i)(4 - 2i)$ d) i^{23}

Solución

a) De acuerdo con la definición, se suman las partes reales y las partes imaginarias.

$$(3 + 5i) + (4 - 2i) = (3 + 4) + (5 - 2)i = 7 + 3i$$

b) $(3 + 5i) - (4 - 2i) = (3 - 4) + [5 - (-2)]i = -1 + 7i$

c) $(3 + 5i)(4 - 2i) = [3 \cdot 4 - 5(-2)] + [3(-2) + 5 \cdot 4]i = 22 + 14i$

d) $i^{23} = i^{22+1} = (i^2)^{11}i = (-1)^{11}i = (-1)i = -i$ ■

Complejos Conjugados

Número	Conjugado
$3 + 2i$	$3 - 2i$
$1 - i$	$1 + i$
$4i$	$-4i$
5	5

La división de números complejos es muy parecida a racionalizar el denominador de una expresión radical, que se consideró en la sección 1.2. Para el número complejo $z = a + bi$ se define su **complejo conjugado** como $\overline{z} = a - bi$. Observe que

$$z \cdot \overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Por consiguiente, el producto de un número complejo y su conjugado es siempre un número real no negativo. Se usa esta propiedad para dividir números complejos.

División de números complejos

Para simplificar el cociente $\dfrac{a + bi}{c + di}$, se multiplica el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \left(\frac{a + bi}{c + di}\right)\left(\frac{c - di}{c - di}\right) = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

En vez de memorizar toda la fórmula, es más fácil recordar el primer paso y luego multiplicar el numerador y el denominador de la manera usual.

Ejemplo 3 Dividir números complejos

Exprese lo siguiente en la forma $a + bi$.

a) $\dfrac{3 + 5i}{1 - 2i}$ b) $\dfrac{7 + 3i}{4i}$

Solución Se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado complejo del denominador para hacer al nuevo denominador un número real.

a) El complejo conjugado de $1 - 2i$ es $\overline{1 - 2i} = 1 + 2i$.

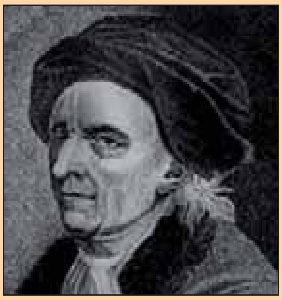
$$\frac{3 + 5i}{1 - 2i} = \left(\frac{3 + 5i}{1 - 2i}\right)\left(\frac{1 + 2i}{1 + 2i}\right) = \frac{-7 + 11i}{5} = -\frac{7}{5} + \frac{11}{5}i$$

b) El complejo conjugado de $4i$ es $-4i$. Por lo tanto

$$\frac{7 + 3i}{4i} = \left(\frac{7 + 3i}{4i}\right)\left(\frac{-4i}{-4i}\right) = \frac{12 - 28i}{16} = \frac{3}{4} - \frac{7}{4}i$$ ■

Raíces cuadradas de números negativos

Así como todo número real positivo r tiene dos raíces cuadradas ($\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$), todo número negativo tiene dos raíces cuadradas también. Si $-r$ es un número negativo, entonces sus raíces cuadradas son $\pm i\sqrt{r}$, porque $(i\sqrt{r})^2 = i^2r = -r$ y $(-i\sqrt{r})^2 = i^2r = -r$.



Leonhard Euler (1707-1783), hijo de un pastor, nació en Basel, Suiza. A la edad de 13 años su padre lo envió a la universidad en Basel para estudiar teología, pero Euler pronto decidió dedicarse a las ciencias. Además de teología estudió matemáticas, medicina, astronomía, física e idiomas asiáticos. Se dice que Euler podía calcular con el mismo esfuerzo que el "hombre respira o las águilas vuelan". Cien años antes que Euler, Fermat (véase la página 652) había conjeturado que $2^{2^n} + 1$ es un número primo para toda n. Los primeros cinco de estos números son 5, 17, 257, 65537 y 4 294 967 297. Es fácil mostrar que los primeros cuatro son primos. Se consideraba que el cuarto también era primo hasta que Euler, con su capacidad fenomenal para realizar cálculos, mostró que es el producto de $641 \times 6\,700\,417$ y, por lo tanto, no es un número primo. Euler publicó más que cualquier otro matemático en la historia. Sus trabajos reunidos comprenden 75 volúmenes grandes. Aunque los últimos 17 años de su vida careció de la vista, continuó con su trabajo y publicaciones. En sus escritos popularizó el uso de los símbolos π, e y también i, que el lector encontrará en este texto. Una de las contribuciones más duraderas de Euler es su desarrollo de los números complejos.

Raíces cuadradas de número negativos

Si $-r$ es negativo, entonces la **raíz cuadrada principal** de $-r$ es

$$\sqrt{-r} = i\sqrt{r}$$

Las dos raíces cuadradas de $-r$ son $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$.

Por lo común se escribe $i\sqrt{b}$ en lugar de $\sqrt{b}\,i$ para evitar confusión con $\sqrt{bi}$.

Ejemplo 4 Raíces cuadradas de números negativos

a) $\sqrt{-1} = i\sqrt{1} = i$

b) $\sqrt{-16} = i\sqrt{16} = 4i$

c) $\sqrt{-3} = i\sqrt{3}$ ■

Se debe poner atención especial al efectuar los cálculos relacionados con raíces cuadradas de números negativos. Si bien $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ cuando a y b son positivos, esto *no* se cumple cuando ambos son negativos. Por ejemplo,

$$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} = i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{3} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

pero $$\sqrt{(-2)(-3)} = \sqrt{6}$$

por lo tanto $$\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-3} \neq \sqrt{(-2)(-3)}$$

Al multiplicar radicales de números negativos, expréselos en la forma $i\sqrt{r}$ (donde $r > 0$) para evitar posibles errores de este tipo.

Ejemplo 5 Uso de raíces cuadradas de números negativos

Evalúe $(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4})$ y exprese en la forma $a + bi$.

Solución

$$\begin{aligned}(\sqrt{12} - \sqrt{-3})(3 + \sqrt{-4}) &= (\sqrt{12} - i\sqrt{3})(3 + i\sqrt{4})\\ &= (2\sqrt{3} - i\sqrt{3})(3 + 2i)\\ &= (6\sqrt{3} + 2\sqrt{3}) + i(2\cdot 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3})\\ &= 8\sqrt{3} + i\sqrt{3}\end{aligned}$$ ■

Raíces complejas de ecuaciones cuadráticas

Ya se ha visto que, si $a \neq 0$, entonces las soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución real. Pero en el sistema de números complejos, esta ecuación siempre tendrá soluciones, porque los números negativos tienen raíces cuadradas en este entorno expandido.

Ejemplo 6 Ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas

Resuelva cada ecuación.

a) $x^2 + 9 = 0$ b) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Solución

a) La ecuación $x^2 + 9 = 0$ significa $x^2 = -9$, por consiguiente

$$x = \pm\sqrt{-9} = \pm i\sqrt{9} = \pm 3i$$

Las soluciones son por lo tanto $3i$ y $-3i$.

b) Por la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$= \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i$$

Así, las soluciones son $-2 + i$ y $-2 - i$. ■

Las dos soluciones de *cualquier* ecuación cuadrática que tiene coeficientes reales son complejos conjugados entre sí. Para entender por qué esto es cierto, considere el signo $\pm$ en la fórmula cuadrática.

Ejemplo 7 Complejos conjugados como soluciones de ecuaciones cuadráticas

Demuestra que las soluciones de la ecuación

$$4x^2 - 24x + 37 = 0$$

son complejos conjugados el uno del otro.

Solución Se usa la fórmula cuadrática para obtener

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(4)(37)}}{2(4)}$$

$$= \frac{24 \pm \sqrt{-16}}{8} = \frac{24 \pm 4i}{8} = 3 \pm \frac{1}{2}i$$

Así, las soluciones son $3 + \frac{1}{2}i$ y $3 - \frac{1}{2}i$, y éstos son complejos conjugados. ■

3.4 Ejercicios

1–10 ■ Encuentre las partes real e imaginaria del número complejo.

1. $5 - 7i$

2. $-6 + 4i$

3. $\dfrac{-2 - 5i}{3}$

4. $\dfrac{4 + 7i}{2}$

5. 3

6. $-\frac{1}{2}$

7. $-\frac{2}{3}i$

8. $i\sqrt{3}$

9. $\sqrt{3} + \sqrt{-4}$

10. $2 - \sqrt{-5}$

11–22 ■ Llevar a cabo la suma o resta y escribir el resultado en la forma $a + bi$.

11. $(2 - 5i) + (3 + 4i)$

12. $(2 + 5i) + (4 - 6i)$

13. $(-6 + 6i) + (9 - i)$

14. $(3 - 2i) + \left(-5 - \frac{1}{3}i\right)$

15. $3i + (6 - 4i)$

16. $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}i\right)$

17. $\left(7 - \frac{1}{2}i\right) - \left(5 + \frac{3}{2}i\right)$

18. $(-4 + i) - (2 - 5i)$

19. $(-12 + 8i) - (7 + 4i)$

20. $6i - (4 - i)$

21. $\frac{1}{3}i - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}i\right)$

22. $(0.1 - 1.1i) - (1.2 - 3.6i)$

23–56 ■ Evaluar la expresión y escribir el resultado en la forma $a + bi$.

23. $4(-1 + 2i)$

24. $2i\left(\frac{1}{2} - i\right)$

25. $(7 - i)(4 + 2i)$

26. $(5 - 3i)(1 + i)$

27. $(3 - 4i)(5 - 12i)$

28. $\left(\frac{2}{3} + 12i\right)\left(\frac{1}{6} + 24i\right)$

29. $(6 + 5i)(2 - 3i)$

30. $(-2 + i)(3 - 7i)$

31. $\dfrac{1}{i}$

32. $\dfrac{1}{1 + i}$

33. $\dfrac{2 - 3i}{1 - 2i}$

34. $\dfrac{5 - i}{3 + 4i}$

35. $\dfrac{26 + 39i}{2 - 3i}$

36. $\dfrac{25}{4 - 3i}$

37. $\dfrac{10i}{1 - 2i}$

38. $(2 - 3i)^{-1}$

39. $\dfrac{4 + 6i}{3i}$

40. $\dfrac{-3 + 5i}{15i}$

41. $\dfrac{1}{1 + i} - \dfrac{1}{1 - i}$

42. $\dfrac{(1 + 2i)(3 - i)}{2 + i}$

43. i^3

44. $(2i)^4$

45. i^{100}

46. i^{1002}

47. $\sqrt{-25}$

48. $\sqrt{\dfrac{-9}{4}}$

49. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

50. $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{-27}$

51. $(3 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-1})$

52. $\dfrac{1 - \sqrt{-1}}{1 + \sqrt{-1}}$

53. $\dfrac{2 + \sqrt{-8}}{1 + \sqrt{-2}}$

54. $(\sqrt{3} - \sqrt{-4})(\sqrt{6} - \sqrt{-8})$

55. $\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-2}\sqrt{-9}}$

56. $\dfrac{\sqrt{-7}\sqrt{-49}}{\sqrt{28}}$

57–70 ■ Hallar las soluciones de la ecuación y expresarlas en la forma $a + bi$.

57. $x^2 + 9 = 0$

58. $9x^2 + 4 = 0$

59. $x^2 - 4x + 5 = 0$

60. $x^2 + 2x + 2 = 0$

61. $x^2 + x + 1 = 0$

62. $x^2 - 3x + 3 = 0$

63. $2x^2 - 2x + 1 = 0$

64. $2x^2 + 3 = 2x$

65. $t + 3 + \dfrac{3}{t} = 0$

66. $z + 4 + \dfrac{12}{z} = 0$

67. $6x^2 + 12x + 7 = 0$

68. $4x^2 - 16x + 19 = 0$

69. $\frac{1}{2}x^2 - x + 5 = 0$

70. $x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$

71–78 ■ Recuerde que el símbolo $\overline{z}$ representa el complejo conjugado de z. Si $z = a + bi$ y $w = c + di$, demuestra cada expresión.

71. $\overline{z} + \overline{w} = \overline{z + w}$

72. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

73. $(\overline{z})^2 = \overline{z^2}$

74. $\overline{\overline{z}} = z$

75. $z + \overline{z}$ es un número real

76. $z - \overline{z}$ es un número imaginario puro

77. $z \cdot \overline{z}$ es un número real

78. $z = \overline{z}$ si y sólo si z es real

Descubrimiento • Debate

79. Raíces complejas conjugadas Suponga que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene coeficientes reales y raíces complejas. ¿Por qué las raíces deben ser complejos conjugados entre sí? (Piense cómo encontraría las raíces con la fórmula cuadrática.)

80. Potencias de *i* Calcule las primeras 12 potencias de i, es decir, $i, i^2, i^3, \ldots, i^{12}$. ¿Observa un patrón? Explique cómo calcularía cualquier potencia de número entero de i, con el patrón que descubrió. Use este procedimiento para calcular i^{4446}.

81. Radicales complejos El número 8 tiene una raíz cúbica real, $\sqrt[3]{8} = 2$. Calcule $(-1 + i\sqrt{3})^3$ y $(-1 - i\sqrt{3})^3$ para comprobar que 8 tiene por lo menos otras dos raíces cúbicas complejas. ¿Puede hallar cuatro raíces cuartas de 16?

3.5 Ceros complejos y el teorema fundamental del álgebra

Ya se ha visto que el polinomio de n-ésimo grado puede tener a lo sumo n ceros reales. En el sistema de números complejos un polinomio de n-ésimo grado tiene exactamente n ceros y, por lo tanto, se puede factorizar en exactamente n factores lineales. Este hecho es una consecuencia del teorema fundamental del álgebra, el cual fue probado por el matemático alemán C. F. Gauss en 1799 (véase la página 294).

Teorema fundamental del álgebra y factorización completa

El siguiente teorema es la base para gran parte del trabajo de factorizar polinomios y resolver ecuaciones polinomiales.

Teorema fundamental del álgebra

Todo polinomio

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

con coeficientes complejos tiene por lo menos un cero complejo.

Debido a que cualquier número real es también un número complejo, el teorema se aplica también a polinomios con coeficientes reales.

El teorema fundamental del álgebra y el teorema del factor muestran que un polinomio puede ser factorizado por completo en factores lineales, como se demuestra ahora.

Teorema de factorización completa

Si $P(x)$ es un polinomio de grado $n \geq 1$, entonces existen números complejos $a, c_1, c_2, \ldots, c_n$ (con $a \neq 0$) tales que

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$

■ **Demostración** Por el teorema fundamental del álgebra, P tiene por lo menos un cero. Sea éste c_1. Por el teorema del factor, $P(x)$ se puede factorizar como

$$P(x) = (x - c_1) \cdot Q_1(x)$$

donde $Q_1(x)$ es de grado $n - 1$. Al aplicar el teorema fundamental al cociente $Q_1(x)$ se obtiene la factorización

$$P(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot Q_2(x)$$

donde $Q_2(x)$ es de grado $n - 2$ y c_2 es un cero de $Q_1(x)$. Si se continúa con este proceso para n pasos, se obtiene un cociente final $Q_n(x)$ de grado 0, una constante no cero que se llamará a. Esto significa que P ha sido factorizado como

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2)\cdots(x - c_n)$$ ■

Para hallar en realidad los ceros complejos de un polinomio de n-ésimo grado, por lo general se factoriza primero tanto como sea posible, luego se usa la fórmula cuadrática en las partes que no se pueden factorizar más.

Ejemplo 1 Factorización completa de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Halle la factorización completa de P.

Solución

a) Se factoriza primero P como sigue.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 3x^2 + x - 3 && \text{Dado} \\ &= x^2(x - 3) + (x - 3) && \text{Términos agrupados} \\ &= (x - 3)(x^2 + 1) && \text{Factor } x - 3 \end{aligned}$$

Se encuentran los ceros de P al igualar a cero cada factor 0:

$$P(x) = (x - 3)(x^2 + 1)$$

Este factor es 0 cuando $x = 3$.

Este factor es 0 cuando $x = i$ o $-i$.

Al hacer que $x - 3 = 0$, se ve que $x = 3$ es un cero. Con $x^2 + 1 = 0$, se obtiene $x^2 = -1$, por lo tanto $x = \pm i$. Así que los ceros de P son 3, i y $-i$.

b) Puesto que los ceros son 3, i y $-i$, por el teorema de factorización completa P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 3)(x - i)[x - (-i)] \\ &= (x - 3)(x - i)(x + i) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 Factorización completa de un polinomio

Sea $P(x) = x^3 - 2x + 4$.

a) Encuentre los ceros de P.

b) Halle la factorización completa de P.

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -0 & -2 & -4 \\ & & -2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

a) Los posibles ceros racionales son los factores de 4, que son ± 1, ± 2, ± 4. Por medio de la división sintética (véase el margen) se encuentra que -2 es un cero, y el polinomio se factoriza como

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

Este factor es 0 cuando $x = -2$.

Use la fórmula cuadrática para determinar cuándo este factor es 0

Para hallar los ceros, se iguala a cero cada factor. Por supuesto, $x + 2 = 0$ significa $x = -2$. Se usa la fórmula cuadrática para determinar cuándo el otro factor es cero.

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \qquad \text{Iguale a cero el factor}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2} \qquad \text{Tome la raíz cuadrada}$$

$$x = 1 \pm i \qquad \text{Simplifique}$$

Por consiguiente, los ceros de P son -2, $1 + i$ y $1 - i$.

b) Puesto que los ceros son -2, $1 + i$ y $1 - i$, por el teorema de factorización completa P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= [x - (-2)][x - (1 + i)][x - (1 - i)] \\ &= (x + 2)(x - 1 - i)(x - 1 + i) \end{aligned}$$

■

Ceros y sus multiplicidades

En el teorema de factorización completa los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son los ceros de P. Estos ceros no necesariamente son todos diferentes. Si el factor $x - c$ aparece k veces en la factorización completa de $P(x)$, entonces se dice que c es un cero de **multiplicidad k** (véase la página 259). Por ejemplo, el polinomio

$$P(x) = (x - 1)^3(x + 2)^2(x + 3)^5$$

tiene los ceros siguientes:

1 (multiplicidad 3), $\quad -2$ (multiplicidad 2), $\quad -3$ (multiplicidad 5)

El polinomio P tiene el mismo número de ceros que su grado, tiene grado 10 y tiene 10 ceros, siempre y cuando se cuenten sus multiplicidades. Esto es cierto para todos los polinomios, según se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema de ceros

Todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n ceros, siempre que un cero de multiplicidad k se cuente k veces.

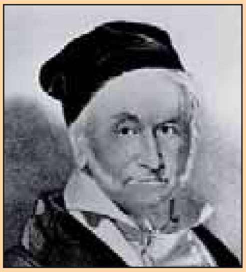
■ **Demostración** Sea P un polinomio de grado n. Por el teorema de factorización completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Ahora suponga que c es un cero de P distinto de $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Entonces

$$P(c) = a(c - c_1)(c - c_2) \cdots (c - c_n) = 0$$

Así, por la propiedad del producto cero, uno de los factores $c - c_i$ debe ser 0, por lo tanto $c = c_i$ para alguna i. Se deduce que P tiene exactamente los n ceros $c_1, c_2, \ldots, c_n$. ■



Corbis

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) es considerado el matemático más grande de los tiempos modernos. Sus contemporáneos lo llamaron el "Príncipe de las matemáticas". Nació en una familia pobre; su padre se ganó la vida como albañil. Cuando era muy pequeño, Gauss encontró un error de cálculo en las cuentas de su padre, el primero de muchos incidentes que dieron evidencia de su precocidad matemática. (Véase la página 834.) A los 19 años Gauss demostró que el polígono regular de 17 lados se puede construir con una regla y compás solamente. Esto fue notable porque, desde la época de Euclides, se pensaba que los únicos polígonos regulares que se podían construir de esta forma eran el triángulo y el pentágono. Como resultado de este descubrimiento Gauss decidió seguir una carrera en matemáticas en lugar de idiomas, su otra pasión. En su disertación doctoral, escrita a la edad de 22 años, Gauss demostró el teorema fundamental del álgebra: un polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces. Sus otros logros abarcan cada rama de las matemáticas, así como la física y la astronomía

Ejemplo 3 Factorización de un polinomio con ceros complejos

Encuentre la factorización completa de los cinco ceros del polinomio

$$P(x) = 3x^5 + 24x^3 + 48x$$

Solución Puesto que $3x$ es un factor común, se tiene

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x(x^4 + 8x^2 + 16) \\ &= 3x(x^2 + 4)^2 \end{aligned}$$

Este factor es 0 cuando $x = 0$.

Este factor es 0 cuando $x = 2i$ o $x = -2i$.

Para factorizar $x^2 + 4$, note que $2i$ y $-2i$ son ceros de este polinomio. Así $x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$ y, por lo tanto

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x[(x - 2i)(x + 2i)]^2 \\ &= 3x(x - 2i)^2(x + 2i)^2 \end{aligned}$$

0 es un cero de multiplicidad 1.

$2i$ es un cero de multiplicidad 2.

$-2i$ es un cero de multiplicidad 2.

Los ceros de P son 0, $2i$ y $-2i$. Puesto que los factores $x - 2i$ y $x + 2i$ ocurren cada uno dos veces en la factorización completa de P, los ceros $2i$ y $-2i$ son de multiplicidad 2 (o ceros *dobles*). Así, se han hallado los cinco ceros. ■

En la tabla siguiente se dan ejemplos de polinomios con sus factorizaciones completas y ceros.

Grado	Polinomio	Cero(s)	Número de ceros
1	$P(x) = x - 4$	4	1
2	$P(x) = x^2 - 10x + 25$ $= (x - 5)(x - 5)$	5 (multiplicidad 2)	2
3	$P(x) = x^3 + x$ $= x(x - i)(x + i)$	$0, i, -i$	3
4	$P(x) = x^4 + 18x^2 + 81$ $= (x - 3i)^2(x + 3i)^2$	$3i$ (multiplicidad 2), $-3i$ (multiplicidad 2)	4
5	$P(x) = x^5 - 2x^4 + x^3$ $= x^3(x - 1)^2$	0 (multiplicidad 3), 1 (multiplicidad 2)	5

Ejemplo 4 Hallar polinomios con ceros especificados

a) Hallar un polinomio $P(x)$ de grado 4, con ceros i, $-i$, 2 y -2 y con $P(3) = 25$.

b) Encuentre un polinomio $Q(x)$ de grado 4, con ceros -2 y 0, donde -2 es un cero de multiplicidad 3.

Solución

a) El polinomio requerido tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a(x - i)(x - (-i))(x - 2)(x - (-2)) \\ &= a(x^2 + 1)(x^2 - 4) && \text{Diferencia de cuadrados} \\ &= a(x^4 - 3x^2 - 4) && \text{Multiplicar} \end{aligned}$$

Se sabe que $P(3) = a(3^4 - 3 \cdot 3^2 - 4) = 50a = 25$, por lo tanto $a = \frac{1}{2}$. Así

$$P(x) = \tfrac{1}{2}x^4 - \tfrac{3}{2}x^2 - 2$$

b) Se requiere

$$\begin{aligned} Q(x) &= a[x - (-2)]^3(x - 0) \\ &= a(x + 2)^3 x \\ &= a(x^3 + 6x^2 + 12x + 8)x && \text{Fórmula de producto especial 4 (sección 1.3)} \\ &= a(x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x) \end{aligned}$$

Puesto que no se tiene información acerca de Q aparte de sus ceros y multiplicidad, se puede elegir cualquier número para a. Si se usa $a = 1$, se obtiene

$$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$$

■

Ejemplo 5 Hallar los ceros de un polinomio

Hallar los cuatro ceros de $P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$.

Solución Con el teorema de ceros racionales de la sección 3.3, se obtiene la siguiente lista de posibles ceros racionales: $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{4}{3}$. Al comprobar éstos por medio de división sintética, se encuentra que 2 y $-\frac{1}{3}$ son ceros, y se obtiene la siguiente factorización.

$$\begin{aligned} P(x) &= 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4 \\ &= (x - 2)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2) && \text{Factor } x - 2 \\ &= (x - 2)\left(x + \tfrac{1}{3}\right)(3x^2 + 3x + 6) && \text{Factor } x + \tfrac{1}{3} \\ &= 3(x - 2)\left(x + \tfrac{1}{3}\right)(x^2 + x + 2) && \text{Factor 3} \end{aligned}$$

Los ceros del factor cuadrático son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{7}}{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

por lo tanto, los ceros de $P(x)$ son

$$2, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$$

■

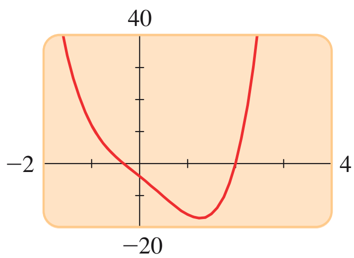


Figura 1
$P(x) = 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 12x - 4$

En la figura 1 se muestra la gráfica del polinomio P del ejemplo 5. Las intersecciones con x corresponden a los ceros reales de P. Los ceros imaginarios no se pueden determinar de la gráfica.

Gerolamo Cardano (1501-1576), es de hecho una de las figuras más coloridas en la historia de las matemáticas. Fue el físico más conocido de Europa en su época; sin embargo, toda su vida estuvo plagada de numerosos padecimientos, como fracturas, hemorroides y un temor irracional de encontrarse con perros rabiosos. Como padre, adoraba a sus hijos, aunque no fue correspondido. Su hijo preferido fue decapitado por asesinar a su propia esposa. Cardano fue también un jugador compulsivo; de hecho, este vicio pudo haberlo motivado a escribir el *Libro sobre juegos de probabilidad*, el primer estudio de probabilidad desde el punto de vista matemático.

En el trabajo matemático principal de Cardano *Ars Magna*, detalló la solución de las ecuaciones polinomiales generales de tercero y cuarto grados. En el momento de su publicación, los matemáticos se sentían incómodos incluso con los números negativos, pero las fórmulas de Cardano prepararon el terreno para la aceptación no sólo de los números negativos, sino también de los números imaginarios, porque aparecían de manera natural en la solución de ecuaciones polinomiales. Por ejemplo, para la ecuación cúbica

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

una de sus fórmulas da la solución

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

(Véase la página 282, ejercicio 102). Este valor para x en realidad resulta ser el número entero 4; sin embargo, para encontrarlo Cardano tuvo que usar el número imaginario $\sqrt{-121} = 11i$.

Los ceros complejos vienen en pares conjugados

Como quizá lo notó en los ejemplos dados hasta el momento, los ceros complejos de polinomios con coeficientes reales vienen en pares. Siempre que $a + bi$ sea un cero, su complejo conjugado $a - bi$ es también un cero.

Teorema de ceros conjugados

Si el polinomio P tiene coeficientes reales, y si el número complejo z es un cero de P, entonces su complejo conjugado $\overline{z}$ es también un cero de P.

Demostración Sea

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde cada coeficiente es real. Suponga que $P(z) = 0$. Se debe probar que $P(\overline{z}) = 0$. Se usen los hechos de que el complejo conjugado de una suma de dos números complejos es la suma de los conjugados y que el conjugado de un producto es el producto de los conjugados (véanse los ejercicios 71 y 72 en la sección 3.4).

$$\begin{aligned} P(\overline{z}) &= a_n(\overline{z})^n + a_{n-1}(\overline{z})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{z} + a_0 \\ &= \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} && \text{Debido a que los coeficientes son reales} \\ &= \overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1} z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1 z} + \overline{a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{P(z)} = \overline{0} = 0 \end{aligned}$$

Esto muestra que $\overline{z}$ es también un cero de $P(x)$, lo que prueba el teorema. ■

Ejemplo 6 Un polinomio con un cero complejo especificado

Encuentre un polinomio $P(x)$ de grado 3 que tiene coeficientes enteros y ceros $\frac{1}{2}$ y $3 - i$.

Solución Puesto que $3 - i$ es un cero, entonces también lo es $3 + i$ por el teorema de ceros conjugados. Esto significa que $P(x)$ tiene la forma

$$\begin{aligned} P(x) &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[x - (3 - i)][x - (3 + i)] \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3) + i][(x - 3) - i] && \text{Reagrupar} \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)[(x - 3)^2 - i^2] && \text{Fórmula de diferencia de cuadrados} \\ &= a\left(x - \tfrac{1}{2}\right)(x^2 - 6x + 10) && \text{Desarrollar} \\ &= a\left(x^3 - \tfrac{13}{2}x^2 + 13x - 5\right) && \text{Desarrollar} \end{aligned}$$

Para hacer los coeficientes enteros, se establece $a = 2$ y se obtiene

$$P(x) = 2x^3 - 13x^2 + 26x - 10$$

Cualquier otro polinomio que satisface los requerimientos dados debe ser un múltiplo entero de éste. ■

Ejemplo 7 Uso de la regla de Descartes para contar ceros reales y ceros imaginarios

Sin factorizar en realidad, determine cuántos ceros positivos reales, ceros reales negativos y ceros imaginarios podría tener el siguiente polinomio:

$$P(x) = x^4 + 6x^3 - 12x^2 - 14x - 24$$

Solución Puesto que hay un cambio de signo, por la regla de los signos de Descartes, P tiene un cero real positivo. También, $P(-x) = x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 14x - 24$ tiene tres cambios de signo, por lo tanto hay tres ceros reales negativos o uno solo. Así que P tiene un total de cuatro o dos ceros reales. Puesto que P es de grado 4, tiene cuatro ceros en total, lo que da las siguientes posibilidades.

Ceros reales positivos	Ceros reales negativos	Ceros imaginarios
1	3	0
1	1	2

■

Factores cuadráticos y lineales

Se ha visto que un polinomio se factoriza por completo en factores lineales si se usan números complejos. Si no se emplean números complejos, entonces un polinomio con coeficientes reales se puede factorizar siempre en factores lineales y cuadráticos. Se usa esta propiedad en la sección 9.8 cuando se estudian fracciones parciales. Un polinomio cuadrático sin ceros reales se llama **irreducible** en los números reales. Esta clase de polinomio no se puede factorizar sin el uso de números complejos.

Teorema lineal y factores cuadráticos

Todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar en un producto de factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

■ **Demostración** Se observa primero que si $c = a + bi$ es un número complejo, entonces

$$\begin{aligned}(x - c)(x - \overline{c}) &= [x - (a + bi)][x - (a - bi)] \\ &= [(x - a) - bi][(x - a) + bi] \\ &= (x - a)^2 - (bi)^2 \\ &= x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)\end{aligned}$$

La última expresión es cuadrática con coeficientes *reales*.

Ahora, si P es un polinomio con coeficientes reales, entonces por el teorema de factorización completa

$$P(x) = a(x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$$

Puesto que las raíces complejas ocurren en pares conjugados, se pueden multiplicar los factores correspondientes a cada par para obtener un factor cuadrático con coeficientes reales. Esto da como resultado que P se factorice en factores lineales y cuadráticos irreducibles. ■

Ejemplo 8 Factorización de un polinomio en factores lineales y cuadráticos

Sea $P(x) = x^4 + 2x^2 - 8$.

a) Factorice a P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

b) Factorice a P por completo en factores lineales con coeficientes complejos.

Solución

a)
$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 2x^2 - 8 \\ &= (x^2 - 2)(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \end{aligned}$$

El factor $x^2 + 4$ es irreducible puesto que sólo tiene los ceros imaginarios $\pm 2i$.

b) Para obtener la factorización completa, se factoriza el factor cuadrático restante.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 4) \\ &= (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2i)(x + 2i) \end{aligned}$$

3.5 Ejercicios

1–12 ■ Se da un polinomio P.

a) Encuentre los ceros de P, reales y complejos.

b) Factorice a P por completo.

1. $P(x) = x^4 + 4x^2$

2. $P(x) = x^5 + 9x^3$

3. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

4. $P(x) = x^3 + x^2 + x$

5. $P(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

6. $P(x) = x^4 - x^2 - 2$

7. $P(x) = x^4 - 16$

8. $P(x) = x^4 + 6x^2 + 9$

9. $P(x) = x^3 + 8$

10. $P(x) = x^3 - 8$

11. $P(x) = x^6 - 1$

12. $P(x) = x^6 - 7x^3 - 8$

13–30 ■ Factorice al polinomio por completo y halle sus ceros. Exprese la multiplicidad de cada cero.

13. $P(x) = x^2 + 25$

14. $P(x) = 4x^2 + 9$

15. $Q(x) = x^2 + 2x + 2$

16. $Q(x) = x^2 - 8x + 17$

17. $P(x) = x^3 + 4x$

18. $P(x) = x^3 - x^2 + x$

19. $Q(x) = x^4 - 1$

20. $Q(x) = x^4 - 625$

21. $P(x) = 16x^4 - 81$

22. $P(x) = x^3 - 64$

23. $P(x) = x^3 + x^2 + 9x + 9$

24. $P(x) = x^6 - 729$

25. $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

26. $Q(x) = x^4 + 10x^2 + 25$

27. $P(x) = x^4 + 3x^2 - 4$

28. $P(x) = x^5 + 7x^3$

29. $P(x) = x^5 + 6x^3 + 9x$

30. $P(x) = x^6 + 16x^3 + 64$

31–40 ■ Encuentre un polinomio con coeficientes enteros que satisfaga las condiciones dadas.

31. P tiene grado 2 y ceros $1 + i$ y $1 - i$.

32. P tiene grado 2 y ceros $1 + i\sqrt{2}$ y $1 - i\sqrt{2}$.

33. Q tiene grado 3 y ceros 3, $2i$ y $-2i$.

34. Q tiene grado 3 y ceros 0 e i.

35. P tiene grado 3 y ceros 2 e i.

36. Q tiene grado 3 y ceros -3 y $1 + i$.

37. R tiene grado 4 y ceros $1 - 2i$ y 1, con 1 como un cero de multiplicidad 2.

38. S tiene grado 4 y ceros $2i$ y $3i$.

39. T tiene grado 4 y ceros i y $1 + i$, y término constante 12.

40. U tiene grado 5, ceros $\frac{1}{2}$, -1 y $-i$, coeficiente principal 4; el cero -1 tiene multiplicidad 2.

41–58 ■ Encuentre los ceros del polinomio.

41. $P(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

42. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$

43. $P(x) = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$

44. $P(x) = x^3 + 7x^2 + 18x + 18$

45. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$

46. $P(x) = x^3 - x - 6$

47. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 12x + 9$

48. $P(x) = 2x^3 - 8x^2 + 9x - 9$

49. $P(x) = x^4 + x^3 + 7x^2 + 9x - 18$

50. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$

51. $P(x) = x^5 - x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 12x - 12$

52. $P(x) = x^5 + x^3 + 8x^2 + 8$ [*Sugerencia:* Factorice por agrupación de términos]

53. $P(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 24x + 36$

54. $P(x) = x^4 - x^2 + 2x + 2$

55. $P(x) = 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

56. $P(x) = 4x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x - 1$

57. $P(x) = x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 28x^2 + 27x - 9$

58. $P(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

59–64 ■ Se da un polinomio P.

a) Factorice P en factores lineales y cuadráticos irreducibles con coeficientes reales.

b) Factorice P por completo en factores lineales con coeficientes complejos.

59. $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 20$

60. $P(x) = x^3 - 2x - 4$

61. $P(x) = x^4 + 8x^2 - 9$

62. $P(x) = x^4 + 8x^2 + 16$

63. $P(x) = x^6 - 64$

64. $P(x) = x^5 - 16x$

65. Por el teorema de ceros, toda ecuación polinomial de n-ésimo grado tiene exactamente n soluciones (incluso posiblemente algunas que son repetidas). Algunas de éstas pueden ser reales y algunas imaginarias. Use un dispositivo de graficación para determinar cuántas soluciones reales e imaginarias tiene cada ecuación.

a) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x = 0$

b) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x - 5 = 0$

c) $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 40 = 0$

66–68 ■ Hasta aquí se ha trabajado sólo con polinomios que tienen coeficientes reales. Estos ejercicios tienen que ver con polinomios con coeficientes reales e imaginarios.

66. Encuentre las soluciones de la ecuación.

a) $2x + 4i = 1$

b) $x^2 - ix = 0$

c) $x^2 + 2ix - 1 = 0$

d) $ix^2 - 2x + i = 0$

67. a) Muestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.

b) Explique por qué el resultado del inciso a) no viola el teorema de ceros conjugados.

68. a) Encuentre el polinomio con coeficientes *reales* de grado más pequeño posible para el cual i y $1 + i$ son los ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

b) Encuentre un polinomio con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el cual $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

Descubrimiento • Debate

69. Polinomios de grado impar El teorema de ceros conjugados establece que los ceros complejos de un polinomio con coeficientes reales ocurre en pares complejos conjugados. Explique cómo este hecho demuestra que un polinomio con coeficientes reales y grado impar tiene por lo menos un cero real.

70. Raíces de la unidad Hay dos raíces cuadradas de 1, a saber, 1 y -1. Éstas son soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$ o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay? Encuéntrelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^3 = 1$ o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Determínelas. ¿Cómo encontraría las raíces sextas de 1? ¿Cuántas hay? Haga una conjetura acerca de las raíces n-ésimas de 1.

3.6 Funciones racionales

Una función racional tiene la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son polinomios. Se supone que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aunque las funciones racionales se construyen de polinomios, sus gráficas se ven bastante diferentes de las gráficas de funciones polinomiales.

Funciones racionales y asíntotas

Los dominios de expresiones racionales se estudian en la sección 1.4.

El *dominio* de una función racional consiste en los números reales x excepto aquellos para los que el denominador es cero. Al graficar una función racional, se debe poner atención especial al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores. Se comienza por graficar una función racional muy simple.

Ejemplo 1 Una función racional simple

Bosqueje una gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Solución La función f no está definida para $x = 0$. En las tablas siguientes se muestra que cuando x es cercana a cero, el valor de $|f(x)|$ es grande, y mientras x se aproxime más a cero $|f(x)|$ se vuelve más grande.

Para números reales positivos,

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{Número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100\,000$
Tiende a 0^-	Tiende a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	$100\,000$
Tiende a 0^+	Tiende a ∞

Este comportamiento se describe en palabras y símbolos como sigue. En la primera tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ disminuyen sin límite. En símbolos,

$f(x) \to -\infty$ cuando $x \to 0^-$ "y atiende a menos infinito cuando x tiende a 0 por la izquierda"

En la segunda tabla se muestra que cuando x tiende a 0 por la derecha, los valores de $f(x)$ se incrementan sin límite. En símbolos,

$f(x) \to \infty$ cuando $x \to 0^+$ "y atiende a infinito cuando x tiende a 0 por la derecha"

En las dos tablas siguientes se muestra cómo cambia $f(x)$ cuando $|x|$ se vuelve grande.

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100\,000$	-0.00001
Tiende a $-\infty$	Tiende a 0

x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
$100\,000$	0.00001
Tiende a ∞	Tiende a 0

En estas tablas de muestra que cuando $|x|$ se vuelve grande, el valor de $f(x)$ se aproxima cada vez más a cero. Se describe esta situación en símbolos escribiendo

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y graficando algunos puntos más, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 1.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

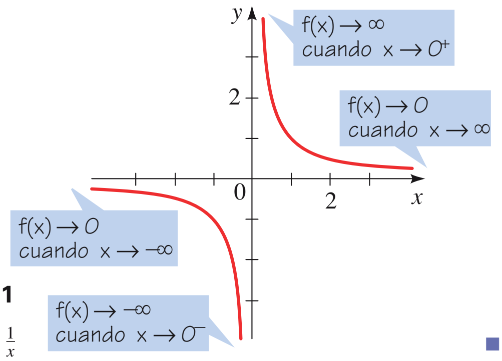


Figura 1
$f(x) = \frac{1}{x}$

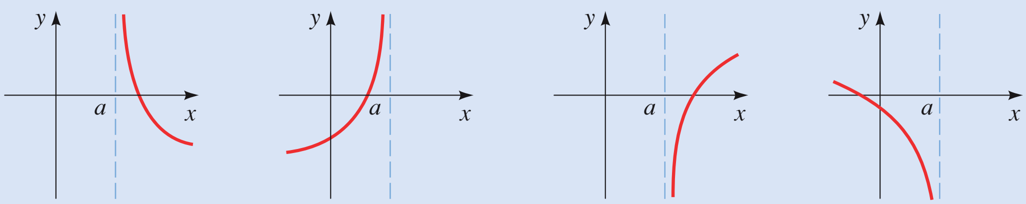
En el ejemplo 1 se usó la siguiente notación de flechas.

Símbolo	Significa
$x \to a^-$	x tiende a a por la izquierda
$x \to a^+$	x tiende a a por la derecha
$x \to -\infty$	x tiende a menos infinito; es decir, x disminuye sin cota
$x \to \infty$	x tiende a infinito; es decir, x se incrementa sin cota

La recta $x = 0$ se llama *asíntota vertical* de la gráfica de la figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. En términos informales, una asíntota de una función es una línea a la que la gráfica de la función se aproxima cada vez más cuando se va a lo largo de esta línea.

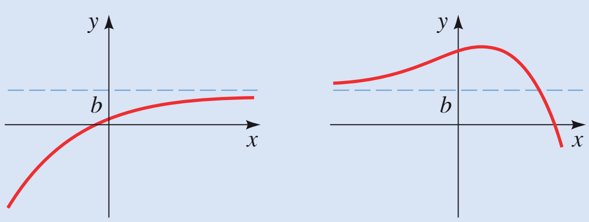
Definición de asíntotas verticales y horizontales

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y tiende a $\pm\infty$ cuando x tiende a a por la derecha o la izquierda.



$y \to \infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to \infty$ cuando $x \to a^-$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



$y \to b$ cuando $x \to \infty$ $\quad$ $y \to b$ cuando $x \to -\infty$

Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

Transformaciones de $y = \dfrac{1}{x}$

Una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

se puede graficar si se desplaza, alarga o refleja la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ mostrada en la figura 1, usando las transformaciones estudiadas en la sección 2.4. (Tales funciones se llaman *transformaciones fraccionarias lineales*.)

Ejemplo 2 Uso de transformaciones para graficar funciones racionales

Bosqueje una gráfica de cada función racional.

a) $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$

b) $s(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

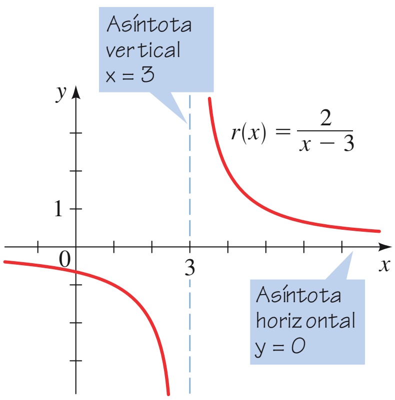


Figura 2

$$\begin{array}{r} 3 \\ x + 2\overline{)3x + 5} \\ \underline{3x + 6} \\ -1 \end{array}$$

Solución

a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces se puede expresar r en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{2}{x - 3} \\ &= 2\left(\frac{1}{x - 3}\right) && \text{Factor 2} \\ &= 2(f(x - 3)) && \text{Puesto que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma se puede observar que la gráfica de r se obtiene de la gráfica de f desplazando 3 unidades a la derecha y alargando verticalmente por un factor de 2. Así, r tiene una asíntota vertical $x = 3$ y una asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica de r se muestra en la figura 2.

b) Con la división larga (véase el margen), se obtiene $s(x) = 3 - \frac{1}{x + 2}$. Por lo tanto, se puede expresar s en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{1}{x + 2} \\ &= -\frac{1}{x + 2} + 3 && \text{Reordene los términos} \\ &= -f(x + 2) + 3 && \text{Puesto que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma se puede observar que la gráfica de s se obtiene de la gráfica de f al desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x, y desplazar hacia

arriba 3 unidades. Así, s tiene una asíntota vertical $x = -2$ y una asíntota horizontal $y = 3$. La gráfica de s se muestra en la figura 3.

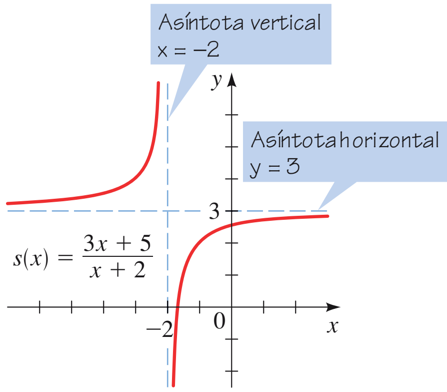


Figura 3

Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del ejemplo 2 funcionan sólo para funciones racionales simples. Para graficar funciones más complicadas, se necesita ver el comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas verticales y horizontales.

Ejemplo 3 Asíntotas de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$.

Solución

ASÍNTOTA VERTICAL: primero se factoriza el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x - 1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de r es cero cuando $x = 1$.

Para ver a qué se parece la gráfica de r cerca de la asíntota vertical, se construyen tablas de valores para valores de x a la izquierda y a la derecha de 1. De las tablas mostradas a continuación se ve que

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^+$$

$x \to 1^-$

x	y
0	5
0.5	14
0.9	302
0.99	30 002

$x \to 1^+$

x	y
2	5
1.5	14
1.1	302
1.01	30 002

Así, cerca de la asíntota vertical $x = 1$, la gráfica de r tiene la forma mostrada en la figura 4.

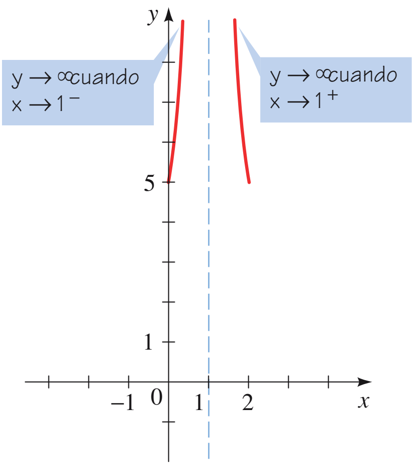


Figura 4

ASÍNTOTA HORIZONTAL: la asíntota horizontal es el valor al que se aproxima y cuando $x \to \pm\infty$. Como ayuda para determinar este valor, se divide el numerador y el denominador entre x^2, la potencia más alta de x que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ tienden a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (véase el ejercicio 79, sección 1.1). Así que cuando $x \to \pm\infty$, se tiene

Estos términos tienden a 0.

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \quad \to \quad \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos tienden a 0.

Así, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Puesto que la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal, se puede completar como en la figura 5.

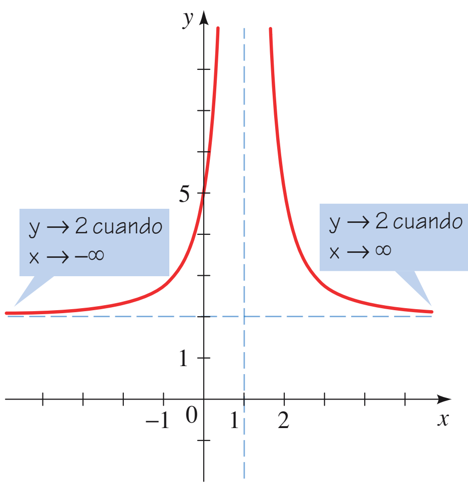


Figura 5

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$$

■

Del ejemplo 3 se puede observar que la asíntota horizontal está determinada por los coeficientes principales del numerador y el denominador, puesto que después de dividir entre x^2 (la potencia más alta de x) los otros términos tienden a cero. En general, si $r(x) = P(x)/Q(x)$ y los grados de P y Q son los mismos (ambos n, por

ejemplo), entonces al dividir el numerador y el denominador entre x^n se muestra que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

En el cuadro siguiente se resume el procedimiento para hallar asíntotas.

Asíntotas de funciones racionales

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.

2. a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo 4 Asíntotas de una función racional

Encontrar las asíntotas verticales y horizontales de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

Solución

ASÍNTOTAS VERTICALES: Primero se factoriza

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

El factor es 0 cuando $x = \frac{1}{2}$.

El factor es 0 cuando $x = -2$.

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES: Los grados del numerador y el denominador son los mismos y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{3}{2}$$

Así, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar los resultados, se grafica r con una calculadora (véase la figura 6).

La gráfica se traza con el modo de punto para evitar líneas extrañas.

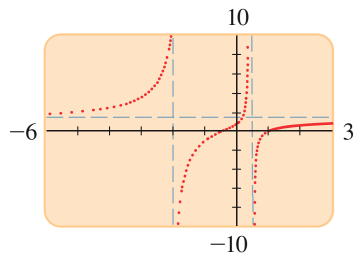


Figura 6

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$

■

Graficación de funciones racionales

Se ha visto que las asíntotas son importantes cuando se grafican funciones racionales. En general, se usan las siguientes normas para graficar funciones racionales.

Trazo de gráficas de funciones racionales

Una fracción es 0 si y sólo si su numerador es 0.

1. **Factorizar.** Factorizar el numerador y el denominador.
2. **Intersecciones.** Hallar las intersecciones con el eje x determinando los ceros del numerador, y las intersecciones con el eje y del valor de la función en $x = 0$.
3. **Asíntotas verticales.** Hallar las asíntotas verticales determinando los ceros del denominador, y luego ver si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical usando valores de prueba.
4. **Asíntota horizontal.** Encontrar la asíntota horizontal (si existe) dividiendo numerador y denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador; luego, permita que $x \to \pm\infty$.
5. **Bosqueje la gráfica.** Grafique la información que se determinó en los cuatro primeros pasos. Luego, trace tantos puntos adicionales como sea necesario para llenar el resto de la gráfica de la función.

Ejemplo 5 Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$.

Solución Se factoriza el numerador y el denominador, se determinan las intersecciones y asíntotas y se bosqueja la gráfica.

FACTORIZAR: $$y = \frac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$$

INTERSECCIONES CON EL EJE *x*: Las intersecciones x son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

INTERSECCIONES CON EL EJE *y*: para hallar la intersección *y*, se sustituye $x = 0$ en la forma original de la función:

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

La intersección *y* es 2.

ASÍNTOTAS VERTICALES: las asíntotas verticales ocurren donde el denominador es cero, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada se puede observar que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

COMPORTAMIENTO CERCA DE ASÍNTOTAS VERTICALES: se necesita saber si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de *y* para valores de *x* cerca de las asíntotas verticales, se usan valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, se usa un valor de prueba cerca y a la izquierda de 1 ($x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si *y* es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$:

Al elegir los valores de prueba, se debe estar seguro de que no hay intersecto *x* entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

Por consiguiente $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otro lado, cuando $x \to 1^+$, se usa un valor de prueba cerca y a la derecha de 1 ($x = 1.1$, por ejemplo), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Entonces $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Los otros elementos de la siguiente tabla se calculan de manera similar.

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$ es	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)}$
por lo tanto $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

ASÍNTOTA HORIZONTAL: los grados del numerador y el denominador son los mismos y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{2}{1} = 2$$

Así, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

VALORES ADICIONALES:

x	*y*
−6	0.93
−3	−1.75
−1	4.50
1.5	6.29
2	4.50
3	3.50

GRÁFICA:

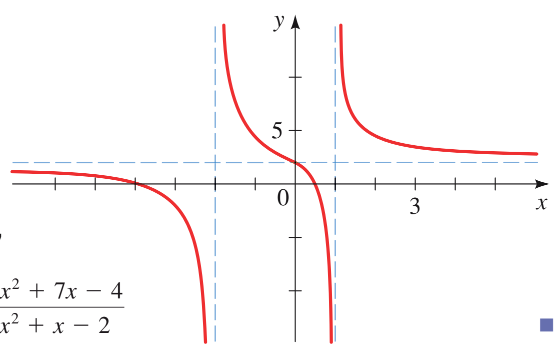


Figura 7

$$r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

■

Matemáticas en el mundo moderno

Códigos indescifrables

Si lee novelas de espionaje, sabe acerca de códigos secretos y cómo el héroe descifra el código. En la actualidad, los códigos secretos tienen un uso mucho más común. La mayor parte de la información almacenada en las computadoras se codifica para evitar el uso no autorizado. Por ejemplo, sus registros de banco, médicos y escolares se codifican. Muchos teléfonos celulares e inalámbricos codifican la señal que lleva la voz para que nadie pueda escuchar la conversación. Por fortuna, debido a los avances recientes en matemáticas, los códigos de hoy día son "indescifrables".

Los códigos modernos se basan en un principio simple: factorizar es mucho más difícil que multiplicar. Por ejemplo, intente multiplicar 78 por 93; ahora intente factorizar 9991. Toma tiempo factorizar 9991 porque es un producto de dos números primos 97 por 103, así que para factorizarlo se tuvo que hallar uno de estos primos. Ahora imagine tratar de factorizar un número N que es el producto de dos números primos p y q, cada uno de unos 200 dígitos de largo. Incluso con las computadoras más rápidas tomaría muchos millones de años factorizar cada número. Pero a la misma computadora le tomaría menos de un segundo multiplicar dos números de este tipo. En 1970, Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman utilizaron este hecho para diseñar el código RSA. Su código emplea un número extremadamente grande para codificar un mensaje pero se requiere conocer sus factores para decodificarlo.

(*continúa*)

Ejemplo 6 Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$

INTERSECCIÓN CON x: $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

INTERSECCIÓN CON y: $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25} = \dfrac{21}{25}$

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = -5$, de los ceros del denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE LA ASÍNTOTA VERTICAL:

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$ es	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$
por lo tanto $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

VALORES ADICIONALES:

x	y
−15	−0.5
−10	−1.2
−3	1.5
−1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

GRÁFICA:

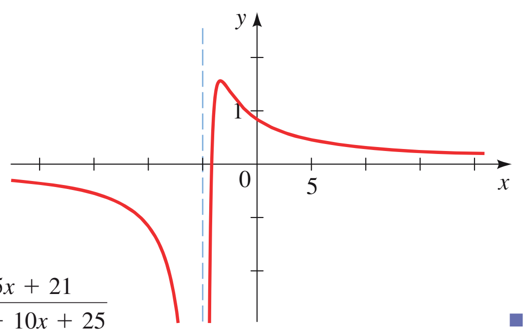


Figura 8

$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

■

De la gráfica de la figura 8 se puede observar que, en contra del concepto erróneo común, una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal. La gráfica de la figura 8 cruza el eje x (la asíntota horizontal) desde abajo, llega a un valor máximo cerca de $x = -3$, y luego se aproxima al eje x desde arriba cuando $x \to \infty$.

Como se puede observar tal código es casi indescifrable.

El código RSA es un ejemplo de un código de "codificación de clave pública". En tales códigos, cualquiera puede codificar un mensaje por medio de un procedimiento conocido públicamente basado en N, pero para decodificar el mensaje se debe conocer p y q, los factores de N. Cuando se desarrolló el código RSA, se pensó que un número de 80 dígitos seleccionado de manera cuidadosa proveería un código indescifrable. Pero de un modo interesante, los avances recientes en el estudio de la factorización han hecho necesarios números mucho más grandes.

Ejemplo 7 Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$

INTERSECCIONES CON x: -1 y 4, de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

INTERSECCIONES CON y: ninguno, porque $r(0)$ no está definido

ASÍNTOTAS VERTICALES: $x = 0$ y $x = -2$, no está definido de los ceros del denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE ASÍNTOTAS VERTICALES:

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
el signo de $y = \dfrac{(x+1)(x-4)}{2x(x+2)}$ es	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
por lo tanto $y \to$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el denominador es el mismo y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

MÁS VALORES:

x	y
-3	2.33
-2.5	3.90
-0.5	1.50
1	-1.00
3	-0.13
5	0.09

GRÁFICA:

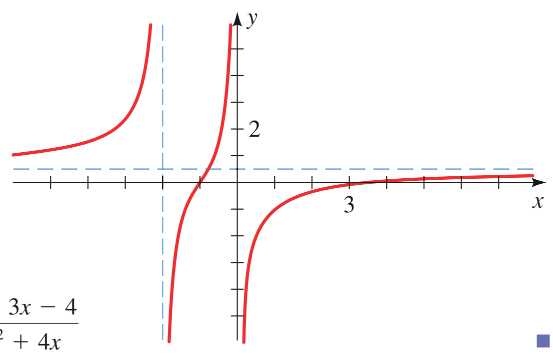


Figura 9

$r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

■

Asíntotas inclinadas y comportamiento extremo

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, se puede usar el algoritmo de la división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de R es menor que el grado de Q y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$, por lo tanto para valores grandes de $|x|$, la gráfica de

$y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de la recta $y = ax + b$. En esta situación se dice que $y = ax + b$ es una **asíntota inclinada**, o una **asíntota oblicua**.

Ejemplo 8 Una función racional con una asíntota inclinada

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 5)}{x - 3}$

INTERSECCIONES CON x: -1 y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

INTERSECCIONES CON y: $\frac{5}{3}$, porque $r(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 3$, del cero del denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE LA ASÍNTOTA VERTICAL: $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x - 3\overline{)x^2 - 4x - 5} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -x - 5 \\ \underline{-x + 3} \\ -8 \end{array}$$

ASÍNTOTA INCLINADA: puesto que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota inclinada. Al dividir (véase el margen), se obtiene

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Por lo tanto, $y = x - 1$ es la asíntota inclinada.

MÁS VALORES:

x	y
-2	-1.4
1	4
2	9
4	-5
6	2.33

GRÁFICA:

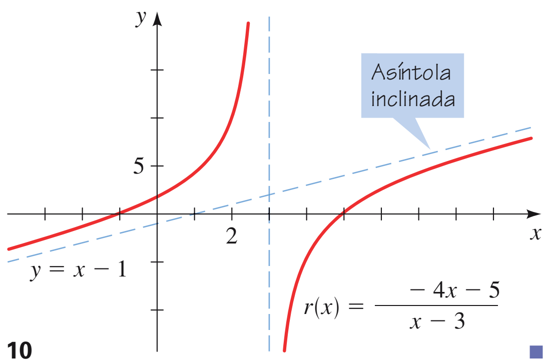


Figura 10

Hasta aquí se han considerado sólo las asíntotas horizontales e inclinadas como comportamientos extremos para funciones racionales. En el ejemplo siguiente se grafica una función cuyo comportamiento extremo es como el de una parábola.

Ejemplo 9 Comportamiento extremo de una función racional

Grafique la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

y describa su comportamiento extremo.

Solución

FACTORIZAR: $y = \dfrac{(x+1)(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$

INTERSECCIONES CON x: -1, de $x + 1 = 0$ (El otro factor en el numerador no tiene ceros reales.)

INTERSECCIONES CON y: $-\frac{3}{2}$, porque $r(0) = \dfrac{0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3}{0 - 2} = -\dfrac{3}{2}$

ASÍNTOTA VERTICAL: $x = 2$, del cero de denominador

COMPORTAMIENTO CERCA DE LA ASÍNTOTA VERTICAL: $y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ y $y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$

ASÍNTOTA HORIZONTAL: ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

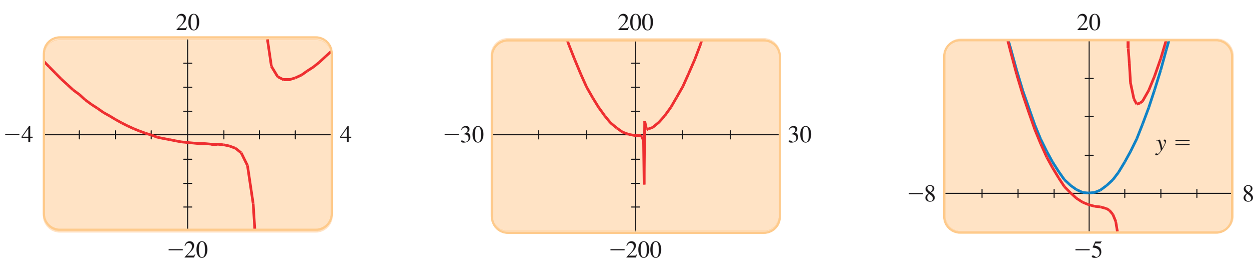
COMPORTAMIENTO EXTREMO: dividiendo (véase el margen), se obtiene

$$r(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x - 2\overline{)x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2 } \\ 3 \end{array}$$

Esto muestra que el comportamiento extremo de r es parecido al de la parábola $y = x^2$ porque $3/(x-2)$ es pequeño cuando $|x|$ es grande. Es decir, $3/(x-2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que la gráfica de r estará cerca de la gráfica de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

GRÁFICA: en la figura 11(a) se grafica r en un rectángulo de visión pequeño; se pueden ver las intersecciones, las asíntotas verticales y el mínimo local. En la figura 11(b) se grafica r en un rectángulo de visión más grande; aquí la gráfica casi se asemeja a la de una parábola. En la figura 11(c) se grafican tanto $y = r(x)$ como $y = x^2$; estas gráficas están muy cerca entre sí excepto cerca de la asíntota vertical.



a) b) c)

Figura 11

$r(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$

Aplicaciones

Las funciones racionales ocurren con frecuencia en aplicaciones científicas de álgebra. En el siguiente ejemplo se analiza la gráfica de una función de la teoría de electricidad.

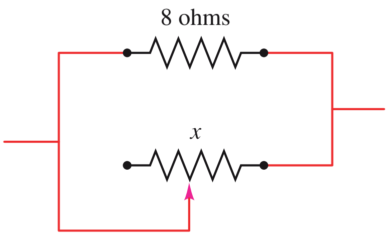


Figura 12

Ejemplo 10 Resistencia eléctrica

Cuando dos resistores con resistencias R_1 y R_2 se conectan en paralelo, su resistencia combinada R está dada por la fórmula

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Suponga que un resistor fijo de 8 ohms se conecta en paralelo con un resistor variable, como se muestra en la figura 12. Si la resistencia del resistor variable se denota por x, entonces la resistencia combinada R es una función de x. Grafique R y dé una interpretación física de la gráfica.

Solución Al sustituir $R_1 = 8$ y $R_2 = x$ en la fórmula, se obtiene la función

$$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$$

Puesto que la resistencia no puede ser negativa, esta función tiene significado físico sólo cuando $x > 0$. La función se grafica en la figura 13(a) usando el rectángulo de visión $[0, 20]$ por $[0, 10]$. La función no tiene asíntota vertical cuando x está restringida a valores positivos. La resistencia combinada R se incrementa cuando aumenta la resistencia x. Si se amplía el rectángulo de visión a $[0, 100]$ por $[0, 10]$, se obtiene la gráfica de la figura 13(b). Para x grande, se estabiliza la resistencia combinada R, y se aproxima más y más a la asíntota horizontal $R = 8$. Sin importar cuán grande sea la resistencia variable x, la resistencia combinada nunca es mayor que 8 ohms.

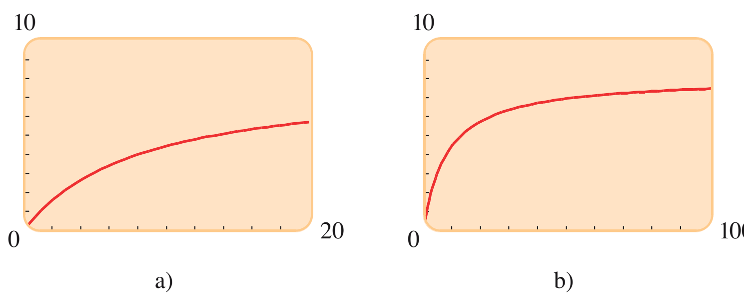


Figura 13

$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$

■

3.6 Ejercicios

1–4 ■ Se da una función racional. **a)** Complete cada tabla para la función. **b)** Describa el comportamiento de la función cerca de su asíntota vertical, con base en las tablas 1 y 2. **c)** Determine la asíntota horizontal, con base en las tablas 3 y 4.

Tabla 1

x	$r(x)$
1.5	
1.9	
1.99	
1.999	

Tabla 2

x	$r(x)$
2.5	
2.1	
2.01	
2.001	

Tabla 3

x	$r(x)$
10	
50	
100	
1000	

Tabla 4

x	$r(x)$
−10	
−50	
−100	
−1000	

1. $r(x) = \frac{x}{x - 2}$

2. $r(x) = \frac{4x + 1}{x - 2}$

3. $r(x) = \frac{3x - 10}{(x - 2)^2}$

4. $r(x) = \frac{3x^2 + 1}{(x - 2)^2}$

5–10 ■ Encuentre las intersecciones x y y de la función racional.

5. $r(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$

6. $s(x) = \dfrac{3x}{x-5}$

7. $t(x) = \dfrac{x^2-x-2}{x-6}$

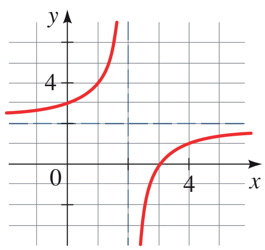
8. $r(x) = \dfrac{2}{x^2+3x-4}$

9. $r(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2}$

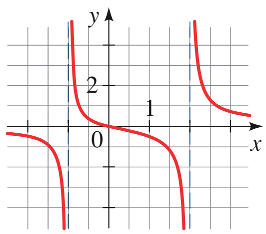
10. $r(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2+4}$

11–14 ■ De la gráfica, determine las intersecciones x y y y las asíntotas vertical y horizontal.

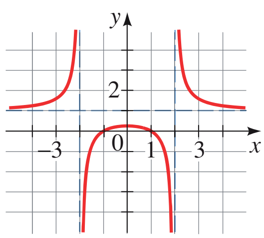
11.



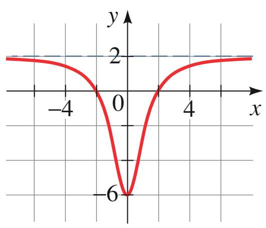
12.



13.



14.



15–24 ■ Encuentre las asíntotas horizontal y vertical (si existen).

15. $r(x) = \dfrac{3}{x+2}$

16. $s(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$

17. $t(x) = \dfrac{x^2}{x^2-x-6}$

18. $r(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+2x+1}$

19. $s(x) = \dfrac{6}{x^2+2}$

20. $t(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}$

21. $r(x) = \dfrac{6x-2}{x^2+5x-6}$

22. $s(x) = \dfrac{3x^2}{x^2+2x+5}$

23. $t(x) = \dfrac{x^2+2}{x-1}$

24. $r(x) = \dfrac{x^3+3x^2}{x^2-4}$

25–32 ■ Use las transformaciones de la gráfica de $y = \frac{1}{x}$ para graficar la función racional, como en el ejemplo 2.

25. $r(x) = \dfrac{1}{x-1}$

26. $r(x) = \dfrac{1}{x+4}$

27. $s(x) = \dfrac{3}{x+1}$

28. $s(x) = \dfrac{-2}{x-2}$

29. $t(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$

30. $t(x) = \dfrac{3x-3}{x+2}$

31. $r(x) = \dfrac{x+2}{x+3}$

32. $r(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$

33–56 ■ Encuentre las intersecciones y asíntotas, y luego bosqueje una gráfica de la función racional. Use un dispositivo de graficación para confirmar su respuesta.

33. $r(x) = \dfrac{4x-4}{x+2}$

34. $r(x) = \dfrac{2x+6}{-6x+3}$

35. $s(x) = \dfrac{4-3x}{x+7}$

36. $s(x) = \dfrac{1-2x}{2x+3}$

37. $r(x) = \dfrac{18}{(x-3)^2}$

38. $r(x) = \dfrac{x-2}{(x+1)^2}$

39. $s(x) = \dfrac{4x-8}{(x-4)(x+1)}$

40. $s(x) = \dfrac{x+2}{(x+3)(x-1)}$

41. $s(x) = \dfrac{6}{x^2-5x-6}$

42. $s(x) = \dfrac{2x-4}{x^2+x-2}$

43. $t(x) = \dfrac{3x+6}{x^2+2x-8}$

44. $t(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4x}$

45. $r(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-3)}$

46. $r(x) = \dfrac{2x(x+2)}{(x-1)(x-4)}$

47. $r(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x+1}$

48. $r(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-2x-3}$

49. $r(x) = \dfrac{2x^2+10x-12}{x^2+x-6}$

50. $r(x) = \dfrac{2x^2+2x-4}{x^2+x}$

51. $r(x) = \dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x}$

52. $r(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2-x-6}$

53. $r(x) = \dfrac{3x^2+6}{x^2-2x-3}$

54. $r(x) = \dfrac{5x^2+5}{x^2+4x+4}$

55. $s(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-3x^2}$

56. $t(x) = \dfrac{x^3-x^2}{x^3-3x-2}$

57–64 ■ Encuentre la asíntota inclinada, las asíntotas verticales y trace una gráfica de la función.

57. $r(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$

58. $r(x) = \dfrac{x^2+2x}{x-1}$

59. $r(x) = \dfrac{x^2-2x-8}{x}$

60. $r(x) = \dfrac{3x-x^2}{2x-2}$

61. $r(x) = \dfrac{x^2+5x+4}{x-3}$

62. $r(x) = \dfrac{x^3+4}{2x^2+x-1}$

63. $r(x) = \dfrac{x^3+x^2}{x^2-4}$

64. $r(x) = \dfrac{2x^3+2x}{x^2-1}$

65–68 ■ Grafique la función racional f y determine las asíntotas verticales de su gráfica. Luego grafique f y g en un rectángulo de visión suficientemente grande para mostrar que tienen el mismo comportamiento extremo.

65. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 6x + 6}{x + 3}, \quad g(x) = 2x$

66. $f(x) = \dfrac{-x^3 + 6x^2 - 5}{x^2 - 2x}, \quad g(x) = -x + 4$

67. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 16}{x - 2}, \quad g(x) = x^2$

68. $f(x) = \dfrac{-x^4 + 2x^3 - 2x}{(x - 1)^2}, \quad g(x) = 1 - x^2$

69–74 ■ Grafique la función racional y encuentre las asíntotas verticales, las intersecciones, x y y, y los extremos locales, correctos hasta el décimo más próximo. Después use la división larga para encontrar un polinomio que tiene el mismo comportamiento extremo que la función racional, y grafique ambas funciones en un rectángulo de visión suficientemente grande para comprobar que los comportamientos extremos del polinomio y la función racional son los mismos.

69. $y = \dfrac{2x^2 - 5x}{2x + 3}$

70. $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 3}{x^2 - 3x}$

71. $y = \dfrac{x^5}{x^3 - 1}$

72. $y = \dfrac{x^4}{x^2 - 2}$

73. $r(x) = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 6}{x - 3}$

74. $r(x) = \dfrac{4 + x^2 - x^4}{x^2 - 1}$

Aplicaciones

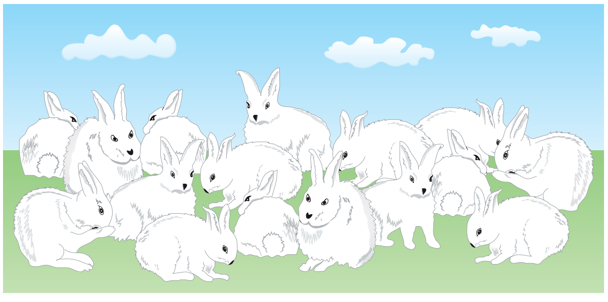
75. Crecimiento poblacional Suponga que la población de conejos de la granja del señor Jenkins sigue la fórmula

$$p(t) = \frac{3000t}{t + 1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el comienzo del año.

a) Trace una gráfica de la población de conejos.

b) ¿Qué sucede finalmente con la población de conejos?



76. Concentración de fármacos Se administra un fármaco a un paciente y se monitorea la concentración c del fármaco en el torrente sanguíneo. En el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por

$$c(t) = \frac{30t}{t^2 + 2}$$

a) Trace la gráfica de concentación del fármaco.

b) ¿Qué sucede eventualmente a la concentración del fármaco en el torrente sanguíneo?

77. Concentración del fámaco Se monitorea la concentración de fármacos en el torrente sanguíneo de un paciente al que le fueron administrados fármacos en el instante $t \geq 0$ (en horas desde la administración del fármaco), la concentración (en mg/L) se determina por

$$c(t) = \frac{5t}{t^2 + 1}$$

Indique la función c con un dispositivo de graficación.

a) ¿Cuál es la concentración más alta de fármaco que se alcanza en el torrente sanguíneo del paciente?

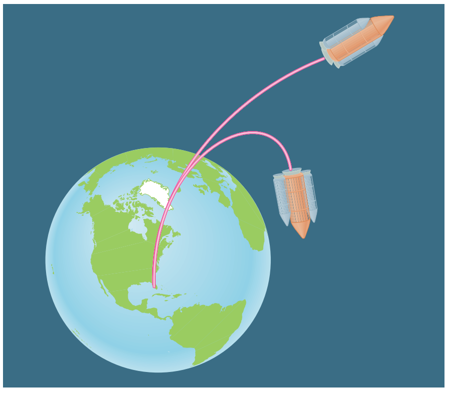
b) ¿Qué sucede con la concentración del fármaco después de un periodo largo?

c) ¿Cuánto le toma a la concentración disminuir debajo de 0.3 mg/L?

78. Vuelo de un cohete Suponga que se lanza un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v (medida en m/s). Entonces la altura máxima h (en metros) que alcanza el cohete se expresa mediante la función

$$h(v) = \frac{Rv^2}{2gR - v^2}$$

donde $R = 6.4 \times 10^6$ m es el radio de la Tierra y $g = 9.8$ m/s^2 es la aceleración debida a la gravedad. Use un dispositivo de graficación para trazar la gráfica de la función h. (Note que h y v deben ser positivas, así que el rectángulo de visión no necesita contener valores negativos.) ¿Qué representa físicamente la asíntota vertical?



79. El efecto Doppler Cuando un tren se mueve hacia un observador (véase la figura), el tono de su silbato suena más alto para el observador que si el tren estuviera en reposo, porque las ondas sonoras están más cerca unas de otras. Este fenómeno se llama *efecto Doppler*. El tono P observado es una función de la velocidad v del tren y se expresa como

$$P(v) = P_0\left(\frac{s_0}{s_0 - v}\right)$$

donde P_0 es el tono real del silbato en la fuente y $s_0 = 332$ es la velocidad del sonido en el aire. Suponga que un tren tiene un silbato establecido en $P_0 = 440$ Hz. Grafique la función $y = P(v)$ por medio de un dispositivo de graficación. ¿Cómo se puede interpretar físicamente la asíntota vertical de esta función?

80. Distancia de foco Para que una cámara con una lente de longitud focal fija F se enfoque en un objeto localizado a una distancia x de la lente, la película se debe colocar a una distancia y detrás de la lente, donde F, x y y se relacionan por

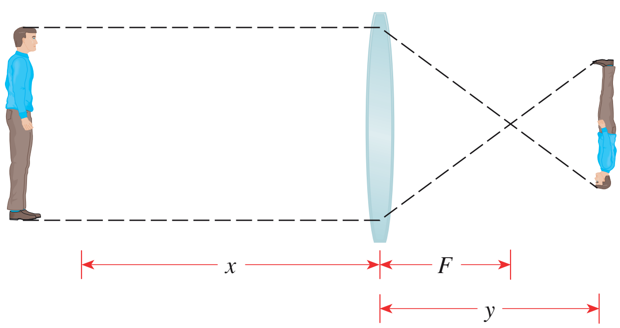
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}$$

(Véase la figura.) Suponga que la cámara tiene una lente de 55 mm ($F = 55$).

a) Exprese a y como una función de x y grafique la función.

b) Qué sucede con la distancia de enfoque y cuando el objeto se aleja de la lente

c) ¿Qué sucede con la distancia de enfoque y cuando el objeto se acerca a la lente?



Descubrimiento • Debate

81. Construcción de una función racional a partir de sus asíntotas Dé un ejemplo de una función racional que tiene asíntota vertical $x = 3$. Ahora dé un ejemplo de una que tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 2$. Ahora dé un ejemplo de una función racional con asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$, asíntota horizontal $y = 0$, e intersección con el eje x igual a 4.

82. Una función racional sin ninguna asíntota Explique cómo puede decir (sin graficarla) que la función

$$r(x) = \frac{x^6 + 10}{x^4 + 8x^2 + 15}$$

no tiene intersección con el eje x ni asíntota horizontal, vertical o inclinada. ¿Cuál es su comportamiento extremo?

83. Gráficas con discontinuidades En este capítulo se adoptó la convención de que en las funciones racionales, el numerador y el denominador no comparten un factor común. En este ejercicio se considera la gráfica de una función racional que no satisface esta regla.

a) Muestre que la gráfica de

$$r(x) = \frac{3x^2 - 3x - 6}{x - 2}$$

es la recta $y = 3x + 3$ con el punto (2, 9) eliminado. [*Sugerencia:* Factorice. ¿Cuál es el dominio de r?]

b) Grafique las funciones racionales:

$$s(x) = \frac{x^2 + x - 20}{x + 5}$$

$$t(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$$

$$u(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 2x}$$

84. Transformaciones de $y = 1/x^2$ En el ejemplo 2 se vio que algunas funciones racionales simples se pueden graficar desplazando, alargando o reflejando la gráfica de $y = 1/x$. En este ejercicio se consideran funciones racionales que se pueden graficar transformando la gráfica de $y = 1/x^2$, mostrada en la página siguiente.

a) Grafique la función

$$r(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$$

transformando la gráfica de $y = 1/x^2$.

b) Use la división larga y factorización para mostrar que la función

$$s(x) = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 2x + 1}$$

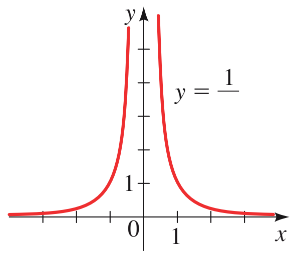
se puede escribir como

$$s(x) = 2 + \frac{3}{(x+1)^2}$$

Luego, grafique s transformando la gráfica de $y = 1/x^2$.

c) Una de las siguientes funciones se puede graficar transformando la gráfica de $y = 1/x^2$; la otra no. Use transformaciones para trazar la función de la que sí se puede graficar y explique por qué este método no funciona para la otra.

$$p(x) = \frac{2 - 3x^2}{x^2 - 4x + 4} \qquad q(x) = \frac{12x - 3x^2}{x^2 - 4x + 4}$$



3 Repaso

Comprobación de conceptos

1. **a)** Escriba la ecuación de definición para un polinomio P de grado n.
   b) ¿Qué significa decir que c es un cero de P?
2. Bosqueje las gráficas que muestran los posibles comportamientos extremos de los polinomios de grado impar y grado par.
3. ¿Qué pasos seguiría para graficar un polinomio a mano?
4. **a)** ¿Qué se entiende por punto máximo local o punto mínimo local de un polinomio?
   b) ¿Cuántos extremos locales puede tener un polinomio de grado n?
5. Exprese el algoritmo de la división e identifique el dividendo, divisor, cociente y residuo.
6. ¿Cómo funciona la división sintética?
7. **a)** Enuncie el teorema del residuo.
   b) Exprese el teorema del factor.
8. **a)** Exprese el teorema de los ceros racionales.
   b) ¿Qué pasos llevaría a cabo para hallar los ceros racionales de un polinomio?
9. Enuncie la regla de los signos de Descartes
10. **a)** ¿Qué significa decir que a es una cota inferior y b es una cota superior para los ceros de un polinomio?
    b) Exprese el teorema de las cotas superior e inferior.
11. **a)** ¿Qué es un número complejo?
    b) ¿Cuáles son las partes real e imaginaria de un número complejo?
    c) ¿Cuál es el complejo conjugado de un número complejo?
    d) ¿Cómo sumar, restar, multiplicar y dividir números complejos?
12. **a)** Exprese el teorema fundamental del álgebra.
    b) Enuncie el teorema de factorización completa.
    c) ¿Qué significa decir que c es un cero de multiplicidad k de un polinomio P?
    d) Exprese el teorema de los ceros.
    e) Enuncie el teorema de los ceros conjugados.
13. **a)** ¿Qué es una función racional?
    b) ¿Qué significa decir que $x = a$ es una asíntota vertical de $y = f(x)$?
    c) ¿Cómo localiza una asíntota vertical?
    d) ¿Qué significa decir que $y = b$ es una asíntota horizontal de $y = f(x)$?
    e) ¿Cómo localiza una asíntota vertical?
    f) ¿Qué pasos sigue para bosquejar a mano la gráfica de una función racional?
    g) ¿En qué circunstancias una función racional tiene una asíntota inclinada? Si ésta existe, ¿cómo la determina?
    h) ¿Cómo determina el comportamiento extremo de una función racional?

Ejercicios

1–6 ■ Grafique el polinomio transformando una grafica apropiada de la forma $y = x^n$. Muestre con claridad todos los intersectos x y y.

1. $P(x) = -x^3 + 64$ **2.** $P(x) = 2x^3 - 16$

3. $P(x) = 2(x + 1)^4 - 32$ **4.** $P(x) = 81 - (x - 3)^4$

5. $P(x) = 32 + (x - 1)^5$ **6.** $P(x) = -3(x + 2)^5 + 96$

7–10 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar el polinomio. Encuentre las intersecciones x y y y las coordenadas de los extremos locales correctas hasta el décimo más próximo. Des-criba el comportamiento final del polinomio.

7. $P(x) = x^3 - 4x + 1$ **8.** $P(x) = -2x^3 + 6x^2 - 2$

9. $P(x) = 3x^4 - 4x^3 - 10x - 1$

10. $P(x) = x^5 + x^4 - 7x^3 - x^2 + 6x + 3$

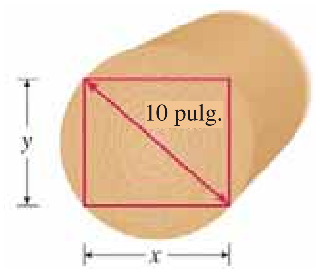
11. La resistencia S de una viga de madera de ancho x y profundidad y se expresa mediante la fórmula $S = 13.8xy^2$. Se cortará una viga de un tronco de diámetro 10 pulg., como se muestra en la figura.

a) Exprese la resistencia S de esta viga como una función de x solamente.

b) ¿Cuál es el dominio de la función S?

c) Dibuje una gráfica de S.

d) ¿Qué ancho hace que la viga tenga la mayor resistencia?

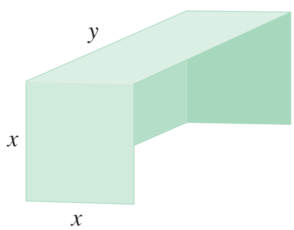


12. Se construirá un pequeño cobertizo para plantas delicadas con un plástico delgado. Tendrá extremos cuadrados y las partes superior y posterior serán rectangulares, con el frente y el fondo abiertos, como se muestra en la figura. El área total de los cuatro lados de plástico será de 1200 pulg^2.

a) Exprese el volumen V del cobertizo como una función de la profundidad x.

b) Dibuje una gráfica de V.

c) ¿Qué dimensiones maximizarán el volumen del cobertizo?



13–20 ■ Encuentre el cociente y el residuo.

13. $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{x - 2}$ **14.** $\dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$

15. $\dfrac{x^3 - x^2 + 11x + 2}{x - 4}$ **16.** $\dfrac{x^3 + 2x^2 - 10}{x + 3}$

17. $\dfrac{x^4 - 8x^2 + 2x + 7}{x + 5}$ **18.** $\dfrac{2x^4 + 3x^3 - 12}{x + 4}$

19. $\dfrac{2x^3 + x^2 - 8x + 15}{x^2 + 2x - 1}$ **20.** $\dfrac{x^4 - 2x^2 + 7x}{x^2 - x + 3}$

21–22 ■ Halle el valor indicado del polinomio por medio del teorema del residuo.

21. $P(x) = 2x^3 - 9x^2 - 7x + 13$; encuentre $P(5)$

22. $Q(x) = x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 10x + 15$; determine $Q(-3)$

23. Muestre que $\frac{1}{2}$ es un cero del polinomio

$$P(x) = 2x^4 + x^3 - 5x^2 + 10x - 4$$

24. Use el teorema del factor para mostrar que $x + 4$ es un factor del polinomio

$$P(x) = x^5 + 4x^4 - 7x^3 - 23x^2 + 23x + 12$$

25. ¿Cuál es el residuo cuando el polinomio

$$P(x) = x^{500} + 6x^{201} - x^2 - 2x + 4$$

se divide entre $x - 1$?

26. ¿Cuál es el residuo cuando $x^{101} - x^4 + 2$ se divide entre $x + 1$?

27–28 ■ Se da un polinomio P.

a) Liste los posibles ceros racionales (sin probar si en realidad son ceros).

b) Determine el número posible de ceros positivos y negativos usando la regla de los signos de Descartes.

27. $P(x) = x^5 - 6x^3 - x^2 + 2x + 18$

28. $P(x) = 6x^4 + 3x^3 + x^2 + 3x + 4$

29–36 ■ Se da un polinomio P.

a) Encuentre los ceros de P y sus multiplicidades.

b) Bosqueje la gráfica de P.

29. $P(x) = x^3 - 16x$ **30.** $P(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

31. $P(x) = x^4 + x^3 - 2x^2$ **32.** $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

33. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

34. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

35. $P(x) = 2x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 2$

36. $P(x) = 9x^5 - 21x^4 + 10x^3 + 6x^2 - 3x - 1$

37–46 ■ Evalúe la expresión y escríbala en la forma $a + bi$.

37. $(2 - 3i) + (1 + 4i)$

38. $(3 - 6i) - (6 - 4i)$

39. $(2 + i)(3 - 2i)$

40. $4i(2 - \frac{1}{2}i)$

41. $\dfrac{4 + 2i}{2 - i}$

42. $\dfrac{8 + 3i}{4 + 3i}$

43. i^{25}

44. $(1 + i)^3$

45. $(1 - \sqrt{-1})(1 + \sqrt{-1})$

46. $\sqrt{-10} \cdot \sqrt{-40}$

47. Encuentre un polinomio de grado 3 con coeficiente constante 12 y ceros $-\frac{1}{2}$, 2 y 3.

48. Encuentre un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros y ceros $3i$ y 4, con 4 un cero doble.

49. ¿Existe un polinomio de grado 4 con coeficientes enteros que tenga ceros i, $2i$, $3i$ y $4i$? En caso afirmativo, encuéntrelo. Si no, explique por qué.

50. Pruebe que la ecuación $3x^4 + 5x^2 + 2 = 0$ no tiene raíz real.

51–60 ■ Encuentre los ceros racionales, irracionales y complejos (y exprese sus multiplicidades). Use la regla de los signos de Descartes, el teorema de las cotas superior e inferior, la fórmula cuadrática u otras técnicas de factorización como medio de ayuda siempre que sea posible.

51. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$

52. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 6x - 9$

53. $P(x) = x^4 + 6x^3 + 17x^2 + 28x + 20$

54. $P(x) = x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 17x - 20$

55. $P(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4$

56. $P(x) = x^4 - 81$

57. $P(x) = x^6 - 64$

58. $P(x) = 18x^3 + 3x^2 - 4x - 1$

59. $P(x) = 6x^4 - 18x^3 + 6x^2 - 30x + 36$

60. $P(x) = x^4 + 15x^2 + 54$

61–64 ■ Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones reales de la ecuación.

61. $2x^2 = 5x + 3$

62. $x^3 + x^2 - 14x - 24 = 0$

63. $x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 9x - 2 = 0$

64. $x^5 = x + 3$

65–70 ■ Grafique la función racional. Muestre de manera clara las intersecciones x y y y las asíntotas.

65. $r(x) = \dfrac{3x - 12}{x + 1}$

66. $r(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$

67. $r(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 2x - 8}$

68. $r(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 7}{x - 4}$

69. $r(x) = \dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 1}$

70. $r(x) = \dfrac{x^3 + 27}{x + 4}$

71–74 ■ Use un dispositivo de graficación para analizar la gráfica de la función racional. Encuentre las intersecciones x y y; y las asíntotas verticales, horizontales e inclinadas. Si la función no tiene asíntota horizontal o inclinada, encuentre un polinomio que tiene el mismo comportamiento extremo que la función racional.

71. $r(x) = \dfrac{x - 3}{2x + 6}$

72. $r(x) = \dfrac{2x - 7}{x^2 + 9}$

73. $r(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^2 - x - 2}$

74. $r(x) = \dfrac{2x^3 - x^2}{x + 1}$

75. Encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de

$$y = x^4 + x^2 + 24x \qquad \text{y} \qquad y = 6x^3 + 20$$

3 Evaluación

1. Grafique el polinomio $P(x) = -(x + 2)^3 + 27$, mostrando con claridad las intersecciones x y y.

2. a) Use la división sintética para hallar el cociente y el residuo cuando $x^4 - 4x^2 + 2x + 5$ se divide entre $x - 2$.

b) Use la división larga para hallar el cociente y el residuo cuando $2x^5 + 4x^4 - x^3 - x^2 + 7$ se divide entre $2x^2 - 1$.

3. Sea $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$.

a) Liste los posibles ceros racionales de P.

b) Encuentre la factorización completa de P.

c) Determine los ceros de P.

d) Bosqueje la gráfica de P.

4. Lleve a cabo la operación indicada y escriba el resultado en la forma $a + bi$.

a) $(3 - 2i) + (4 + 3i)$ b) $(3 - 2i) - (4 + 3i)$

c) $(3 - 2i)(4 + 3i)$ d) $\dfrac{3 - 2i}{4 + 3i}$

e) i^{48} f) $(\sqrt{2} - \sqrt{-2})(\sqrt{8} + \sqrt{-2})$

5. Encuentre los ceros reales y complejos de $P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$.

6. Encuentre la factorización completa de $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$.

7. Encuentre un polinomio de cuarto grado con coeficientes enteros que tiene ceros $3i$ y -1, con -1 un cero de multiplicidad 2.

8. Sea $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + x^2 - 18x + 3$.

a) Use la regla de los signos de Descartes para determinar cuántos ceros reales positivos y negativos puede tener.

b) Muestre que 4 es una cota superior y -1 una cota inferior para los ceros reales de P.

c) Trace una gráfica de P y utilícela para estimar los ceros de P, correctos hasta dos decimales.

d) Encuentre las coordenadas de los extremos locales de P, correctos hasta dos decimales.

9. Considere las siguientes funciones racionales:

$$r(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 2} \qquad s(x) = \frac{x^3 + 27}{x^2 + 4} \qquad t(x) = \frac{x^3 - 9x}{x + 2} \qquad u(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 25}$$

a) ¿Cuál de estas funciones racionales tiene una asíntota horizontal?

b) ¿Cuál de estas funciones tiene una asíntota inclinada?

c) ¿Cuál de estas funciones no tiene asíntota vertical?

d) Grafique $y = u(x)$, muestre con claridad cualquier asíntota y los intersectos x y y que pueda tener la función.

e) Use la división larga para hallar un polinomio P que tiene el mismo comportamiento que t. Grafique P y t en la misma pantalla para comprobar que tienen el mismo comportamiento extremo.

Enfoque en el modelado

Ajuste de curvas polinomiales a datos

Se ha aprendido cómo ajustar una línea a datos (véase *Enfoque en el modelado*, página 239). La recta modela la tendencia creciente o decreciente en los datos. Si los datos exhiben más variabilidad, un incremento seguido de una disminución, entonces para modelar los datos es necesario usar una curva en vez de una recta. En la figura 1 se muestra un diagrama de dispersión con tres posibles modelos que al parecer se ajustan a los datos. ¿Qué modelo se ajusta mejor a los datos?

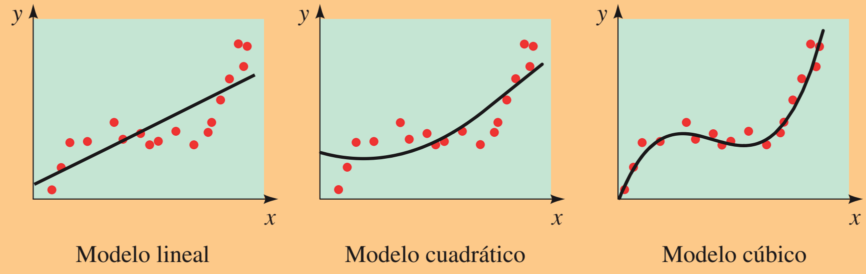


Figura 1

Funciones polinomiales como modelos

Las funciones polinomiales son ideales para modelar datos donde el diagrama de dispersión tiene picos o valles (es decir, máximos o mínimos locales). Por ejemplo, si los datos tienen un solo pico como en la figura 2(a), entonces podría ser apropiado usar un polinomio cuadrático para modelar los datos. Mientras más picos o valles exhiban los datos, mayor es el grado del polinomio necesario para modelar los datos (véase la figura 2).

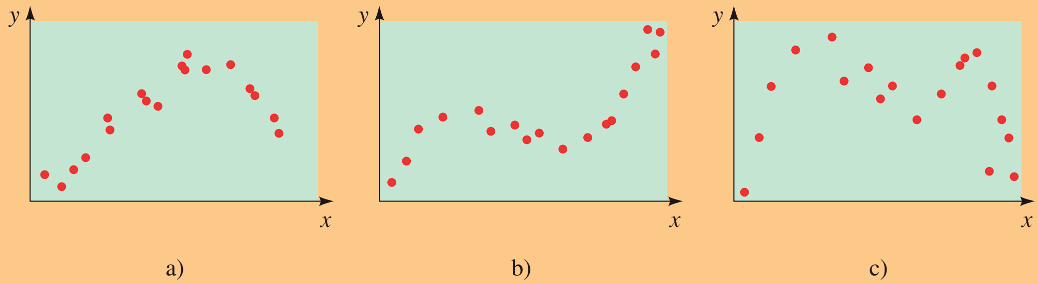


Figura 2

Las calculadoras de graficación están programadas para hallar el **polinomio del mejor ajuste** de un grado especificado. Como en el caso de las rectas (véanse las páginas 239-240), un polinomio de un grado dado se ajusta a los datos *mejor* si se reduce al mínimo la suma de los cuadrados de las distancias entre la gráfica del polinomio y los puntos de datos.

Ted Wood/The Image Bank/Getty Images

Ejemplo 1 Lluvia y rendimiento del cultivo

La lluvia es esencial para que crezcan los cultivos, pero demasiada lluvia puede disminuir el rendimiento. Los datos proporcionan la cantidad de lluvia y el rendimiento de algodón por acre durante varias estaciones en cierto país.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos. ¿Qué grado polinomial al parecer es apropiado para modelar los datos?

b) Use una calculadora de graficación para hallar el polinomio del mejor ajuste. Grafique el polinomio en el diagrama de dispersión.

c) Use el modelo que encontró para estimar el rendimiento si hay 25 pulg de lluvia.

Estación	Lluvia (pulg)	Rendimiento (kg/acre)
1	23.3	5311
2	20.1	4382
3	18.1	3950
4	12.5	3137
5	30.9	5113
6	33.6	4814
7	35.8	3540
8	15.5	3850
9	27.6	5071
10	34.5	3881

Solución

a) El diagrama de dispersión se muestra en la figura 3. Al parecer los datos tienen un pico, así que es apropiado modelar los datos mediante un polinomio cuadrático (grado 2).

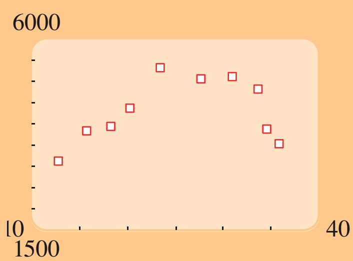


Figura 3

Diagrama de dispersión de los datos de rendimiento contra lluvia

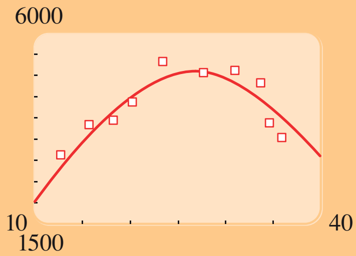
b) Con una calculadora para gráficas, se encuentra que el polinomio de segundo grado de mejor ajuste es

$$y = -12.6x^2 + 651.5x - 3283.2$$

El resultado de la calculadora y el diagrama de dispersión, junto con la gráfica del modelo cuadrático, se muestran en la figura 4.

```
QuadReg
 y=ax²+bx+c
 a=-12.6271745
 b=651.5470392
 c=-3283.15741
```

a)



b)

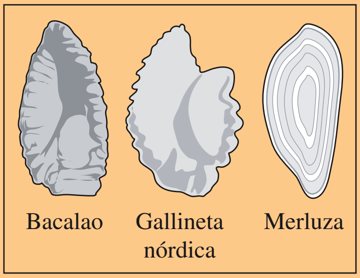
Figura 4

c) Usando el modelo con $x = 25$, se obtiene

$$y = -12.6(25)^2 + 651.5(25) - 3283.2 \approx 5129.3$$

Se estima que la producción será de alrededor de 5130 kg por acre. ■

Ejemplo 2 Datos de longitud y edad para peces



Otolitos para varias especies de peces.

Los otolitos ("cálculos en el oído") son pequeñas estructuras encontradas en las cabezas de los peces. Los anillos de crecimiento microscópico en los otolitos, al igual que los anillos de crecimiento en un árbol, registran la edad de un pez. En la tabla se dan las longitudes de base de roca de diferentes edades, según se determina mediante los otolitos. Los científicos ha propuesto un polinomio cúbico para modelar estos datos.

a) Use una calculadora de graficación para hallar el polinomio cúbico del mejor ajuste para estos datos.

b) Elabore un diagrama de dispersión de los datos y grafique el polinomio del inciso a).

c) Un pescador captura un róbalo de 20 pulgadas de largo. Use el modelo para estimar su edad.

Edad (años)	Longitud (pulg)	Edad (años)	Longitud (pulg)
1	4.8	9	18.2
2	8.8	9	17.1
2	8.0	10	18.8
3	7.9	10	19.5
4	11.9	11	18.9
5	14.4	12	21.7
6	14.1	12	21.9
6	15.8	13	23.8
7	15.6	14	26.9
8	17.8	14	25.1

Solución

a) Con una calculadora para gráficas (véase figura 5(a)), se encuentra el polinomio cúbico de mejor ajuste

$$y = 0.0155x^3 - 0.372x^2 + 3.95x + 1.21$$

b) El diagrama de dispersión de los datos y el polinomio cúbico se grafican en la figura 5(b).

```
CubicReg
 y=ax³+bx²+cx+d
 a=.0154911306
 b=-.372473323
 c=3.94608636
 d=1.21080418
```

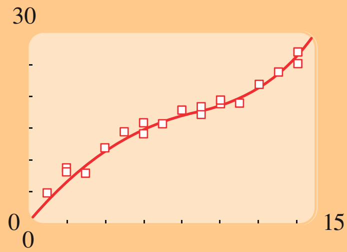


Figura 5 a) b)

c) Al mover el cursor a lo largo de la gráfica del polinomio, se encuentra que $y = 20$ cuando $x \approx 10.8$. Así, el pez tiene cerca de 11 años de edad. ■

Problemas

1. Inflado de la llanta y desgaste Las llantas de automóvil necesitan ser infladas de manera adecuada. El desgaste prematuro de la llanta se debe a que se infla demás o le falta aire. Los datos y el diagrama de dispersión muestran la duración de la llanta para distintos valores de inflado para cierto tipo de llanta.

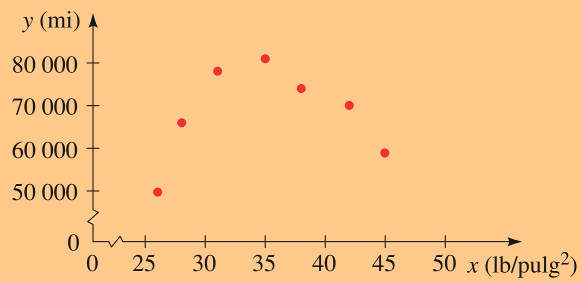
Presión ($lb/pulg^2$)	Duración de la llanta (millas)
26	50 000
28	66 000
31	78 000
35	81 000
38	74 000
42	70 000
45	59 000

a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor ajusta los datos.

b) Dibuje una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.

c) Use el resultado del inciso b) para estimar la presión que da la duración más prolongada de la llanta.

2. ¿Demasiadas plantas de maíz por acre? Mientras más plantas por acre siembre un campesino, mayor es la producción que puede esperar, pero sólo hasta cierto punto.



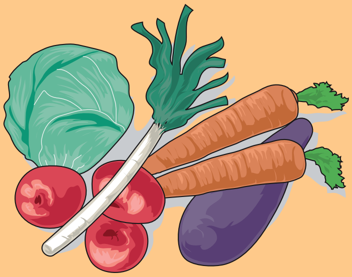
Demasiadas plantas por acre pueden causar sobrepoblación y reducir la producción. Los datos dan el rendimiento del cultivo por acre para varias densidades de plantaciones de maíz, según los hallazgos de investigadores en una granja de prueba de la universidad.

Densidad (plantas por acre)	Rendimiento del cultivo (bushels/acre)
15 000	43
20 000	98
25 000	118
30 000	140
35 000	142
40 000	122
45 000	93
50 000	67

a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor ajusta los datos.

b) Dibuje una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.

c) Use el resultado del inciso b) para estimar la producción para 37 000 plantas por acre.



3. ¿Qué tan rápido puede listar sus cosas favoritas? Si se le pide hacer una lista de objetos en cierta categoría, la rapidez para listarlos sigue un patrón predecible. Por ejemplo, si intenta nombrar tantas verduras como pueda, es probable que piense en varias de inmediato, por ejemplo, zanahorias, chícharos, ejotes, elote, etcétera. Luego, después de una pausa puede pensar en las que come con menos frecuencia, quizá calabacín, berenjena y espárragos. Por último, podrían venir a la mente algunas verduras más exóticas, alcachofas, jícama, col china, etcétera. Un psicólogo efectúa este experimento en varios individuos. En la tabla siguiente se da el número promedio de verduras que los individuos nombraron en un determinado número de segundos.

a) Encuentre un polinomio cúbico que mejor se ajuste a los datos.

b) Trace una gráfica del polinomio del inciso a) junto con el diagrama de dispersión de los datos.

c) Use el resultado del incico b) para estimar el número de verduras que los individuos podrían nombrar en 40 segundos.

d) De acuerdo con el modelo, ¿cuánto (hasta el 0.1 s más próximo) le tomaría a una persona nombrar cinco verduras?

Segundos	Número de verduras
1	2
2	6
5	10
10	12
15	14
20	15
25	18
30	21

4. Las ventas de ropa son de temporada Las ventas de ropa tienden a variar por temporada con más ropa vendida en primavera y otoño. En la tabla se dan las cifras de ventas para cada mes en cierta tienda de ropa.

a) Encuentre el polinomio de cuarto grado que mejor se ajusta a los datos.

b) Trace una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.

Mes	Ventas (dólares)
Enero	8 000
Febrero	18 000
Marzo	22 000
Abril	31 000
Mayo	29 000
Junio	21 000
Julio	22 000
Agosto	26 000
Septiembre	38 000
Octubre	40 000
Noviembre	27 000
Diciembre	15 000

c) ¿Considera que un polinomio de cuarto grado es un buen modelo para estos datos? Explique.

5. Altura de una pelota de béisbol Se lanza hacia arriba una pelota de béisbol y se mide su altura a intervalos de 0.5 segundos por medio de una luz estroboscópica. Los datos resultantes se dan en la tabla.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos. ¿Cuál es el grado del polinomio apropiado para modelar los datos?

b) Encuentre un modelo polinomial que mejor ajuste los datos y grafíquelo en un diagrama de dispersión.

c) Determine los tiempos cuando la bola está 20 pies arriba del suelo.

d) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bola?

Tiempo (s)	Altura (pies)
0	4.2
0.5	26.1
1.0	40.1
1.5	46.0
2.0	43.9
2.5	33.7
3.0	15.8

6. Ley de Torricelli El agua de un recipiente saldrá por un orificio en el fondo más rápido cuando el recipiente está casi lleno que cuando está casi vacío. De acuerdo con la ley de Torricelli, la altura $h(t)$ del agua remanente en el tiempo t es una función cuadrática de t.

Cierto recipiente se llena con agua y se deja que ésta fluya. La altura del agua se mide en diferentes tiempos como se muestra en la tabla.

a) Encuentre el polinomio cuadrático que mejor se ajusta a los datos.

b) Trace una gráfica del polinomio del inciso a) junto con un diagrama de dispersión de los datos.

c) Use la gráfica del inciso b) para estimar en cuánto tiempo se vacía el recipiente.

Tiempo (min)	Altura (pies)
0	5.0
4	3.1
8	1.9
12	0.8
16	0.2

4 Funciones exponenciales y logarítmicas

Esquema del capítulo

En este capítulo se estudia una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales.* Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que crecen los valores de esta función:

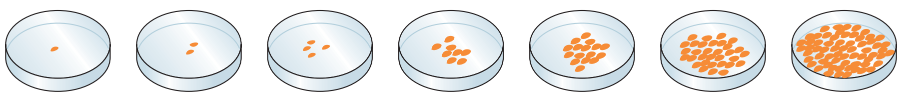
$$f(3) = 2^3 = 8$$

$$f(10) = 2^{10} = 1024$$

$$f(30) = 2^{30} = 1\,073\,741\,824$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. La cuestión es, cuando la variable está en el exponente, incluso un cambio pequeño en la variable puede causar un cambio radical en el valor de la función.

A pesar de este incomprensiblemente enorme crecimiento, las funciones exponenciales son apropiadas para modelar el crecimiento poblacional para los seres vivos, desde bacterias hasta elefantes. Para entender cómo crece una población, considere el caso de una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora se tendrían dos bacterias, después de dos horas 2^2 o 4 bacterias, después de tres horas 2^3 u 8 bacterias, etcétera. Después de x horas se tendrían 2^x bacterias. Esto da lugar a modelar la población de bacterias mediante la función $f(x) = 2^x$.



0 1 2 3 4 5 6

El principio que gobierna el crecimiento poblacional es el siguiente: mientras más grande sea la población, mayor es el número de descendientes. Este mismo principio está presente en muchas otras situaciones de la vida real. Por ejemplo, mientras más grande sea su cuenta de banco, más intereses obtiene. En consecuencia, las funciones exponenciales se usan también para calcular el interés compuesto.

Se usan *funciones logarítmicas*, que son el inverso de las funciones exponenciales, como ayuda para contestar preguntas como, ¿cuándo mi inversión crecerá a la cantidad de \$100 000? En *Enfoque en el modelado* (página 386) se explora cómo ajustar modelos exponenciales y logarítmicos a datos.

4.1 Funciones exponenciales

Hasta el momento, se han estudiado las funciones polinomiales y racionales. Ahora se estudia una de las funciones más importantes en matemáticas, la *función exponencial*. Esta función se emplea para modelar procesos naturales como el crecimiento poblacional y el decaimiento radiactivo.

Funciones exponenciales

En la sección 1.2 se definió a^x para $a > 0$ y x un número racional, pero no se han definido aún las potencias irracionales. Por lo tanto, ¿qué se quiere dar a entender con $5^{\sqrt{3}}$ o 2^{π}? Para definir a^x cuando x es irracional, se aproxima a x mediante números racionales. Por ejemplo, puesto que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

es un número irracional, se aproxima de manera exitosa $a^{\sqrt{3}}$ mediante las siguientes potencias racionales:

$$a^{1.7}, a^{1.73}, a^{1.732}, a^{1.7320}, a^{1.73205}, \ldots$$

De forma intuitiva, se puede ver que estas potencias racionales de a se aproximan cada vez más a $a^{\sqrt{3}}$. Se puede demostrar por medio de matemáticas avanzadas que hay exactamente un número al que se aproximan estas potencias. Se define a $a^{\sqrt{3}}$ como este número.

Por ejemplo, usando una calculadora se encuentra

$$\begin{aligned} 5^{\sqrt{3}} &\approx 5^{1.732} \\ &\approx 16.2411\ldots \end{aligned}$$

Mientras más decimales de $\sqrt{3}$ se usen en el cálculo, mejor es la aproximación de $5^{\sqrt{3}}$.

Las leyes de los exponentes se listan en la página 14.

Se puede demostrar que las *leyes de los exponentes aún son válidas cuando los exponentes son números reales.*

Funciones exponenciales

La **función exponencial con base *a*** se define para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Se supone que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es sólo una función constante. A continuación se dan algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$f(x) = 2^x \qquad g(x) = 3^x \qquad h(x) = 10^x$$

Base 2 Base 3 Base 10

Ejemplo 1 Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

a) $f(2)$ b) $f(-\frac{2}{3})$ c) $f(\pi)$ d) $f(\sqrt{2})$

Solución Se usa una calculadora para obtener los valores de f.

	Teclas de la calculadora	Resultado
a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

■

Gráficas de funciones exponenciales

Se grafican primero las funciones exponenciales al trazar los puntos. Se verá que las gráficas de tales funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

Ejemplo 2 Graficación de funciones exponenciales y logarítmicas mediante el trazo de puntos

Dibuje la gráfica de cada función.

a) $f(x) = 3^x$ b) $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

Solución Se calculan valores de $f(x)$ y $g(x)$ y se trazan los puntos para bosquejar las gráficas de la figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

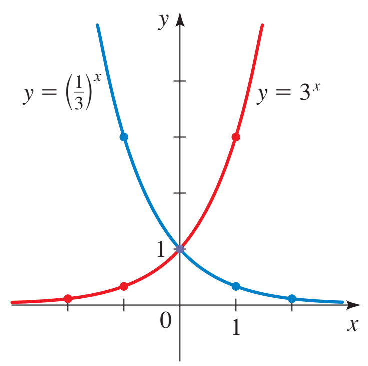


Figura 1

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

La reflexión de gráficas se explicó en la sección 2.4.

y, por lo tanto, se podría haber obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de f mediante la reflexión en el eje y. ■

Para ver qué tan rápido crece $f(x) = 2^x$ se efectúa el siguiente experimento mental. Suponga que se empieza con una pieza de papel cuyo espesor es un milésimo de pulgada, y se dobla a la mitad 50 veces. Cada vez que se dobla el papel, se duplica el espesor de la pila de papel, así que el espesor de la pila resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿Qué espesor considera que es? ¡Resulta que son más de 17 millones de millas!

En la figura 2 se muestran las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = a^x$ para varios valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para $a \neq 0$. Se puede ver de la figura 2 que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial disminuye con rapidez. Si $a > 1$, la función se incrementa rápidamente (véase la nota al margen).

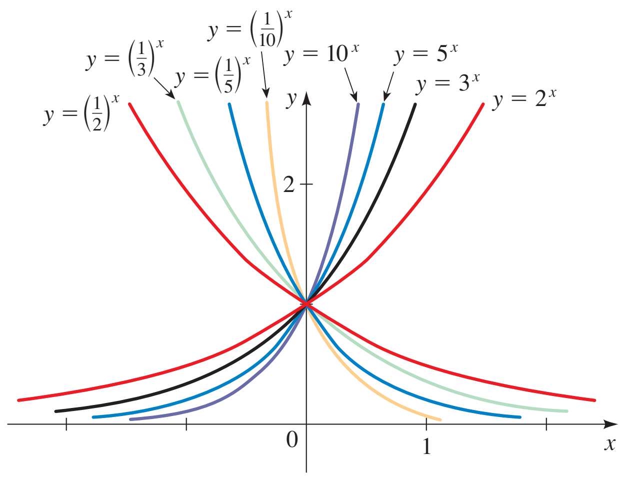


Figura 2

Una familia de funciones exponenciales

Véase la sección 3.6, página 301, donde se explica la notación de flecha usada aquí.

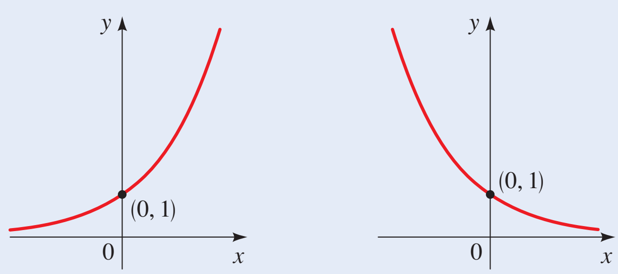
El eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, se tiene $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, se tiene $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (véase la figura 2). Asimismo, $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, así que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente.

Funciones exponenciales de las gráficas

La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las formas siguientes.



$f(x) = a^x$ para $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

Garry McMichael/Photo Researchers Inc.

El **arco Gateway** en San Luis Missouri, tiene la forma de la grafica de una combinación de funciones exponenciales (*no* una parábola, como podría parecer en primera instancia). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

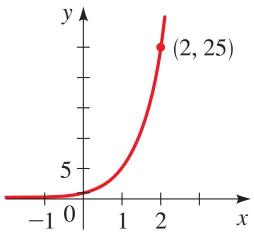
$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(véase el ejercicio 57). Se eligió esta forma porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Las cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes de teléfono) cuelgan en la forma de una catenaria.

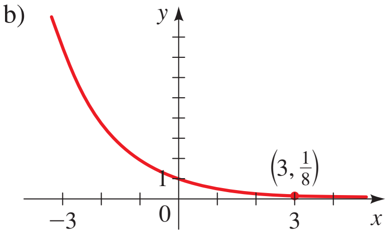
Ejemplo 3 Identificación de gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

a)



b)



Solución

a) Puesto que $f(2) = a^2 = 25$, se ve que la base es $a = 5$. Por lo tanto, $f(x) = 5^x$.

b) Puesto que $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, se ve que la base es $a = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. ■

En el ejemplo siguiente se ve cómo graficar ciertas funciones, no mediante el trazo de puntos, sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la figura 2 y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la sección 2.4.

Ejemplo 4 Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para bosquejar la gráfica de cada función.

a) $g(x) = 1 + 2^x$ b) $h(x) = -2^x$ c) $k(x) = 2^{x-1}$

Solución

a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, se empieza con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y se desplaza 1 unidad hacia arriba. Observe de la figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

b) De nuevo se empieza con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí se refleja en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ mostrada en la figura 3(b).

c) Esta vez se empieza con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y se desplaza a la derecha en 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ mostrada en la figura 3(c).

En la sección 2.4 se explicó el desplazamiento y la reflexión de gráficas.

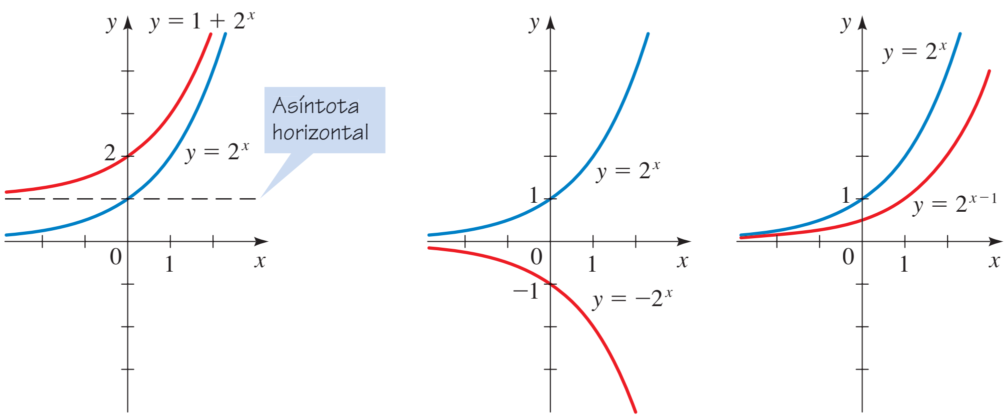


Figura 3 a) b) c) ■

Ejemplo 5 Comparación de funciones exponenciales y de potencia

Compare las tasas de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$ dibujando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de visión.

a) $[0, 3]$ por $[0, 8]$

b) $[0, 6]$ por $[0, 25]$

c) $[0, 20]$ por $[0, 1000]$

Solución

a) En la figura 4(a) se muestra que la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza a, y se vuelve mayor que, la gráfica de $f(x) = 2^x$ en $x = 2$.

b) El rectángulo de visión más grande de la figura 4(b) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ sobrepasa a la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

c) En la figura 4(c) se da una visión más global y se muestra que, cuando x es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho más grande que $g(x) = x^2$.

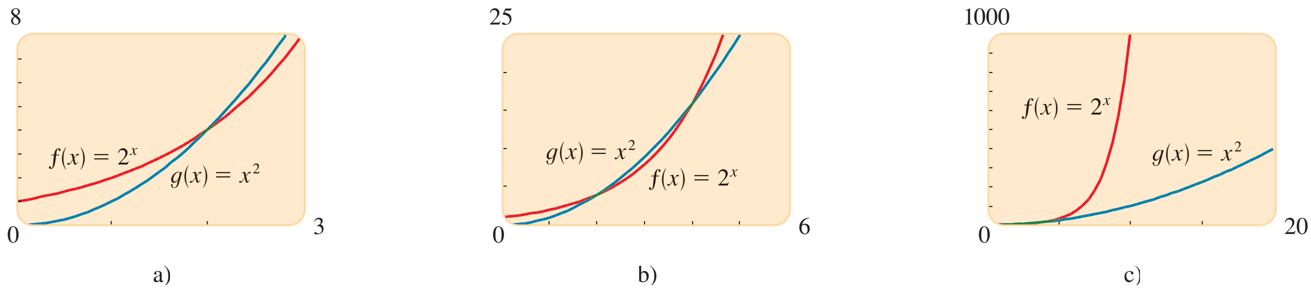


Figura 4 ■

Función exponencial natural

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

Cualquier número positivo se puede usar como base para una función exponencial, pero algunas bases se usan con más frecuencia que otras. Se verá en las secciones restantes de este capítulo que las bases 2 y 10 son convenientes para ciertas aplicaciones, pero la base más importante es el número denotado por la letra e.

El número e se define como el valor al que se aproxima $(1 + 1/n)^n$ cuando n se vuelve grande. (En cálculo esta idea se hace más precisa por el concepto de límite. Véase el ejercicio 55.) En la tabla del margen se muestran los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores de n cada vez más grandes. Parece ser que, correcto hasta cinco cifras decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Se puede demostrar que e es un número racional, así que no se puede escribir su valor exacto en forma decimal.

¿Por qué usar una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer en primera instancia que es más fácil trabajar con una base como 10. Sin embargo, se verá que en ciertas aplicaciones el número e es la mejor base posible. En esta sección se estudia cómo aparece e en la descripción del interés compuesto.

La notación e la eligió Leonhard Euler (véase la página 288), probablemente porque es la primera letra de la palabra *exponencial*.

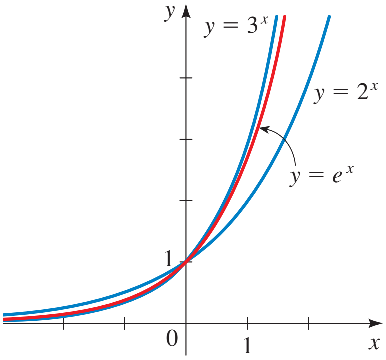


Figura 5
Gráfica de la función exponencial natural

La función exponencial natural

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

con base e. Es común referirse a ella como *la* función exponencial.

Puesto que $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se muestra en la figura 5.

Las calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. En el ejemplo siguiente se usa esta tecla.

Ejemplo 6 Evaluar la función exponencial

Evalúe cada expresión correcta hasta cinco decimales.

a) e^3 b) $2e^{-0.53}$ c) $e^{4.8}$

Solución Se usa la tecla $\boxed{e^x}$ en una calculadora para evaluar la función exponencial.

a) $e^3 \approx 20.08554$

b) $2e^{-0.53} \approx 1.17721$

c) $e^{4.8} \approx 121.51042$ ■

Ejemplo 7 Transformaciones de la función exponencial

Bosqueje la gráfica de cada función.

a) $f(x) = e^{-x}$ b) $g(x) = 3e^{0.5x}$

Solución

a) Se comienza con la gráfica de $y = e^x$ y se refleja en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la figura 6.

b) Se calculan varios valores, se grafican los puntos resultantes y se unen mediante una curva uniforme. La gráfica se muestra en la figura 7.

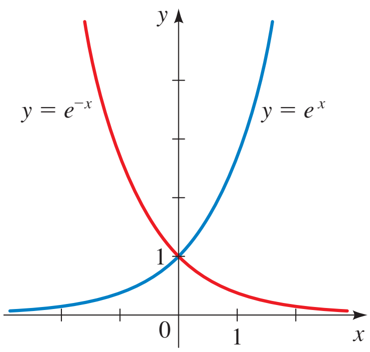


Figura 6

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
−3	0.67
−2	1.10
−1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

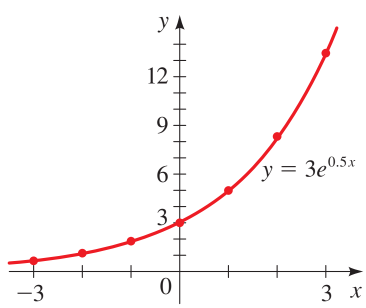


Figura 7 ■

Ejemplo 8 Un modelo exponencial para la diseminación de un virus

Una enfermedad infecciosa comienza a diseminarse en una ciudad pequeña con 10 000 habitantes. Después de t días, el número de personas que ha sucumbido al virus se modela mediante la función

$$v(t) = \frac{10\,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (en el tiempo $t = 0$)?

b) Calcule el número de personas infectas después de un día, dos días y cinco días.

c) Grafique la función v y describa su comportamiento.

Solución

a) Puesto que $v(0) = 10\,000/(5 + 1245e^{0}) = 10\,000/1250 = 8$, se concluye que 8 personas tienen inicialmente la enfermedad.

b) Utilice una calculadora para evaluar $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$, y después redondee para obtener los siguientes valores.

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

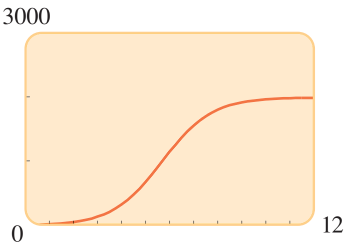


Figura 8

$$v(t) = \frac{10\,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

c) De la gráfica en la figura 8, se puede observar que el número de personas infectadas primero se eleva en forma lenta; luego aumenta con rapidez entre el día 3 y el día 8, y luego se estabiliza cuando están infectadas cerca de 2000 personas. ■

La gráfica de la figura 8 se llama *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como éstas ocurren con frecuencia en el estudio del crecimiento poblacional. (Véanse los ejercicios 69-72.)

Interés compuesto

Las funciones exponenciales aparecen en el cálculo del interés compuesto. Si la cantidad de dinero P, conocido como **principal**, se invierte a una tasa de interés i por periodo, entonces después de un periodo el interés es Pi, y la cantidad de dinero A es

$$A = P + Pi = P(1 + i)$$

Si se reinvierte el interés, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro periodo es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. De manera similar, después de un tercer periodo la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de k periodos la cantidad es

$$A = P(1 + i)^k$$

Hay que observar que ésta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es r y si el interés se compone n veces por año, entonces en cada periodo la tasa de interés es $i = r/n$, y hay nt periodos en t años. Esto conduce a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años.

Interés compuesto

El **interés compuesto** se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde $A(t) =$ cantidad después de t años

$P =$ principal

$r =$ tasa de interés por año

$n =$ número de veces que el interés de compone por año

$t =$ número de años

r se conoce como la *tasa de interés anual nominal.*

Ejemplo 9 Cálculo del interés compuesto

Una suma de $1000 se invierte a una tasa de interés de 12% anual. Calcule las cantidades en la cuenta después de tres años si el interés se compone anualmente, cada medio año, por trimestre, mensualmente o diario.

Solución Se usa la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$, y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1 + \frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semianual	2	$1000\left(1 + \frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1 + \frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diaria	365	$1000\left(1 + \frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

■

Se puede observar del ejemplo 9 que el pago de interés se incrementa conforme crece el número n de periodos de capitalización. Veamos qué sucede cuando n se incrementa de forma indefinida. Si $m = n/r$, entonces

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando m crece, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número e. Así, la cantidad tiende a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da la cantidad cuando el interés se compone a "cada instante".

Interés compuesto en forma continua

El **interés compuesto en forma continua** se calcula mediante la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

donde $A(t) =$ cantidad después de t años

$P =$ principal

$r =$ tasa de interés por año

$t =$ número de años

Ejemplo 10 Calcular el interés compuesto de manera continua

Calcule la cantidad después de tres años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizados de forma continua.

Solución Se usa la fórmula del interés capitalizable en forma continua con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Compare esta cantidad con las cantidades del ejemplo 9. ■

4.1 Ejercicios

1–4 ■ Use una calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

1. $f(x) = 4^x$; $f(0.5), f(\sqrt{2}), f(\pi), f(\frac{1}{3})$
2. $f(x) = 3^{x+1}$; $f(-1.5), f(\sqrt{3}), f(e), f(-\frac{5}{4})$
3. $g(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$; $g(1.3), g(\sqrt{5}), g(2\pi), g(-\frac{1}{2})$
4. $g(x) = (\frac{3}{4})^{2x}$; $g(0.7), g(\sqrt{7}/2), g(1/\pi), g(\frac{2}{3})$

5–10 ■ Bosqueje la gráfica de la función construyendo una tabla de valores. Use una calculadora si es necesario.

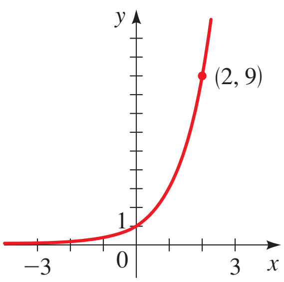
5. $f(x) = 2^x$
6. $g(x) = 8^x$
7. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$
8. $h(x) = (1.1)^x$
9. $g(x) = 3e^x$
10. $h(x) = 2e^{-0.5x}$

11–14 ■ Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

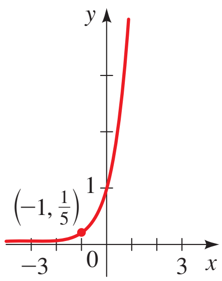
11. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$
12. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$
13. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$
14. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ y $g(x) = (\frac{4}{3})^x$

15–18 ■ Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se muestra.

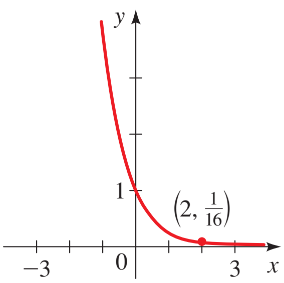
15.



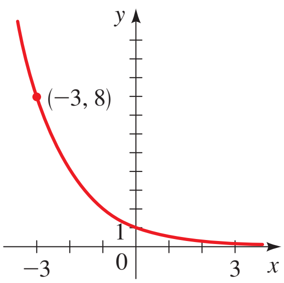
16.



17.



18.

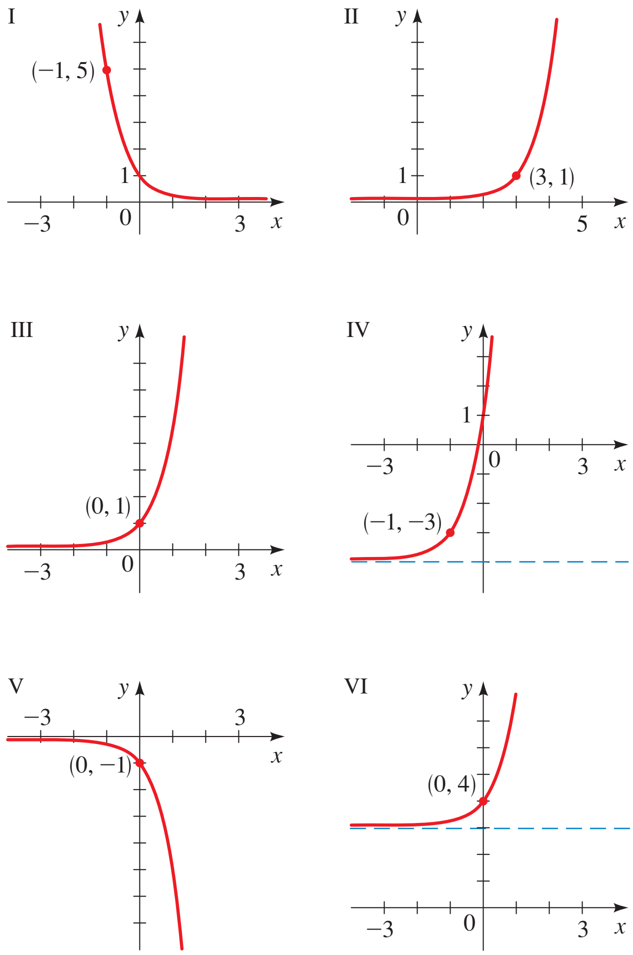


19–24 ■ Compare la función exponencial con una de las gráficas marcadas I-VI.

19. $f(x) = 5^x$ **20.** $f(x) = -5^x$

21. $f(x) = 5^{-x}$ **22.** $f(x) = 5^x + 3$

23. $f(x) = 5^{x-3}$ **24.** $f(x) = 5^{x+1} - 4$



25–38 ■ Grafique la función, no trace los puntos, sino más bien utilice las gráficas de las figuras 2 y 5. Exprese el dominio, rango y la asíntota.

25. $f(x) = -3^x$ **26.** $f(x) = 10^{-x}$

27. $g(x) = 2^x - 3$ **28.** $g(x) = 2^{x-3}$

29. $h(x) = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^x$ **30.** $h(x) = 6 - 3^x$

31. $f(x) = 10^{x+3}$ **32.** $f(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x$

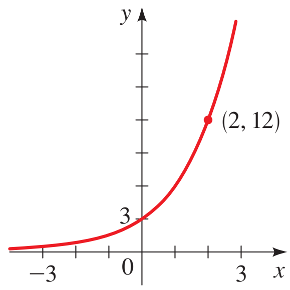
33. $f(x) = -e^x$ **34.** $y = 1 - e^x$

35. $y = e^{-x} - 1$ **36.** $f(x) = -e^{-x}$

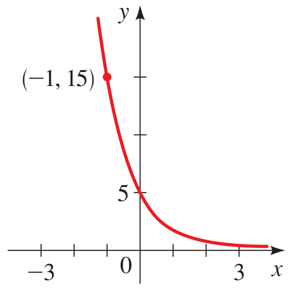
37. $f(x) = e^{x-2}$ **38.** $y = e^{x-3} + 4$

39–40 ■ Encuentre la función de la forma $f(x) = Ca^x$ cuya gráfica es la siguiente.

39.



40.



41. **a)** Bosqueje las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.
b) ¿Cómo se relacionan las gráficas?

42. **a)** Bosqueje las gráficas de $f(x) = 9^{x/2}$ y $g(x) = 3^x$.
b) Use las leyes de los exponentes para explicar la relación entre estas gráficas.

43. Si $f(x) = 10^x$, muestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right)$$

44. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ evaluando ambas para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$ y 20. Luego dibuje las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.

45. La *función coseno hiperbólico* se define mediante

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Bosqueje las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes y use la adición gráfica (véase la sección 2.7) para bosquejar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

46. La *función seno hiperbólico* se define como

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Dibuje la gráfica de esta función usando la adición gráfica como en el ejercicio 45.

47–50 ■ Use las definiciones de los ejercicios 45 y 46 para probar la identidad.

47. $\cosh(-x) = \cosh(x)$

48. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$

49. $[\cosh(x)]^2 - [\operatorname{senh}(x)]^2 = 1$

50. $\operatorname{senh}(x + y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$

51. **a)** Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ dibujando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de división

i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$

ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$

iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$

b) Encuentre las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$, correctas hasta un decimal.

52. **a)** Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ dibujando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de visión:

i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$ ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$

iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$

b) Encuentre las soluciones de la ecuación $3^x = x^4$, correctas hasta dos decimales.

53–54 ■ Dibuje las gráficas de la familia de funciones para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo se relacionan las gráficas?

53. $f(x) = c2^x$ **54.** $f(x) = 2^{cx}$

55. Ilustre la definición del número e graficando la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e$ en la misma pantalla usando el rectángulo de visión $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

56. Investigue el comportamiento de la función

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$$

cuando $x \to \infty$ graficando f y la recta $y = 1/e$ en la misma pantalla con el rectángulo de visión $[0, 20]$ por $[0, 1]$.

57. **a)** Dibuje las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5, 1, 1.5$ y 2.

b) ¿Cómo afecta a la gráfica un valor más grande de a?

58–59 ■ Grafique la función y comente acerca de las asíntotas vertical y horizontal.

58. $y = 2^{1/x}$ **59.** $y = \dfrac{e^x}{x}$

60–61 ■ Encuentre los valores locales máximo y mínimo de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta hasta dos decimales.

60. $g(x) = x^x \quad (x > 0)$ **61.** $g(x) = e^x + e^{-3x}$

62–63 ■ Encuentre, correctos hasta dos decimales, los intervalos en los que la función crece o disminuye y b) el rango de la función.

62. $y = 10^{x - x^2}$ **63.** $y = xe^{-x}$

Aplicaciones

64. Fármacos Cuando se administró cierto fármaco a un paciente, el número de miligramos que permanecen en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas se modela mediante

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos del fármaco permanecen en el torrente sanguíneo del paciente después de tres horas?

65. Decaimiento radiactivo Una sustancia radiactiva se desintegra de tal manera que la cantidad de masa que permanece después de t días se expresa mediante la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

b) ¿Cuánta masa permanece después de 45 días?

66. Decaimiento radiactivo Los médicos emplean el yodo radiactivo como trazador para diagnosticar ciertos trastornos de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra de tal manera que la masa restante después de t días se determina mediante la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ se mide en gramos.

a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

b) ¿Cuánta masa queda después de 20 días?

67. Paracaidismo Un paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a su velocidad, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad de descenso del paracaidista en el tiempo t se expresa como

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

a) Encuentre la velocidad inicial del paracaidista.

b) Calcule la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

c) Dibuje la gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

d) La velocidad máxima de un objeto que cae con resistencia del viento se llama su *velocidad terminal*. De la gráfica del inciso c) encuentre la velocidad terminal de este paracaidista.

68. Mezclas y concentraciones Un barril de 50 galones se llena por completo con agua pura. A continuación se bombea hacia el barril agua salada con una concentración de 0.3 lb/gal, y la mezcla resultante sale a la misma tasa. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t se determina mediante

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

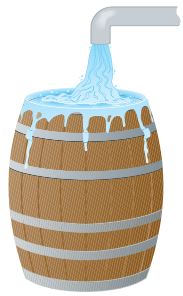
donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

a) ¿Cuánta sal está en el barril después de 5 min?

b) ¿Cuánta sal está en el barril después de 10 min?

c) Dibuje una gráfica de la función $Q(t)$.

d) Use la gráfica del inciso c) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal en el barril cuando t se vuelve grande. ¿Es esto lo que esperaría?



$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$

69. Crecimiento logístico Las poblaciones animales no pueden crecer sin restricción debido a la limitación de hábitat y suministros de alimento. En tales condiciones la población sigue un *modelo de crecimiento logístico*

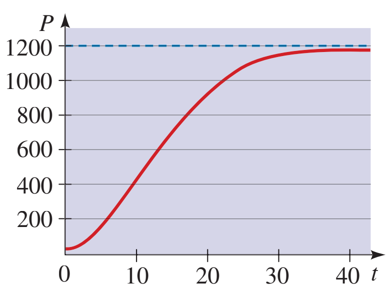
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces, en un pequeño estanque $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$, y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

a) ¿Cuántos peces se colocaron originalmente en el estanque?

b) Calcule la población después de 10, 20 y 30 años.

c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor tiende la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica mostrada confirma sus cálculos?



70. Población de aves La población de cierta especie de ave está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

dondee t se mide en años.

a) Encuentre la población inicial de aves.

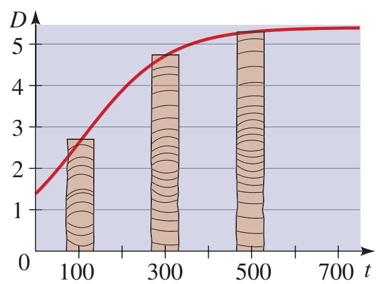
b) Dibuje la gráfica de la función $n(t)$.

c) ¿Qué tamaño tiene la población cuando el tiempo avanza?

71. Diámetro de un árbol Para cierto tipo de árbol el diámetro D (en pies) depende de la edad del árbol t (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Determine el diámetro de un árbol de 20 años.



72. Población de conejos Suponga que una población de conejos se comporta de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico

$$n(t) = \frac{300}{0.05 + \left(\dfrac{300}{n_0} - 0.05\right)e^{-0.55t}}$$

donde n_0 es la población inicial de conejos.

a) Si la población inicial es 50 conejos, ¿cuál será la población después de 12 años?

b) Dibuje las gráficas de la función $n(t)$ para $n_0 = 50$, 500, 2000, 8000 y 12 000 en el rectángulo de visión $[0, 15]$ por $[0, 12\,000]$.

c) De las gráficas del inciso b), observe que, sin importar la población inicial, la población de conejos al parecer se aproxima a cierto número conforme el tiempo avanza. ¿Cuál es ese número? (Este es el número de conejos que puede soportar la isla.)

73–74 ■ Interés compuesto Una inversión de 5000 dólares se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla llenando las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o las tasas de interés.

73. $r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

74. $t = 5$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

75. Interés compuesto Si se invierten 10 000 dólares a una tasa de interés de 10% por año, capitalizable semianualmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.

a) 5 años
b) 10 años
c) 15 años

76. Interés compuesto Si se ahorran 4000 dólares a una tasa de interés de 16% por año, capitalizable trimestralmente, encuentre la cantidad debida al final del número de años dado

a) 4 años
b) 6 años
c) 8 años

77. Interés compuesto Si se invierten 3000 dólares a una tasa de interés de 9% por año, encuentre la cantidad de la inversión al final de 5 años para los siguientes métodos de capitalización.

a) Anual
b) Semianual
c) Mensual
d) Semanal
e) Por día
f) Por hora
g) De manera continua

78. Interés compuesto Si se invierten 4000 dólares en una cuenta para la cual el interés se capitaliza trimestralmente, encuentre la cantidad de la inversión al final de 5 años para las siguientes tasas de interés.

a) 6% **b)** $6\frac{1}{2}\%$
c) 7% **d)** 8%

79. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y periodos de capitalización proporcionarían la mejor inversión?

i) $8\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizable cada medio año
ii) $8\frac{1}{4}\%$ por año, capitalizable trimestralmente
iii) 8% por año, capitalizable de forma continua

80. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y periodos de capitalización proporcionarían la mejor inversión?

i) $9\frac{1}{4}\%$ por año, capitalizable cada medio año
ii) 9% por año, capitalizable de forma continua

81. Valor presente El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que se debe invertir ahora, a una determinada tasa de interés, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

a) Encuentre el valor presente de 10 000 dólares si se paga interés a una tasa de 9% por año, capitalizable cada medio año, durante tres años.
b) Encuentre el valor presente de 100 000 dólares si se paga interés a una tasa de 8% por año, capitalizable mensualmente, durante 5 años.

82. Inversión Se invierte una suma de 5000 dólares a una tasa de interés de 9% por año, capitalizable cada medio año.

a) Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.
b) Dibuje una gráfica de $A(t)$.
c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión llega a 25 000 dólares.

Descubrimiento • Debate

83. Crecimiento de una función exponencial Suponga que le ofrecen un empleo que dura un mes, y se le pagará muy bien. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago es más rentable para usted?

a) Un millón de dólares al final del mes.
b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día y, en general, 2^n centavos en el n-ésimo día.

84. Altura de la gráfica de una función exponencial Su profesor de matemáticas le pide trazar una gráfica de la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

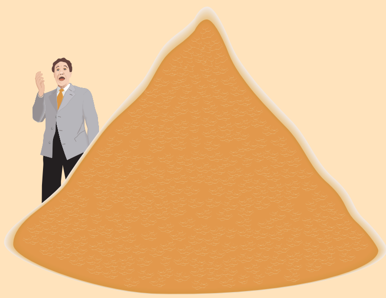
para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades para una pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Explosión exponencial

Como ayuda para entender cómo es el crecimiento exponencial explosivo, se probará un experimento mental.

Suponga que hoy coloca una moneda de un centavo de dólar en su alcancía, dos centavos mañana, cuatro centavos el siguiente día, etcétera, duplicando el número de monedas que agrega a la alcancía cada día (véase la tabla). ¿Cuántas monedas de un centavo habrá colocado en su alcancía en el día 30? La respuesta es 2^{30} centavos. Eso es simple, ¿pero puede adivinar cuántos dólares es esa cantidad? ¡2^{30} centavos son más de 10 millones de dólares!



Día	Centavos
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
$\vdots$	$\vdots$
n	2^n
$\vdots$	$\vdots$

Como se puede observar, la función exponencial $f(x) = 2^x$ crece con extrema rapidez. Este es el principio detrás de las explosiones atómicas. Cuando un átomo se divide libera dos neutrones, que causan la división de dos átomos, y cada uno libera dos neutrones, que a su vez provocan la división de cuatro átomos, y así sucesivamente. En la n-ésima etapa se dividen 2^n átomos, ¡una explosión exponencial!

Las poblaciones también crecen de forma exponencial. Veamos qué significa esto para un tipo de bacteria que se divide cada minuto. Suponga que al mediodía una sola bacteria coloniza una lata de comida desechada. La bacteria y sus descendientes son felices, pero temen el momento cuando la lata esté completamente llena de bacterias, el Día del juicio final.

1. ¿Cuántas bacterias hay en la lata a las 12:05? ¿A las 12:10?

2. La lata está completamente llena de bacterias a la 1:00 P.M. ¿A qué hora la lata tenía la mitad de bacterias?

3. Cuando la lata tiene la mitad de bacterias, el presidente de la colonia asegura a sus ciudadanos que está lejos el día del juicio final; después de todo, queda tanto espacio en la lata como el que se ha usado en toda la historia previa de la colonia. ¿Está en lo correcto el presidente? ¿Cuánto tiempo queda antes del Día del juicio final?

4. Cuando la lata está llena a un cuarto, ¿cuánto resta para el Día del juicio final?

5. Una bacteria sabia decide empezar una nueva colonia en otra lata y reducir el tiempo de división a 2 minutos. ¿Cuánto tiempo tiene esta nueva colonia?

4.2 Funciones logarítmicas

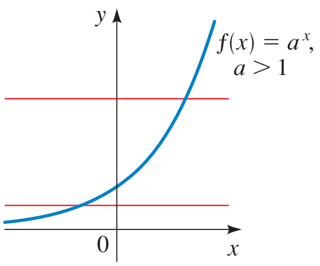


Figura 1
$f(x) = a^x$ es uno a uno

En esta sección se estudia la inversa de las funciones exponenciales.

Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función uno a uno por la prueba de la recta horizontal (véase la figura 1 para el caso $a > 1$) y, por lo tanto, tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se llama *función logarítmica con base a* y se denota por $\log_a$. Recuerde de la sección 2.8 que f^{-1} se define por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto conduce a la siguiente definición de la función logarítmica.

Definición de la función logarítmica

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** a, denotada por $\mathbf{log}_a$, se define

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el *exponente* al que se debe elevar la base a para dar x.

El $\log_a x = y$ se lee como "el log base a de x es y".

Por tradición, el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una sola letra. También, normalmente se omiten los paréntesis en la notación de función y se escribe

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando se usa la definición de logaritmos para intercambiar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
Exponente	Exponente
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base	Base

Ejemplo 1 Formas logarítmica y exponencial

Las formas logarítmica y exponencial son ecuaciones equivalentes, si una es cierta entonces la otra también lo es. Por lo tanto, se puede intercambiar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100\,000 = 5$	$10^5 = 100\,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

■

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los nú-

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

meros de la columna izquierda. Este es el caso para todas las bases, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Evaluar los logaritmos

a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$ ■

Propiedad de la función inversa:

$f^{-1}(f(x)) = x$

$f(f^{-1}(x)) = x$

Cuando se aplica la propiedad de la función inversa descrita en la página 227 a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, se obtiene

$$\log_a(a^x) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \qquad x > 0$$

Se listan ésta y otras propiedades de logaritmos analizadas en esta sección.

Propiedades de los logaritmos

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Se debe elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Se debe elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Se debe elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la cual se debe elevar a para obtener x.

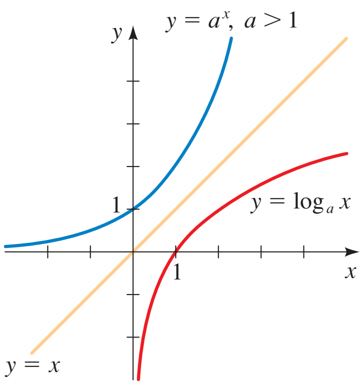


Figura 2

Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

Ejemplo 3 Aplicar las propiedades de los logaritmos

Se ilustran las propiedades de los logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$ Propiedad 1 $\qquad \log_5 5 = 1$ Propiedad 2

$\log_5 5^8 = 8$ Propiedad 3 $\qquad 5^{\log_5 12} = 12$ Propiedad 4 ■

Gráficas de funciones logarítmicas

Hay que recordar que si una función f uno a uno tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Puesto que la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, se concluye que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. En la figura 2 se muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función que crece muy rápido para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función que crece muy lento para $x > 1$ (véase el ejercicio 84).

La notación de flecha se explica en la página 301.

Puesto que $\log_a 1 = 0$, la intersección con el eje x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

Matemáticas en el mundo moderno

Bettmann/Corbis   Hulton/Deutch Collection/Corbis

Cumplimiento de la ley

Las matemáticas ayudan al cumplimiento de la ley en formas numerosas y sorprendentes, desde la reconstrucción de trayectorias de bala, determinar la hora de una muerte, hasta calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una determinada persona. Un uso interesante es en la investigación de personas extraviadas. Si una persona ha estado perdida durante varios años, esa persona podría tener un aspecto bastante distinto del de su fotografía más reciente disponible. Esto es particularmente cierto si la persona extraviada es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado cómo se vería 5, 10 o 15 años a partir de ahora?

Los investigadores han encontrado que diferentes partes del cuerpo crecen a distintas tasas. Por ejemplo, habrá notado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la de un adulto. Como otro ejemplo, la relación de largo del brazo a la altura es $\frac{1}{3}$ en un niño, pero cerca de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Mediante la recolección de datos y el análisis de gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Como en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan un papel crucial. Por ejemplo, la fórmula que relaciona el largo del brazo l con la altura h es $l = ae^{kh}$ donde a y k son constantes.

(*continúa*)

Ejemplo 4 Graficación de una función logarítmica mediante el trazo de puntos

Bosqueje la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

Solución Para construir una tabla de valores, se eligen los valores x como potencias de 2 de modo que pueda hallar con facilidad sus logaritmos. Se grafican estos puntos y se unen con una curva lisa como en la figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

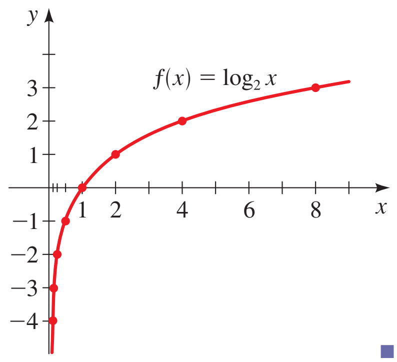


Figura 3 ■

En la figura 4 se muestran las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se dibujan reflejando las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (véase la figura 2 en la sección 4.1) en la línea $y = x$. Se pueden trazar también puntos como ayuda para bosquejar estas gráficas, como se ilustra en el ejemplo 4.

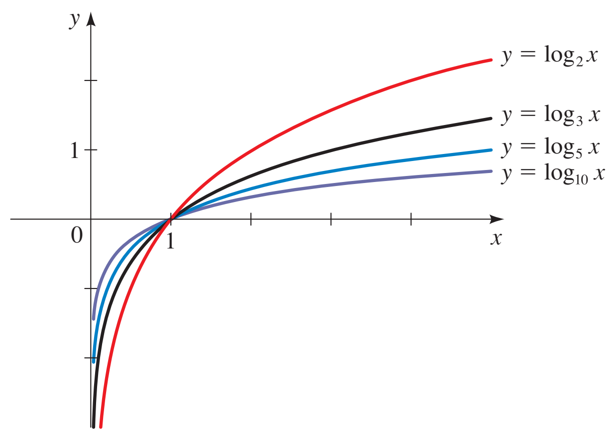


Figura 4
Una familia de funciones logarítmicas

En los dos ejemplos siguientes se grafican funciones logarítmicas comenzando con las gráficas básicas de la figura 4 y usando las transformaciones de la sección 2.4.

Al estudiar varias características físicas de una persona, los biólogos matemáticos modelan cada característica mediante una función que describe cómo cambia con el tiempo. Los modelos de características faciales se pueden programar en una computadora para dar una fotografía de cómo cambia la apariencia de una persona con el tiempo. Estas fotografías ayudan a las agencias encargadas de ejercer la ley para localizar a personas extraviadas.

Ejemplo 5 Reflexión de gráficas de funciones logarítmicas

Bosqueje la gráfica de cada función.

a) $g(x) = -\log_2 x$ b) $h(x) = \log_2(-x)$

Solución

a) Se comienza con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y se refleja en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la figura 5(a).

b) Se comienza con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y se refleja en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la figura 5(b).

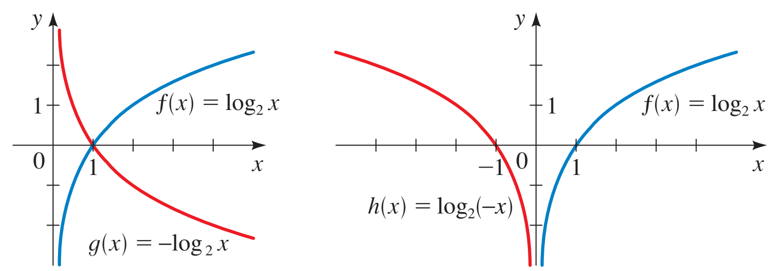


Figura 5 a) b) ■

Ejemplo 6 Desplazamiento de gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y bosqueje la gráfica.

a) $g(x) = 2 + \log_5 x$ b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

Solución

a) La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (figura 4) desplazándola dos unidades (véase figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

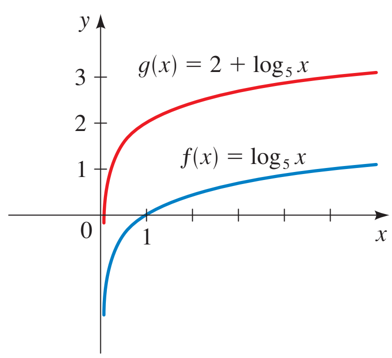
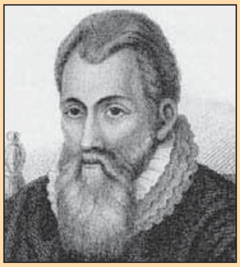


Figura 6

b) La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (figura 4) desplazándola a la derecha tres unidades (véase la figura 7 en la página siguiente). La



John Napier (1550-1617) fue un terrateniente escocés cuyo pasatiempo eran las matemáticas. Lo conocemos hoy día debido a su invento: los logaritmos, que publicó en 1614 bajo el título *Description of the Marvelous Rule of Logarithms (Una descripción de la regla maravillosa de los logaritmos)*. En la época de Napier, los logaritmos se usaban exclusivamente para simplificar cálculos complicados. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes se escribirían como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}4532 \times 57783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261\,872\,564\end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (simplemente se suman sus exponentes). Napier produjo tablas extensas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde la llegada de las calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito. Sin embargo, las funciones logarítmicas han encontrado muchas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre muchos temas. Uno de sus trabajos más pintorescos es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el que predice que el mundo terminaría en el año 1700.

recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Puesto que $\log_{10} x$ se define sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$

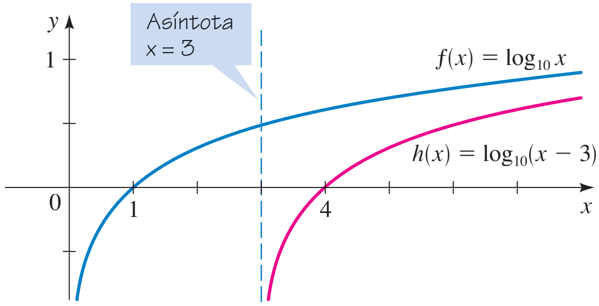


Figura 7

■

Logaritmos comunes

Ahora se estudian logaritmos con base 10.

Logaritmo común

El logaritmo con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos se puede encontrar fácilmente que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero, ¿cómo se calcula log 50? Se necesita hallar el exponente y tal que $10^y = 50$. Es evidente que 1 es muy pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto,

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, se puede intentar hallar una potencia de 10 más próxima a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que da de manera directa los valores de logaritmos comunes.

Ejemplo 7 Evaluación de logaritmos comunes

Use una calculadora para hallar los valores apropiados de $f(x) = \log x$ y use los valores para bosquejar la gráfica.

Solución Se construye una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en esos valores de x que no son potencias de 10. Se grafican esos puntos y se unen mediante una curva suave como en la figura 8.

x	$\log x$
0.01	-2
0.1	-1
0.5	-0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

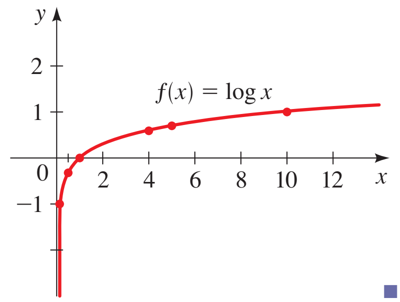
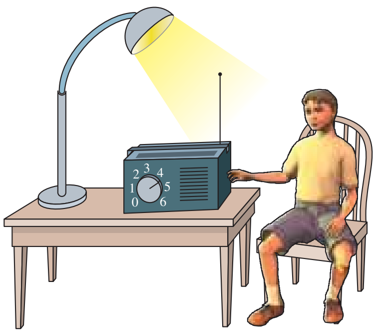


Figura 8 ■



La respuesta humana al sonido y a la intensidad luminosa es logarítmica

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (como sonido, luz o presión) por medio de funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido se debe incrementar muchas veces antes de percibir que la sonoridad se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo, I es la intensidad física del estímulo, I_0 representa la intensidad física umbral y k es una constante que es diferente en cada estímulo sensorial.

Ejemplo 8 Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la sonoridad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

La escala de decibeles se estudia en la sección 4.5.

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (sonoridad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

Solución El nivel B de decibeles se encuentra usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de B} \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancelar } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La sonoridad del sonido es 20 dB. ■

Logaritmos naturales

De las posibles bases a para logaritmos, resulta que la elección más conveniente para los propósitos de cálculo es el número e, que se definió en la sección 4.1.

La notación ln es una abreviatura para la palabra en latín *logarithmus naturalis.*

Logaritmo natural

El logaritmo con base e se llama **logaritmo natural** y se denota por **ln**:

$$\ln x = \log_e x$$

La función logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial $y = e^x$. Ambas funciones se grafican en la figura 9. Por la definición de funciones inversas, se tiene

$$\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x$$

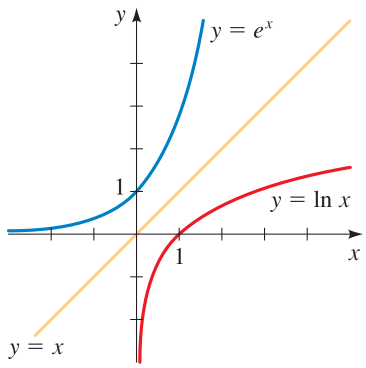


Figura 9
Gráfica de la función logarítmica natural

Si se sustituye $a = e$ y se escribe "ln" por "$\log_e$" en las propiedades de logaritmos mencionadas antes, se obtienen las siguientes propiedades de los logaritmos naturales.

Propiedades de los logaritmos naturales

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Se tiene que elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Se tiene que elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Se tiene que elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la cual e debe ser elevada para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con una tecla LN que da de manera directa los valores de los logaritmos naturales.

Ejemplo 9 Evaluar la función logaritmo natural

a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla LN en la calculadora ■

Ejemplo 10 Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

Solución Como con cualquier función logarítmica, $\ln x$ se define cuando $x > 0$. Por lo tanto, el dominio de f es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

■

Ejemplo 11 Dibujar la gráfica de una función logarítmica

Dibuje la gráfica de la función $y = x\ln(4 - x^2)$ y empléela para hallar las asíntotas y valores locales máximo y mínimo.

Solución Como en el ejemplo 10 el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, así que se elige el rectángulo de visión $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la figura 10, y de ésta se ve que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer un acercamiento y seguir la gráfica con el cursor, se encuentra que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. De manera similar (o al observar que la función es impar), se encuentra que el valor mínimo local es casi -1.13, y ocurre cuando $x \approx -1.15$. ■

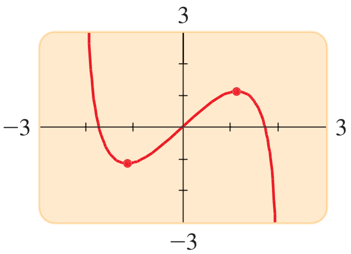


Figura 10
$y = x\ln(4 - x^2)$

4.2 Ejercicios

1–2 ■ Complete la tabla con la forma exponencial logarítmica apropiada de la ecuación, como en el ejemplo 1.

1.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

2.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

3–8 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

3. a) $\log_5 25 = 2$ **b)** $\log_5 1 = 0$

4. a) $\log_{10} 0.1 = -1$ **b)** $\log_8 512 = 3$

5. a) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

6. a) $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

7. a) $\ln 5 = x$ **b)** $\ln y = 5$

8. a) $\ln(x + 1) = 2$ **b)** $\ln(x - 1) = 4$

9–14 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

9. a) $5^3 = 125$ **b)** $10^{-4} = 0.0001$

10. a) $10^3 = 1000$ **b)** $81^{1/2} = 9$

11. a) $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

12. a) $4^{-3/2} = 0.125$ **b)** $7^3 = 343$

13. a) $e^x = 2$ **b)** $e^3 = y$

14. a) $e^{x+1} = 0.5$ **b)** $e^{0.5x} = t$

15–24 ■ Evalúe la expresión.

15. a) $\log_3 3$ **b)** $\log_3 1$ **c)** $\log_3 3^2$

16. a) $\log_5 5^4$ **b)** $\log_4 64$ **c)** $\log_9 9$

17. a) $\log_6 36$ **b)** $\log_9 81$ **c)** $\log_7 7^{10}$

18. a) $\log_2 32$ **b)** $\log_8 8^{17}$ **c)** $\log_6 1$

19. a) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ **b)** $\log_{10}\sqrt{10}$ **c)** $\log_5 0.2$

20. a) $\log_5 125$ **b)** $\log_{49} 7$ **c)** $\log_9 \sqrt{3}$

21. a) $2^{\log_2 37}$ **b)** $3^{\log_3 8}$ **c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

22. a) $e^{\ln \pi}$ **b)** $10^{\log 5}$ **c)** $10^{\log 87}$

23. a) $\log_8 0.25$ **b)** $\ln e^4$ **c)** $\ln(1/e)$

24. a) $\log_4\sqrt{2}$ **b)** $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$ **c)** $\log_4 8$

25–32 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

25. a) $\log_2 x = 5$ **b)** $\log_2 16 = x$

26. a) $\log_5 x = 4$ **b)** $\log_{10} 0.1 = x$

27. a) $\log_3 243 = x$ **b)** $\log_3 x = 3$

28. a) $\log_4 2 = x$ **b)** $\log_4 x = 2$

29. a) $\log_{10} x = 2$ **b)** $\log_5 x = 2$

30. a) $\log_x 1000 = 3$ **b)** $\log_x 25 = 2$

31. a) $\log_x 16 = 4$ **b)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

32. a) $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **b)** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

33–36 ■ Use una calculadora para evaluar la expresión, correcta hasta cuatro decimales.

33. a) $\log 2$ **b)** $\log 35.2$ **c)** $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

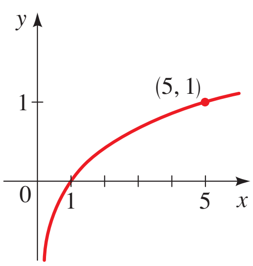
34. a) $\log 50$ **b)** $\log\sqrt{2}$ **c)** $\log(3\sqrt{2})$

35. a) $\ln 5$ **b)** $\ln 25.3$ **c)** $\ln(1+\sqrt{3})$

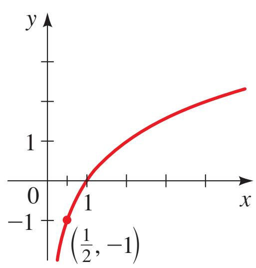
36. a) $\ln 27$ **b)** $\ln 7.39$ **c)** $\ln 54.6$

37–40 ■ Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

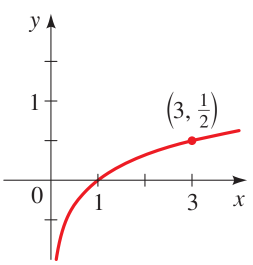
37.



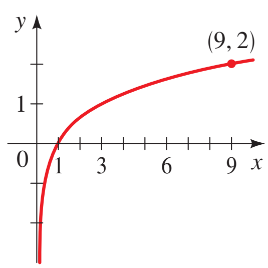
38.



39.



40.

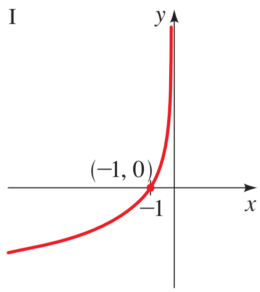


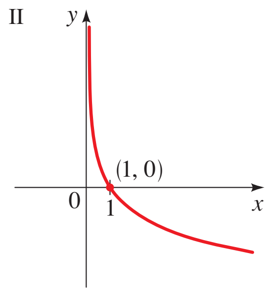
41–46 ■ Compare la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I-VI.

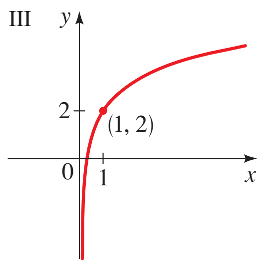
41. $f(x) = -\ln x$ **42.** $f(x) = \ln(x-2)$

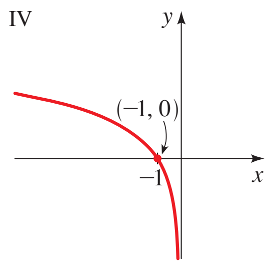
43. $f(x) = 2 + \ln x$ **44.** $f(x) = \ln(-x)$

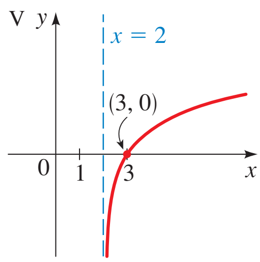
45. $f(x) = \ln(2-x)$ **46.** $f(x) = -\ln(-x)$

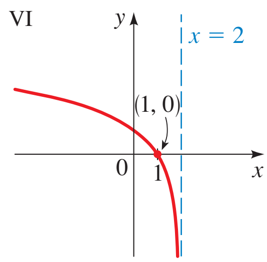












47. Dibuje la gráfica de $y = 4^x$, después utilícela para dibujar la gráfica de $y = \log_4 x$.

48. Dibuje la gráfica de $y = 3^x$, luego empléela para dibujar la gráfica de $y = \log_3 x$.

49–58 ■ Grafique la función sin trazar los puntos, sino a partir de las gráficas de las figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

49. $f(x) = \log_2(x-4)$ **50.** $f(x) = -\log_{10} x$

51. $g(x) = \log_5(-x)$ **52.** $g(x) = \ln(x+2)$

53. $y = 2 + \log_3 x$ **54.** $y = \log_3(x-1) - 2$

55. $y = 1 - \log_{10} x$ **56.** $y = 1 + \ln(-x)$

57. $y = |\ln x|$ **58.** $y = \ln|x|$

59–64 ■ Encuentre el dominio de la función.

59. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **60.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

61. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **62.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

63. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

64. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

65–70 ■ Dibuje la gráfica de la función en un rectángulo de visión adecuado y empléela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores locales máximo y mínimo.

65. $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **66.** $y = \ln(x^2 - x)$

67. $y = x + \ln x$ **68.** $y = x(\ln x)^2$

69. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **70.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

71. Compare las tasas de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ dibujando sus gráficas en una pantalla común en el rectángulo de visión $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

72. a) Dibujando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de visión adecuado, muestre que incluso cuando una función logarítmica comienza más alta que una función radical, en última instancia es alcanzada por la función radical.

b) Encuentre, correctas hasta dos decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

73–74 ■ Se da una familia de funciones.

a) Dibuje las gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4.

b) ¿Cómo están relacionadas las gráficas del inciso a)?

73. $f(x) = \log(cx)$ **74.** $f(x) = c \log x$

75–76 ■ Se da una función $f(x)$.

a) Encuentre el dominio de la función f.

b) Encuentre la función inversa de f.

75. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$

76. $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

77. a) Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

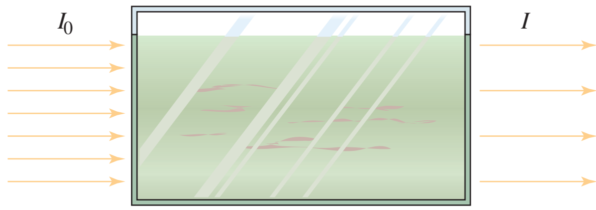
b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

Aplicaciones

78. Absorción de luz Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al irradiar una luz por ésta y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si se conoce la cantidad de luz absorbida, se puede calcular la concentración en la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles/litro) se encuentra por medio de la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad es I es 70% de I_0.



79. Fechado con carbono La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de carbono 14 radiactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

80. Colonia de bacterias Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia comienza con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) requerido para que la colonia crezca a N bacterias se expresa como

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Calcule el tiempo requerido para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

81. Inversión El tiempo requerido para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés capitalizable de manera continua está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Determine el tiempo requerido para duplicar una inversión en 6 por ciento, 7 por ciento y 8 por ciento.

82. Carga de una batería La tasa a la que se carga una batería es más lenta si la batería está más cerca de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) requerido para cargar una batería descargada por completo hasta una carga C se expresa como

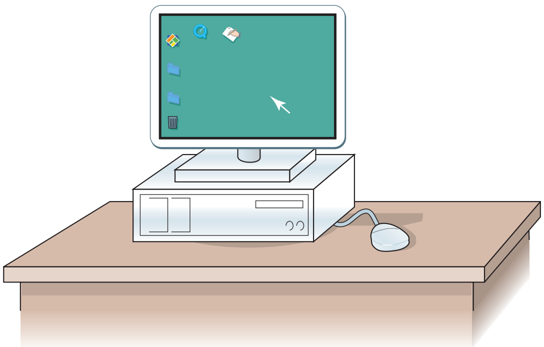
$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está totalmente sin carga, ¿cuánto tiempo tomará cargar hasta 90% de su carga máxima C_0?

83. Dificultad de una tarea La dificultad en "lograr un objetivo" (como usar el ratón para dar clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia al ob-jetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la ley de Fitts, el índice de dificultad (ID), está dado por

$$\mathrm{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde W es el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de dar clic en un icono cuyo ancho es de 5 mm con la de dar clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del icono.



Descubrimiento • Debate

84. Altura de la gráfica de una función logarítmica Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ se traza en un plano coordenado donde la unidad de medición es una pulgada.

a) Muestre que a una distancia 2 pies a la derecha del origen la altura de la gráfica es aproximadamente 265 millas.

b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿qué tan lejos a la derecha del origen se tiene que ir antes de que la altura de la curva alcance 2 pies?

85. Googolplex Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

86. Comparación de logaritmos ¿Qué es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

87. Número de dígitos en un entero Compare log 1000 con el número de dígitos en 1000. Haga lo mismo para 10 000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10 000? ¿Entre cuáles dos valores debe quedar el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos en cualquier entero positivo x es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la máxima función de enteros definida en la sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{100}?

4.3 Leyes de los logaritmos

En esta sección se estudian las propiedades de los logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como se verá en la sección 4.5.

Leyes de los logaritmos

Puesto que los logaritmos son exponentes, las leyes de los exponentes dan lugar a las leyes de los logaritmos.

Leyes de los logaritmos

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sea A, B y C números reales cualesquiera con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C\log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente multiplicado por el logaritmo del número.

■ **Demostración** Se hace uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la sección 4.2.

Ley 1. Sea $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas ecuaciones se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Así

$$\begin{aligned}\log_a(AB) &= \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v}) \\ &= u + v = \log_a A + \log_a B\end{aligned}$$

Ley 2. Usando la ley 1, se tiene

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

por lo tanto,

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ley 3. Sea $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo tanto

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C\log_a A$$ ■

Ejemplo 1 Uso de las leyes de los logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe cada expresión.

a) $\log_4 2 + \log_4 32$ b) $\log_2 80 - \log_2 5$ c) $-\frac{1}{3}\log 8$

Solución

a)
$$\begin{aligned}\log_4 2 + \log_4 32 &= \log_4(2 \cdot 32) && \text{Ley 1} \\ &= \log_4 64 = 3 && \text{Porque } 64 = 4^3\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\log_2 80 - \log_2 5 &= \log_2\left(\tfrac{80}{5}\right) && \text{Ley 2} \\ &= \log_2 16 = 4 && \text{Porque } 16 = 2^4\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{3}\log 8 &= \log 8^{-1/3} && \text{Ley 3} \\ &= \log\left(\tfrac{1}{2}\right) && \text{Propiedad de exponentes negativos} \\ &\approx -0.301 && \text{Resultado de la calculadora}\end{aligned}$$ ■

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las leyes de los logaritmos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, conocido como *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Expandir expresiones logarítmicas

Use las leyes de los logaritmos para expandir o desarrollar cada expresión.

a) $\log_2(6x)$ b) $\log_5(x^3y^6)$ c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

Solución

a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ Ley 1

b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ Ley 3

c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ Ley 3 ■

Las leyes de los logaritmos permiten también invertir el proceso de expansión hecho en el ejemplo 2. Es decir, se pueden escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinación* de expresiones logarítmicas, se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

Solución

$$3\log x + \tfrac{1}{2}\log(x+1) = \log x^3 + \log(x+1)^{1/2} \quad \text{Ley 3}$$

$$= \log(x^3(x+1)^{1/2}) \quad \text{Ley 1}$$

■

Ejemplo 4 Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

Solución

$$3\ln s + \tfrac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2+1) = \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2+1)^4 \quad \text{Ley 3}$$

$$= \ln(s^3t^{1/2}) - \ln(t^2+1)^4 \quad \text{Ley 1}$$

$$= \ln\left(\frac{s^3\sqrt{t}}{(t^2+1)^4}\right) \quad \text{Ley 2}$$

■

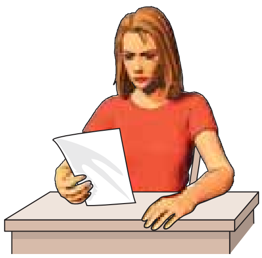
ADVERTENCIA Aunque las leyes de los logaritmos indican cómo calcular el logaritmo de un producto o cociente, *no hay regla de correspondencia para el logaritmo de una suma o diferencia*. Por ejemplo,

$$\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$$

De hecho, se sabe que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. También, no simplifique de manera inapropiada cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,

$$\frac{\log 6}{\log 2} \neq \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \neq 3\log_2 x$$

Los logaritmos que se emplean para modelar diversas situaciones tienen que ver con el comportamiento humano. Un tipo de comportamiento es qué tan rápido olvidamos las cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si se aprende álgebra a cierto nivel de desempeño (p. ej., 90% en una prueba) y después no se usa el álgebra durante un tiempo, ¿cuánto se retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el siguiente ejemplo.



Olvidar lo que se aprende es una función logarítmica de cuánto hace que se aprendió.

Ejemplo 5 Ley del olvido

La ley de Ebbinghaus del olvido establece que si se aprende una tarea a un nivel de desempeño P_0, entonces después de un intervalo de tiempo t el nivel de desempeño P satisface

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

a) Despeje P.

b) Si su puntuación en una prueba de historia es 90, ¿qué puntuación esperaría obtener en una prueba similar dos meses después? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

Solución

a) Primero se combina el miembro derecho.

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1) \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\log P = \log P_0 - \log(t + 1)^c \qquad \text{Ley 3}$$

$$\log P = \log \frac{P_0}{(t + 1)^c} \qquad \text{Ley 2}$$

$$P = \frac{P_0}{(t + 1)^c} \qquad \text{Porque log es uno a uno}$$

b) Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$, y t se mide en meses.

En dos meses: $t = 2$ y $P = \dfrac{90}{(2 + 1)^{0.2}} \approx 72$

En un año: $t = 12$ y $P = \dfrac{90}{(12 + 1)^{0.2}} \approx 54$

Se esperaría que las puntuaciones después de dos meses y un año sean 72 y 54, respectivamente. ■

Cambio de base

Para algunos propósitos, se encuentra que es útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que se da $\log_a x$ y se quiere hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Se escribe esto en forma exponencial y se toma el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$b^y = x \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$\log_a(b^y) = \log_a x \qquad \text{Tome el } \log_a \text{ de cada lado}$$

$$y \log_a b = \log_a x \qquad \text{Ley 3}$$

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad \text{Divida entre } \log_a b$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Se puede escribir la fórmula de cambio de base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Por consiguiente, $\log_b x$ es sólo un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\dfrac{1}{\log_a b}$.

Fórmula de cambio de base

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si $x = a$, entonces $\log_a a = 1$ y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora se puede evaluar un logaritmo para *cualquier* base usando la fórmula del cambio de base para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar una calculadora.

Ejemplo 6 Evaluar logaritmos con la fórmula de cambio de base

Use la fórmula de cambio de base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, correcto hasta cinco decimales.

a) $\log_8 5$ b) $\log_9 20$

Solución

a) Se usa la fórmula de cambio de base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

Se obtiene la misma respuesta si se usa $\log_{10}$ o ln:

$$\log_8 5 = \frac{\ln 5}{\ln 8} \approx 0.77398$$

b) Se usa la fórmula de cambio de base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

■

Ejemplo 7 Usar la fórmula de cambio de base para graficar una función logarítmica

Use una calculadora de graficación para graficar $f(x) = \log_6 x$.

Solución Las calculadoras no tienen una tecla para $\log_6$, así que se usa la fórmula de cambio de base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Puesto que las calculadoras tienen una tecla LN se puede introducir esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la figura 1. ■

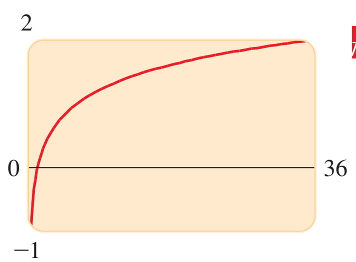


Figura 1

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

4.3 Ejercicios

1–12 ■ Evalúe la expresión.

1. $\log_3 \sqrt{27}$

2. $\log_2 160 - \log_2 5$

3. $\log 4 + \log 25$

4. $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$

5. $\log_4 192 - \log_4 3$

6. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$

7. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$

8. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$

9. $\log_4 16^{100}$ **10.** $\log_2 8^{33}$

11. $\log(\log 10^{10\,000})$ **12.** $\ln(\ln e^{e^{200}})$

13–38 ■ Use las leyes de los logaritmos para desarrollar la expresión.

13. $\log_2(2x)$ **14.** $\log_3(5y)$

15. $\log_2(x(x-1))$ **16.** $\log_5 \frac{x}{2}$

17. $\log 6^{10}$ **18.** $\ln \sqrt{z}$

19. $\log_2(AB^2)$ **20.** $\log_6 \sqrt[4]{17}$

21. $\log_3(x\sqrt{y})$ **22.** $\log_2(xy)^{10}$

23. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$ **24.** $\log_a\left(\frac{x^2}{yz^3}\right)$

25. $\ln \sqrt{ab}$ **26.** $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$

27. $\log\left(\frac{x^3 y^4}{z^6}\right)$ **28.** $\log\left(\frac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$

29. $\log_2\left(\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$ **30.** $\log_5\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

31. $\ln\left(x\sqrt{\frac{y}{z}}\right)$ **32.** $\ln \frac{3x^2}{(x+1)^{10}}$

33. $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$ **34.** $\log\left(\frac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$

35. $\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$ **36.** $\log\sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$

37. $\ln\left(\frac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$ **38.** $\log\left(\frac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

39–48 ■ Use las leyes de los logaritmos para combinar la expresión.

39. $\log_3 5 + 5\log_3 2$ **40.** $\log 12 + \frac{1}{2}\log 7 - \log 2$

41. $\log_2 A + \log_2 B - 2\log_2 C$

42. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$

43. $4\log x - \frac{1}{3}\log(x^2+1) + 2\log(x-1)$

44. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2\ln c$

45. $\ln 5 + 2\ln x + 3\ln(x^2+5)$

46. $2(\log_5 x + 2\log_5 y - 3\log_5 z)$

47. $\frac{1}{3}\log(2x+1) + \frac{1}{2}[\log(x-4) - \log(x^4-x^2-1)]$

48. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

49–56 ■ Use la fórmula de cambio de base y una calculadora para evaluar el logaritmo, correcto hasta seis decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

49. $\log_2 5$ **50.** $\log_5 2$

51. $\log_3 16$ **52.** $\log_6 92$

53. $\log_7 2.61$ **54.** $\log_6 532$

55. $\log_4 125$ **56.** $\log_{12} 2.5$

57. Use la fórmula de cambio de base para mostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

Después use este hecho para dibujar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

58. Dibuje las gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2, e, 5$ y 10 en la misma pantalla, con el rectángulo de visión $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

59. Use la fórmula de cambio de base para mostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

60. Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

61. Muestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2-1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$.

Aplicaciones

62. Olvido Use la ley de Ebbinghaus del olvido (ejemplo 5) para estimar la puntuación de un alumno en una prueba de biología dos años después de que obtuvo una puntuación de 80 en una prueba que abarca el mismo material. Suponga que $c = 0.3$ y t se mide en meses.

63. Distribución de la riqueza Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país la poseen algunos miembros de la población. El **principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k\log W$$

donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas en la población que tiene esa cantidad de dinero.

a) Resuelva la ecuación para P.

b) Suponga que $k = 2.1$, $c = 8000$ y W se mide en millones de dólares. Use el inciso a) para hallar el número de personas que tienen dos millones o más. ¿Cuántas personas tienen 10 millones o más?

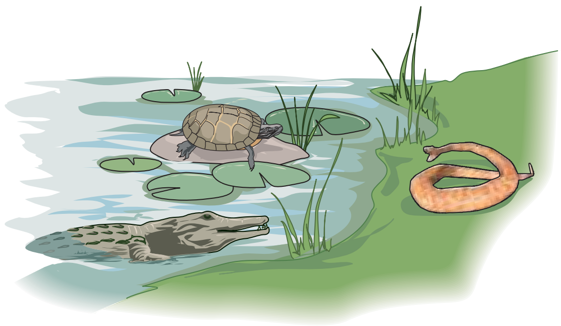
64. Biodiversidad Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (como una isla) mediante la relación especies-área

$$\log S = \log c + k\log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especies y el hábitat.

a) De la ecuación despeje S.

b) Use el inciso a) para mostrar que si $k = 3$ entonces duplicar el área incrementa el número de especies ocho veces.



65. Magnitud de estrellas La magnitud M de una estrella es una medida de cuán brillante aparece una estrella para el ojo humano. Se define por

$$M = -2.5 \log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

a) Desarrolle el lado derecho de la ecuación.

b) Use el inciso a) para mostrar que mientras más brillante es una estrella menor es su magnitud.

c) Betelgeuse es más o menos 100 veces más brillante que Albiero. Use el inciso a) para mostrar que Betelgeuse es cinco magnitudes menos que Albiero.

Descubrimiento • Debate

66. ¿Verdadero o falso? Analice cada ecuación y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore los valores de las variables para las que cualquier término no está definido.)

a) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

c) $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

d) $\log 2^z = z \log 2$

e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

f) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

g) $(\log_2 7)^x = x \log_2 7$

h) $\log_a a^a = a$

i) $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

j) $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

67. Hallar el error ¿Qué es lo que no concuerda con el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

68. Desplazamiento, acortamiento y alargamiento de gráficas de funciones Sea $f(x) = x^2$. Muestre que $f(2x) = 4f(x)$, y explique cómo esto muestra que acortar la gráfica de f horizontalmente tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. Después, use las identidades $e^{2+x} = e^2e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para mostrar que para $g(x) = e^x$, un desplazamiento horizontal es lo mismo que un alargamiento vertical y que para $h(x) = \ln x$, un acortamiento horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

4.4 Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

En esta sección se resuelven ecuaciones relacionadas con funciones exponenciales y logarítmicas. Las técnicas que se desarrollan aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas de aplicación.

Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable ocurre en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para tratar con esta

dificultad, se toma el logaritmo de cada lado y luego se usan las leyes de los logaritmos para "bajar a x" del exponente.

$$\begin{aligned} 2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Aplique el ln en cada miembro} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (baje el exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje x} \\ &\approx 2.807 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

Recuerde que la ley 3 de las leyes de los logaritmos establece que $\log_a A^C = C \log_a A$.

El método que se usa para resolver $2^x = 7$ es representativo de cómo resolver ecuaciones exponenciales en general.

Normas para resolver ecuaciones exponenciales

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado, luego utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

Ejemplo 1 Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, correcta hasta seis decimales.

Solución Se toma el logaritmo común de cada lado y se usa la ley 3.

$$\begin{aligned} 3^{x+2} &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \log(3^{x+2}) &= \log 7 && \text{Tome el log de cada lado} \\ (x+2)\log 3 &= \log 7 && \text{Ley 3 (baje el exponente)} \\ x + 2 &= \frac{\log 7}{\log 3} && \text{Divida entre 3} \\ x &= \frac{\log 7}{\log 3} - 2 && \text{Reste 2} \\ &\approx -0.228756 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

■

Se podría haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, se obtiene

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

Compruebe su respuesta Al sustituir $x = -0.228756$ en la ecuación original y usar una calculadora, se obtiene

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✓$$

Fechar con carbono radiactivo es un método que emplean los arqueólogos para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera contiene siempre una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de casi 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que después pasa a los animales a través del alimento. Así, todas las criaturas vivas contienen las mismas proporciones fijas de ^{14}C a ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C, y la cantidad de ^{14}C en él comienza a disminuir en forma exponencial. Se puede determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo midiendo la cantidad de ^{14}C que queda en él.

Por ejemplo, si un hueso de burro contiene 73% de la cantidad de ^{14}C que contenía cuando el animal estaba vivo y si éste murió hace t años, entonces por la fórmula del decaimiento radiactivo (sección 4.5),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

De esta ecuación exponencial se encuentra que $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene aproximadamente 2600 años de antigüedad.

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

Solución Se divide primero entre 8 a fin de aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$\begin{aligned} 8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\ e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\ \ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tomar el ln de cada lado} \\ 2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\ x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Dividir entre 2} \\ &\approx 0.458 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

■

Compruebe su respuesta Al sustituir $x = 0.458$ en la ecuación original y usar una calculadora, se obtiene

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✓$$

Ejemplo 3 Resolver una ecuación exponencial en forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de forma algebraica y gráfica.

Solución 1: algebraica

Puesto que la base del término exponencial es e, se emplean logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$\begin{aligned} e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada} \\ \ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome el ln de cada lado} \\ 3 - 2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln} \\ 2x &= 3 - \ln 4 && \\ x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 && \end{aligned}$$

Se debe comprobar que esta respuesta satisface la ecuación original.

Solución 2: gráfica

Se grafican las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de visión que el de la figura 1. Las soluciones ocurren donde se cruzan las gráficas. Al ampliar el punto de intersección de las dos gráficas, se ve que $x \approx 0.81$. ■

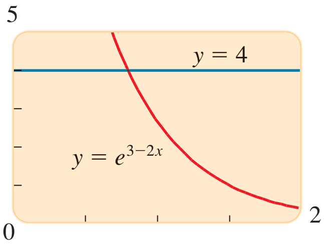


Figura 1

Ejemplo 4 Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

Solución Para aislar el término exponencial, se factoriza.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de los exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorizar (una forma cuadrática en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

Si $w = e^x$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

La ecuación $e^x = 3$ conduce a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Así, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Se debe comprobar que esta respuesta satisface la ecuación original. ■

Ejemplo 5 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

Solución Primero se factoriza el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorice los factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \qquad \text{Divida entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \qquad \text{Propiedad del producto cero}$$

Por lo tanto, las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$. ■

Compruebe sus respuestas

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✓

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✓

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que ocurre un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x, se escribe la ecuación en forma exponencial.

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despejar } x$$

Otra forma de considerar el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Elevar 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de los logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despejar } x$$

El método empleado para resolver este problema es característico. Se resumen los pasos como sigue.

Normas para resolver ecuaciones logarítmicas

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; podría ser necesario combinar primero los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o eleve la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

Ejemplo 6 Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación despeje x.

a) $\ln x = 8$ b) $\log_2(25 - x) = 3$

Solución

a)

$$\ln x = 8 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$x = e^8 \quad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

Este problema se puede resolver también de otra forma:

$$\ln x = 8 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$e^{\ln x} = e^8 \quad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$
$$x = e^8 \quad \text{Propiedad de ln}$$

b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$25 - x = 2^3 \quad \text{Forma exponencial (o elevar 2 a cada lado)}$$
$$25 - x = 8$$
$$x = 25 - 8 = 17$$

■

Compruebe su respuesta

Si $x = 17$, se obtiene

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✓

Ejemplo 7 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

Solución Se aísla primero el término logarítmico. Esto permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$4 + 3\log(2x) = 16 \quad \text{Ecuación dada}$$
$$3\log(2x) = 12 \quad \text{Reste 4}$$
$$\log(2x) = 4 \quad \text{Divida entre 3}$$
$$2x = 10^4 \quad \text{Forma exponencial (o eleva 10 a cada lado)}$$
$$x = 5000 \quad \text{Divida entre 2}$$

■

Compruebe su respuesta

Si $x = 5000$, se obtiene

$$4 + 3\log 2(5000) = 4 + 3\log 10\,000$$
$$= 4 + 3(4)$$
$$= 16 \ ✓$$

Ejemplo 8 Resolver una ecuación logarítmica de manera algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$ de forma algebraica y gráfica.

Solución 1: algebraica

Primero se combinan los términos logarítmicos usando las leyes de los logaritmos.

$$\log[(x + 2)(x - 1)] = 1 \qquad \text{Ley 1}$$

$$(x + 2)(x - 1) = 10 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)}$$

$$x^2 + x - 2 = 10 \qquad \text{Desarrolle el lado izquierdo}$$

$$x^2 + x - 12 = 0 \qquad \text{Reste 10}$$

$$(x + 4)(x - 3) = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$x = -4 \qquad \text{o} \qquad x = 3$$

Se comprueban estas posibles soluciones en la ecuación original y se encuentra que $x = -4$ no es una solución (porque no están definidos los logaritmos de números negativos), pero $x = 3$ es una solución. (Véase *Compruebe sus respuestas*.)

Compruebe sus respuestas

$x = -4$:

$\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1)$

$= \log(-2) + \log(-5)$

indefinida ✗

$x = 3$:

$\log(3 + 2) + \log(3 - 1)$

$= \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2)$

$= \log 10 = 1$ ✓

Solución 2: gráfica

Primero se mueven los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

Luego se grafica

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la figura 2. Las soluciones son las intersecciones con el eje x de la gráfica. Así, la única solución es $x \approx 3$.

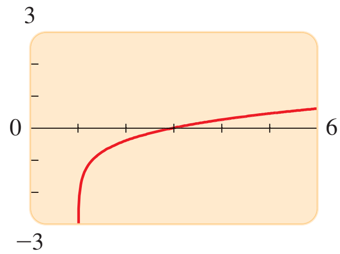


Figura 2

Ejemplo 9 Resolver una ecuación logarítmica de manera gráfica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2 \ln(x + 2)$.

En el ejemplo 9, no es posible aislar x algebraicamente, así que se debe resolver la ecuación de manera gráfica.

Solución Primero se mueven todos los términos a un lado de la ecuación

$$x^2 - 2 \ln(x + 2) = 0$$

Luego se grafica

$$y = x^2 - 2 \ln(x + 2)$$

como en la figura 3. Las soluciones son las intersecciones con el eje x de la gráfica. Al ampliar las intersecciones, se ve que hay dos soluciones:

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

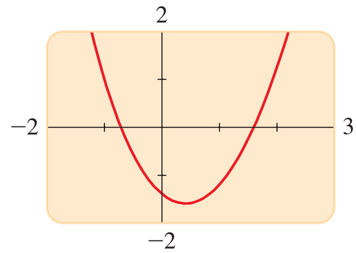
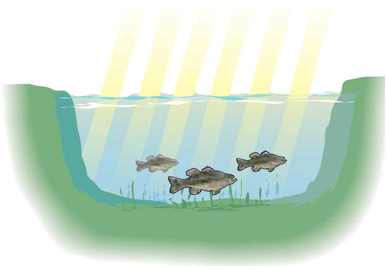


Figura 3 ■



La intensidad de luz en un lago disminuye con la profundidad

Las ecuaciones logarítmicas se emplean para determinar la cantidad de luz que llega a varias profundidades en el lago. (Esta información ayuda a los biólogos a determinar el tipo de vida que puede soportar un lago.) Cuando la luz pasa por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), se absorbe parte de ella. Es fácil ver que mientras más turbia es el agua más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material se describe en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 10 Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de la luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que viaja la luz en el material, entonces de acuerdo con la **ley de Beer-Lambert**

$$-\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

a) De la ecuación despeje I.

b) Para cierto lago $k = 0.025$ y la intensidad luminosa es $I_0 = 14$ lúmenes (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

Solución

a) Primero se aísla el término logarítmico.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{k}\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) &= x && \text{Ecuación dada} \\ \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) &= -kx && \text{Multiplique por } -k \\ \frac{I}{I_0} &= e^{-kx} && \text{Forma exponencial} \\ I &= I_0 e^{-kx} && \text{Multiplique por } I_0 \end{aligned}$$

b) Se determina I por medio de la fórmula del inciso a).

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-kx} && \text{Del inciso a)} \\ &= 14e^{(-0.025)(20)} && I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20 \\ &\approx 8.49 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es aproximadamente 8.5 lm. ■

Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para el interés que se encontraron en la sección 4.1. Si se invierte un principal P a una tasa de interés r durante un periodo de t años, entonces la cantidad A de la inversión se expresa como

$A = P(1 + r)$	Interés simple (durante un año)
$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$	Interés compuesto n veces por año
$A(t) = Pe^{rt}$	Interés capitalizable de manera continua

Se pueden usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en incrementarse hasta una determinada cantidad.

Ejemplo 11 Hallar el término para que se duplique una inversión

Se invierte una suma de 5000 dólares a una tasa de interés de 5% por año. Calcule el tiempo requerido para que se duplique el dinero si el interés se compone según el método siguiente.

a) Semianual b) Continuo

Solución

a) Se usa la fórmula para el interés compuesto con $P = 5000$ dólares, $A(t) = 10\ 000$ dólares, $r = 0.05$, $n = 2$, y resuelva la ecuación exponencial resultante para t.

$5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} = 10\ 000$	$P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A$
$(1.025)^{2t} = 2$	Divida entre 5000
$\log 1.025^{2t} = \log 2$	Tome el log de cada lado
$2t \log 1.025 = \log 2$	Ley 3 (baje el exponente)
$t = \dfrac{\log 2}{2 \log 1.025}$	Divida entre 2 log 1.025
$t \approx 14.04$	Resultado de la calculadora

El dinero se duplicará en 14.04 años.

b) Use la fórmula para el interés capitalizable de forma continua con $P = 5000$ dólares, $A(t) = 10\ 000$ dólares, $r = 0.05$, y despeje t de la ecuación exponencial resultante.

$5000e^{0.05t} = 10\ 000$	$Pe^{rt} = A$
$e^{0.05t} = 2$	Divida entre 5000
$\ln e^{0.05t} = \ln 2$	Tome el ln de cada lado
$0.05t = \ln 2$	Propiedad de ln
$t = \dfrac{\ln 2}{0.05}$	Divida entre 0.05
$t \approx 13.86$	Resultado de la calculadora

El dinero se duplicará en 13.86 años. ■

Ejemplo 12 Tiempo requerido para que crezca una inversión

Se invierte una suma de 1000 dólares a una tasa de interés de 4% anual. Encuentre el tiempo requerido para que la cantidad crezca a 4000 dólares si el interés se capitaliza de forma continua.

Solución Se usa la fórmula para el interés capitalizable en forma continua con $P = 1000$ dólares, $A(t) = 4000$ dólares, $r = 0.04$, y de la ecuación resultante despeje t.

$$1000e^{0.04t} = 4000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.04t} = 4 \qquad \text{Divida entre 1000}$$

$$0.04t = \ln 4 \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 4}{0.04} \qquad \text{Divida entre 0.04}$$

$$t \approx 34.66 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

La cantidad será 4000 dólares en casi 34 años y 8 meses. ■

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento porcentual anual** (RPA) es la tasa de interés *simple* que produce la misma cantidad al final de un año.

Ejemplo 13 Calcular el rendimiento porcentual anual

Determine el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% anual, capitalizable diariamente.

Solución Después de un año, un principal P crecerá hasta la cantidad

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

La fórmula para el interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Al comparar se puede observar que $1 + r = 1.06183$, por lo tanto $r = 0.06183$. Así que el rendimiento porcentual anual es 6.183 por ciento. ■

4.4 Ejercicios

1–26 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, correcta hasta cuatro decimales.

1. $10^x = 25$

2. $10^{-x} = 4$

3. $e^{-2x} = 7$

4. $e^{3x} = 12$

5. $2^{1-x} = 3$

6. $3^{2x-1} = 5$

7. $3e^x = 10$

8. $2e^{12x} = 17$

9. $e^{1-4x} = 2$

10. $4(1 + 10^{5x}) = 9$

11. $4 + 3^{5x} = 8$

12. $2^{3x} = 34$

13. $8^{0.4x} = 5$

14. $3^{x/14} = 0.1$

15. $5^{-x/100} = 2$

16. $e^{3-5x} = 16$

17. $e^{2x+1} = 200$

18. $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

19. $5^x = 4^{x+1}$

20. $10^{1-x} = 6^x$

21. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$

22. $7^{x/2} = 5^{1-x}$

23. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$

24. $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

25. $100(1.04)^{2t} = 300$

26. $(1.00625)^{12t} = 2$

27–34 ■ Resolver la ecuación.

27. $x^2 2^x - 2^x = 0$

28. $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

29. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$

30. $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

31. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

32. $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

33. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$

34. $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

35–50 ■ Resolver la ecuación logarítmica para x.

35. $\ln x = 10$

36. $\ln(2 + x) = 1$

37. $\log x = -2$

38. $\log(x - 4) = 3$

39. $\log(3x + 5) = 2$

40. $\log_3(2 - x) = 3$

41. $2 - \ln(3 - x) = 0$

42. $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

43. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

44. $2 \log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

45. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

46. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

47. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

48. $\log x + \log(x - 3) = 1$

49. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

50. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

51. ¿Para qué valor de x se cumple lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

52. ¿Para qué valor de x se cumple que $(\log x)^3 = 3\log x$?

53. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

54. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

55–62 ■ Use un dispositivo de graficación para hallar las soluciones de la ecuación, correcta hasta dos decimales.

55. $\ln x = 3 - x$

56. $\log x = x^2 - 2$

57. $x^3 - x = \log(x + 1)$

58. $x = \ln(4 - x^2)$

59. $e^x = -x$

60. $2^{-x} = x - 1$

61. $4^{-x} = \sqrt{x}$

62. $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

63–66 ■ Resuelva la desigualdad.

63. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

64. $3 \le \log_2 x \le 4$

65. $2 < 10^x < 5$

66. $x^2 e^x - 2e^x < 0$

Aplicaciones

67. Interés compuesto Una persona invierte 5000 dólares en una cuenta que paga 8.5% de interés anual, capitalizable cada trimestre.

a) Encuentre la cantidad después de tres años.

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que se duplique la inversión?

68. Interés compuesto Una persona invierte 6500 dólares en una cuenta que paga 6% de interés anual, capitalizable de forma continua.

a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?

b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea 8000 dólares?

69. Interés compuesto Calcule el tiempo requerido para que una inversión de 5000 dólares crezca a 8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizable cada trimestre.

70. Interés compuesto Nancy quiere invertir 4000 dólares en certificados de ahorro que producen una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizable cada medio año. ¿Cuán largo debe elegir el periodo a fin de ahorrar una cantidad de 5000 dólares?

71. Duplicar una inversión ¿En cuánto tiempo se duplica una inversión de 1000 dólares si la tasa de interés es 8.5% anual, capitalizable de manera continua?

72. Tasa de interés Una suma de 1000 dólares se invirtió durante cuatro años, y la tasa de interés se capitalizó cada medio año. Si esta suma asciende a $1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

73. Rendimiento porcentual anual Encuentre el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana 8% anual, capitalizable mensualmente.

74. Rendimiento porcentual anual Encuentre el rendimiento porcentual anual para una inversión que gana $5\frac{1}{2}$% por año, capitalizable de manera continua.

75. Decaimiento radiactivo Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra de una manera que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$ donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días hay sólo 5 g restantes?

76. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar se expresa como $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos la velocidad es 70 pies/s?

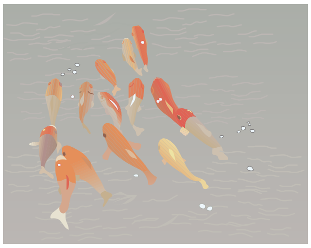
77. Población de peces Un lago pequeño contiene cierta especie de pez. La población de peces se modela mediante la función

$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que se aprovisionó el lago.

a) Encuentre la población de peces después de tres años.

b) ¿Después de cuántos años la población de peces llega a 5000?



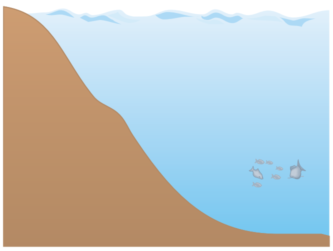
78. Transparencia de un lago Los científicos ambientales miden la intensidad de la luz a varias profundidades en un lago para determinar la transparencia del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población de macrófitas. En cierto lago la intensidad de la luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lúmenes y x en pies.

a) Determine la intensidad I a una profundidad de 30 pies.

b) ¿A qué profundidad la intensidad de la luz ha disminuido a $I = 5$?



79. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascales, kPa) a la altura h (en kilómetros, km) está gobernada por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.

a) Despeje P de la ecuación.

b) Use el inciso a) para calcular la presión P a una altitud de 4 km.

80. Enfriamiento de una máquina Suponga que conduce un automóvil en un frío día de invierno (20ºF en el exterior) y la máquina se sobrecalienta (a cerca de 220ºF). Cuando se estaciona, la máquina comienza a enfriarse. La temperatura T de la máquina t minutos después de que se estaciona satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

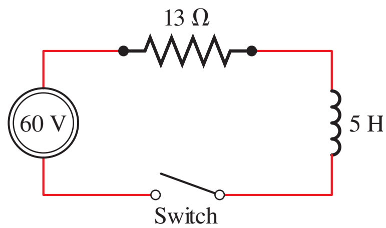
a) Despeje T de la ecuación.

b) Use el inciso a) para determinar la temperatura del motor después de 20 min ($t = 20$).

81. Circuitos electrónicos Un circuito electrónico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Por medio del cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de que se cierra el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.

a) Use esta ecuación para expresar el tiempo t como una función de la corriente I.

b) ¿Después de cuántos segundos la corriente es 2 A?



82. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el desempeño de alguien que aprende una habilidad como una función del tiempo de entrenamiento t. Al comienzo, la tasa de aprendizaje es rápida. Luego, conforme se incremente el desempeño y se aproxime a un valor máximo M, disminuye la tasa de aprendizaje. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para el aprendizaje.

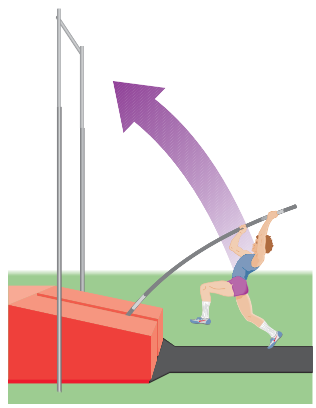
a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como una función del nivel de desempeño P.

b) Para un saltador con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que puede saltar después de t meses. ¿Después de cuántos meses puede saltar 12 pies?

c) Dibuje una gráfica de la curva de aprendizaje del inciso b).



Descubrimiento • Debate

83. Estimación de una solución Sin resolver en realidad la ecuación, encuentre dos números enteros entre los que debe quedar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo llegó a sus conclusiones.

84. Una ecuación sorprendente Tome los logaritmos para mostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de k la ecuación

$$x^{1/\log x} = k$$

tiene una solución? ¿Qué indica lo anterior acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta por medio de un dispositivo de graficación.

85. Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se pueden transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático al aplicar la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

(a) $(x-1)^{\log(x-1)} = 100(x-1)$ [Tome el log de cada lado.]

(b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie los logaritmos a la base 2.]

(c) $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como una cuadrática en 2^x.]

4.5 Modelado con funciones exponenciales y logarítmicas

Muchos procesos que ocurren en la naturaleza, como el crecimiento poblacional, decaimiento radiactivo, difusión de calor y muchos otros, se pueden modelar por medio de funciones exponenciales. Las funciones logarítmicas se emplean en modelos para la sonoridad del sonido, la intensidad de terremotos y muchos otros fenómenos. En esta sección se estudian los modelos exponencial y logarítmico.

Modelos exponenciales de crecimiento poblacional

Los biólogos han observado que la población de una especie duplica su tamaño en un periodo fijo. Por ejemplo, en condiciones ideales cierta población de bacterias se duplica en tamaño cada tres horas. Si el cultivo se inicia con 1000 bacterias, entonces después de tres horas habrá 2000 bacterias, después de otras tres horas habrá 4000, etcétera. Si $n = n(t)$ es el número de bacterias después de t horas, entonces

$$n(0) = 1000$$
$$n(3) = 1000 \cdot 2$$
$$n(6) = (1000 \cdot 2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^2$$
$$n(9) = (1000 \cdot 2^2) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^3$$
$$n(12) = (1000 \cdot 2^3) \cdot 2 = 1000 \cdot 2^4$$

De este patrón parece que el número de bacterias después de t horas se modela mediante la función

$$n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

En general, suponga que el tamaño inicial de una población es n_0 y el periodo de duplicación es a. Entonces el tamaño de la población en el tiempo t se modela mediante

$$n(t) = n_0 2^{ct}$$

donde $c = 1/a$. Si se conociera el tiempo de triplicación b, entonces la fórmula sería $n(t) = n_0 3^{ct}$ donde $c = 1/b$. Estas fórmulas indican que el crecimiento de bacterias

se modela mediante una función exponencial. ¿Pero qué base se debe usar? La respuesta es e, porque entonces se puede demostrar (por medio del cálculo) que la población se modela mediante

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde r es la *tasa relativa de crecimiento de la población, expresada como una proporción de la población en cualquier tiempo*. Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier instante t la tasa de crecimiento es 2% de la población en el instante t.

Observe que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para el interés compuesto en forma continua. De hecho, el mismo principio funciona en ambos casos: el crecimiento de una población (o una inversión) por periodo es proporcional al tamaño de la población (o la cantidad de la inversión). Una población de 1 000 000 se incrementará más en un año que una población de 1000; de la misma manera, una inversión de 1 000 000 dólares crecerá más en un año que una inversión de $1000.

Modelo de crecimiento exponencial

Una población que experimenta **crecimiento exponencial** crece según el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde
$n(t)$ = población en el tiempo t
n_0 = tamaño inicial de la población
r = tasa relativa de crecimiento (expresada como una proporción de la población)
t = tiempo

En los ejemplos siguientes se supone que las poblaciones crecen de forma exponencial.

Ejemplo 1 Predecir el tamaño de la población

La cuenta inicial de bacterias en un cultivo es 500. Más tarde un biólogo realiza una cuenta muestral de bacterias en el cultivo y encuentra que la tasa relativa de crecimiento es 40% por hora.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.
b) ¿Cuál es la cuenta estimada después de 10 horas?
c) Trace la gráfica de la función $n(t)$.

Solución

a) Se usa el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

b) Por medio de la función del inciso a), se encuentra que la cuenta de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^4 \approx 27\,300$$

c) La gráfica se muestra en la figura 1. ■

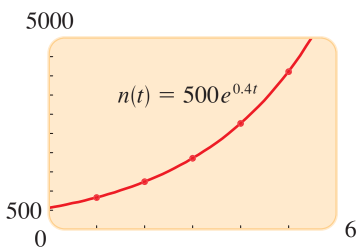


Figura 1

Ejemplo 2 Comparar diferentes tasas de crecimiento poblacional

En el año 2000 la población del mundo fue 6.1 miles de millones y la tasa relativa de crecimiento fue 1.4% por año. Se afirma que una tasa de 1% por año haría una diferencia importante en la población total en sólo unas décadas. Pruebe esta afirmación estimando la población del mundo en el año 2050 con una tasa relativa de crecimiento de a) 1.4% por año y b) 1.0% por año.

Grafique las funciones de población para los siguientes 100 años para las dos tasas de crecimiento en el mismo rectángulo de visión.

Solución

a) Por el modelo de crecimiento exponencial, se tiene

$$n(t) = 6.1e^{0.014t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y t se mide en años desde 2000. Debido a que el año 2050 es 50 años después de 2000, se encuentra

$$n(50) = 6.1e^{0.014(50)} = 6.1e^{0.7} \approx 12.3$$

La población estimada en el año 2050 es aproximadamente 12.3 miles de millones.

b) Se usa la función

$$n(t) = 6.1e^{0.010t}$$

y se encuentra que $n(50) = 6.1e^{0.010(50)} = 6.1e^{0.50} \approx 10.1$

La población estimada en el año 2050 es aproximadamente 10.1 miles de millones.

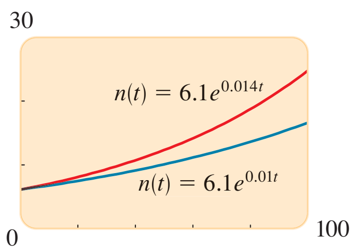
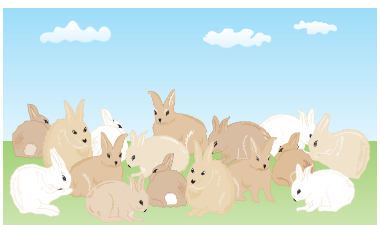


Figura 2

Las gráficas de la figura 2 muestran que un cambio pequeño en la tasa relativa de crecimiento, con el tiempo, hará una gran diferencia en el tamaño de la población. ■

Ejemplo 3 Hallar la población inicial



Cierta raza de conejos se introdujo en una pequeña isla hace unos ocho años. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100, con una tasa de crecimiento relativa de 55% por año.

a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

b) Estime la población 12 años a partir de ahora.

Solución

a) Del modelo de crecimiento exponencial, se tiene

$$n(t) = n_0e^{0.55t}$$

y se sabe que la población en el tiempo $t = 8$ es $n(8) = 4100$. Se sustituye lo que se conoce en la ecuación y se despeja n_0:

$$4100 = n_0e^{0.55(8)}$$

$$n_0 = \frac{4100}{e^{0.55(8)}} \approx \frac{4100}{81.45} \approx 50$$

Así, se estima que se introdujeron en la isla 50 conejos.

Otra forma de resolver el inciso b) es permitir que t sea el número de años a partir de ahora. En este caso, $n_0 = 4100$ (la población actual), y la población 12 años a partir de ahora será

$$n(12) = 4100e^{0.55(12)} \approx 3 \text{ millones}$$

b) Ahora que se conoce n_0, se puede escribir una fórmula para el crecimiento poblacional:

$$n(t) = 50e^{0.55t}$$

Doce años a partir de ahora, $t = 20$ y

$$n(20) = 50e^{0.55(20)} \approx 2\ 993\ 707$$

Se estima que la población de conejos en la isla, 12 años a partir de ahora será de alrededor de 3 millones. ■

¿En realidad puede alcanzar un número tan alto la población de conejos del ejemplo 3(b)? En realidad, cuando la isla tiene sobrepoblación de conejos, el crecimiento se reducirá debido a la escasez de alimento y otros factores. Un modelo que toma en cuenta esta clase de factores es el *modelo de crecimiento logístico* descrito en *Enfoque en el modelado*, página 392.

Espacio sólo para estar de pie

La población del mundo era más o menos de 6.1 miles de millones en 2000, y se incrementó en 1.4% por año. Asumiendo que cada persona ocupa un promedio de 4 pies^2 sobre la superficie de la Tierra, el modelo exponencial para el crecimiento poblacional proyecta que por el año 2801 ¡habrá espacio sólo para estar de pie! (El área de la superficie terrestre total del mundo es de alrededor de 1.8×10^{15} pies^2.)

Ejemplo 4 Proyecciones de población mundial

La población del mundo en 2000 fue de 6.1 miles de millones y la tasa de crecimiento relativo era de 1.4% por año. Si el crecimiento de la población continúa a este ritmo, ¿cuándo llegará a 122 000 millones?

Solución Se usa la función de crecimiento poblacional con $n_0 = 6.1$ miles de millones, $r = 0.014$, y $n(t) = 122$ miles de millones. Esto conduce a la ecuación exponencial, de la cual se despeja t.

$$\begin{aligned}
6.1e^{0.014t} &= 122 && n_0e^{rt} = n(t)\\
e^{0.014t} &= 20 && \text{Divida entre 6.1}\\
\ln e^{0.014t} &= \ln 20 && \text{Tome el ln de cada lado}\\
0.014t &= \ln 20 && \text{Propiedad del ln}\\
t &= \frac{\ln 20}{0.014} && \text{Divida entre 0.014}\\
t &\approx 213.98 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}$$

Así, la población llegará a 122 000 millones en aproximadamente 214 años, es decir, en el año $2000 + 214 = 2214$. ■

Ejemplo 5 Número de bacterias en un cultivo

Un cultivo comienza con 10 000 bacterias, y el número se duplica cada 40 minutos.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias en el tiempo t.

b) Encuentre el número de bacterias después de una hora.

c) ¿Después de cuántos minutos habrá 50 000 bacterias?

d) Bosqueje una gráfica del número de bacterias en el tiempo t.

Solución

a) Para hallar la función que modela el crecimiento de la población, es necesario hallar la tasa r. Para esto, se emplea la fórmula para el crecimiento poblacional con $n_0 = 10\ 000$, $t = 40$ y $n(t) = 20\ 000$, y luego se despeja r.

$$
\begin{aligned}
10\,000e^{r(40)} &= 20\,000 && n_0e^{rt} = n(t)\\
e^{40r} &= 2 && \text{Divida entre 10 000}\\
\ln e^{40r} &= \ln 2 && \text{Tome el ln de cada lado}\\
40r &= \ln 2 && \text{Propiedad del ln}\\
r &= \frac{\ln 2}{40} && \text{Divida entre 40}\\
r &\approx 0.01733 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}
$$

Ahora que se sabe que $r \approx 0.01733$, se puede escribir la función para el crecimiento poblacional:

$$n(t) = 10\,000e^{0.01733t}$$

b) Por medio de la función determinada en el inciso a) con $t = 60$ min (una hora), se obtiene

$$n(60) = 10\,000e^{0.01733(60)} \approx 28\,287$$

Así, el número de bacterias después de una hora es aproximadamente 28 000.

c) Se usa la función que se encontró en el inciso a) con $n(t) = 50\,000$ y de la ecuación resultante se despeja t.

$$
\begin{aligned}
10\,000e^{0.01733t} &= 50\,000 && n_0e^{rt} = n(t)\\
e^{0.01733t} &= 5 && \text{Divida entre 10 000}\\
\ln e^{0.01733t} &= \ln 5 && \text{Tome el ln de cada lado}\\
0.01733t &= \ln 5 && \text{Propiedad del ln}\\
t &= \frac{\ln 5}{0.01733} && \text{Divida entre 0.01733}\\
t &\approx 92.9 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}
$$

La cuenta de bacterias llegará a 50 000 en aproximadamente 93 min.

d) La gráfica de la función $n(t) = 10\,000e^{0.01733t}$ se muestra en la figura 3. ■

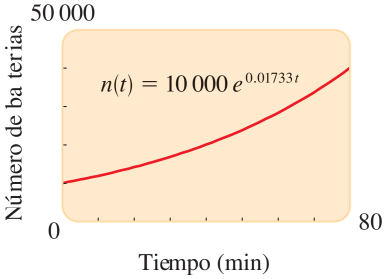


Figura 3

Las vidas medias de los **elementos radiactivos** varían de muy largas a muy cortas. A continuación se dan algunos ejemplos.

Elemento	Vida media
Torio 232	14.5 miles de millones de años
Uranio 235	4.5 miles de millones de años
Torio 230	80 000 años
Plutonio 239	24 360 años
Carbono 14	5 730 años
Radio 226	1 600 años
Cesio 137	30 años
Estroncio 90	28 años
Polonio 210	140 días
Torio 234	25 días
Yodo 135	8 días
Radón 222	3.8 días
Plomo 211	3.6 minutos
Kriptón 91	10 segundos

Decaimiento radiactivo

Las sustancias radiactivas decaen de manera espontánea al emitir radiación. La tasa de decaimiento es directamente proporcional a la masa de la sustancia. Esto es análogo al crecimiento poblacional, excepto que la masa del material radiactivo *disminuye*. Se puede demostrar que la masa $m(t)$ que permanece en el tiempo t se modela mediante la función

$$m(t) = m_0e^{-rt}$$

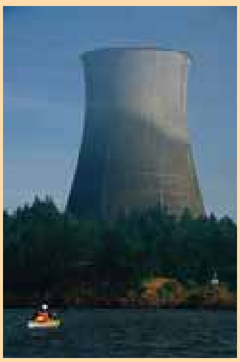
donde r es la tasa de decaimiento expresada como una proporción de la masa y m_0 es la masa inicial. Los físicos expresan la tasa de decaimiento en términos de la **vida media**, el tiempo requerido para que se desintegre la mitad de la masa. Se puede

Desechos radiactivos

Los isótopos radiactivos dañinos se producen siempre que ocurra una reacción nuclear, ya sea como resultado de una prueba de bomba atómica, un accidente nuclear como el de Chernobyl en 1986 o la producción de electricidad sin accidentes en una planta nuclear.

Un material radiactivo producido en bombas atómicas es el isótopo estroncio 90 (^{90}Sr), con una vida media de 28 años. Éste se deposita como el calcio en el tejido óseo humano, donde puede causar leucemia y otros cánceres. Sin embargo, en las décadas desde que se detuvo la prueba atmosférica de armas nucleares, las concentraciones de ^{90}Sr en el ambiente han bajado a un nivel que ya no representa una amenaza para la salud.

Las plantas de energía nuclear producen plutonio 239 radiactivo (^{239}Pu), que tiene una vida media de 24 360 años. Como resultado de su larga vida media, el ^{239}Pu podría representar una amenaza para el ambiente durante miles de años. Por lo tanto, se debe tener mucho cuidado para desecharlo en forma apropiada. La dificultad de garantizar la seguridad de los desechos radiactivos eliminados es una razón de que haya controversia en cuanto a las plantas de energía nuclear.



Joel W. Rogers/Corbis

obtener la tasa r a partir de esto como sigue. Si h es la vida media, entonces una masa de 1 unidad se convierte en $\frac{1}{2}$ unidad cuando $t = h$. Al sustituir esto en el modelo, se obtiene

$$\frac{1}{2} = 1 \cdot e^{-rh} \qquad m(t) = m_0 e^{-rt}$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}\right) = -rh \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

$$r = -\frac{1}{h}\ln(2^{-1}) \qquad \text{Despeje } r$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \qquad \ln 2^{-1} = -\ln 2 \text{ por la ley 3}$$

Esta última ecuación permite hallar la tasa r a partir de la vida media h.

Modelo de decaimiento radiactivo

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t se modela mediante la función

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

Ejemplo 6 Decaimiento radiactivo

El polonio 210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

a) Encuentre una función que modele la cantidad de la muestra que queda en el tiempo t.

b) Calcule la masa que queda después de un año.

c) ¿Cuánto tiempo tarda la muestra en desintegrarse a una masa de 200 mg?

d) Dibuje una gráfica de la masa de la muestra como una función del tiempo.

Solución

a) Usando el modelo para el decaimiento radiactivo con $m_0 = 300$ y $r = (\ln 2/140) \approx 0.00495$, se tiene

$$m(t) = 300e^{-0.00495t}$$

b) Se usa la función hallada en el inciso a) con $t = 365$ (un año).

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Así, aproximadamente 49 mg de ^{210}Po permanecen después de un año.

c) Use la función determinada en el inciso a) con $m(t) = 200$ y despeje t de la ecuación resultante.

$$300e^{-0.00495t} = 200 \qquad m(t) = m_0 e^{-rt}$$

$$e^{-0.00495t} = \tfrac{2}{3} \qquad \text{Divida entre 300}$$

$$\ln e^{-0.00495t} = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Tome el ln de cada lado}$$

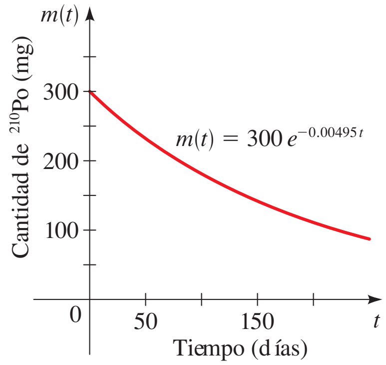


Figura 4

$$-0.00495t = \ln \tfrac{2}{3} \qquad \text{Propiedad del ln}$$

$$t = -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} \qquad \text{Divida entre } -0.00495$$

$$t \approx 81.9 \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

El tiempo requerido para que la muestra disminuya a 200 mg es de alrededor de 82 días.

(d) En la figura 4 se muestra una gráfica de la función $m(t) = 300e^{-0.00495t}$. ■

Ley del enfriamiento de Newton

La ley de Newton del enfriamiento establece que la tasa de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperatura entre el objeto y sus alrededores, siempre que la diferencia no sea muy grande. Por medio del cálculo, de esta ley se puede deducir el siguiente modelo.

Ley del enfriamiento de Newton

Si D_0 es la diferencia de temperatura inicial entre un objeto y sus alrededores, y si sus alrededores tienen temperatura T_s, entonces la temperatura en el tiempo t se modela mediante la función

$$T(t) = T_s + D_0 e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de objeto.

Ejemplo 7 Ley del enfriamiento de Newton

Una taza de café tiene una temperatura de 200ºF y se coloca en una habitación que tiene una temperatura de 70 °F. Después de 10 min la temperatura del café es 150ºF.

a) Encuentre una función que modele la temperatura del café en el instante t.

b) Calcule la temperatura del café después de 15 min.

c) ¿En qué momento el café se habrá enfriado a 100ºF?

d) Ilustre mediante el trazo de una gráfica la función de temperatura.

Solución

a) La temperatura del ambiente es $T_s = 70$ °F, y la diferencia de temperatura inicial es

$$D_0 = 200 - 70 = 130\,°\text{F}$$

Por lo tanto, por la ley del enfriamiento de Newton, la temperatura después de t minutos se modela mediante la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Se necesita hallar la constante k relacionada con esta taza de café. Para hacer esto, se usa el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura es $T(10) = 150$.

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} 70 + 130e^{-10k} &= 150 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t) \\ 130e^{-10k} &= 80 && \text{Reste 70} \\ e^{-10k} &= \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre 130} \\ -10k &= \ln \tfrac{8}{13} && \text{Tome el ln de cada lado} \\ k &= -\tfrac{1}{10}\ln \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre } -10 \\ k &\approx 0.04855 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

Al sustituir este valor de k en la expresión para $T(t)$, se obtiene

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

b) Se usa la función hallada en el inciso a) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133\,°\text{F}$$

c) Se usa la función encontrada en el inciso a) con $T(t) = 100$ y de la ecuación resultante se despeja t.

$$\begin{aligned} 70 + 130e^{-0.04855t} &= 100 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t) \\ 130e^{-0.04855t} &= 30 && \text{Reste 70} \\ e^{-0.04855t} &= \tfrac{3}{13} && \text{Divida entre 130} \\ -0.04855t &= \ln \tfrac{3}{13} && \text{Tome el ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln \frac{3}{13}}{-0.04855} && \text{Divida entre } -0.04855 \\ t &\approx 30.2 && \text{Resultado de la calculadora} \end{aligned}$$

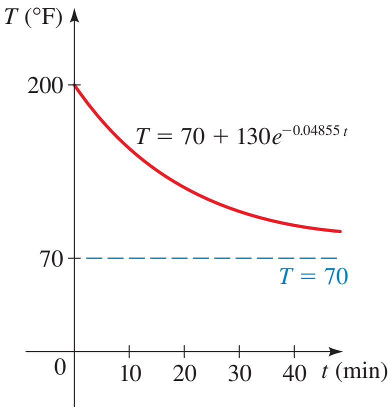


Figura 5
Temperatura del café después de t minutos

El café se habrá enfriado a 100ºF después de casi media hora.

d) La gráfica de la función de temperatura se bosqueja en la figura 5. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?) ■

Escalas logarítmicas

Cuando una constante física varía en un intervalo muy grande, suele ser conveniente tomar su logaritmo a fin de tener un conjunto más manejable de números. Se analizan tres situaciones de este tipo: la escala de pH, que mide la acidez; la escala Richter, que mide la intensidad de los terremotos, y la escala de decibeles, que mide la intensidad de los sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son la intensidad de luz, la capacidad de información y la radiación.

LA ESCALA DE pH Los químicos medían la acidez de una disolución dando su concentración de ion hidrógeno hasta que Sorensen, en 1909, propuso una medida más conveniente. Él definió

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

pH para algunas sustancias comunes

Sustancia	pH
Leche de magnesia	10.5
Agua de mar	8.0–8.4
Sangre humana	7.3–7.5
Galletas	7.0–8.5
Sémola de maíz	6.9–7.9
Leche de vaca	6.4–6.8
Espinacas	5.1–5.7
Tomates	4.1–4.4
Naranjas	3.0–4.0
Manzanas	2.9–3.3
Limas	1.3–2.0
Ácido de baterías	1.0

donde $[H^+]$ es la concentración de los iones hidrógeno medida en moles por litro (M). Él hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \quad [H^+] = 10^{-4}\,\text{M}, \qquad \text{entonces} \qquad \text{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las disoluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con pH < 7 son *ácidas* y las que tienen pH > 7 son *básicas*. Observe que cuando se incrementa el pH en una unidad, $[H^+]$ disminuye por un factor de 10.

Ejemplo 8 Escala de pH y concentración de ion hidrógeno

a) Se midió la concentración de ion hidrógeno de una muestra de sangre humana y se encontró que es $[H^+] = 3.16 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

b) La lluvia más ácida medida alguna vez ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue 2.4. Determine la concentración de ion hidrógeno.

Solución

a) Con una calculadora se obtiene

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Puesto que es mayor que 7, la sangre es básica.

b) Para hallar la concentración de ion hidrógeno, se necesita despejar $[H^+]$ en la ecuación logarítmica

$$\log[H^+] = -\text{pH}$$

Por lo tanto, se escribe en forma exponencial.

$$[H^+] = 10^{-\text{pH}}$$

En este caso, pH $= 2.4$, por lo tanto

$$[H^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\,\text{M}$$

■

LA ESCALA RICHTER En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como

$$M = \log \frac{I}{S}$$

donde I es la intensidad del terremoto (medida por la amplitud de una lectura de sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto) y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micra $= 10^{-4}$ cm). La magnitud del terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió muchos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala Richter y el más pequeño tuvo una magnitud de 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800 000 000, de modo

Terremotos más grandes

Lugar	Fecha	Magnitud
Chile	1960	9.5
Alaska	1964	9.2
Alaska	1957	9.1
Kamchatka	1952	9.0
Sumatra	2004	9.0
Ecuador	1906	8.8
Alaska	1965	8.7
Tíbet	1950	8.6
Kamchatka	1923	8.5
Indonesia	1938	8.5
Islas Kuril	1963	8.5

que la escala Richter proporciona números más razonables con los cuales trabajar. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5.

Ejemplo 9 Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador y su intensidad fue cuatro veces mayor. ¿Cuál fue la magnitud del terremoto de Colombia y Ecuador en la escala Richter?

Solución Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces de la definición de magnitud se tiene

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto de Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$ ■

Ejemplo 10 Intensidad de terremotos

El terremoto de Loma Prieta en 1989 que sacudió a la ciudad de San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de 1906 (véase el ejemplo 9) que el de 1989?

Solución Si I_1 e I_2 son las intensidades de los terremotos de 1906 y 1989, entonces se requiere hallar I_1/I_2. Para relacionar esto con la definición de magnitud, se divide numerador y denominador entre S.

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{I_1/S}{I_2/S} \qquad \text{Divida el numerador y el denominador entre } S$$

$$= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S} \qquad \text{Ley 2 de los logaritmos}$$

$$= 8.3 - 7.1 = 1.2 \qquad \text{Definición de magnitud de terremoto}$$

Por lo tanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El terremoto de 1906 tuvo una intensidad de 16 veces el de 1989. ■

Roger Ressmeyer/Corbis

LA ESCALA DE DECIBELES El oído es sensible a una variedad extremadamente amplia de intensidades de sonido. Se toma como intensidad de referencia $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de audición). La sensación psicológica de sonoridad varía con el logaritmo de la intensidad (la ley de Weber-Fechner) y, por lo tanto, el **nivel de intensidad** B, medido en decibeles (dB), se define como

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Los **niveles de intensidad de sonidos** que es posible escuchar varían desde muy fuertes hasta muy suaves. A continuación se dan algunos ejemplos de los niveles de decibeles de sonidos escuchados comúnmente.

Fuente de sonido	B (dB)
Despegue de un avión	140
Martillo neumático	130
Concierto de rock	120
Tren subterráneo	100
Tránsito intenso	80
Tránsito ordinario	70
Conversación normal	50
Susurro	30
Murmullo de hojas	10–20
Umbral de audición	0

El nivel de intensidad del sonido de referencia apenas audible es

$$B = 10 \log \frac{I_0}{I_0} = 10 \log 1 = 0 \text{ dB}$$

Ejemplo 11 Intensidad sonora del despegue de un avión

Encuentre el nivel de intensidad en decibeles de una turbina de avión durante el despegue si la intensidad se mide a 100 W/m^2.

Solución De la definición de nivel de intensidad se puede observar que

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{10^2}{10^{-12}} = 10 \log 10^{14} = 140 \text{ dB}$$

Por lo tanto, el nivel de intensidad es 140 dB. ■

La tabla del margen lista los niveles de intensidad de decibeles para algunos sonidos comunes que varían del umbral de la audición humana al despegue de avión del ejemplo 11. El umbral de dolor es más o menos 120 dB.

4.5 Ejercicios

1–13 ■ En estos ejercicios se usa el modelo de crecimiento poblacional.

1. Cultivo de bacterias El número de bacterias en un cultivo se modela mediante la función

$$n(t) = 500e^{0.45t}$$

donde t se mide en horas.

a) ¿Cuál es el número inicial de bacterias?

b) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de esta población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.

c) ¿Cuántas bacterias están en el cultivo después de tres horas?

d) ¿Después de cuántas horas la cantidad de bacterias llega a 10 000?

2. Población de peces El número de cierta especie de peces se modela mediante la función

$$n(t) = 12e^{0.012t}$$

donde t se mide en años y $n(t)$ se mide en millones.

a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población de peces? Exprese su respuesta como porcentaje.

b) ¿Cuál será la población de peces después de cinco años?

c) ¿Después de cuántos años la cantidad de peces llega a 30 millones?

d) Trace una gráfica de la función de población de peces $n(t)$.

3. Población de zorras La población de zorras en cierta región tiene una tasa de crecimiento relativa de 8% por año. Se estima que la población en 2000 fue 18 000.

a) Encuentre una función que modele la población t años después del año 2000.

b) Use la función del inciso a) para estimar la población de zorras en el año 2008.

c) Trace una gráfica de la función de población de zorras para los años 2000-2008.

4. Población de un país La población de un país tiene una tasa de crecimiento relativa de 3% por año. El gobierno está intentando reducir la tasa de crecimiento a 2%. La población en 1995 fue aproximadamente 110 millones. Encuentre la población proyectada para el año 2020 para las condiciones siguientes.

a) La tasa de crecimiento relativa permanece en 3% por año.

b) La tasa de crecimiento relativa se reduce a 2% por año.

5. Población de una ciudad La población para cierta ciudad fue 112 000 en 1998, y la tasa de crecimiento relativa observada es 4% por año.

a) Encuentre una función que modele la población después de t años.

b) Encuentre la población proyectada en el año 2004.

c) ¿En qué año la población llega a 200 000?

6. Población de ranas La población de ranas en un estanque pequeño crece de forma exponencial. La población actual es de 85 ranas y la tasa de crecimiento relativa es 18% por año.

a) Encuentre una función que modela la población después de t años.

b) Encuentre la población proyectada después de tres años.

c) Calcule el número de años requerido para que la población de ranas llegue a 600.

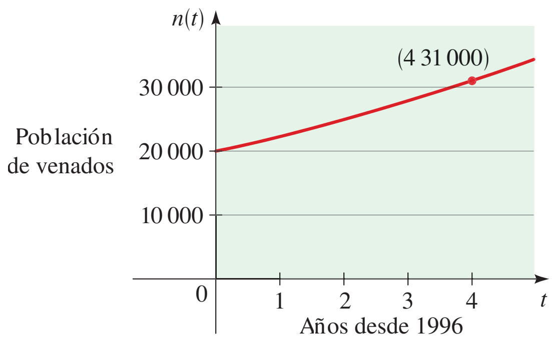
7. Población de venados En la gráfica se muestra la población de venados en un condado de Pennsylvania entre 1996 y 2000. Suponga que la población crece de forma exponencial

a) ¿Cuál es la población de venados en 1996?

b) Encuentre una función que modele la población de venados t años después de 1996.

c) ¿Cuál es la población de venados proyectada en 2004?

d) ¿En qué año la población de venados llega a 100 000?



8. Cultivo de bacterias Un cultivo contiene 1500 bacterias al inicio y se duplica cada 30 minutos.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t minutos.

b) Calcule el número de bacterias después de dos horas.

c) ¿Después de cuántos minutos el cultivo contendrá 4000 bacterias?

9. Cultivo de bacterias Un cultivo comienza con 8600 bacterias. Después de una hora la cuenta es 10 000.

a) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.

b) Encuentre el número de bacterias después de dos horas.

c) ¿Después de cuántas horas se duplica el número de bacterias?

10. Cultivo de bacterias La cuenta en un cultivo de bacterias fue 400 después de dos horas y 25 600 después de seis horas.

a) ¿Cuál es la tasa relativa de crecimiento de la población de bacterias? Exprese su respuesta como un porcentaje.

b) ¿Cuál fue el tamaño inicial del cultivo?

c) Encuentre una función que modele el número de bacterias $n(t)$ después de t horas.

d) Calcule el número de bacterias después de 4.5 horas.

e) ¿Cuándo el número de bacterias será 50 000?

11. Población mundial La población del mundo fue 5.7 miles de millones en 1995 y la tasa de crecimiento relativa observada fue 2% por año.

a) ¿En qué año se habrá duplicado la población?

b) ¿En qué año se habrá triplicado la población?

12. Población de California La población de California fue 10 586 223 en 1950 y 23 668 562 en 1980. Suponga que la población crece en forma exponencial.

a) Encuentre una función que modele la población t años después de 1950.

b) Determine el tiempo requerido para que se duplique la población.

c) Use la función del inciso a) para predecir la población de California en el año 2000. Busque el dato de la población real de California en 2000 y compare.

13. Bacterias infecciosas Una cepa infecciosa de bacterias se incrementa a una tasa de crecimiento relativa de 200% por hora. Cuando cierta cantidad crítica de bacterias está presente en el torrente sanguíneo, una persona se enferma. Si una sola bacteria infecta a una persona, la concentración crítica se alcanza en 24 horas. ¿Cuánto tiempo toma alcanzar la concentración crítica si la persona es infectada con 10 bacterias?

14–22 ■ En estos ejercicios se emplea el modelo de decaimiento radiactivo.

14. Radio radiactivo La vida media del radio 226 son 1600 años. Suponga que tiene una muestra de 22 mg.

a) Encuentre una función que modele la masa restante después de t años.

b) ¿Qué cantidad de la muestra queda después de 4000 años?

c) ¿Después de cuánto tiempo quedan solamente 18 mg de muestra?

15. Cesio radiactivo La vida media del cesio 137 son 30 años. Suponga que se tiene una muestra de 10 g.

a) Encuentre una función que modele la masa restante después de t años.

b) ¿Qué cantidad de la muestra queda después de 80 años?

c) ¿Después de cuánto tiempo sólo quedarán 18 mg de la muestra?

16. Torio radiactivo La masa $m(t)$ restante después de t días de una muestra de 40 g de torio 234 está dada por

$$m(t) = 40e^{-0.0277t}$$

a) ¿Después de 60 días cuál es la cantidad de muestra restante?

b) ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que sólo queden 10 g de la muestra?

c) Calcule la vida media del torio 234.

17. Estroncio radiactivo La vida media del estroncio 90 son 28 años. ¿Cuánto tiempo tarda una muestra de 50 mg en desintegrarse a una masa de 32 mg?

18. Radio radiactivo El radio 221 tiene una vida media de 30 s. ¿Cuánto tiempo tarda en desintegrarse 95% de la muestra?

19. Hallar la vida media Si 250 mg de un elemento radiactivo disminuyen a 200 mg en 48 horas, calcule la vida media del elemento.

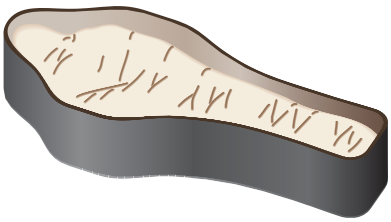
20. Radón radiactivo Después de 3 días una muestra de radón 222 ha disminuido a 58% de su cantidad original.

a) ¿Cuál es la vida media del radón 222?

b) ¿En cuánto tiempo la muestra disminuye a 20% de su cantidad original?

21. Fechado con carbono 14 Un artefacto de madera de una tumba antigua contiene 65% de carbono 14 que está presente en árboles vivos. ¿Hace cuánto tiempo fue hecho el artefacto? (La vida media del carbono 14 son 5730 años.)

22. Fechado con carbono 14 Se estima que la ropa de entierro de una momia egipcia contiene 59% del carbono 14 que contenía originalmente. ¿Hace cuánto tiempo fue enterrada la momia? (La vida media del carbono 14 es de 5730 años.)



23–26 ■ En estos ejercicios se emplea la ley del enfriamiento de Newton.

23. Enfriamiento de la sopa En una fiesta se sirve un tazón de sopa caliente. Comienza a enfriarse según la ley del enfriamiento de Newton, de modo que su temperatura en el instante t se determina mediante

$$T(t) = 65 + 145e^{-0.05t}$$

donde t se mide en minutos y T se mide en ºF.

a) ¿Cuál es la temperatura inicial de la sopa?

b) ¿Cuál es la temperatura después de 10 min?

c) ¿Después de cuánto tiempo la temperatura será de 100ºF?

24. Hora de la muerte La ley del enfriamiento de Newton se emplea en investigaciones de homicidios para determinar la hora de la muerte. La temperatura corporal normal es de 98.6ºF. Inmediatamente después de la muerte el cuerpo comienza a enfriarse. Se ha determinado de manera experimental que la constante en la ley de Newton del enfriamiento es aproximadamente $k = 0.1947$, asumiendo que el tiempo se mide en horas. Suponga que la temperatura del entorno es de 60ºF.

a) Encuentre la función $T(t)$ que modela la temperatura t horas después de la muerte.

b) Si la temperatura del cuerpo es de 72ºF, ¿hace cuánto tiempo fue la hora de la muerte?

25. Enfriamiento de un pavo Se saca del horno un pavo asado cuando su temperatura ha alcanzado 185ºF y se coloca en una mesa en una habitación donde la temperatura es de 75ºF.

a) Si la temperatura del pavo es de 150ºF después de media hora, ¿cuál es su temperatura después de 45 min?

b) ¿En cuánto tiempo el pavo se enfría a 100ºF?

26. Agua en ebullición Una olla llena de agua se lleva a ebullición en una habitación con temperatura de 20ºC. Después de 15 minutos la temperatura del agua ha disminuido de 100ºC a 75ºC. Calcule la temperatura después de 10 min. Ilustre graficando la función de temperatura.

27–41 ■ Estos ejercicios tratan con escalas logarítmicas.

27. Hallar el pH Se da la concentración de ion hidrógeno de una muestra de cada sustancia. Calcule el pH de la sustancia.

a) Jugo de limón: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-3}$ M

b) Jugo de tomate: $[H^+] = 3.2 \times 10^{-4}$ M

c) Agua de mar: $[H^+] = 5.0 \times 10^{-9}$ M

28. Hallar el pH Una muestra desconocida tiene una concentración de ion hidrógeno de $[H^+] = 3.1 \times 10^{-8}$ M. Determine el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

29. Concentración de iones Se da la lectura de pH de una muestra de cada sustancia. Calcule la concentración de iones hidrógeno de la sustancia.

a) Vinagre: pH = 3.0

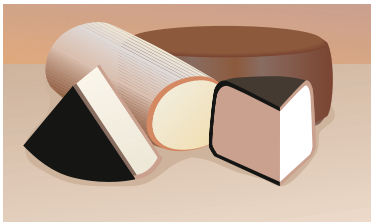
b) Leche: pH = 6.5

30. Concentración de iones Se da la lectura de pH de un vaso de líquido. Encuentre la concentración de iones hidrógeno del líquido.

a) Cerveza: pH = 4.6

b) Agua: pH = 7.3

31. Hallar el pH Las concentraciones de iones hidrógeno en quesos varía de 4.0×10^{-7} M a 1.6×10^{-5} M. Determine el intervalo correspondiente de lecturas de pH.



32. Concentración de iones en vino Las lecturas de pH para vinos varía de 2.8 a 3.8. Encuentre el intervalo correspondiente de concentraciones de iones hidrógeno..

33. Magnitudes de terremotos Si un terremoto es 20 veces la intensidad de otro, ¿cuánto más grande es su magnitud en la escala Richter?

34. Magnitudes de terremotos El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud de 8.3 en la escala Richter. Al mismo tiempo en Japón un terremoto con magnitud 4.9 causó sólo daños menores. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de San Francisco que el de Japón?

35. Magnitudes de terremotos El sismo de Alaska de 1964 tuvo una magnitud de 8.6 en la escala Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue éste que el de San Francisco en 1906? (Véase el ejercicio 34.)

36. Magnitudes de terremotos El sismo de 1994 en Northridge, California, tuvo una magnitud de 6.8 en la escala Richter. Un año después, un sismo de magnitud 7.2 golpeó a Kobe, Japón. ¿Cuántas veces más intenso fue el sismo de Kobe que el de Northridge?

37. Magnitudes de terremotos El sismo de 1985 en la Ciudad de México tuvo una magnitud de 8.1 en la escala Richter. El sismo de 1976 en Tangshan, China, tuvo una intensidad de 1.26 veces el de la Ciudad de México. ¿Cuál es la magnitud del sismo de Tangshan?

38. Ruido de tránsito La intensidad del sonido del tránsito en una intersección ocupada se midió en 2.0×10^{-5} W/m^2. Determine el nivel de intensidad en decibeles.

39. Ruido del metro La intensidad del sonido de un tren subterráneo se midió en 98 dB. Calcule la intensidad en W/m^2.

40. Comparación de niveles de decibeles El ruido de una cegadora mecánica se midió en 106 dB. El nivel de ruido en un concierto de rock se midió en 120 dB. Encuentre la relación de la intensidad de la música de rock a la de la cegadora mecánica.

41. Ley cuadrada inversa para el sonido Una ley de la física establece que la intensidad del sonido es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia d desde la fuente: $I = k/d^2$.

a) Use este modelo y la ecuación

$$B = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

(descrita en esta sección) para mostrar que los niveles de decibeles B_1 y B_2 a distancias d_1 y d_2 desde una fuente de sonido se relacionan mediante la ecuación

$$B_2 = B_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2}$$

b) El nivel de intensidad en un concierto de rock es 120 dB a una distancia de 2 m desde las bocinas. Determine el nivel de intensidad a una distancia de 10 m.

4 Repaso

Comprobación de conceptos

1. a) Escriba una ecuación que defina la función exponencial con base a.

b) ¿Cuál es el dominio de esta función?

c) ¿Cuál es el rango de esta función?

d) Bosqueje la forma general de la gráfica de la función exponencial para cada caso.

i) $a > 1$ ii) $0 < a < 1$

2. Si x es grande, ¿qué función crece más rápido, $y = 2^x$ o $y = x^2$?

3. a) ¿Cómo se define el número e?

b) ¿Cuál es la función exponencial natural?

4. a) ¿Cómo se define la función logarítmica $y = \log_a x$?

b) ¿Cuál es el dominio de esta función?

c) ¿Cuál es el rango de esta función?

d) Bosqueje la forma general de la gráfica de la función $y = \log_a x$ si $a > 1$.

e) ¿Qué es el logaritmo natural?

f) ¿Qué es el logaritmo común?

5. Exprese las tres leyes de los logaritmos.

6. Enuncie la fórmula de cambio de base

7. a) ¿Cómo resuelve una ecuación exponencial?

b) ¿Cómo resuelve una ecuación logarítmica?

8. Suponga que se invierte una cantidad P a una tasa de interés r y A es la cantidad después de t años.

a) Escriba una expresión para A si el interés es compuesto n veces por año.

b) Escriba una expresión para A si el interés se compone de manera continua.

9. Si el tamaño inicial de una población es n_0 y la población crece en forma exponencial con tasa de crecimiento relativa r, escriba una expresión para la población $n(t)$ en el tiempo t.

10. a) ¿Qué es la vida media de una sustancia radiactiva?

b) Si una sustancia radiactiva tiene masa inicial m_0 y vida media h, escriba una expresión para la masa $m(t)$ que permanece en el tiempo t.

11. ¿Qué dice la ley de Newton del enfriamiento?

12. ¿Qué tienen en común la escala de pH, la escala Richter y la escala de decibeles? ¿Qué miden?

Ejercicios

1–12 ■ Bosqueje la gráfica de la función. Exprese el dominio, el rango y la asíntota.

1. $f(x) = 2^{-x+1}$ **2.** $f(x) = 3^{x-2}$

3. $g(x) = 3 + 2^x$ **4.** $g(x) = 5^{-x} - 5$

5. $f(x) = \log_3(x - 1)$ **6.** $g(x) = \log(-x)$

7. $f(x) = 2 - \log_2 x$ **8.** $f(x) = 3 + \log_5(x + 4)$

9. $F(x) = e^x - 1$ **10.** $G(x) = \frac{1}{2}e^{x-1}$

11. $g(x) = 2 \ln x$ **12.** $g(x) = \ln(x^2)$

13–16 ■ Encuentre el dominio de la función.

13. $f(x) = 10^{x^2} + \log(1 - 2x)$ **14.** $g(x) = \ln(2 + x - x^2)$

15. $h(x) = \ln(x^2 - 4)$ **16.** $k(x) = \ln|x|$

17–20 ■ Escriba la ecuación en forma exponencial.

17. $\log_2 1024 = 10$ **18.** $\log_6 37 = x$

19. $\log x = y$ **20.** $\ln c = 17$

21–24 ■ Escriba la ecuación en forma logarítmica.

21. $2^6 = 64$ **22.** $49^{-1/2} = \frac{1}{7}$

23. $10^x = 74$ **24.** $e^k = m$

25–40 ■ Evalúe la expresión sin usar una calculadora.

25. $\log_2 128$ **26.** $\log_8 1$

27. $10^{\log 45}$ **28.** $\log 0.000001$

29. $\ln(e^6)$ **30.** $\log_4 8$

31. $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ **32.** $2^{\log_2 13}$

33. $\log_5 \sqrt{5}$ **34.** $e^{2\ln 7}$

35. $\log 25 + \log 4$ **36.** $\log_3 \sqrt{243}$

37. $\log_2 16^{23}$ **38.** $\log_5 250 - \log_5 2$

39. $\log_8 6 - \log_8 3 + \log_8 2$ **40.** $\log \log 10^{100}$

41–46 ■ Desarrolle la expresión logarítmica.

41. $\log(AB^2C^3)$ **42.** $\log_2\left(x\sqrt{x^2 + 1}\right)$

43. $\ln\sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ **44.** $\log\left(\dfrac{4x^3}{y^2(x - 1)^5}\right)$

45. $\log_5\left(\dfrac{x^2(1 - 5x)^{3/2}}{\sqrt{x^3 - x}}\right)$ **46.** $\ln\left(\dfrac{\sqrt[3]{x^4 + 12}}{(x + 16)\sqrt{x - 3}}\right)$

47–52 ■ Combine en un solo logaritmo.

47. $\log 6 + 4 \log 2$ **48.** $\log x + \log(x^2y) + 3 \log y$

49. $\frac{3}{2}\log_2(x - y) - 2\log_2(x^2 + y^2)$

50. $\log_5 2 + \log_5(x + 1) - \frac{1}{3}\log_5(3x + 7)$

51. $\log(x - 2) + \log(x + 2) - \frac{1}{2}\log(x^2 + 4)$

52. $\frac{1}{2}[\ln(x - 4) + 5\ln(x^2 + 4x)]$

53–62 ■ Resuelva la ecuación. Encuentre la solución exacta si es posible; de lo contrario aproxime hasta dos decimales.

53. $\log_2(1 - x) = 4$ **54.** $2^{3x-5} = 7$

55. $5^{5-3x} = 26$ **56.** $\ln(2x - 3) = 14$

57. $e^{3x/4} = 10$ **58.** $2^{1-x} = 3^{2x+5}$

59. $\log x + \log(x + 1) = \log 12$

60. $\log_8(x + 5) - \log_8(x - 2) = 1$

61. $x^2e^{2x} + 2xe^{2x} = 8e^{2x}$ **62.** $2^{3^x} = 5$

63–66 ■ Use una calculadora para hallar la solución de la ecuación, correcta hasta seis decimales.

63. $5^{-2x/3} = 0.63$ **64.** $2^{3x-5} = 7$

65. $5^{2x+1} = 3^{4x-1}$ **66.** $e^{-15k} = 10\,000$

67–70 ■ Dibuje una gráfica de la función y empléela para determinar las asíntotas y los valores locales máximo y mínimo.

67. $y = e^{x/(x+2)}$ **68.** $y = 2x^2 - \ln x$

69. $y = \log(x^3 - x)$ **70.** $y = 10^x - 5^x$

71–72 ■ Encuentre las soluciones de la ecuación, correctas hasta dos decimales.

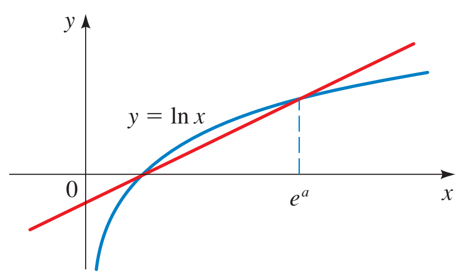
71. $3 \log x = 6 - 2x$ **72.** $4 - x^2 = e^{-2x}$

73–74 ■ Resuelva la desigualdad en forma gráfica.

73. $\ln x > x - 2$ **74.** $e^x < 4x^2$

75. Use una gráfica de $f(x) = e^x - 3e^{-x} - 4x$ para encontrar, aproximadamente, los intervalos en los que f es creciente y en los que es decreciente.

76. Encuentre una ecuación de la recta mostrada en la figura.



77. Evalúe $\log_4 15$, correcto hasta seis decimales.

78. Resuelva la desigualdad: $0.2 \leq \log x < 2$.

79. ¿Cuál es más grande, $\log_4 258$ o $\log_5 620$?

80. Encuentre el inverso de la función $f(x) = 2^{3^x}$ y exprese su dominio y rango.

81. Si se invierten 12 000 dólares a una tasa de interés de 10% por año, encuentre la cantidad de la inversión al final de tres años para cada método de capitalización.

a) Semianual **b)** Mensual

c) Diario **d)** Continuo

82. Se invierte una suma de 5000 dólares a una tasa de interés de $8\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizable cada medio año.

a) Encuentre la cantidad de la inversión después de un año y medio.

b) ¿Después de qué periodo la inversión llega a 7000 dólares?

83. La población de gatos callejeros en un pueblo pequeño crece de manera exponencial. En 1999, el pueblo tenía 30 gatos callejeros y la tasa de crecimiento relativa era de 15% anual.

a) Encuentre una función que modele la población de gatos callejeros $n(t)$ después de t años.

b) Determine la población proyectada después de 4 años.

c) Calcule el número de años requerido para que la población de gatos callejeros llegue a 500.

84. Un cultivo contiene al inicio 10 000 bacterias. Después de una hora la cuenta de bacterias es 25 000.

a) Determine el periodo de duplicación.

b) Calcule el número de bacterias después de tres horas.

85. El uranio 234 tiene una vida media de 2.7×10^5 años.

a) Determine la cantidad restante de una muestra de 10 mg después de mil años.

b) ¿Cuánto tarda en descomponerse esta muestra hasta que su masa es de 7 mg?

86. Una muestra de bismuto 210 se descompone a 33% de su masa original después de ocho días.

a) Calcule la vida media de este elemento.

b) Determine la masa restante después de 12 días.

87. La vida media del radio 226 es 1590 años.

a) Si una muestra tiene una masa de 150 mg, encuentre una función que modele la masa que permanece después de t años.

b) Determine la masa que queda después de 1000 años.

c) ¿Después de cuántos años sólo quedan 50 mg?

88. La vida media del paladio 100 es cuatro días. Después de 20 días una muestra ha sido reducida a una masa de 0.375g.

a) ¿Cuál es la masa inicial de la muestra?

b) Encuentre una función que modele la masa restante después de t días.

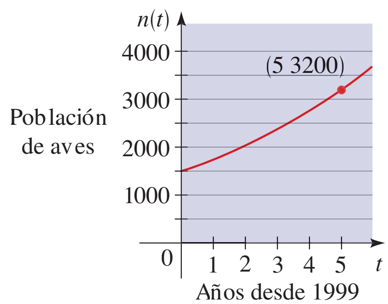
c) ¿Cuál es la masa después de tres días?

d) ¿Después de cuántos días sólo quedarán 0.15 g?

89. La gráfica muestra la población de una rara especie de ave, donde t representa años desde 1999 y $n(t)$ se mide en miles.

a) Encuentre una función que modele la población de aves en el tiempo t en la forma $n(t) = n_0 e^{rt}$.

b) ¿Cuál se espera que sea la población de aves en el año 2010?



90. Un motor de automóvil corre a una temperatura de 190ºF. Cuando se apaga el motor, se enfría de acuerdo con la ley del enfriamiento de Newton con constante $k = 0.0341$, donde el tiempo se mide en minutos. Encuentre el tiempo necesario para que el motor se enfríe a 90ºF si la temperatura circundante es 60ºF.

91. La concentración de iones hidrógeno de claras de huevo frescas se midió como

$$[H^+] = 1.3 \times 10^{-8}\text{ M}$$

Determine el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

92. El pH del jugo de limón es 1.9. Calcule la concentración del ion hidrógeno.

93. Si un sismo tiene una magnitud de 6.5 en la escala Richter, ¿cuál es la magnitud de otro sismo cuya intensidad es 35 veces mayor?

94. El ruido que produce un martillo neumático al taladrar se midió en 132 dB. El sonido del susurro se midió en 28 dB. Encuentre la relación de intensidades entre el taladrado y el susurro.

4 Evaluación

1. Grafique las funciones $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ en los mismos ejes.

2. Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = \log(x + 1)$ y exprese el dominio, rango y asíntota.

3. Evalúe cada expresión logarítmica.

a) $\log_3 \sqrt{27}$ b) $\log_2 80 - \log_2 10$

c) $\log_8 4$ d) $\log_6 4 + \log_6 9$

4. Use las leyes de los logaritmos para desarrollar la expresión.

$$\log \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x^4(x^2 + 4)}}$$

5. Combine en un solo logaritmo: $\ln x - 2\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(3 - x^4)$

6. Encuentre la solución de la ecuación, correcta hasta dos decimales.

a) $2^{x-1} = 10$ b) $5\ln(3 - x) = 4$

c) $10^{x+3} = 6^{2x}$ d) $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = 2$

7. El tamaño inicial de un cultivo de bacterias es 1000. Después de una hora la cuenta de bacterias es 8000.

a) Encuentre una función que modele la población después de t horas.

b) Calcule la población después de 1.5 horas.

c) ¿Cuándo la población llega a 15 000?

d) Bosqueje la gráfica de la función de población.

8. Suponga que se invierten 12 000 dólares en una cuenta de ahorros que paga 5.6% de interés anual.

a) Escriba una fórmula para la cantidad en la cuenta después de t años si el interés se capitaliza cada mes.

b) Determine la cantidad en la cuenta después de tres años si el interés se compone cada día.

c) ¿Cuánto tiempo tarda la cantidad en la cuenta en crecer a 20 000 dólares si el interés se compone cada medio año?

9. Sea $f(x) = \dfrac{e^x}{x^3}$.

a) Grafique f en un rectángulo de visión apropiado.

b) Exprese las asíntotas de f.

c) Encuentre, correcto hasta dos decimales, el valor local mínimo de f y el valor de x en el que ocurre.

d) Encuentre el rango de f.

e) Resuelva la ecuación $\dfrac{e^x}{x^3} = 2x + 1$. Exprese cada solución correcta hasta dos decimales.

Enfoque en el modelado

Ajuste de curvas exponenciales y de potencia a datos

En *Enfoque en el modelado* (página 320) se aprendió que la forma de un diagrama de dispersión ayuda a elegir el tipo de curva a usar en el modelado de datos. En la primera gráfica de la figura 1 se puede observar con claridad que se ajusta a una recta y la segunda a un polinomio cúbico. Para la tercera gráfica se podría usar un polinomio de segundo grado. Pero, ¿qué pasa si se ajusta mejor a una curva exponencial? ¿Cómo se decide esto? En esta sección se aprenderá cómo ajustar curvas exponenciales y de potencia a datos y cómo decidir qué tipo de curva se ajusta mejor a los datos. Se aprenderá también que para gráficas de dispersión como las de las dos últimas gráficas de la figura 1, los datos se pueden modelar mediante funciones logarítmicas o logísticas.

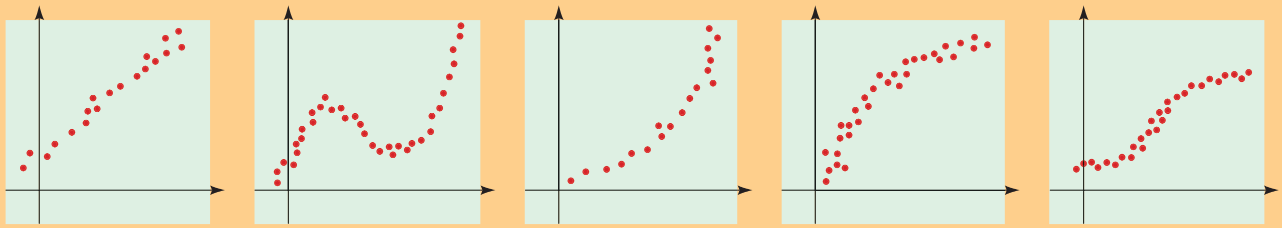


Figura 1

Modelado con funciones exponenciales

Si un diagrama de dispersión muestra que los datos se incrementan con rapidez, es posible que se desee modelar los datos por medio de un *modelo exponencial*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = Ce^{kx}$$

donde C y k son constantes. En el primer ejemplo se modela la población mundial mediante un modelo exponencial. Recuerde de la sección 4.5 que la población tiende a incrementarse de manera exponencial.

Tabla 1 Población mundial

Año (t)	Población mundial (P en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
2000	6060

Ejemplo 1 Un modelo exponencial para la población mundial

En la tabla 1 se da la población del mundo en el siglo XX.

a) Trace un diagrama de dispersión y note que un modelo lineal no es apropiado.
b) Encuentre una función exponencial que modele el crecimiento de la población.
c) Dibuje una gráfica de la función que encontró junto con el diagrama de dispersión. ¿Cómo se ajusta el modelo a los datos?
d) Use el modelo que encontró para predecir la población mundial en el año 2020.

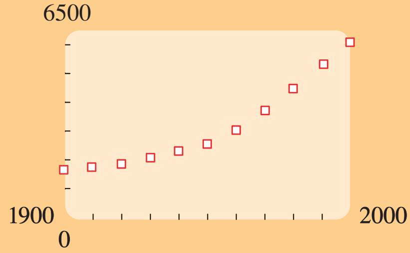
Solución

a) El diagrama de dispersión se muestra en la figura 2. Los puntos graficados al parecer no quedan sobre una recta, así que el modelo lineal es inapropiado.

Chabruken/The Image Bank/Getty Images

La población del mundo se incrementa en forma exponencial

Figura 2
Diagrama de dispersión de la población mundial



b) Por medio de una calculadora para gráficas y el comando `ExpReg` (véase la figura 3(a)), se obtiene el modelo exponencial

$$P(t) = (0.0082543) \cdot (1.0137186)^t$$

Éste es un modelo de la forma $y = Cb^t$. Para convertir esto a la forma $y = Ce^{kt}$, se usan las propiedades de los exponentes y los logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned} 1.0137186^t &= e^{\ln 1.0137186^t} && A = e^{\ln A} \\ &= e^{t \ln 1.0137186} && \ln A^B = B \ln A \\ &= e^{0.013625t} && \ln 1.0137186 \approx 0.013625 \end{aligned}$$

Así, se puede escribir el modelo como

$$P(t) = 0.0082543e^{0.013625t}$$

c) De la gráfica de la figura 3(b), se puede observar que el modelo al parecer se ajusta bastante bien a los datos. El periodo de crecimiento poblacional relativamente lento se explica por la depresión de la década de 1930 y las dos guerras mundiales.

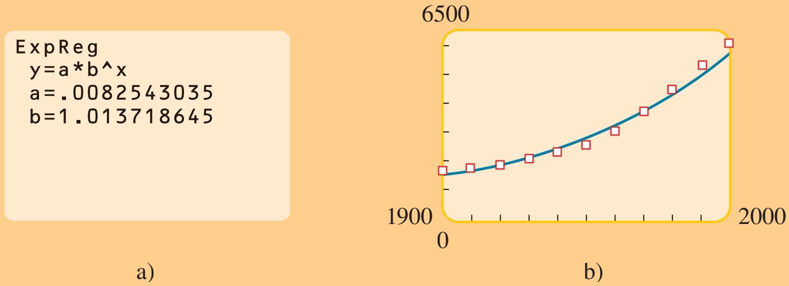


Figura 3
Modelo exponencial para la población mundial

d) El modelo predice que la población mundial en 2020 será

$$\begin{aligned} P(2020) &= 0.0082543e^{(0.013625)(2020)} \\ &\approx 7\,405\,400\,000 \end{aligned}$$

■

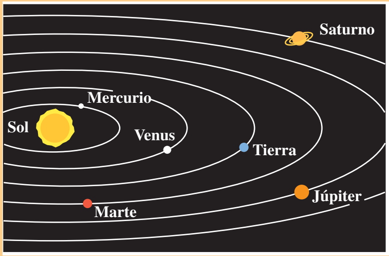
Modelado con funciones de potencia

Si el diagrama de dispersión de los datos bajo estudio se asemejan a la gráfica de $y = ax^2$, $y = ax^{1.32}$, o a alguna otra función de potencia, entonces se busca un *modelo de potencia*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = ax^n$$

donde a es una constante positiva y n es cualquier número real.

En el ejemplo siguiente se busca un modelo de potencia para algunos datos astronómicos. En astronomía, la distancia en el sistema solar se mide en unidades astronómicas. Una *unidad astronómica* (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol. El *periodo* de un planeta es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor del Sol (medido en años terrestres). En este ejemplo se deduce la relación notable, descubierta por Johannes Kepler (véase la página 780), entre la distancia media de un planeta desde el Sol y su periodo.



Ejemplo 2 Un modelo de potencia para periodos planetarios

En la tabla 2 se muestra la distancia media d de cada planeta desde el Sol en unidades astronómicas y su periodo T en años.

a) Bosqueje un diagrama de dispersión. ¿Es apropiado un modelo lineal?

b) Encuentre una función de potencia que modele los datos.

c) Dibuje una gráfica de la función que encontró y el diagrama de dispersión en la misma gráfica. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

d) Use el modelo que encontró para determinar el periodo de un asteroide cuya distancia media al Sol es 5 UA.

Tabla 2 Distancias y periodos de los planetas

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784
Plutón	39.507	248.350

Solución

a) El diagrama de dispersión mostrado en la figura 4 indica que los puntos graficados no se ubican a lo largo de una recta, así que es inapropiado un modelo lineal.

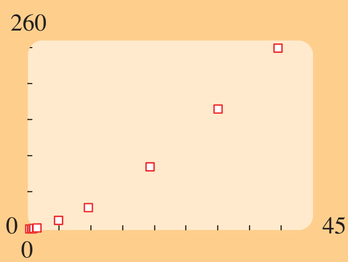


Figura 4
Diagrama de dispersión de datos de planetas

b) Por medio de una calculadora para gráficas y el comando `PwrReg` (véase la figura 5(a)), se obtiene el modelo de potencia

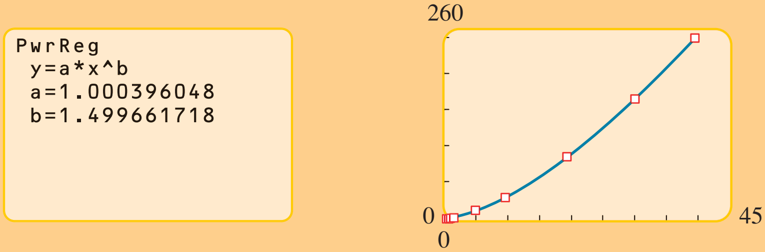
$$T = 1.000396d^{1.49966}$$

Si se redondea tanto el coeficiente como el exponente a tres cifras significativas, se puede escribir el modelo como

$$T = d^{1.5}$$

Ésta es la relación que descubrió Kepler (véase la página 780). Sir Isaac Newton utilizó después su Ley de la gravedad para deducir en forma teórica su relación, y de este modo proporcionó evidencia científica firme de que la Ley de la gravedad debe ser cierta.

c) La gráfica se muestra en la figura 5(b). El modelo al parecer se ajusta muy bien a los datos.



a) b)

Figura 5
Modelo de potencia para los datos de los planetas.

d) En este caso, $d = 5$ UA y, por lo tanto, el modelo produce

$$T = 1.00039 \cdot 5^{1.49966} \approx 11.22$$

El periodo del asteroide es aproximadamente 11.2 años. ■

Linealización de datos

Se ha empleado la forma de un diagrama de dispersión para decidir qué tipo de modelo usar —lineal, exponencial o de potencia—. Esto funciona bien si los puntos de datos se ubican sobre una recta. Pero es difícil distinguir un diagrama de dispersión que sea exponencial a partir de uno que requiere un modelo de potencia. Así, para ayudar a decidir qué modelo usar, se pueden *linealizar* los datos, es decir, aplicar una función que "enderezca" al diagrama de dispersión. El inverso de la función de linealización es entonces un modelo apropiado. Ahora se describe cómo linealizar datos que pueden ser modelados por funciones exponenciales o de potencia.

■ Linealización de datos exponenciales

Si se sospecha que los puntos de datos (x, y) están sobre una curva exponencial $y = Ce^{kx}$, entonces los puntos

$$(x, \ln y)$$

deben quedar sobre una recta. Esto se puede ver a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln Ce^{kx} && \text{Suponga que } y = Ce^{kx} \text{ y tome el ln} \\ &= \ln e^{kx} + \ln C && \text{Propiedad del ln} \\ &= kx + \ln C && \text{Propiedad del ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de x, sea $Y = \ln y$ y $A = \ln C$; entonces

$$Y = kx + A$$

Tabla 3 Datos de población mundial

t	Población P (en millones)	$\ln P$
1900	1650	21.224
1910	1750	21.283
1920	1860	21.344
1930	2070	21.451
1940	2300	21.556
1950	2520	21.648
1960	3020	21.829
1970	3700	22.032
1980	4450	22.216
1990	5300	22.391
2000	6060	22.525

Se aplica esta técnica a los datos de población mundial (t, P) para obtener los puntos $(t, \ln P)$ de la tabla 3. En el diagrama de dispersión de la figura 6 se observa que los datos linealizados se encuentran más o menos sobre una recta, así que debe ser apropiado un modelo exponencial.

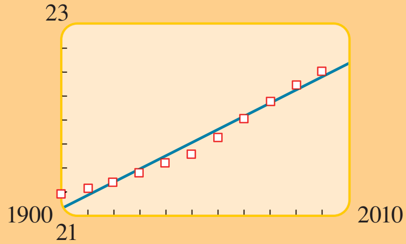


Figura 6

Linealización de datos de potencia

Si se sospecha que los puntos de datos (x, y) yacen sobre una curva de potencia $y = ax^n$, entonces los puntos

$$(\ln x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Esto se puede observar en los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln ax^n && \text{Suponga que } y = ax^n \text{ y tome el ln} \\ &= \ln a + \ln x^n && \text{Propiedad del ln} \\ &= \ln a + n \ln x && \text{Propiedad del ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función de $\ln x$, sea $Y = \ln y$, $X = \ln x$ y $A = \ln a$; entonces

$$Y = nX + A$$

Aplicamos esta técnica a los datos de los planetas (d, T) de la tabla 2 para obtener los puntos $(\ln d, \ln T)$ de la tabla 4. En el diagrama de dispersión de la figura 7 se observa que los datos caen sobre una recta, así que el modelo de potencia parece ser apropiado.

Tabla 4 Tabla log-log

$\ln d$	$\ln T$
−0.94933	−1.4230
−0.32435	−0.48613
0	0
0.42068	0.6318
1.6492	2.4733
2.2556	3.3829
2.9544	4.4309
3.4041	5.1046
3.6765	5.5148

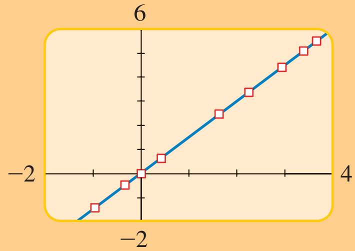


Figura 7 Diagrama log-log de los datos de la tabla 4

¿Un modelo exponencial o de potencia?

Suponga que un diagrama de dispersión de los puntos de datos (x, y) muestran un incremento rápido. ¿Se debe usar una función exponencial o una función de potencia para modelar los datos? A fin de decidir, se trazan dos diagramas de dispersión, uno para los puntos $(x, \ln y)$ y el otro para los puntos $(\ln x, \ln y)$. Si el primer diagrama de dispersión al parecer cae a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo exponencial. Si al parecer el segundo diagrama cae a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo de potencia.

Ejemplo 3 ¿Un modelo exponencial o de potencia?

Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla 5.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Trace los diagramas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Para modelar estos datos es apropiada una función exponencial o una de potencia?

d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

Tabla 5

x	y
1	2
2	6
3	14
4	22
5	34
6	46
7	64
8	80
9	102
10	130

Solución

a) El diagrama de dispersión de los datos se muestra en la figura 8.

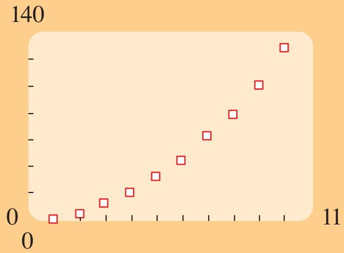


Figura 8

b) Se usan los valores de la tabla 6 para trazar los diagramas de dispersión de las figuras 9 y 10.

Tabla 6

x	$\ln x$	$\ln y$
1	0	0.7
2	0.7	1.8
3	1.1	2.6
4	1.4	3.1
5	1.6	3.5
6	1.8	3.8
7	1.9	4.2
8	2.1	4.4
9	2.2	4.6
10	2.3	4.9

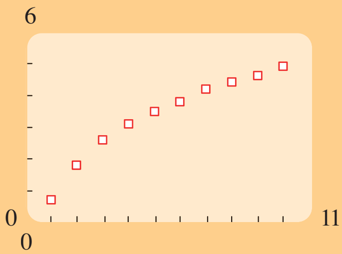


Figura 9

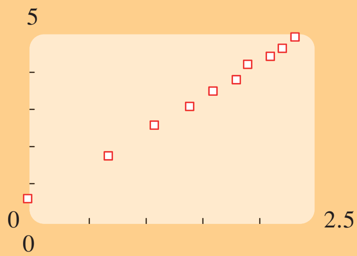


Figura 10

c) El diagrama de dispersión de $(x, \ln y)$ de la figura 9 al parecer no es lineal, así que es inapropiado un modelo exponencial. Por otro lado, el diagrama de dispersión de $(\ln x, \ln y)$ en la figura 10 es casi lineal, así que es apropiado un modelo de potencia.

d) Al utilizar el comando `PwrReg` en una calculadora para gráficas, se encuentra que la función de potencia que mejor se ajusta a los datos es

$$y = 1.85x^{1.82}$$

La gráfica de esta función y los datos originales se muestran en la figura 11.

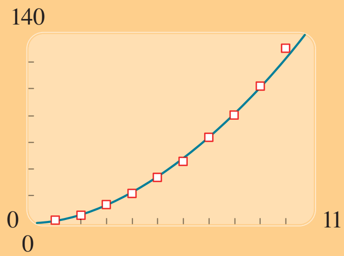


Figura 11

■

Antes de que se volvieran comunes las calculadoras para gráficas y el software de estadística, los modelos exponenciales y de potencia para datos solían construirse encontrando primero un modelo lineal para los datos linealizados. Luego se hallaba el modelo para los datos reales tomando exponenciales. Por ejemplo, si se encuentra que $y = A \ln x + B$, entonces al tomar exponenciales se obtiene el modelo $y = e^B \cdot e^{A \ln x}$ o $y = Cx^A$ (donde $C = e^B$). Se empleaba papel de gráficas especial llamado papel logarítmico o papel log-log para facilitar este proceso.

Modelado con funciones logísticas

Un modelo de crecimiento logístico es una función de la forma

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

donde a, b y c son constantes positivas. Las funciones logísticas se usan para modelar poblaciones donde el crecimiento está restringido por los recursos disponibles. (Véanse los ejercicios 69-72 de la sección 4.1.)

Ejemplo 4 Aprovisionamiento de un estanque con bagres

Tabla 7

Semana	Bagres
0	1000
15	1500
30	3300
45	4400
60	6100
75	6900
90	7100
105	7800
120	7900

Mucho del pescado que se vende en los supermercados en la actualidad se cría en granjas pesqueras comerciales, y no son capturados en su hábitat natural. Un estanque en una granja de este tipo es aprovisionado al inicio con 100 bagres, y la población de peces se muestrea después a intervalos de 15 semanas para estimar su tamaño. Los datos de población se dan en la tabla 7.

a) Encuentre un modelo apropiado para los datos.

b) Construya un diagrama de dispersión de los datos y grafique el modelo que encontró en el inciso a) en el diagrama de dispersión.

c) ¿Cómo predice el modelo que la población de peces cambiará con el tiempo?

Solución

a) Puesto que la población de bagres está restringida por su hábitat (el estanque), es apropiado un modelo logístico. Por medio del comando `Logistic` en una calculadora (véase la figura 12(a)), se encuentra el siguiente modelo para la población de peces $P(t)$:

$$P(t) = \frac{7925}{1 + 7.7e^{-0.052t}}$$

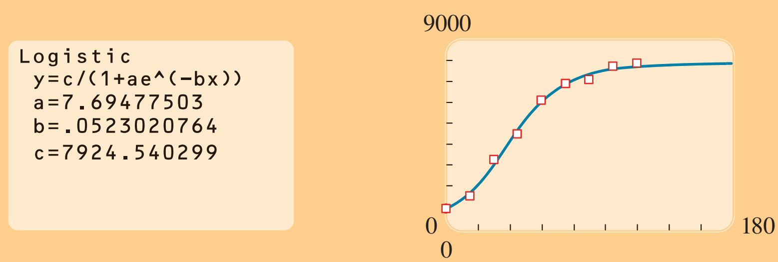


Figura 12 a) b) Población de bagres $y = F(t)$

b) El diagrama de dispersión y la curva logística se muestran en la figura 12(b).

c) De la gráfica de P en la figura 12(b), se ve que la población de bagres se incrementa con rapidez hasta casi $t = 80$ semanas. Después disminuye el crecimiento, y en aproximadamente $t = 120$ semanas la población se equilibra y permanece más o menos constante en poco más de 7900. ■

El comportamiento que exhibe la población de bagres en el ejemplo 4 es representativo del crecimiento logístico. Después de una fase de crecimiento rápido, la población se aproxima a un nivel constante conocido como **capacidad de transporte** del ambiente. Esto ocurre porque cuando $t \to \infty$, se tiene $e^{-bt} \to 0$ (véase la sección 4.1) y, por lo tanto,

$$P(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}} \quad \to \quad \frac{c}{1 + 0} = c$$

Así, la capacidad de transporte es c.

Problemas

1. Población de Estados Unidos. La constitución de Estados Unidos requiere un censo cada 10 años. Los datos del censo para 1790-2000 se dan en la tabla.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.

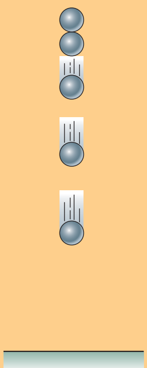
b) Use una calculadora para hallar un modelo exponencial para los datos.

c) Use su modelo para predecir la población en el censo de 2010.

d) Emplee su modelo para estimar la población en 1965.

e) Compare sus respuestas de los incisos a) y d) con los valores de la tabla. ¿Considera que es apropiado un modelo exponencial para estos datos?

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1790	3.9	1870	38.6	1950	151.3
1800	5.3	1880	50.2	1960	179.3
1810	7.2	1890	63.0	1970	203.3
1820	9.6	1900	76.2	1980	226.5
1830	12.9	1910	92.2	1990	248.7
1840	17.1	1920	106.0	2000	281.4
1850	23.2	1930	123.2		
1860	31.4	1940	132.2		



Tiempo (s)	Distancia (m)
0.1	0.048
0.2	0.197
0.3	0.441
0.4	0.882
0.5	1.227
0.6	1.765
0.7	2.401
0.8	3.136
0.9	3.969
1.0	4.902

2. Pelota en descenso En un experimento de física una bola de plomo se deja caer desde una altura de 5 m. Los alumnos registran la distancia que ha caído la bola cada décima de segundo. (Esto se puede hacer con una cámara y una luz estroboscópica.)

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.

b) Use una calculadora para hallar un modelo de potencia.

c) Emplee su modelo para predecir cuánto ha caído la bola en 3 s.

3. Gastos de atención de la salud Los gastos de atención sanitaria en Estados Unidos para 1970-2001 se dan en la tabla de la página siguiente, y un diagrama de dispersión se muestra en la figura.

a) ¿El diagrama de dispersión mostrado indica un modelo exponencial?

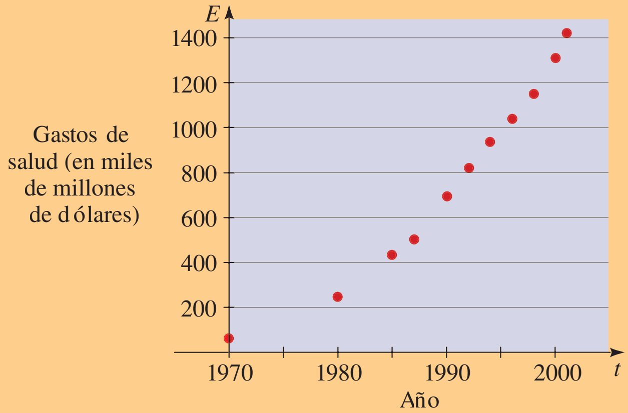
b) Construya una tabla de los valores $(t, \ln E)$ y un diagrama de dispersión. ¿Parece ser lineal el diagrama de dispersión?

Año	Gastos de salud (en miles de millones de dólares)
1970	74.3
1980	251.1
1985	434.5
1987	506.2
1990	696.6
1992	820.3
1994	937.2
1996	1039.4
1998	1150.0
2000	1310.0
2001	1424.5

c) Encuentre la recta de regresión para los datos del inciso b).

d) Use los resultados del inciso c) para hallar un modelo exponencial para el crecimiento de los gastos de atención sanitaria.

e) Use su modelo para predecir los gastos totales de atención sanitaria en 2009.



Tiempo (h)	Cantidad de ^{131}I (g)
0	4.80
8	4.66
16	4.51
24	4.39
32	4.29
40	4.14
48	4.04

4. Vida media de yodo radiactivo Un estudiante intenta determinar la vida media del yodo radiactivo 131. Él mide la cantidad de yodo 131 en una disolución de muestra cada 8 horas. Sus datos se muestran en la tabla del margen.

a) Construya un diagrama de dispersión de los datos.

b) Use una calculadora para hallar un modelo exponencial.

c) Emplee su modelo para hallar la vida media del yodo 131.

5. Ley de Beer-Lambert Cuando la luz del sol pasa por el agua de lagos y océanos es absorbida, y mientras más profundo penetra, disminuye más su intensidad. La intensidad luminosa I a la profundidad x está dada por la ley de Beer-Lamber:

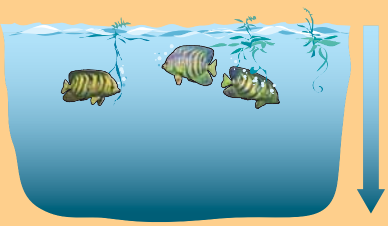
$$I = I_0 e^{-kx}$$

donde I_0 es la intensidad luminosa en la superficie y k es una constante que depende de la turbiedad del agua (véase la página 364). Un biólogo utiliza un fotómetro para investigar la penetración en un lago y obtiene los datos de la tabla.

a) Use una calculadora graficadora a fin de hallar la función exponencial de la forma dada por la ley de Beer-Lambert para modelar estos datos. ¿Cuál es la intensidad luminosa I_0 en la superficie en este día y cuál es la constante de "turbiedad" para este lago? [*Sugerencia:* si su calculadora da una función de la forma $I = ab^x$, conviértala a la forma que desea usando las identidades $b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln b}$. Véase el ejemplo 1(b).]

b) Construya un diagrama de dispersión de los datos y grafique en su diagrama de dispersión la función que encontró en el inciso a).

c) Si la intensidad luminosa cae por debajo de 0.15 lúmenes (lm), cierta especie de alga no puede sobrevivir debido a que la fotosíntesis es imposible. Use su modelo del inciso a) para determinar la profundidad debajo de la cual la luz es insuficiente para que esta alga sobreviva.



La intensidad de la luz decrece exponencialmente con la profundidad.

Profundidad (pies)	Intensidad luminosa (lm)	Profundidad (pies)	Intensidad luminosa (lm)
5	13.0	25	1.8
10	7.6	30	1.1
15	4.5	35	0.5
20	2.7	40	0.3

6. Experimentación con curvas de "olvido" Todos estamos familiarizados con el fenómeno de olvidar. Los hechos entendidos con claridad al momento de aprenderlos por primera vez a veces se borran de la memoria a la hora del examen final. Los psicólogos han propuesto varias formas de modelar este proceso. Un modelo de este tipo es la curva de olvido de Ebbinghaus, descrito en la página 355. Otros modelos utilizan funciones exponenciales o logarítmicas. Para desarrollar su propio modelo una psicóloga lleva a cabo un experimento con un grupo de voluntarios pidiéndoles que memoricen una lista de 100 palabras relacionadas. Ella prueba entonces cuántas de estas palabras pueden recordar después de varios periodos. Los resultados promedio para el grupo se muestran en la tabla.

a) Use una calculadora para gráficas a fin de encontrar la función de *potencia* de la forma $y = at^b$ que modela el número promedio de palabras y que los voluntarios recuerdan después de t horas. Después, encuentre una función *exponencial* de la forma $y = ab^t$ para modelar los datos.

b) Construya un diagrama de dispersión de los datos y grafique en su diagrama de dispersión las funciones que encontró en el inciso a).

c) ¿Cuál de las dos funciones al parecer proporciona el mejor modelo?

Tiempo	Palabras recordadas
15 min	64.3
1 h	45.1
8 h	37.3
1 día	32.8
2 días	26.9
3 días	25.6
5 días	22.9

7. Emisiones de plomo En la tabla siguiente se dan las emisiones de plomo en Estados Unidos hacia el ambiente en millones de toneladas métricas para 1970-1992.

a) Encuentre un modelo exponencial para estos datos.

b) Encuentre un modelo polinomial de cuarto grado para estos datos.

c) ¿Cuál de estas curvas da un mejor modelo para los datos? Use gráficas de los dos modelos para decidir.

d) Use cada modelo para estimar las emisiones de plomo en 1972 y 1982.

Año	Emisiones de plomo
1970	199.1
1975	143.8
1980	68.0
1985	18.3
1988	5.9
1989	5.5
1990	5.1
1991	4.5
1992	4.7

8. Emisiones de escape de automóvil En un estudio realizado por la Office of Science and Technology de Estados Unidos en 1972, se estimó el costo de reducir las emisiones de automóviles en ciertos porcentajes. Encuentre un modelo exponencial que capta la tendencia de "rendimiento decreciente" de los datos mostrados en la tabla siguiente.

Reducción de emisiones (%)	Costo por automóvil ($)
50	45
55	55
60	62
65	70
70	80
75	90
80	100
85	200
90	375
95	600

9. ¿Modelo exponencial o de potencia? Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Trace diagramas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Cuál es más apropiada para modelar estos datos, una función exponencial o una función de potencia?

d) Halle una función apropiada para modelar los datos.

x	y
2	0.08
4	0.12
6	0.18
8	0.25
10	0.36
12	0.52
14	0.73
16	1.06

x	y
10	29
20	82
30	151
40	235
50	330
60	430
70	546
80	669
90	797

10. ¿Modelo exponencial o de potencia? Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla del margen.

a) Dibuje un diagrama de dispersión de los datos.

b) Trace los diagramas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

c) ¿Cuál es más apropiada para modelar estos datos, una función exponencial o una función de potencia?

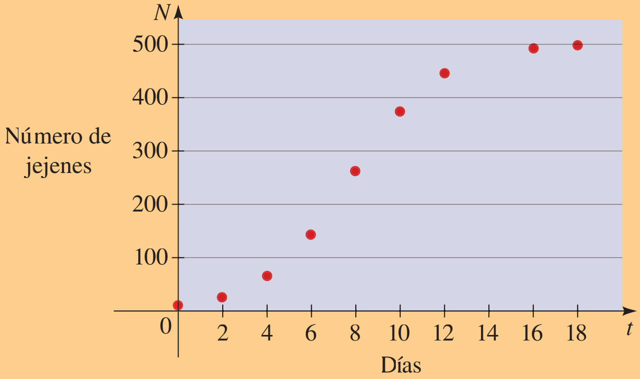
d) Halle una función apropiada para modelar los datos.

11. Crecimiento poblacional logístico La tabla y el diagrama de dispersión dan la población de jejenes en un recipiente de laboratorio cerrado en un periodo de 18 días.

a) Use el comando `Logistic` en su calculadora con el fin de hallar un modelo logístico para estos datos.

b) Use el modelo para estimar el tiempo cuando hay 400 jejenes en el recipiente.

Tiempo (días)	Número de jejenes
0	10
2	25
4	66
6	144
8	262
10	374
12	446
16	492
18	498



12. Modelos logarítmicos Un **modelo logarítmico** es una función de la forma

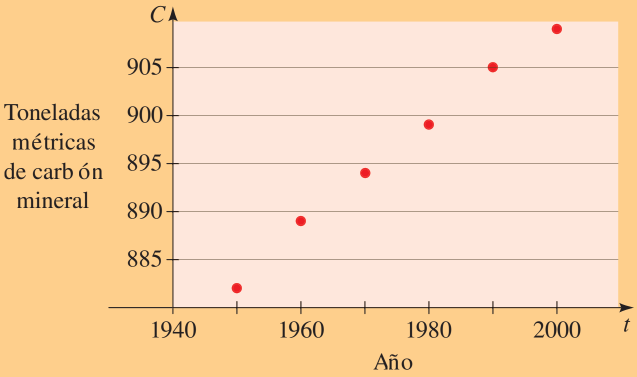
$$y = a + b \ln x$$

Muchas relaciones entre variables en el mundo real se pueden modelar mediante este tipo de función. La tabla y el diagrama de dispersión muestran la producción de carbón mineral (en toneladas métricas) de una pequeña mina en el norte de la Columbia Británica.

a) Use el comando `LnReg` en su calculadora con el fin de hallar un modelo logarítmico para estas cifras de producción.

b) Use el modelo para predecir la producción de carbón mineral de esta mina en 2010.

Año	Toneladas métricas de carbón mineral
1950	882
1960	889
1970	894
1980	899
1990	905
2000	909

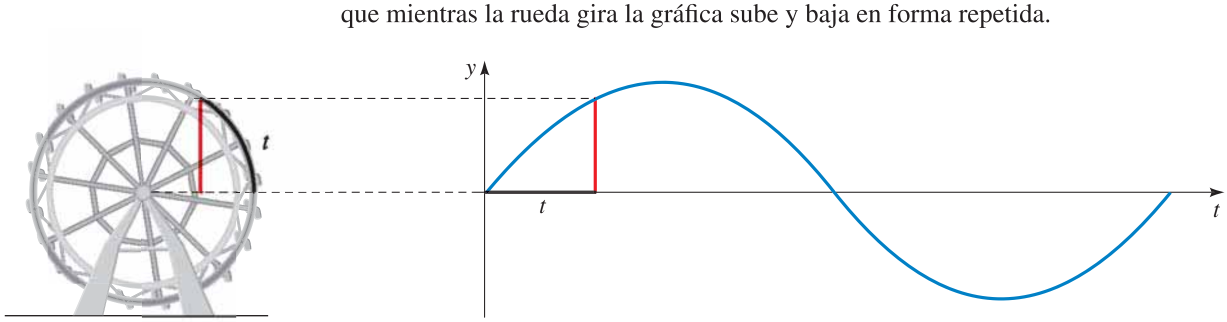


5 Funciones trigonométricas de números reales

Esquema del capítulo

En este capítulo y en el siguiente presentaremos nuevas funciones llamadas funciones trigonométricas. Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras distintas, pero equivalentes —como funciones de ángulos (capítulo 6) o funciones de números reales (capítulo 5)—. Los dos enfoques de la trigonometría son independientes entre sí, de modo que cualquiera de los capítulos 5 o 6 se puede estudiar primero. Tratamos ambos enfoques porque las diferentes aplicaciones requieren que estudiemos estas funciones de manera distinta. El enfoque de este capítulo se presta particularmente al modelado del movimiento periódico.

Si usted se ha subido a una rueda de la fortuna, entonces ya conoce el movimiento periódico —es decir, el movimiento que se repite una y otra vez—. Este tipo de movimiento es común en la naturaleza. Piense en la salida y en la puesta diarias del Sol (día, noche, día noche, . . .), la variación diaria en los niveles de las mareas (alta, baja, alta, baja, . . .), las vibraciones de una hoja en el viento (izquierda, derecha, izquierda, derecha, . . .), o bien, la presión en los cilindros del motor de un automóvil (alta, baja, alta, baja, . . .). Para poder describir tal movimiento desde el punto de vista de las matemáticas necesitamos una función cuyos valores aumenten, luego disminuyan, luego se incrementen, . . . , y que se repita este patrón indefinidamente. Para entender cómo definir tal función, veamos la rueda de la fortuna otra vez. Una persona que vaya en la rueda sube y baja, sube y baja, ... La gráfica muestra qué tan alto está la persona por arriba del centro de la rueda de la fortuna en el tiempo t. Observe que mientras la rueda gira la gráfica sube y baja en forma repetida.



Robin Smith/Stone/Getty Images

Definimos la función trigonométrica *seno* de manera similar. Empezamos con un círculo de radio 1, y para cada distancia t a lo largo del arco del círculo que termina en (x, y) definimos el valor de la función sen t como la altura, o bien, la coordenada y, de ese punto. Para aplicar esta función a situaciones del mundo cotidiano aplicamos las transformaciones que aprendimos en el capítulo 2 para acortar, ampliar o desplazar la función con el fin de ajustar la variación que estamos modelando.

Hay seis funciones trigonométricas, cada una con propiedades especiales. En este capítulo estudiamos sus definiciones, gráficas y aplicaciones. En la sección 5.5, vemos

cómo se pueden utilizar las funciones trigonométricas para modelar el movimiento armónico.

5.1 Círculo unitario

En esta sección exploramos algunas propiedades del círculo de radio 1 con centro en el origen. Estas propiedades se aplican en la sección siguiente para definir las funciones trigonométricas.

Círculo unitario

El conjunto de puntos a una distancia de 1 a partir del origen es un círculo de radio 1 (véase figura 1). En la sección 1.8 aprendimos que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

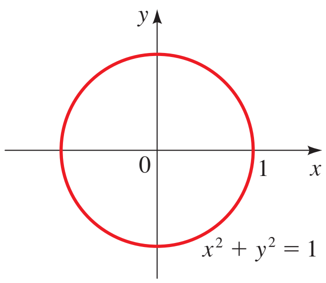


Figura 1
Círculo unitario

Círculo unitario

El **círculo unitario** es el que tiene un radio igual a 1 y su centro está en el origen de un plano xy. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ejemplo 1 Un punto en el círculo unitario

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en el círculo unitario.

Solución Necesitamos demostrar que este punto cumple con la ecuación del círculo unitario, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Puesto que

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

P está en el círculo unitario. ■

Ejemplo 2 Localización de un punto en el círculo unitario

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en el círculo unitario en el cuadrante IV. Encuentre su coordenada y.

Solución Puesto que el punto está en el círculo unitario, entonces

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

Como el punto está en el cuadrante IV, su coordenada y debe ser negativa, así que $y = -\frac{1}{2}$. ■

Puntos sobre la circunferencia del círculo unitario

Suponga que t es un número real. Recorramos una distancia t a lo largo del círculo unitario, empezando en el punto $(1, 0)$ y desplazándonos en sentido contrario al de las manecillas del reloj si t es positiva, o bien, en el sentido de las manecillas del reloj si t es negativa (figura 2). Así llegamos al punto $P(x, y)$ sobre el círculo unitario. El punto $P(x, y)$ obtenido de esta manera se llama **punto sobre la circunferencia** determinado por el número real t.

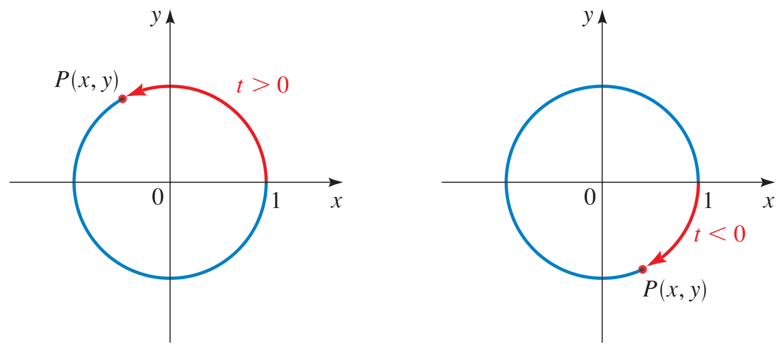


Figura 2 a) Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t > 0$ b) Punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia determinado por $t < 0$

La circunferencia del círculo unitario es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto empieza en $(1, 0)$ y se desplaza en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo de toda la circunferencia y regresa a $(1, 0)$, se desplaza una distancia de 2π. Para desplazarse medio camino alrededor del círculo, recorre una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo, recorre una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿En dónde se encuentra este punto cuando recorre estas distancias a lo largo del círculo? Según la figura 3, vemos por ejemplo que cuando recorre una distancia de π iniciando en $(1, 0)$, el punto final es $(-1, 0)$.

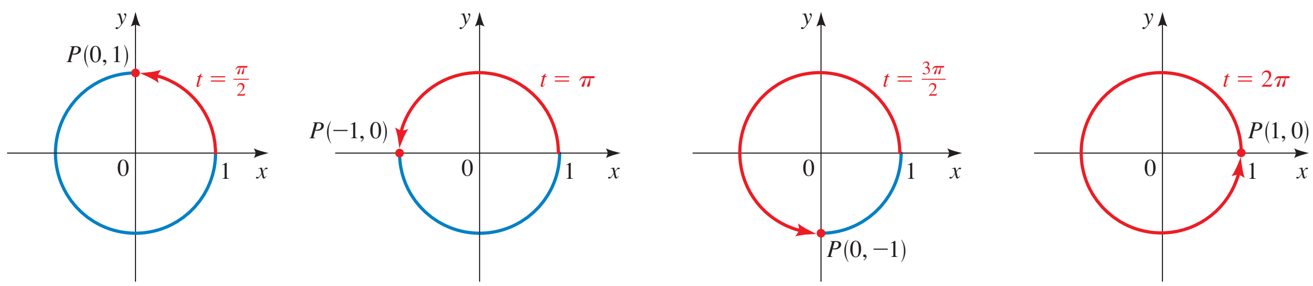


Figura 3
Puntos sobre la circunferencia determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π

Ejemplo 3 Determinación de los puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia del círculo unitario determinado por cada número real t.

a) $t = 3\pi$ b) $t = -\pi$ c) $t = -\dfrac{\pi}{2}$

Solución De acuerdo con la figura 4 observamos lo siguiente.

a) El punto determinado por 3π es $(-1, 0)$.

b) El punto determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.

c) El punto determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.

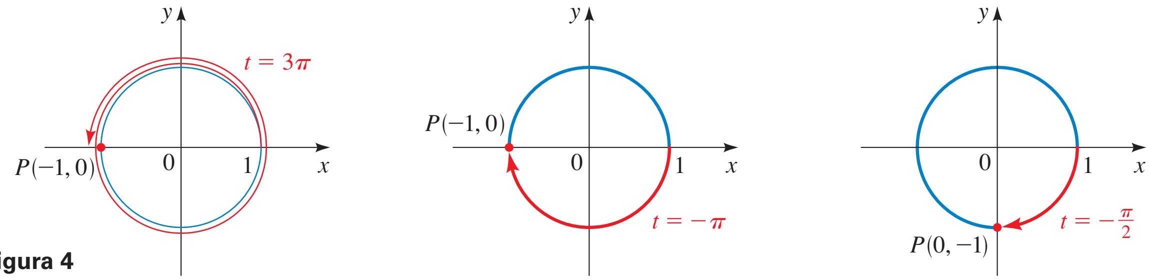


Figura 4

Observe que valores diferentes de t pueden determinar el mismo punto. ■

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia desde $(1, 0)$ que de $(0, 1)$ a lo largo del círculo unitario (véase figura 5).

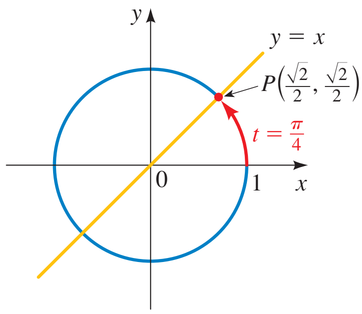


Figura 5

Puesto que el círculo unitario es simétrico con respecto a la recta $y = x$, se infiere que P queda sobre la recta $y = x$. De este modo, P es el punto, en el primer cuadrante, donde se cortan la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Al sustituir y por x en la ecuación de la circunferencia, tenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combinación de términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Como P está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y como $y = x$, entonces tenemos también $y = 1/\sqrt{2}$. Por lo tanto, el punto determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden aplicar métodos similares para calcular los puntos sobre la circunferencia determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$. Véanse ejercicios 55 y 56. En la tabla 1 y en la figura 6 se dan los puntos para algunos valores especiales de t.

Tabla 1

t	Punto determinado por t
0	$(1, 0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0, 1)$

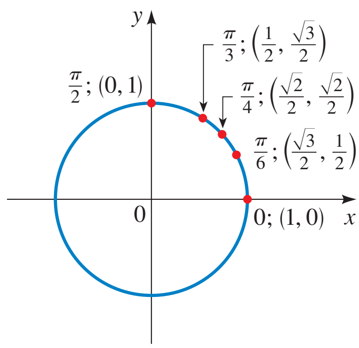


Figura 6

Ejemplo 4 Determinación de puntos sobre la circunferencia

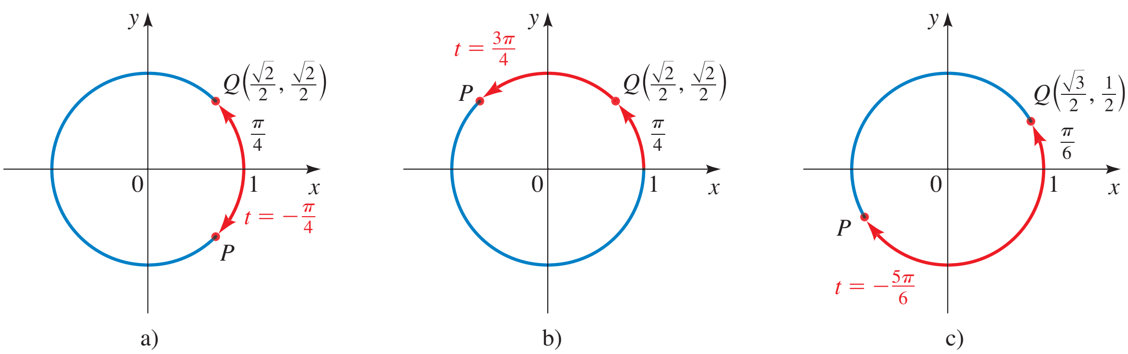
Calcule el punto sobre la circunferencia determinado por cada número real dado t.

a) $t = -\dfrac{\pi}{4}$ b) $t = \dfrac{3\pi}{4}$ c) $t = -\dfrac{5\pi}{6}$

Solución

a) Sea P el punto determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto determinado por $\pi/4$. A partir de la figura 7(a) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q, pero no el signo. Puesto que P está en el cuadrante IV, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia es $P\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$.

Figura 7



b) Sea P el punto sobre la circunferencia determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto determinado por $\pi/4$. En la figura 7(b) observamos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q, pero el signo es distinto. Como P está en el cuadrante II, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Por consiguiente, el punto es $P\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$.

c) Sea P el punto sobre la circunferencia determinado por $-5\pi/6$ y sea Q el punto definido por $\pi/6$. De acuerdo con la figura 7(c), vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q, pero signo distinto. Puesto que P está en el cuadrante III, sus coordenadas son negativas. Por consiguiente, el punto es $P\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$. ■

Número de referencia

Según los ejemplos 3 y 4, vemos que para encontrar el punto sobre la circunferencia en cualquier cuadrante sólo es necesario conocer el punto "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos el concepto de *número de referencia* como un auxiliar en el cálculo de los puntos sobre la circunferencia.

Número de referencia

Sea t un número real. El **número de referencia** $\bar{t}$ asociado a t es la distancia más corta a lo largo del círculo unitario entre el punto sobre la circunferencia determinado por t y el eje x.

En la figura 8 se ilustra que para calcular el número de referencia $\bar{t}$ es útil saber en qué cuadrante está el punto que se determinó mediante t. Si el punto quedó en los cuadrantes I o IV, donde x es positivo, encontramos $\bar{t}$ desplazándonos a lo largo del círculo hasta el eje *positivo* x. Si queda en los cuadrantes II o III, donde x es negativa, encontramos $\bar{t}$ recorriendo el círculo hasta el eje x *negativo*.

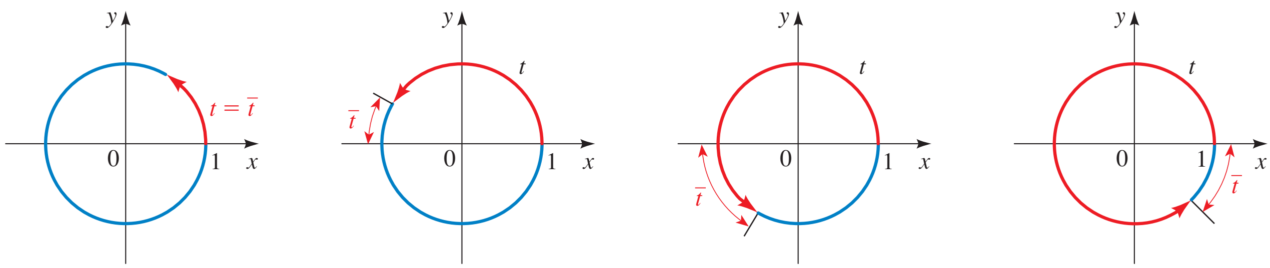


Figura 8
Número de referencia $\bar{t}$ para t

Ejemplo 5 Determinación de los números de referencia

Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ b) $t = \dfrac{7\pi}{4}$ c) $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ d) $t = 5.80$

Solución Encontramos los números de referencia en la figura 9 como sigue.

a) $\bar{t} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

b) $\bar{t} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

c) $\bar{t} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

d) $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$

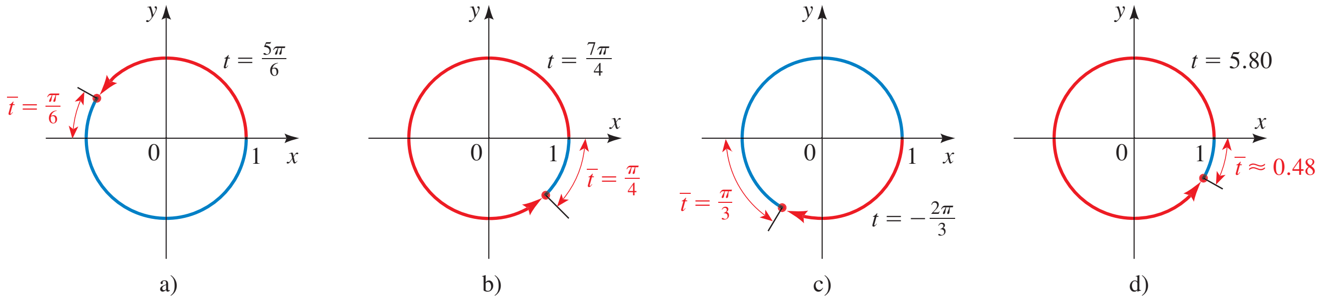


Figura 9

Uso de los números de referencia para los puntos sobre la circunferencia

Para determinar el punto P definido por cualquier valor de t, seguimos los pasos siguientes:

1. Encontrar el número de referencia $\bar{t}$.

2. Encontrar el punto sobre la circunferencia $Q(a, b)$ definido por $\bar{t}$.

3. El punto determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se eligen de acuerdo con el cuadrante en el cual está este punto sobre la circunferencia.

Ejemplo 6 Uso de los números de referencia para hallar los puntos sobre la circunferencia

Calcule el punto sobre la circunferencia determinado por cada uno de los números reales t.

a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ b) $t = \dfrac{7\pi}{4}$ c) $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

Solución Los números de referencia asociados con estos valores de t se calcularon en el ejemplo 5.

a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, el cual define el punto sobre la circunferencia $\left(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ según la tabla 1. Puesto que el punto determinado por t está en el cuadrante II, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, el cual determina el punto sobre la circunferencia $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$ de acuerdo con la tabla 1. Como el punto está en

el cuadrante IV, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Por consiguiente, el punto sobre la circunferencia deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

c) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, el cual determina el punto sobre la circunferencia $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ según la tabla 1. Como el punto determinado por t está en el cuadrante III, sus coordenadas son ambas negativas. Por lo tanto, el punto deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

■

Puesto que la circunferencia del círculo unitario es 2π, el punto sobre la circunferencia determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto sobre la circunferencia determinado por t. Aplicamos esta observación en el ejemplo siguiente para hallar los puntos sobre la circunferencia para t grandes.

Ejemplo 7 Determinación del punto sobre la circunferencia para *t* grandes

Calcule el punto sobre la circunferencia definido por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

Solución Puesto que

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto sobre la circunferencia determinado por t es el mismo que el de $5\pi/6$ (es decir, restamos 4π). Entonces, por el ejemplo 6(a) el punto buscado es $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$. (Véase figura 10.) ■

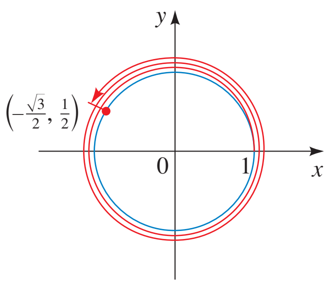


Figura 10

5.1 Ejercicios

1–6 ■ Demuestre que el punto está en el círculo unitario.

1. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **2.** $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ **3.** $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$

4. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ **5.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **6.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

7–12 ■ Determine la coordenada faltante de P si sabemos que P está en el círculo unitario en el cuadrante dado

Coordenadas	Cuadrante
7. $P(-\frac{3}{5}, \quad)$	III
8. $P(\quad, -\frac{7}{25})$	IV
9. $P(\quad, \frac{1}{3})$	II
10. $P(\frac{2}{5}, \quad)$	I
11. $P(\quad, -\frac{2}{7})$	IV
12. $P(-\frac{2}{3}, \quad)$	II

13–18 ■ El punto P está en el círculo unitario. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información proporcionada.

13. La coordenada x de P es $\frac{4}{5}$ y la coordenada y es positiva.

14. La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$ y la coordenada x es positiva.

15. La coordenada y de P es $\frac{2}{3}$ y la coordenada x es negativa.

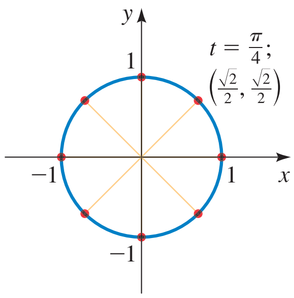
16. La coordenada x de P es positiva y la coordenada y de P es $-\sqrt{5}/5$.

17. La coordenada x de P es $-\sqrt{2}/3$ y P queda abajo del eje x.

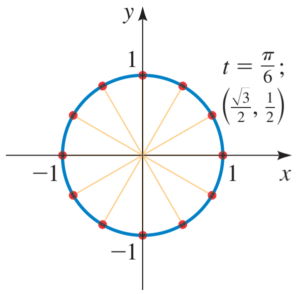
18. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$ y P queda por encima del eje x.

19–20 ■ Encuentre t y el punto sobre la circunferencia determinado por t para cada punto de la figura. En el ejercicio 19, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 20, t aumenta en incrementos de $\pi/6$.

19.



20.



21–30 ■ Calcule el punto $P(x, y)$ sobre el círculo unitario definido por el valor dado de t.

21. $t = \frac{\pi}{2}$

22. $t = \frac{3\pi}{2}$

23. $t = \frac{5\pi}{6}$

24. $t = \frac{7\pi}{6}$

25. $t = -\frac{\pi}{3}$

26. $t = \frac{5\pi}{3}$

27. $t = \frac{2\pi}{3}$

28. $t = -\frac{\pi}{2}$

29. $t = -\frac{3\pi}{4}$

30. $t = \frac{11\pi}{6}$

31. Suponga que el punto definido por t es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ del círculo unitario. Encuentre el punto sobre la circunferencia definido por cada uno de los siguientes valores.

a) $\pi - t$ **b)** $-t$
c) $\pi + t$ **d)** $2\pi + t$

32. Suponga que el punto determinado por t es el punto $\left(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4\right)$ del círculo unitario. Encuentre el punto determinado por cada uno de los valores siguientes.

a) $-t$ **b)** $4\pi + t$
c) $\pi - t$ **d)** $t - \pi$

33–36 ■ Calcule el número de referencia para cada valor de t.

33. a) $t = \frac{5\pi}{4}$ **b)** $t = \frac{7\pi}{3}$
c) $t = -\frac{4\pi}{3}$ **d)** $t = \frac{\pi}{6}$

34. a) $t = \frac{5\pi}{6}$ **b)** $t = \frac{7\pi}{6}$
c) $t = \frac{11\pi}{3}$ **d)** $t = -\frac{7\pi}{4}$

35. a) $t = \frac{5\pi}{7}$ **b)** $t = -\frac{7\pi}{9}$
c) $t = -3$ **d)** $t = 5$

36. a) $t = \frac{11\pi}{5}$ **b)** $t = -\frac{9\pi}{7}$
c) $t = 6$ **d)** $t = -7$

37–50 ■ Calcule **a)** el número de referencia de cada valor de t y **b)** el punto determinado por t.

37. $t = \frac{2\pi}{3}$

38. $t = \frac{4\pi}{3}$

39. $t = \frac{3\pi}{4}$

40. $t = \frac{7\pi}{3}$

41. $t = -\frac{2\pi}{3}$

42. $t = -\frac{7\pi}{6}$

43. $t = \frac{13\pi}{4}$

44. $t = \frac{13\pi}{6}$

45. $t = \frac{7\pi}{6}$

46. $t = \frac{17\pi}{4}$

47. $t = -\frac{11\pi}{3}$

48. $t = \frac{31\pi}{6}$

49. $t = \frac{16\pi}{3}$

50. $t = -\frac{41\pi}{4}$

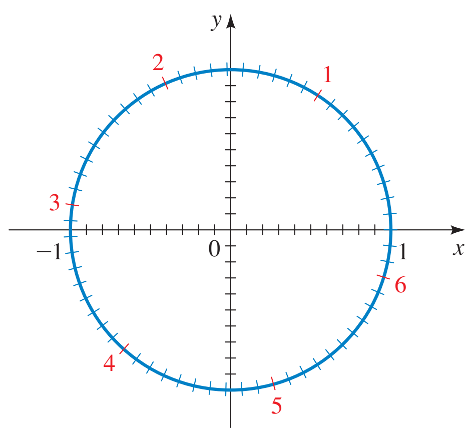
51–54 ■ Mediante la figura encuentre el punto sobre la circunferencia determinado por el número real t, con coordenadas con una cifra decimal.

51. $t = 1$

52. $t = 2.5$

53. $t = -1.1$

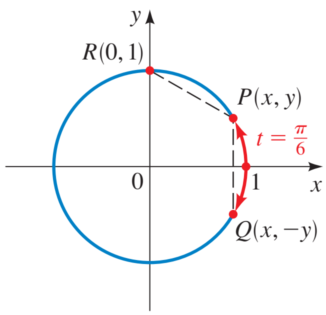
54. $t = 4.2$



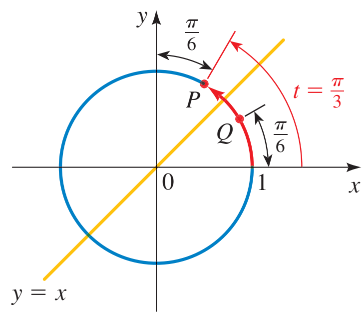
Descubrimiento • Debate

55. Determinación del punto sobre la circunferencia para $\pi/6$ Suponga que $P(x, y)$ es el punto sobre la circunferencia determinado por $t = \pi/6$ y los puntos Q y R son los mostrados en la figura de la página siguiente. ¿Por qué las distancias PQ y PR son iguales? Use este hecho junto con la fórmula de la distancia para demostrar que las coordenadas de P cumplen

con la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación utilizando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada y determine $P(x, y)$.



56. Cálculo del punto sobre la circunferencia de $\pi/3$ Ahora que ya conoce el punto determinado por $t = \pi/6$, aplique la simetría para encontrar el punto determinado por $t = \pi/3$ (véase la figura). Explique su razonamiento.



5.2 Funciones trigonométricas de números reales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección utilizamos las propiedades del círculo unitario de acuerdo con la sección anterior para definir las funciones trigonométricas.

Funciones trigonométricas

Recuerde que encontrar el punto $P(x, y)$ sobre la circunferencia para un número real dado t, recorremos una distancia t a lo largo del círculo unitario, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en sentido contrario al de las manecillas del reloj si t es positiva y en el sentido de las manecillas si t es negativa (véase figura 1). Ahora usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* asignando a cada número real t la coordenada y del punto $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* se definen también usando las coordenadas de $P(x, y)$.

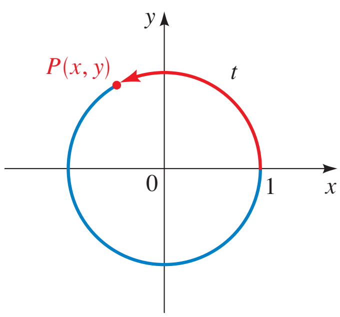


Figura 1

Definición de las funciones trigonométricas

Sea t un número real y sea $P(x, y)$ el punto del círculo unitario determinado por t. Definimos

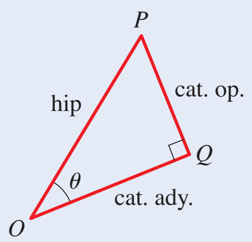
$$\text{sen}\, t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Como las funciones trigonométricas se pueden definir en términos del círculo unitario, algunas veces se les llama **funciones circulares.**

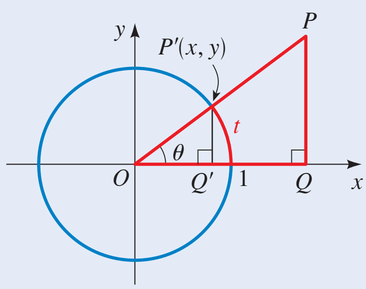
Relaciones de las funciones trigonométricas de los ángulos

Si usted estudió las propiedades trigonométricas de los triángulos rectángulos (capítulo 6), quizá se esté preguntando cómo el seno y el coseno de un ángulo se relacionan con esta sección. Para saberlo, iniciemos con un triángulo rectángulo ΔOPQ.



Triángulo rectángulo *OPQ*

Localice el triángulo en el plano coordenado como se muestra, con el ángulo θ en la posición normal.



$P'(x, y)$ es el punto determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto que está determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos miden x y y.

Ahora, por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ tenemos

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cat. op.}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

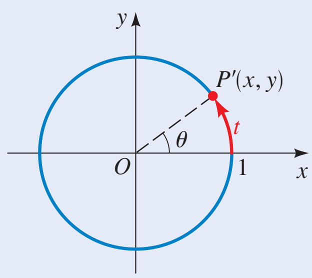
$$\cos\theta = \frac{\text{cat. ady.}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

Ahora, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (véase la figura). Entonces, las funciones trigonométricas del ángulo con θ dado en radianes son exactamente las mismas que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto sobre la circunferencia determinado por el número real t.



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué estudiar entonces trigonometría de dos maneras distintas? Porque aplicaciones diferentes requieren que veamos de forma distinta las funciones trigonométricas. (Compare la sección 5.5 con las secciones 6.2, 6.4 y 6.5.)

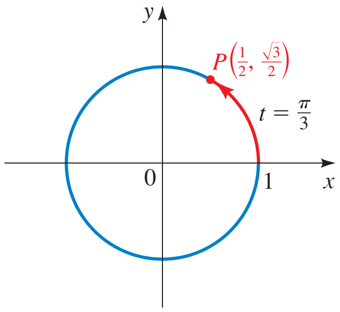


Figura 2

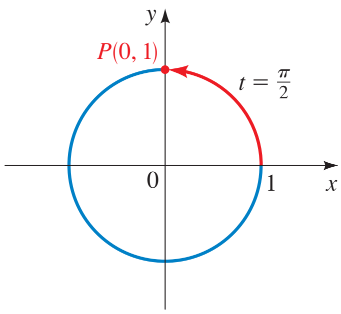


Figura 3

Podemos recordar con toda facilidad los senos y los cosenos de los ángulos básicos escribiéndolos en la forma $\sqrt{}/2$:

t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

Ejemplo 1 Evaluación de las funciones trigonométricas

Calcule las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ b) $t = \dfrac{\pi}{2}$

Solución

a) Según la tabla 1 de la página 403, vemos que el punto determinado por $t = \pi/3$ es $P\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$. (Véase figura 2.) Puesto que las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, entonces

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{4} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) El punto determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Véase figura 3.) Entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidas porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones. ■

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se listan en la tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la tabla 1 de la sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

Tabla 1 Valores especiales de las funciones trigonométricas

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

En el ejemplo 1 se puede observar que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales. Así que necesitamos determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Como las funciones cotangente y cosecante tienen y en el denominador de sus definiciones, no están definidas cuando la coordenada y del punto $P(x, y)$ determinado por t sea 0. Esto sucede cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen x en el denominador en sus definiciones, de modo que no están definidas cuando $x = 0$. Esto sucede cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

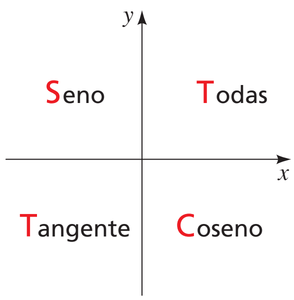
Dominios de las funciones trigonométricas

Función	Dominio
sen, cos	Todos los números reales
tan, sec	Todos los números reales diferentes de $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot, csc	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas primero determinamos los signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el cual se encuentre el punto determinado por t. Por ejemplo, si el punto $P(x, y)$ determinado por t está en el cuadrante III, entonces las coordenadas son negativas. Entonces, sen t, cos t, csc t y sec t son negativas, en tanto que tan t y cot t son positivas. Puede comprobar los otros valores en el recuadro siguiente.

La siguiente regla nemotécnica le ayuda a recordar cuáles funciones trigonométricas son positivas en cada uno de los cuadrantes: Todas, Seno, Tangente o Coseno.



Lo puede recordar mejor como: "Todas las Estudiantes Toman Cálculo."

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

Ejemplo 2 Determinación del signo de la función trigonométrica

a) $\cos \frac{\pi}{3} > 0$, porque el punto determinado por $t = \frac{\pi}{3}$ está en el cuadrante I.

b) $\tan 4 > 0$, porque el punto determinado por $t = 4$ está en el cuadrante III.

c) Si $\cos t < 0$ y $\operatorname{sen} t > 0$, entonces el punto determinado por t tiene que estar en el cuadrante II. ■

En la sección 5.1 usamos el número de referencia para determinar el punto que define un número real t. Como las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de los puntos sobre la circunferencia, podemos utilizar el número de referencia para encontrar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia de t. Entonces el punto sobre la circunferencia $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente el signo, que el punto que determina t. De este modo, los valores de las funciones trigonométricas en t son los mismos, excepto quizás el signo, que sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3 Evaluación de las funciones trigonométricas

Determine cada uno de los valores.

a) $\cos \dfrac{2\pi}{3}$ b) $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ c) $\operatorname{sen} \dfrac{19\pi}{4}$

Solución

a) El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (véase figura 4(a)). Puesto que el número final de $2\pi/3$ está en el cuadrante II, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Por consiguiente

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo | Número de referencia | Según la tabla 1

b) El número de referencia de $-\pi/3$ es $\pi/3$ (véase figura 4(b)). Como el punto definido por $-\pi/3$ está en el cuadrante IV, $\tan(-\pi/3)$ es negativo. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo | Número de referencia | Según la tabla 1

c) Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son iguales. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (véase la figura 4(c)). Puesto que el punto sobre la circunferencia de $3\pi/4$ está en el cuadrante II, $\operatorname{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen} \frac{19\pi}{4} = \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = +\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Resta de 4π | Signo | Número de referencia | Según la Tabla 1

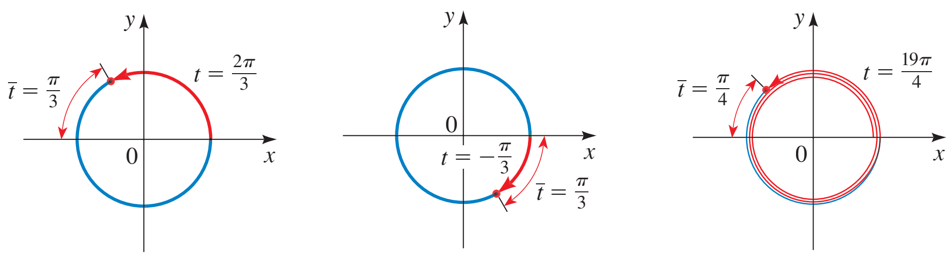


Figura 4 a) b) c)

Hasta este momento hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de t. De hecho, podemos calcular los valores de funciones trigonométricas siempre y cuando t sea un múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de t? Por ejemplo, ¿cómo podemos determinar sen 1.5? Una manera es dibujar con todo cuidado un diagrama y leer el valor (véase ejercicios 37-44); no obstante, este método no es muy seguro. Por fortuna hay procedimientos matemáticos que están programados en la calculadora científica (véase nota al margen en la página 436) que calculan los valores de *seno, coseno* y *tangente* que son correctos con todas la cifras decimales que se ven

en la pantalla. La calculadora debe estar puesta en el *modo de radianes* para poder evaluar estas funciones. Para determinar los valores de cosecante, secante y cotangente usando una calculadora es necesario aplicar las *relaciones recíprocas* siguientes:

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se infieren de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\operatorname{sen} t = y$ y $\csc t = 1/y$, tenemos $\csc t = 1/y = 1/(\operatorname{sen} t)$. Las otras se infieren de manera similar.

Ejemplo 4 Uso de la calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurémonos de que la calculadora está en el modo de radianes y de redondear el resultado a seis cifras decimales; entonces tenemos

a) $\operatorname{sen} 2.2 \approx 0.808496$ b) $\cos 1.1 \approx 0.453596$

c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$ d) $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 0.98} \approx 1.204098$ ■

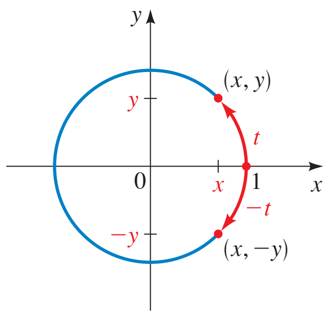


Figura 5

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. Según la figura 5, se puede observar que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$

$$\cos(-t) = x = \cos t$$

$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas ecuaciones muestran que el seno y la tangente son funciones impares, en tanto que el coseno es una función par. Es fácil observar que el recíproco de una función par es par y el recíproco de una función impar es impar. Este hecho, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

Las funciones pares e impares se definen en la sección 2.4.

Propiedades pares e impares

El seno, la cosecante, la tangente y la cotangente son funciones impares; el coseno y la secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$

$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

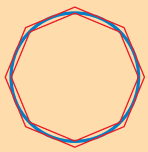
Ejemplo 5 Funciones trigonométricas pares e impares

Utilice las propiedades pares e impares de las funciones trigonométricas para determinar cada uno de los valores.

a) $\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ b) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$

El valor de π

El número π es la relación de la circunferencia de un círculo a su diámetro. Desde épocas muy antiguas se sabe que esta relación es la misma en todos los círculos. El primer esfuerzo sistemático para encontrar una aproximación numérica de π lo hizo Arquímedes (alrededor de 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ determinando el perímetro de polígonos regulares inscritos en un círculo y circunscritos al mismo.



Por el año 480 d.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

la cual es correcta hasta la sexta cifra decimal. Este valor se consideró como la estimación más aproximada hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos de más de mil millones de lados para calcular π con 15 cifras decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en la búsqueda de π. El inglés William Shanks pasó 15 años (1858-1873) aplicando estos métodos para calcular π con 707 decimales, pero en 1946 se descubrió que estas cifras eran erróneas a partir de la cifra decimal 528. En la actualidad, con la ayuda de computadoras los matemáticos en forma rutinaria determinan π con millones de cifras decimales.

Solución De acuerdo con las propiedades pares-impares y la tabla 1, tenemos

a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ *El seno es impar*

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *El coseno es par* ■

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas se relacionan entre sí mediante ecuaciones llamadas **identidades trigonométricas**. Presentamos las más importantes en el recuadro siguiente.*

Identidades fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

■ **Demostración** Las identidades recíprocas se infieren inmediatamente de la definición de la página 408. Enseguida demostramos las identidades pitagóricas. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en el círculo unitario. Puesto que $P(x, y)$ están sobre el círculo unitario, tenemos $x^2 + y^2 = 1$. Por consiguiente

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Al dividir ambos miembros entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos usado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. De manera similar, al dividir ambos miembros de la primera identidad pitagórica entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) obtenemos $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

*Nos apegamos a la convención usual de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ en lugar de $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ en lugar de $(\operatorname{sen} t)^n$ para todos los enteros n, excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la sección 7.4. Naturalmente, la misma convención se aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

Como su nombre lo indica, las identidades fundamentales tienen un papel esencial en la trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquier otra. Entonces, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, podemos calcular los valores de todas las otras en t.

Ejemplo 6 Cálculo de todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuadrante IV, calcule los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

Solución De acuerdo con las identidades pitagóricas tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustitución de } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje de } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Puesto que este punto está en el cuadrante IV, sen t es negativo, de modo que $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$. Ahora que ya conocemos tanto sen t como cos t, podemos calcular los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas.

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

■

Ejemplo 7 Expresar una función trigonométrica en función de otra

Escriba tan t en función de cos t, donde t está en el cuadrante III.

Solución Como $\tan t = \operatorname{sen} t / \cos t$, necesitamos escribir sen t en términos de cos t. De acuerdo con las identidades pitagóricas tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad \text{Despeje de } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Como sen t es negativo en el cuadrante III, el signo negativo se aplica aquí. Por lo tanto,

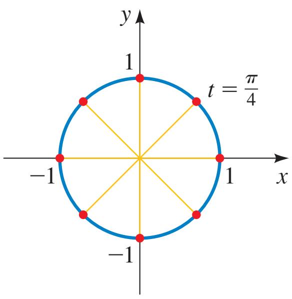
$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

■

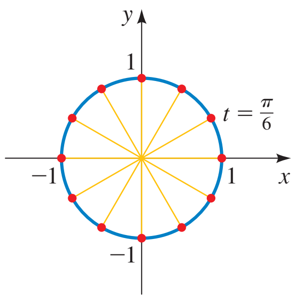
5.2 Ejercicios

1–2 ■ Determine sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos al final del recorrido se muestran en el círculo unitario de la figura. En el ejercicio 1, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 2, t se incrementa en incrementos de $\pi/6$. (Véanse ejercicios 19 y 20 de la sección 5.1.)

1.



2.



3–22 ■ Calcule el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

3. a) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ **b)** $\cos \frac{2\pi}{3}$ **c)** $\tan \frac{2\pi}{3}$

4. a) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}$ **b)** $\cos \frac{5\pi}{6}$ **c)** $\tan \frac{5\pi}{6}$

5. a) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$ **b)** $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **c)** $\operatorname{sen} \frac{11\pi}{6}$

6. a) $\cos \frac{5\pi}{3}$ **b)** $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **c)** $\cos \frac{7\pi}{3}$

7. a) $\cos \frac{3\pi}{4}$ **b)** $\cos \frac{5\pi}{4}$ **c)** $\cos \frac{7\pi}{4}$

8. a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ **b)** $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$ **c)** $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}$

9. a) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{3}$ **b)** $\csc \frac{7\pi}{3}$ **c)** $\cot \frac{7\pi}{3}$

10. a) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **c)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

11. a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

12. a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **b)** $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **c)** $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

13. a) $\sec \frac{11\pi}{3}$ **b)** $\csc \frac{11\pi}{3}$ **c)** $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

14. a) $\cos \frac{7\pi}{6}$ **b)** $\sec \frac{7\pi}{6}$ **c)** $\csc \frac{7\pi}{6}$

15. a) $\tan \frac{5\pi}{6}$ **b)** $\tan \frac{7\pi}{6}$ **c)** $\tan \frac{11\pi}{6}$

16. a) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\cot \frac{2\pi}{3}$ **c)** $\cot \frac{5\pi}{3}$

17. a) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

18. a) $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4}$ **b)** $\sec \frac{5\pi}{4}$ **c)** $\tan \frac{5\pi}{4}$

19. a) $\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ **b)** $\csc \frac{\pi}{2}$ **c)** $\csc \frac{3\pi}{2}$

20. a) $\sec(-\pi)$ **b)** $\sec \pi$ **c)** $\sec 4\pi$

21. a) $\operatorname{sen} 13\pi$ **b)** $\cos 14\pi$ **c)** $\tan 15\pi$

22. a) $\operatorname{sen} \frac{25\pi}{2}$ **b)** $\cos \frac{25\pi}{2}$ **c)** $\cot \frac{25\pi}{2}$

23–26 ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas, si están definidas, en el número real dado t. Utilice sus respuestas para completar la tabla.

23. $t = 0$ **24.** $t = \frac{\pi}{2}$ **25.** $t = \pi$ **26.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinida		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinida
$\frac{3\pi}{2}$						

27–36 ■ Se proporciona el punto $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

27. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **28.** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

29. $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ **30.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

31. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **32.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

33. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **34.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

35. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **36.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

37–44 ■ Estime el valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **a)** la figura y **b)** una calculadora. Compare los dos valores.

37. sen 1

38. cos 0.8

39. sen 1.2

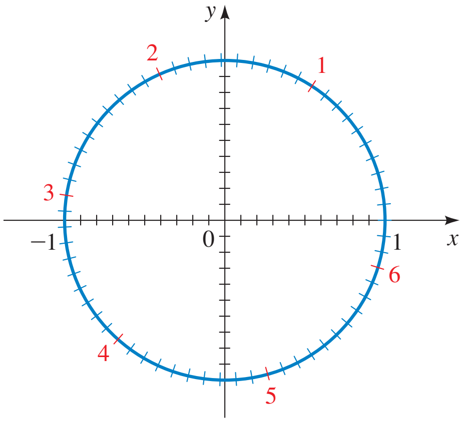
40. cos 5

41. tan 0.8

42. tan(−1.3)

43. cos 4.1

44. sen(−5.2)



45–48 ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto determinado por t está en el cuadrante indicado.

45. sen t cos t, cuadrante II

46. tan t sec t, cuadrante IV

47. $\dfrac{\tan t \text{ sen } t}{\cot t}$, cuadrante III

48. cos t sec t, cualquier cuadrante

49–52 ■ A partir de la información dada encuentre el cuadrante en el cual está el punto determinado por t.

49. sen $t > 0$ y cos $t < 0$

50. tan $t > 0$ y sen $t < 0$

51. csc $t > 0$ y sec $t < 0$

52. cos $t < 0$ y cot $t < 0$

53–62 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto determinado por t está en el cuadrante indicado.

53. sen t, cos t; cuadrante II

54. cos t, sen t; cuadrante IV

55. tan t, sen t; cuadrante IV

56. tan t, cos t; cuadrante III

57. sec t, tan t; cuadrante II

58. csc t, cot t; cuadrante III

59. tan t, sec t; cuadrante III

60. sen t, sec t; cuadrante IV

61. $\tan^2 t$, sen t; cualquier cuadrante

62. $\sec^2 t \text{ sen}^2 t$, cos t; cualquier cuadrante

63–70 ■ Determine los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información proporcionada.

63. sen $t = \frac{3}{5}$, el punto definido por t está en el cuadrante II

64. cos $t = -\frac{4}{5}$, el punto definido por t está en el cuadrante III

65. sec $t = 3$, el punto definido por t está en el cuadrante IV

66. tan $t = \frac{1}{4}$, el punto definido por t está en el cuadrante III

67. tan $t = -\frac{3}{4}$, cos $t > 0$

68. sec $t = 2$, sen $t < 0$

69. sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

70. tan $t = -4$, csc $t > 0$

71–78 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

71. $f(x) = x^2 \text{ sen } x$

72. $f(x) = x^2 \cos 2x$

73. $f(x) = \text{sen } x \cos x$

74. $f(x) = \text{sen } x + \cos x$

75. $f(x) = |x| \cos x$

76. $f(x) = x \text{ sen}^3 x$

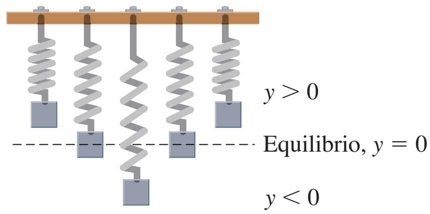
77. $f(x) = x^3 + \cos x$

78. $f(x) = \cos(\text{sen } x)$

Aplicaciones

79. Movimiento armónico El desplazamiento desde el equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte es $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Calcule el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

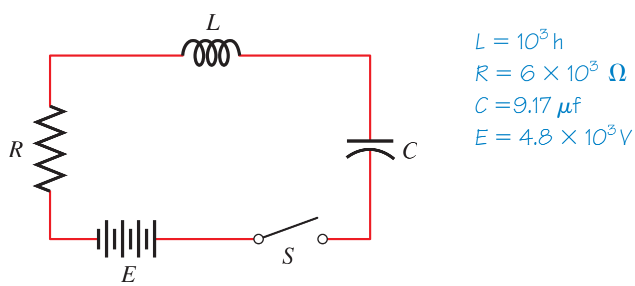
t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



80. Ritmos circadianos La presión sanguínea del hombre varía a lo largo del día. En una cierta persona, la presión sanguínea diastólica en reposo en el tiempo t se obtiene mediante $B(t) = 80 + 7 \text{ sen } (\pi t/12)$, donde t se mide en horas a partir de la medianoche y $B(t)$ en milímetros de mercurio (mmHg). Calcule la presión sanguínea diastólica de esta persona

a) a las 6:00 A.M. **b)** a las 10:30 A.M. **c)** al mediodía **d)** a las 8:00 P.M.

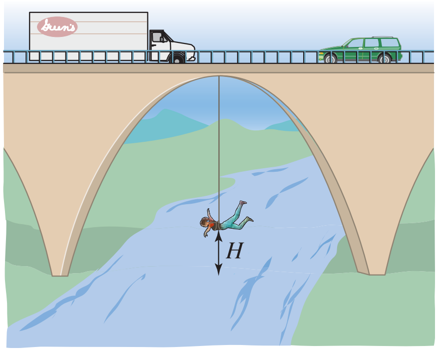
81. Circuito eléctrico Después de que se cierra el interruptor en el circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t} \text{ sen } 10t$. Calcule la corriente en los tiempos **a)** $t = 0.1$ s y **b)** $t = 0.5$ s.



82. Salto con bungee Una mujer salta, sujeta a un elástico, desde un punto alto hacia el río que corre abajo, y rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de saltar, su altura H en metros por arriba del río se representa mediante

$H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos(\frac{\pi}{4}t)$. Calcule su altura en los tiempos señalados en la tabla.

t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	

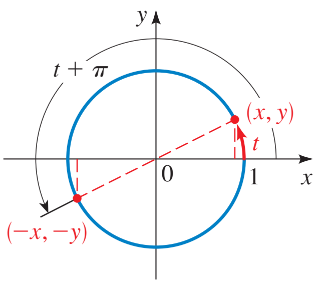


Descubrimiento • Debate

83. Fórmulas de reducción Una *fórmula de reducción* es una que se usa para "reducir" la cantidad de términos en una función trigonométrica. Explique cómo la figura muestra que las siguientes fórmulas de reducción son válidas:

$$\operatorname{sen}(t + \pi) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(t + \pi) = -\cos t$$

$$\tan(t + \pi) = \tan t$$

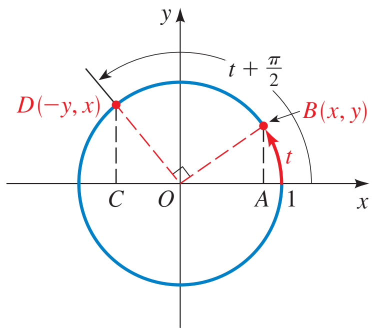


84. Más fórmulas de reducción Por medio del teorema de "ángulo-lado-ángulo" de la geometría elemental, los triángulos *CDO* y *AOB* de la figura son congruentes. Explique cómo esto demuestra que si *B* tiene coordenadas (x, y), entonces *D* tiene coordenadas $(-y, x)$. Luego explique cómo la figura muestra que las siguientes fórmulas de reducción son válidas.

$$\operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$

$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} t$$

$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$



5.3 Gráficas trigonométricas

La gráfica de una función nos proporciona una mejor idea de su comportamiento. De este modo, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones se grafican en la sección siguiente.

Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno primero observemos que dichas funciones repiten sus valores según un patrón. Para ver exactamente cómo sucede esto, recuerde que la circunferencia de un círculo unitario es 2π. Se infiere entonces que el punto $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Puesto que las funciones seno y coseno se definen en términos de las coordenadas de $P(x, y)$ se infiere que sus valores no cambian al añadir cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Por lo tanto, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la definición siguiente. Un función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. Tal número positivo mínimo, si es que existe, es el **periodo** de f. Si f tiene periodo p, entonces se dice que la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p es **un periodo completo** de f.

Propiedades periódicas del seno y el coseno

Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π:

$$\text{sen}(t + 2\pi) = \text{sen}\, t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

Tabla 1

t	sen t	cos t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar las gráficas, primero graficamos un periodo. Para trazar las gráficas en el intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$, podríamos intentar elaborar una tabla de valores y usar dichos puntos para dibujar la gráfica. Puesto que una tabla así está incompleta, veamos con más detalle las definiciones de estas funciones.

Tenga presente que sen t es la coordenada y del punto $P(x, y)$ en el círculo unitario determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta hasta 1, luego disminuye repetidamente hasta -1 a medida que el punto $P(x, y)$ recorre el círculo unitario (véase figura 1). En efecto, a medida que t aumenta desde 0 hasta $\pi/2$, $y = \text{sen}\, t$ aumenta desde 0 hasta 1. Conforme t se incrementa de $\pi/2$ hasta π, el valor de $y = \text{sen}\, t$ disminuye desde 1 hasta 0. En la tabla 1 se muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

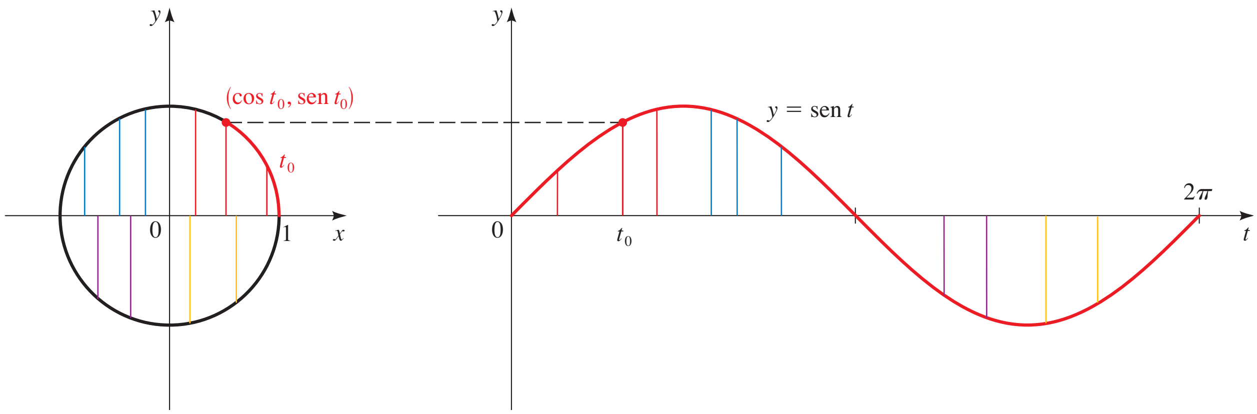


Figura 1

Para trazar la gráfica con mayor exactitud, determinamos otros pocos valores de sen t y cos t en la tabla 2. Podríamos determinar más valores con la ayuda de una calculadora.

Tabla 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Ahora utilizamos esta información para graficar las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las figuras 2 y 3. Estas son las gráficas de un periodo. Obtenemos las gráficas completas aprovechando el hecho de que estas funciones son periódicas y su periodo es 2π y siguiendo el mismo patrón a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Así se esperaba, ya que el seno es una función impar. Puesto que la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

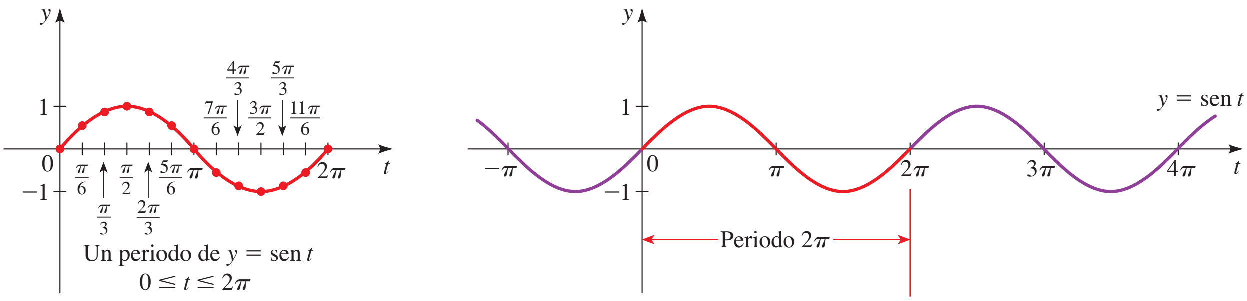


Figura 2
Gráfica de sen t

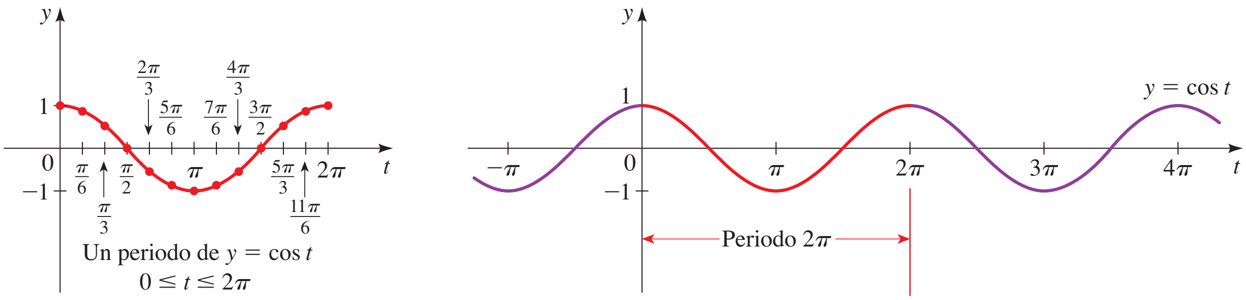


Figura 3
Gráfica de cos t

Gráficas de transformaciones de seno y coseno

En seguida consideramos las gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno, para lo cual, las técnicas de graficación de la sección 2.4 son muy útiles. Las gráficas que se obtienen son muy importantes para entender las aplicaciones a las situaciones físicas como el movimiento armónico (véase sección 5.5), pero algunas de ellas son gráficas hermosas que son interesantes por derecho propio.

Lo común es usar la x para denotar la variable en el dominio de una función. Entonces, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

Ejemplo 1 Curvas del coseno

Trace la gráfica de cada función.

a) $f(x) = 2 + \cos x$ b) $g(x) = -\cos x$

Solución

a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero se desplaza hacia arriba 2 unidades (véase figura 4(a)).

b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.

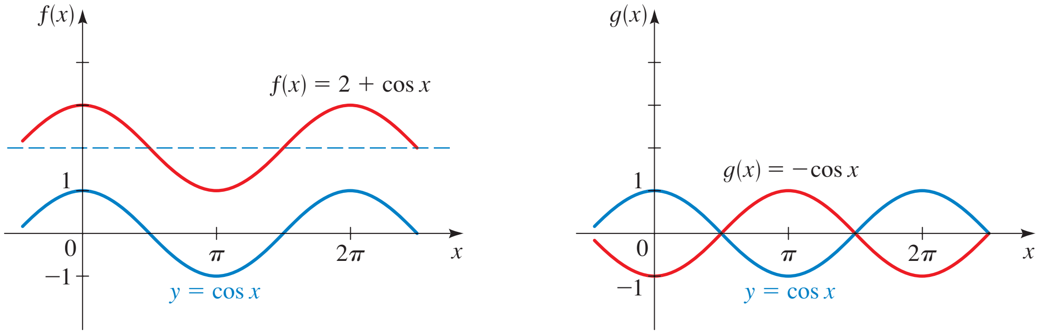


Figura 4 a) b)

Grafiquemos $y = 2 \operatorname{sen} x$. Empezamos con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y multiplicamos la coordenada y de cada punto por 2. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica por un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$, empezamos por graficar $y = \operatorname{sen} x$ y multiplicamos la coordenada y de cada punto por $\frac{1}{2}$. El efecto de esta operación es acortar verticalmente la gráfica por un factor de $\frac{1}{2}$ (véase figura 5).

El alargamiento y el acortamiento de las gráficas se estudian en la sección 2.4

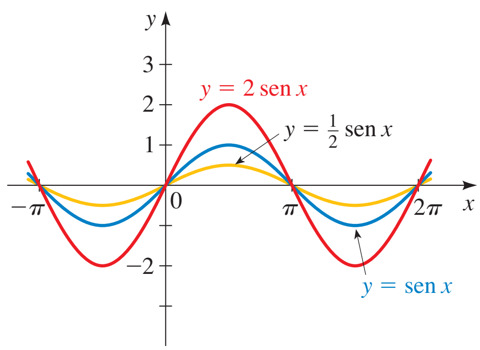


Figura 5

En general, para las funciones

$$y = a \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se llama **amplitud** y es el valor más grande que alcanzan estas funciones. Las gráficas de $y = a \operatorname{sen} x$ para varios valores de a se ilustran en la figura 6.

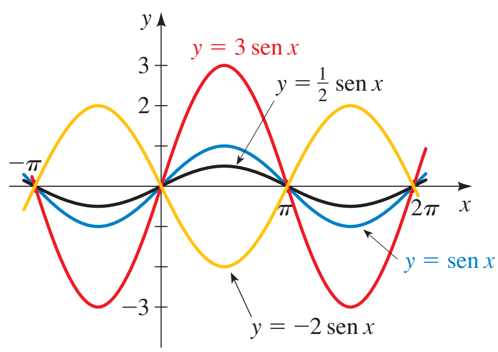


Figura 6

Ejemplo 2 Alargamiento de la curva del coseno

Determine la amplitud de $y = -3 \cos x$ y trace la gráfica.

Solución La amplitud es $|-3| = 3$, por lo que el valor más grande que alcanza la gráfica es 3 y el más pequeño es -3. Para trazar la gráfica empezamos por graficar $y = \cos x$, alargar verticalmente la gráfica por un factor de 3 y reflejarla en el eje x. Así se obtiene la gráfica de la figura 7.

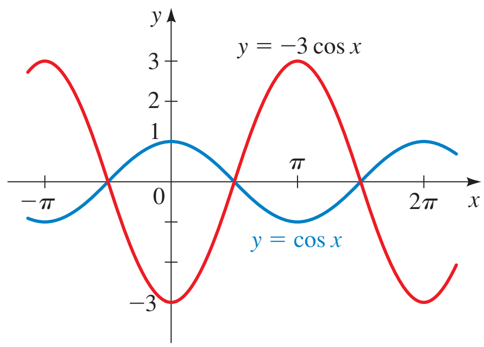


Figura 7

■

Puesto que las funciones seno y coseno tienen periodo de 2π, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo cuando kx varía desde 0 hasta 2π, es decir, para $0 \leq kx \leq 2\pi$, o bien, para $0 \leq x \leq 2\pi/k$. De modo que estas funciones completan un periodo cuando x varía entre 0 y $2\pi/k$ y, por lo tanto, tienen periodo $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se llaman **curvas seno** y **curvas coseno**, respectivamente. Con frecuencia, a las curvas seno y coseno se les llama curvas **sinusoidales**.

Curvas seno y coseno

Las curvas seno y coseno

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen amplitud $|a|$ y periodo $2\pi/k$.

Un intervalo adecuado para graficar en él un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

El alargamiento horizontal y el acortamiento se analizan en la sección 2.4.

Para ver cómo el valor de k afecta la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Puesto que el periodo es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$ (véase figura 8(a)). En el caso de la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, y de este modo la gráfica completa un periodo en el intervalo $0 \leq x \leq 4\pi$ (véase figura 8(b)). Observamos que el efecto es *acortar* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica en el sentido horizontal si $k < 1$.

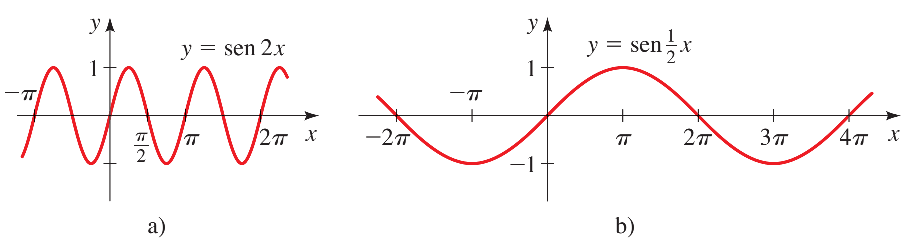


Figura 8

Para comparar, en la figura 9 ilustramos las gráficas de un periodo de la curva seno $y = a \text{ sen } kx$ para varios valores de k.

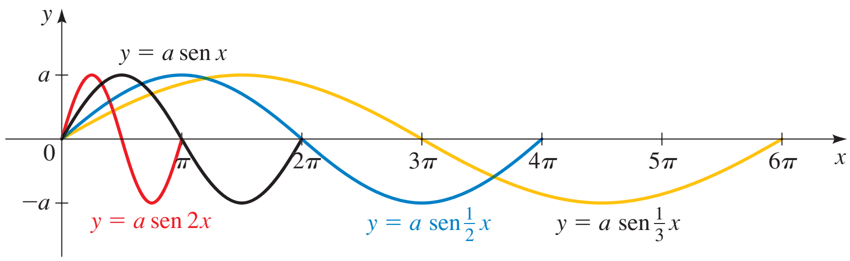


Figura 9

Ejemplo 3 Amplitud y periodo

Determine la amplitud y el periodo de cada una de las funciones, y trace la gráfica.

a) $y = 4 \cos 3x$ b) $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$

Solución

a) Obtenemos la amplitud y el periodo de la forma de la función como sigue:

amplitud $= |a| = 4$

$$y = 4 \cos 3x$$

periodo $= \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{3}$

La amplitud es 4 y el periodo es $2\pi/3$. La gráfica se muestra en la figura 10

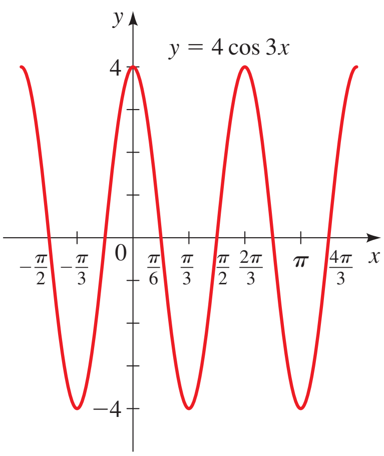


Figura 10

b) En el caso de $y = -2 \text{ sen } \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

La gráfica se muestra en la figura 11. ■

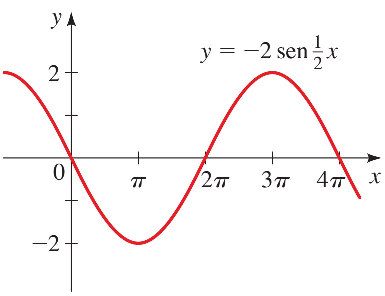


Figura 11

Las gráficas de las funciones de la forma $y = a \text{ sen } k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas en el sentido horizontal por una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$, o bien, a la izquierda si $b < 0$. El número b es el **desplazamiento de fase**. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

Curvas seno y coseno desplazadas

Las curvas seno y coseno

$$y = a \text{ sen } k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen amplitud $|a|$, periodo $2\pi/k$ y desplazamiento de fase b.

Un intervalo adecuado para graficar un periodo completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ se ilustran en la figura 12.

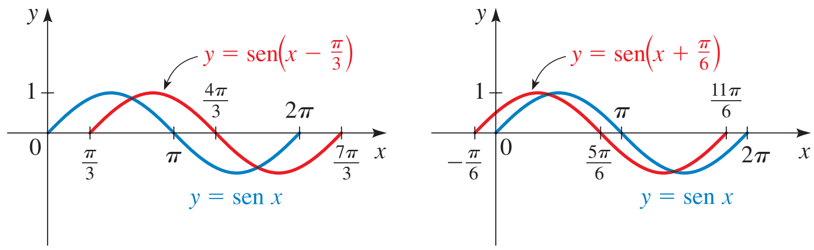


Figura 12

Ejemplo 4 Una curva seno desplazada

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$, y grafique un periodo completo.

Solución Determinamos la amplitud, el periodo y el desplazamiento de la fase de la forma de la función como sigue:

amplitud $= |a| = 3$ periodo $= \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

desplazamiento de la fase $= \dfrac{\pi}{4}$ (a la derecha)

He aquí otro método para determinar un intervalo adecuado en el cual graficar un periodo completo. Puesto que el periodo de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, la función $y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{4})$ se tendrá un periodo completo cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe desde 0 hasta 2π.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$
$x - \frac{\pi}{4} = 0$	$x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$

De este modo graficamos un periodo en el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

Puesto que el desplazamiento de la fase es $\pi/4$ y el periodo es π, se tiene un periodo completo en el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como un auxiliar para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales, luego graficamos una curva seno con amplitud 3 como la de la figura 13.

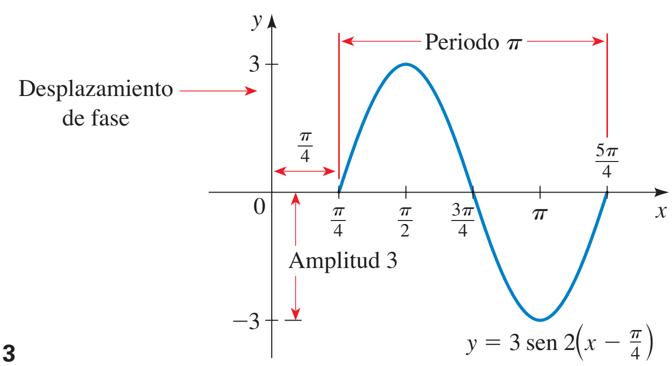


Figura 13

■

Ejemplo 5 Una curva seno desplazada

Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de

$$y = \frac{3}{4}\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un periodo completo.

Solución Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$ Para hacerlo, sacamos como factor el 2 de la expresión $2x + \dfrac{2\pi}{3}$ para tener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

También podemos determinar un periodo completo como sigue:

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2x + \frac{2\pi}{3} = 0$	$2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$
$2x = -\frac{2\pi}{3}$	$2x = \frac{4\pi}{3}$
$x = -\frac{\pi}{3}$	$x = \frac{2\pi}{3}$

Entonces graficamos un periodo en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Por lo tanto, obtenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desplazamiento de fase} = b = -\frac{\pi}{3} \qquad \text{Desplazamiento de } \frac{\pi}{3} \text{ a la izquierda}$$

A partir de esta información se infiere que un periodo de esta curva del coseno inicia en $-\pi/3$ y termina en $(-\pi/3) + \pi = 2\pi/3$. Para trazar la gráfica en el intervalo $[-\pi/3, 2\pi/3]$, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y graficamos una curva coseno con amplitud $\frac{3}{4}$ como se muestra en la figura 14.

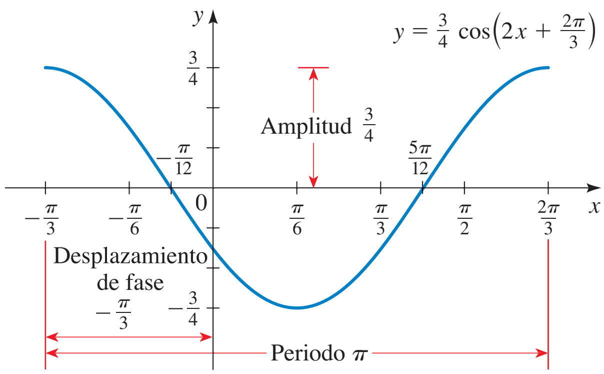


Figura 14

Uso de los dispositivos para graficar para trazar funciones trigonométricas

Cuando usamos una calculadora para graficar o una computadora para trazar una función es importante elegir con mucho cuidado un rectángulo de visión con objeto de generar una gráfica aceptable de la función. Esto se refiere especialmente a las funciones trigonométricas. El ejemplo siguiente muestra que si no se pone atención, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

En la sección 1.9 se proporcionan criterios para escoger un rectángulo de visión aceptable.

Ejemplo 6 Elección del rectángulo de visión

Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de visión aceptable.

Solución En la figura 15(a) se ilustra la gráfica de f que se genera en una calculadora para graficar usando un rectángulo de visión $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista, la gráfica parece ser aceptable, pero si modificamos el rectángulo de visión a los mostrados en la figura 15, entonces la gráfica luce muy diferente. Algo raro sucedió.

La apariencia de las gráficas de la figura 15 depende de la calculadora o computadora que se utilice. Las gráficas que obtenga en su propia calculadora podrían ser distintas a estas figuras, y también pueden ser inexactas.

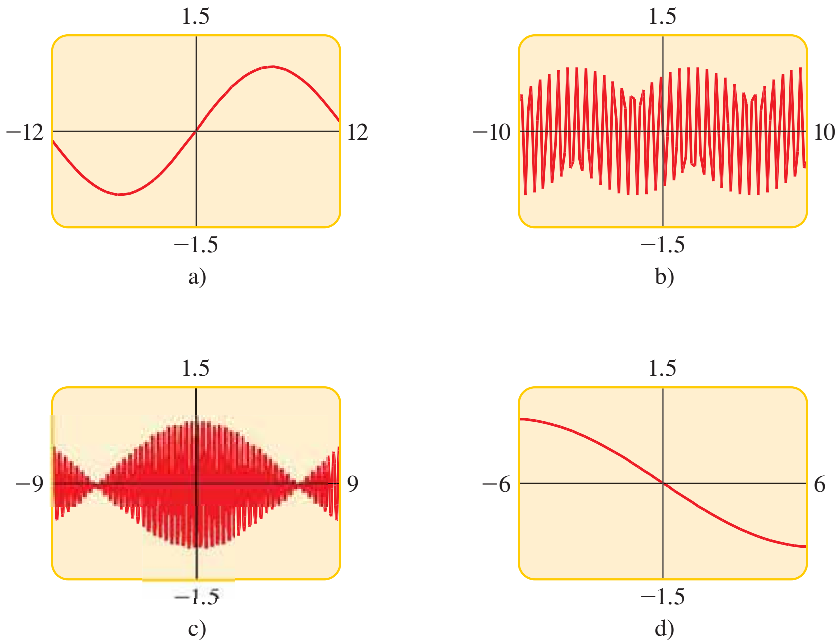


Figura 15
Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en diferentes rectángulos de visión

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y para determinar un rectángulo de visión aceptable necesitamos determinar el periodo de la función $y = \text{sen } 50x$:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que debemos tratar sólo con valores pequeños de x con objeto de mostrar sólo algunas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de visión $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, entonces obtenemos la gráfica ilustrada en la figura 16.

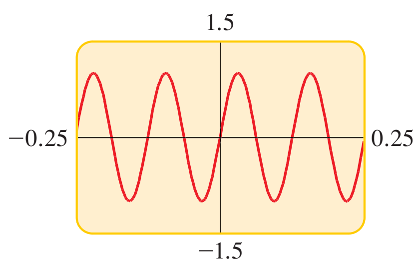


Figura 16
$f(x) = \text{sen } 50x$

Ahora vemos qué fue lo que sucedió en la figura 15. Las oscilaciones de $y = \text{sen } 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora grafica puntos y los une, ignora la

mayor parte de los máximos y mínimos y, por lo tanto, se tiene una falsa impresión de la gráfica. ■

> La función h del ejemplo 7 es **periódica**; su periodo es 2π. En general, las funciones que son sumas de funciones de la lista siguiente
>
> $$1, \cos kx, \cos 2kx, \cos 3kx, \ldots$$
> $$\text{sen } kx, \text{sen } 2kx, \text{sen } 3kx, \ldots$$
>
> son periódicas. Aunque al parecer estas funciones son especiales, son en realidad fundamentales para describir todas las funciones periódicas que surgen en la práctica. El matemático francés J. B. J. Fourier (véase página 536) descubrió que casi todas las funciones periódicas se pueden expresar como una suma (por lo regular, una suma infinita) de estas funciones. Es notable porque significa que cualquier situación en la que ocurra una variación periódica se puede expresar en forma matemática, usando las funciones seno y coseno. Una aplicación moderna del descubrimiento de Fourier es la codificación digital del sonido en los discos compactos.

Ejemplo 7 Una suma de las curvas seno y coseno

Grafique $f(x) = 2 \cos x$, $g(x) = \text{sen } 2x$ y $h(x) = 2 \cos x + \text{sen } 2x$ en una sola pantalla para ilustrar el método de la adición gráfica.

Solución Hay que observar que $h = f + g$, de modo que la gráfica se obtiene sumando las coordenadas y correspondientes de las gráficas de f y g. Las gráficas de f, g y h se ilustran en la figura 17.

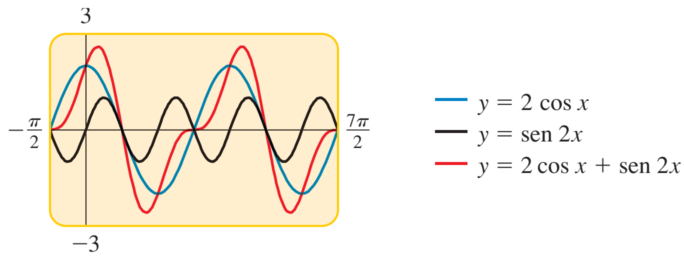


Figura 17 ■

Ejemplo 8 Una curva coseno con amplitud variable

Grafique las funciones $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = x^2 \cos 6\pi x$ en una sola pantalla. Comente y explique la relación entre las gráficas.

Solución En la figura 18 se muestran las tres gráficas en un rectángulo de visión de $[-1.5, 1.5]$ por $[-2, 2]$. Al parecer, la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$ queda entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

Para entender esto, recuerde que los valores de $\cos 6\pi x$ queda entre -1 y 1, es decir,

$$-1 \le \cos 6\pi x \le 1$$

para todos los valores de x. Al multiplicar las desigualdades por x^2 y observar que $x^2 \ge 0$, tenemos

$$-x^2 \le x^2 \cos 6\pi x \le x^2$$

Esto explica por qué las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ representan un límite o frontera para la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. (Hay que observar que las gráficas se tocan cuando $6\pi x = \pm 1$.) ■

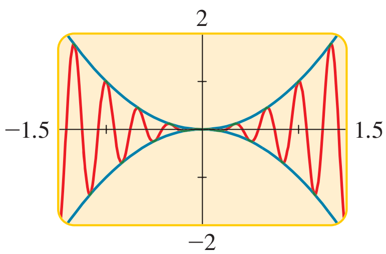


Figura 18
$y = x^2 \cos 6\pi x$

En el ejemplo 8 se muestra que la función $y = x^2$ controla la amplitud de la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. En general, si $f(x) = a(x) \text{ sen } kx$, o bien, $f(x) = a(x) \cos kx$, la función a determina cómo la amplitud de f varía, y la gráfica de f queda entre las gráficas de $y = -a(x)$ y $y = a(x)$. A continuación se muestra otro ejemplo.

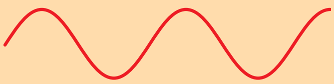
Ejemplo 9 Una curva coseno con amplitud variable

Grafique la función $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$.

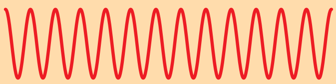
Solución La gráfica se muestra en la figura 19 de la página siguiente. Aunque la trazó una computadora, también la puede dibujar usted trazando primero las curvas

Radio AM y FM

Las transmisiones de radio consisten en ondas sonoras sobrepuestas en una onda electromagnética armónica llamada **señal portadora**

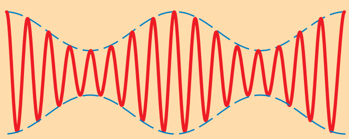


Onda sonora



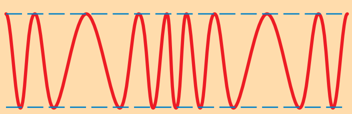
Señal portadora

Hay dos tipos de transmisión de radio, que se llaman **amplitud modulada (AM)** y **frecuencia modulada (FM)**. En la transmisión AM, la onda sonora cambia, es decir, **modula** la amplitud de la portadora, pero la frecuencia permanece sin cambio.



Señal AM

En la transmisión FM, la onda sonora modula la frecuencia, pero la amplitud sigue siendo la misma.



Señal FM

que funcionan como límites $y = \cos 2\pi x$ y $y = -\cos 2\pi x$. La gráfica de f es una curva coseno que se ubica entre las gráficas de estas dos funciones.

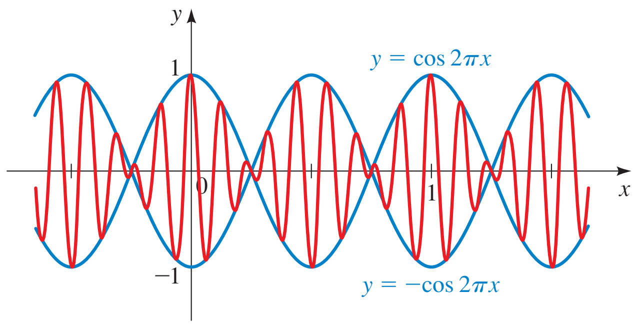


Figura 19

$f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$

■

Ejemplo 10 Una curva seno con amplitud decreciente

La función $f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ es importante en el cálculo infinitesimal. Grafique esta función y comente su comportamiento cuando x se acerca a 0.

Solución El rectángulo de visión $[-15, 15]$ por $[-0.5, 1.5]$ mostrado en la figura 20(a) da una buena visión global de la gráfica de f. El rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1.5]$ de la figura 20(b) se enfoca en el comportamiento de f cuando $x \approx 0$. Observe que aunque $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$, o en otras palabras, 0 no está en el dominio de f, los valores de f parecen aproximarse a 1 cuando x se vuelve más cercana a 0. Este hecho es decisivo en el cálculo infinitesimal.

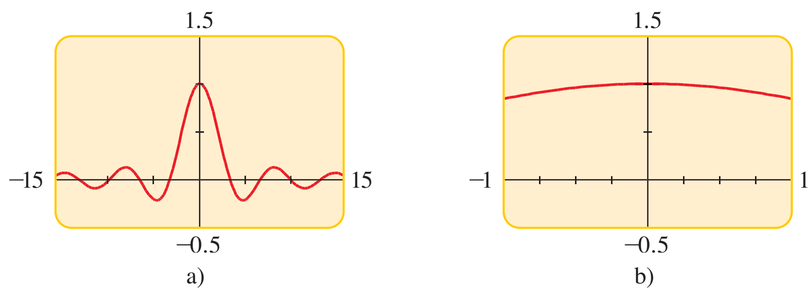


Figura 20

$f(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$

■

La función del ejemplo 10 puede expresarse como

$$f(x) = \frac{1}{x} \text{ sen } x$$

y se podría considerar como una función seno cuya amplitud está controlada por la función $a(x) = 1/x$.

5.3 Ejercicios

1–14 ■ Grafique la función.

1. $f(x) = 1 + \cos x$

2. $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$

3. $f(x) = -\operatorname{sen} x$

4. $f(x) = 2 - \cos x$

5. $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$

6. $f(x) = -1 + \cos x$

7. $g(x) = 3 \cos x$

8. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$

9. $g(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$

10. $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$

11. $g(x) = 3 + 3 \cos x$

12. $g(x) = 4 - 2 \operatorname{sen} x$

13. $h(x) = |\cos x|$

14. $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

15–26 ■ Determine la amplitud y el periodo de la función, y dibuje su gráfica.

15. $y = \cos 2x$

16. $y = -\operatorname{sen} 2x$

17. $y = -3 \operatorname{sen} 3x$

18. $y = \frac{1}{2} \cos 4x$

19. $y = 10 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

20. $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$

21. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$

22. $y = 4 \operatorname{sen}(-2x)$

23. $y = -2 \operatorname{sen} 2\pi x$

24. $y = -3 \operatorname{sen} \pi x$

25. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$

26. $y = -2 + \cos 4\pi x$

27–40 ■ Determine la amplitud, periodo y desplazamiento de fase de la función, y grafique un periodo completo.

27. $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

28. $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

29. $y = -2 \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

30. $y = 3 \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

31. $y = -4 \operatorname{sen} 2\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

32. $y = \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

33. $y = 5 \cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

34. $y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2}{3}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

35. $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$

36. $y = 1 + \cos\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

37. $y = 3 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$

38. $y = 3 + 2 \operatorname{sen} 3(x + 1)$

39. $y = \operatorname{sen}(\pi + 3x)$

40. $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$

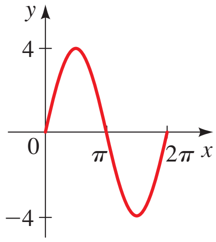
41–48 ■ Se proporciona la gráfica de un periodo completo de una curva seno o coseno.

a) Calcule la amplitud, periodo y desplazamiento de la fase.

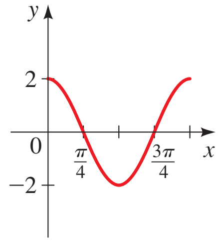
b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \quad \text{o bien} \quad y = a \cos k(x - b)$$

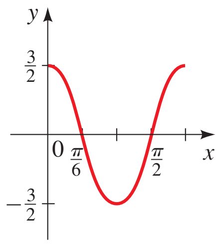
41.



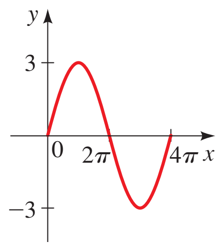
42.



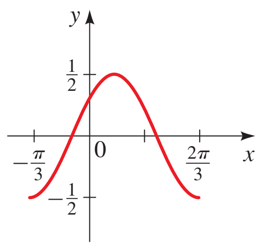
43.



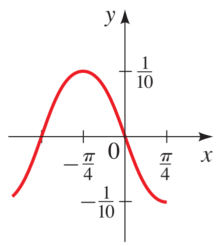
44.



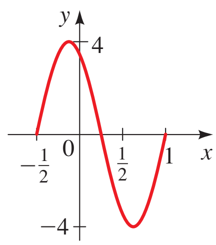
45.



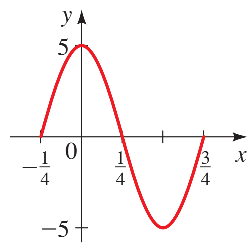
46.



47.



48.



49–56 ■ Determine un rectángulo de visión adecuado para cada función y úselo para graficar la función.

49. $f(x) = \cos 100x$

50. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 120x$

51. $f(x) = \operatorname{sen}(x/40)$

52. $f(x) = \cos(x/80)$

53. $y = \tan 25x$

54. $y = \csc 40x$

55. $y = \text{sen}^2 20x$

56. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$

57–58 ■ Grafique f, g y $f + g$ en una sola pantalla para ilustrar la adición gráfica.

57. $f(x) = x, \quad g(x) = \text{sen } x$

58. $f(x) = \text{sen } x, \quad g(x) = \text{sen } 2x$

59–64 ■ Grafique las tres funciones en una sola pantalla. ¿Cuál es la relación entre las gráficas?

59. $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2 \text{ sen } x$

60. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \cos x$

61. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} \text{ sen } 5\pi x$

62. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1 + x^2}$

63. $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

64. $y = \text{sen } 2\pi x, \quad y = -\text{sen } 2\pi x, \quad y = \text{sen } 2\pi x \text{ sen } 10\pi x$

65–68 ■ Calcule los valores máximo y mínimo de la función

65. $y = \text{sen } x + \text{sen } 2x$

66. $y = x - 2 \text{ sen } x, 0 \leq x \leq 2\pi$

67. $y = 2 \text{ sen } x + \text{sen}^2 x$

68. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \text{sen } x}$

69–72 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación que queda en el intervalo $[0, \pi]$. Proporcione cada una de las respuestas con dos cifras decimales.

69. $\cos x = 0.4$

70. $\tan x = 2$

71. $\csc x = 3$

72. $\cos x = x$

73–74 ■ Se proporciona una función f.

a) ¿Es f par, impar o ninguna de las dos?

b) Calcule la intersección con el eje x de la gráfica de f.

c) Grafique f en un rectángulo de visión aceptable.

d) Describa el comportamiento de la función cuando $x \to \pm\infty$.

e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué sucede cuando x se aproxima a 0?

73. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

74. $f(x) = \dfrac{\text{sen } 4x}{2x}$

Aplicaciones

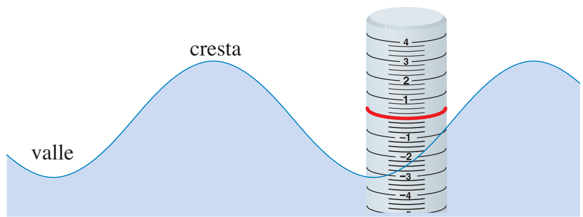
75. Altura de una onda Cuando una ola pasa por los pilotes fuera de la playa, la altura del agua está modelada mediante la función

$$h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies por arriba del nivel medio del mar en el tiempo t segundos.

a) Determine el periodo de la ola.

b) Calcule la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



76. Vibraciones sonoras Se golpea un diapasón, lo cual produce un tono puro cuando sus puntas vibran. Las vibraciones se modelan con la función

$$v(t) = 0.7 \text{ sen}(880\pi t)$$

donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo t segundos.

a) Determine el periodo de la vibración.

b) Calcule la frecuencia de la vibración, es decir, la cantidad de veces que vibra por segundo el diapasón.

c) Grafique la función v.

77. Presión sanguínea Cada vez que el corazón late, la presión de la sangre se incrementa primero y luego disminuye cuando el corazón descansa entre latido y latido. Las presiones máxima y mínima se llaman presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. La *presión sanguínea de un individuo* se expresa como presión sistólica/diastólica. Se considera normal una lectura de 120/80.

La presión sanguínea de una persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \text{ sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en milímetros de mercurio (mmHg) cuando el tiempo t se mide en minutos.

a) Determine el periodo de p.

b) Calcule el número de latidos por minuto.

c) Grafique la función p.

d) Determine la lectura de la presión sanguínea. ¿Cómo es comparada con la presión sanguínea normal?

78. Estrellas variables Las estrellas variables son aquellas cuya brillantez varía en forma periódica. Una de las más visibles es Leónidas R; su brillantez está modelada por la función

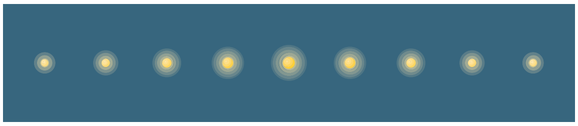
$$b(t) = 7.9 - 2.1\cos\left(\frac{\pi}{156}t\right)$$

donde t se mide en días.

a) Calcule el periodo en días.

b) Determine la brillantez máxima y la mínima.

c) Grafique la función b.



Descubrimiento • Debate

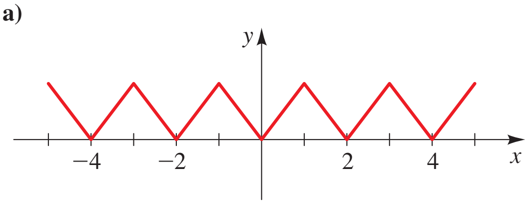
79. Composiciones que contienen funciones trigonométricas Mediante este ejercicio exploramos el efecto de la función interna g en una función compuesta $y = f(g(x))$.

a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ usando el rectángulo de visión $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Cuáles son las diferencias entre esta gráfica y la gráfica de la función seno?

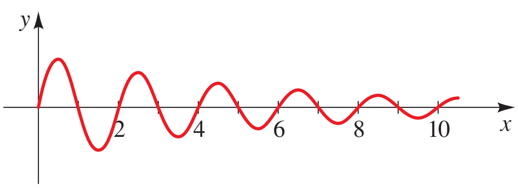
b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de visión $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿Cuáles son las diferencias entre esta gráfica y la gráfica de la función seno?

80. Funciones periódicas I Recuerde que una función f es *periódica* si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para cada t, y el mínimo de tal p (si existe) es el *periodo* de f. La gráfica de una función de periodo p se ve igual en cada intervalo de longitud p, de modo que podemos determinar con facilidad el periodo de la gráfica. Determine si la función cuya gráfica se muestra es periódica. Si es así, calcule el periodo.

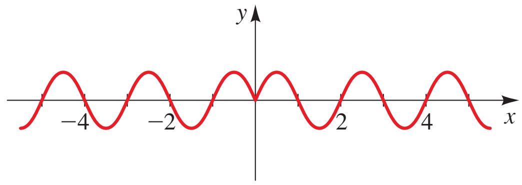
a)



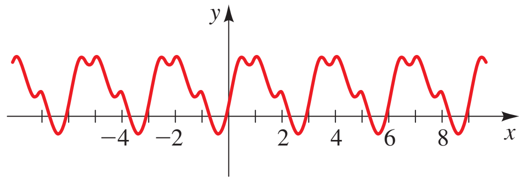
b)



c)



d)



81. Funciones periódicas II Utilice una calculadora para graficar o una computadora para trazar las funciones siguientes. A partir de la gráfica, determine si la función es periódica, y si es así, encuentre el periodo. (Véase la definición de $[\![x]\!]$ en la página 162.)

a) $y = |\operatorname{sen} x|$

b) $y = \operatorname{sen}|x|$

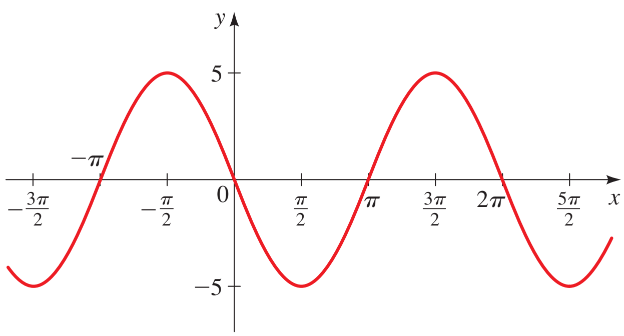
c) $y = 2^{\cos x}$

d) $y = x - [\![x]\!]$

e) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

f) $y = \cos(x^2)$

82. Curvas sinusoidales La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades. Entonces, la curva seno $y = \operatorname{sen} x$ es al mismo tiempo una curva coseno: $y = \cos(x - \pi/2)$. En efecto, cualquier curva seno es también una curva coseno con un desplazamiento de fase distinto, y cualquier curva coseno es también una curva seno. Las curvas seno y coseno reciben el nombre colectivo de *sinusoidales*. Para la curva cuya gráfica se muestra, encuentre todas las maneras posibles de expresarla como una curva seno $y = a\operatorname{sen}(x - b)$ o como una curva coseno $y = a\cos(x - b)$. Explique por qué piensa que ha encontrado todas las elecciones posibles de a y b en cada caso.



PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Modelos de depredadores/presa

Las funciones seno y coseno se utilizan principalmente en la física y la ingeniería para modelar un comportamiento oscilatorio, tal como el movimiento de un péndulo o la corriente en un circuito eléctrico de corriente alterna. (Véase sección 5.5.) Pero estas funciones también surgen en otras ciencias. En este proyecto, consideramos una aplicación a la biología usando funciones seno para modelar la población de un predador y su presa.

Dos especies de mamíferos habitan en una isla lejana: linces y liebres. Los linces son *predadores*, los cuales se alimentan de las liebres, sus *presas*. Las poblaciones de linces y liebres cambian cíclicamente, de acuerdo con las gráficas de la figura 1. En la parte A de la gráfica, las liebres son abundantes, de modo que el lince tiene mucho para comer, por lo que su población se incrementa. En el tiempo representado en la parte B, tantos linces se están alimentando con las liebres que la población de éstas empieza a disminuir. En la parte C, la población de liebres ha declinado tanto que ya no hay alimento suficiente para los linces, de modo que baja la población de éstos. En la parte D, tantos son los linces que murieron que las liebres tienen pocos enemigos, por lo que su población se incrementa de nuevo. Esto nos regresa al punto donde empezamos, y el ciclo se repite una y otra vez.

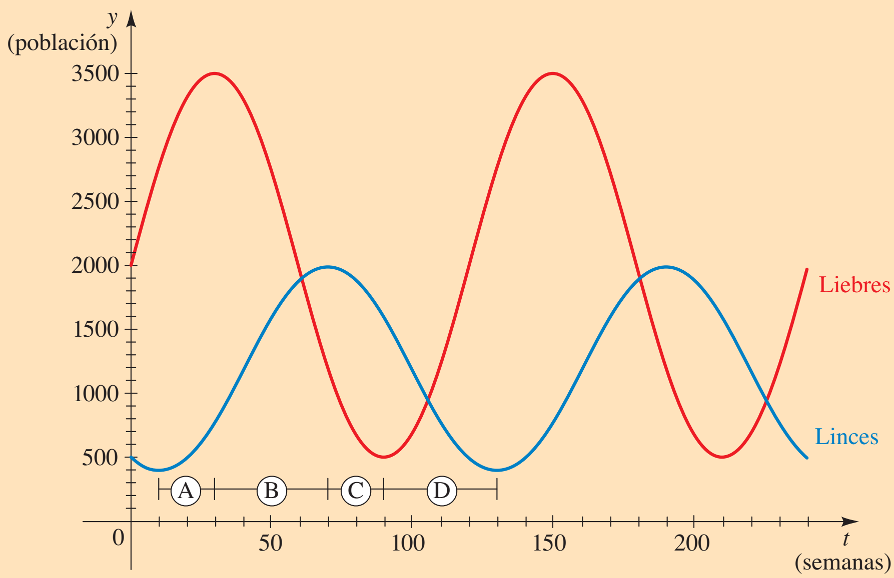


Figura 1

Las gráficas de la figura 1 son curvas seno que están desplazadas hacia arriba, así que son gráficas de funciones de la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(t - b) + c$$

En este caso, c es la cantidad que la curva seno se ha desplazado verticalmente (véase sección 2.4). Observe que c es el valor promedio de la función, a medio camino entre los valores más alto y más bajo de la gráfica. La amplitud $|a|$ es

la cantidad que varía hacia arriba y hacia abajo del valor promedio de la gráfica (véase figura 2).

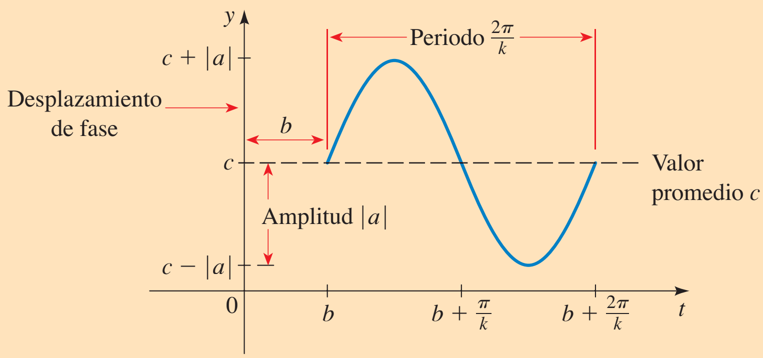


Figura 2
$y = a \text{ sen } k(t - b) + c$

1. Determine funciones de la forma $y = a \text{ sen } k(t - b) + c$ que modelen las poblaciones de linces y liebres graficadas en la figura 1. Grafique ambas funciones en su calculadora y compare con la figura 1 para comprobar que sus funciones son las correctas.

2. Sume las funciones de las poblaciones de linces y liebres para obtener una nueva función que modele la población total de *mamíferos* en esta isla. Grafique esta función en su calculadora y calcule su valor promedio, amplitud, periodo y desplazamiento de la fase. ¿Cuál es la relación entre el valor promedio y el periodo de la función de la población de mamíferos y el valor promedio y el periodo de las funciones de las poblaciones de linces y liebres?

3. Un pequeño lago de la isla contiene dos especies de peces: merluza y un pez rojizo. La merluza es un predador que se alimenta del pez rojizo. La población de peces del lago varía en forma periódica, y su periodo es de 180 días. La cantidad de merluza varía entre 500 y 1500, y la cantidad de peces rojizos varía entre 1000 y 3000. La población de la merluza alcanza su punto máximo 30 días después que el pez rojizo alcanza *su* población máxima en el ciclo.

a) Trace una gráfica (como la de la figura 1) en la que se ilustren dos periodos completos del ciclo de la población para estas especies de peces. Suponga que $t = 0$ corresponde a un tiempo cuando la población de peces rojizos se encuentra en un máximo.

b) Determine las funciones coseno de la forma $y = a \cos k(t - b) + c$ que modele las poblaciones de merluza y peces rojizos del lago.

4. En la vida real, la mayor parte de poblaciones predador/presa no se comportan de manera tan sencilla como se describió aquí. En la mayoría de los casos, las poblaciones de predadores y presas oscilan, pero la amplitud de las oscilaciones se vuelve más y más pequeña, de modo que con el tiempo ambas poblaciones se estabilizan cerca de un valor constante. Trace una gráfica aproximada que ilustre cómo se podrían comportar en este caso las poblaciones de predadores y presas.

5.4 Más gráficas trigonométricas

En esta sección se grafican las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante y transformaciones de estas funciones.

Gráficas de la función tangente, cotangente, secante y cosecante

Iniciamos estableciendo las propiedades periódicas de estas funciones. Recuerde que el seno y el coseno tienen periodo 2π. Puesto que la cosecante y la secante son los recíprocos del seno y el coseno, respectivamente, también tienen periodo 2π (véase ejercicio 53). La tangente y la cotangente tienen periodo π (véase ejercicio 83 de la sección 5.2).

Propiedades periódicas

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \cot(x + \pi) = \cot x$$

Las funciones cosecante y secante tienen periodo 2π:

$$\csc(x + 2\pi) = \csc x \qquad \sec(x + 2\pi) = \sec x$$

x	$\tan x$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	0.58
$\frac{\pi}{4}$	1.00
$\frac{\pi}{3}$	1.73
1.4	5.80
1.5	14.10
1.55	48.08
1.57	1 255.77
1.5707	10 381.33

Primero graficamos la tangente. Como tiene periodo π, necesitamos sólo trazar la gráfica de cualquier intervalo de longitud π, y luego repetir el patrón a la izquierda y a la derecha. Trazamos la gráfica en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Puesto que tan $\pi/2$ y $\tan(-\pi/2)$ no están definidas, es necesario ser cuidadoso al trazar la gráfica en los puntos cercanos a $\pi/2$ y $-\pi/2$. A medida que x se acerca a $\pi/2$ a través de valores menores que $\pi/2$, el valor de $\tan x$ se incrementa. Para ver esto, observe que cuando x se acerca a $\pi/2$, $\cos x$ se aproxima a 0 y sen x se aproxima a 1, y entonces $\tan x = \operatorname{sen} x/\cos x$ es grande. Al margen se muestra una tabla de valores de $\tan x$ para x cerca de $\pi/2$ (≈ 1.570796).

Por consiguiente, para elegir a x con cercanía suficiente a $\pi/2$ a través de valores menores que $\pi/2$, podemos hacer el valor de $\tan x$ más grande que cualquier número positivo dado. Esto se expresa escribiendo

$$\tan x \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \frac{\pi}{2}^{-}$$

Las expresiones anteriores significan "tan x tiende al infinito cuando x tiende a $\pi/2$ desde la izquierda".

En una forma similar, al elegir x cercana a $-\pi/2$ de valores mayores que $-\pi/2$, podemos hacer $\tan x$ más pequeña que cualquier número negativo dado. Esto se expresa de la manera siguiente:

La notación de flecha se trata en la sección 3.6.

$$\tan x \to -\infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to -\frac{\pi}{2}^{+}$$

Las expresiones anteriores significan "la tan x tiende al infinito negativo cuando x tiende a $-\pi/2$ desde la derecha".

Las asíntotas se estudian en la sección 3.6.

Por tanto, la gráfica de $y = \tan x$ se aproxima a las rectas verticales $x = \pi/2$ y $x = -\pi/2$. Entonces estas rectas son **asíntotas verticales**. Con la información que tenemos hasta este momento, podemos graficar $y = \tan x$ para $-\pi/2 < x < \pi/2$ en la

figura 1. La gráfica completa de la tangente (véase figura 5(a) de la página 436) se obtiene ahora aplicando el hecho de que la tangente es periódica y que su periodo es π.

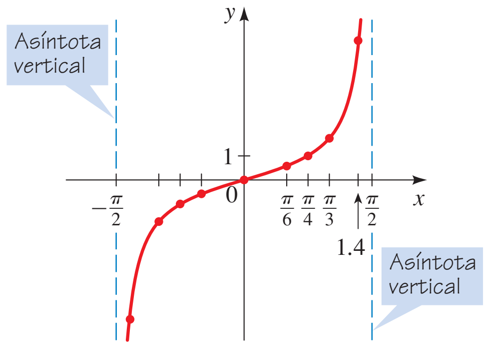


Figura 1

Un periodo de $y = \tan x$

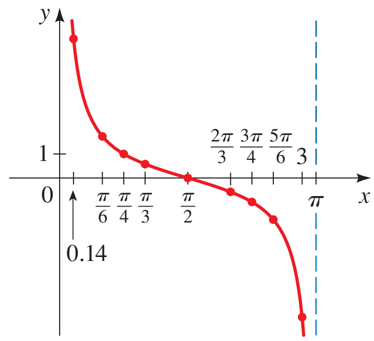


Figura 2

Un periodo de $y = \cot x$

La función $y = \cot x$ se grafica en el intervalo $(0, \pi)$ mediante un análisis similar (véase figura 2). Puesto que $\cot x$ no está definida para $x = n\pi$ donde n es un entero, su gráfica completa (en la figura 5(b) de la página 436) tiene asíntotas verticales en estos valores.

Para graficar las funciones cosecante y secante, aplicamos las identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Entonces, para graficar $y = \csc x$, utilizamos los recíprocos de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ (véase figura 3). De igual manera, para graficar $y = \sec x$, recurrimos a los recíprocos de las coordenadas y de los puntos de la gráfica de $y = \cos x$ (véase figura 4).

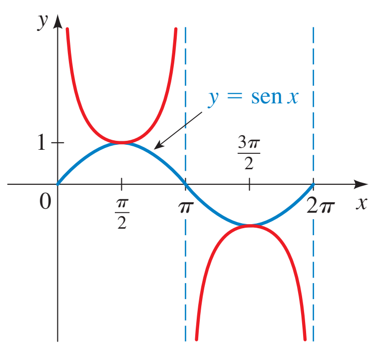


Figura 3

Un periodo de $y = \csc x$

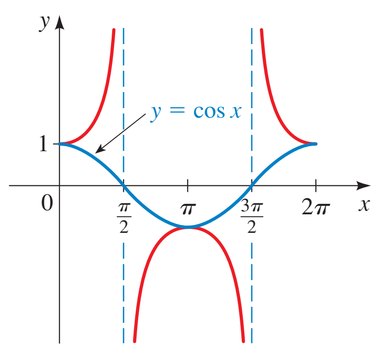


Figura 4

Un periodo de $y = \sec x$

Consideremos con mayor detalle la gráfica de la función $y = \csc x$ en el intervalo $0 < x < \pi$. Es necesario examinar los valores de la función cerca de 0 y π ya que en estos valores $\operatorname{sen} x = 0$, y, por lo tanto, $\csc x$ no está definida. Entonces,

$$\csc x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+$$

$$\csc x \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \pi^-$$

Por consiguiente, las rectas $x = 0$ y $x = \pi$ son asíntotas verticales. En el intervalo $\pi < x < 2\pi$ la gráfica se traza igual. Los valores de $\csc x$ en ese intervalo son los mismos que en el intervalo $0 < x < \pi$, excepto por el signo (véase figura 3). La gráfica completa de la figura 5(c) se obtiene a partir del hecho de que la función cosecante es periódica y su periodo es 2π. Observe que la gráfica tiene asíntotas verticales en los puntos donde $\operatorname{sen} x = 0$, es decir, en $x = n\pi$, donde n es un entero.

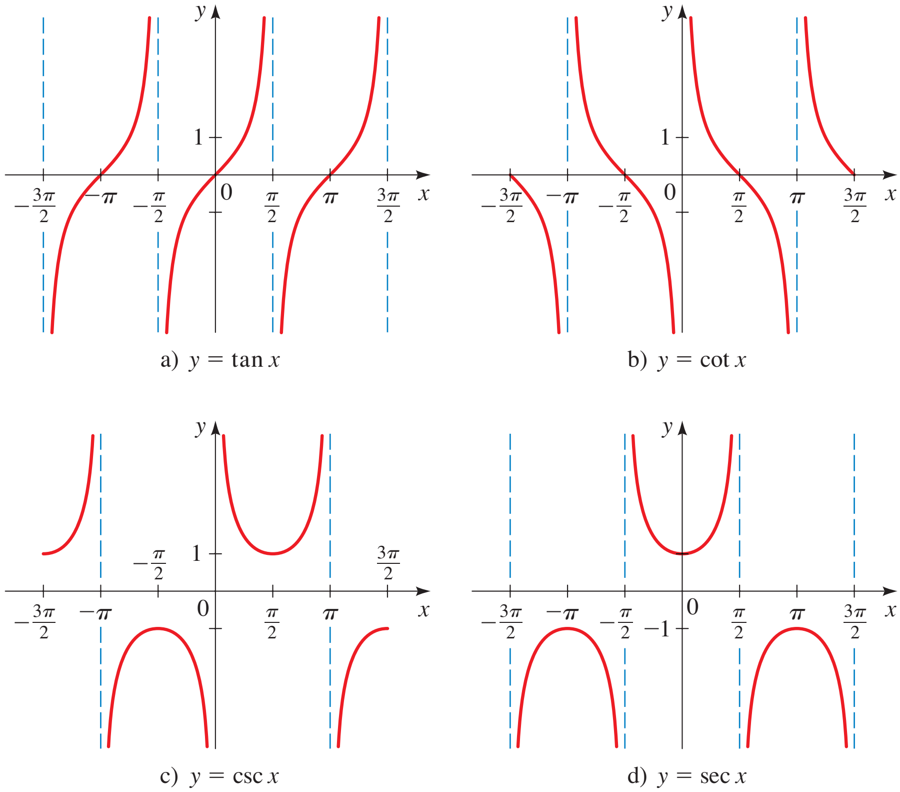


Figura 5

La gráfica de $y = \sec x$ se traza de manera similar. Observe que el dominio de $\sec x$ es el conjunto de todos los números reales que no son $x = (\pi/2) + n\pi$, donde n es un entero, de modo que la gráfica tiene asíntotas verticales en esos puntos. La gráfica completa se ilustra en la figura 5(d).

Es evidente que las gráficas de $y = \tan x$, $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son simétricas con respecto al origen, y que, por otro lado, $y = \sec x$ es simétrica con respecto al eje y. La razón es que la tangente, la cotangente y la cosecante son funciones impares, en tanto que la secante es una función par.

Gráficas que contienen funciones tangente y cotangente

Consideremos ahora las gráficas de transformaciones de las funciones tangente y cotangente.

Matemáticas en el mundo moderno

Evaluación de funciones mediante una calculadora

¿Cómo evaluar mediante una calculadora sen t, cos t, e^t, ln t, $\sqrt{t}$ y otras funciones semejantes? Un método es aproximar estas funciones mediante polinomios, porque éstos son fáciles de evaluar. Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots$$

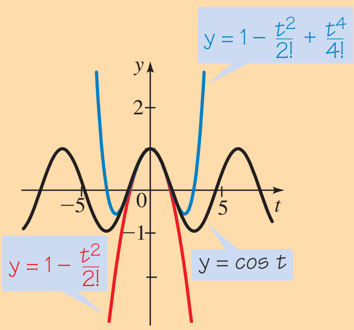
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$. El matemático británico Brook Taylor (1685-1731) dedujo estas fórmulas admirables. Por ejemplo, si utilizamos los tres primeros términos de la serie de Taylor para encontrar cos(0.4), obtenemos

$$\cos 0.4 \approx 1 - \frac{(0.4)^2}{2!} + \frac{(0.4)^4}{4!}$$

$$\approx 0.92106667$$

(Compare lo anterior con el valor que obtiene mediante su calculadora.) La gráfica muestra que cuantos más términos de la serie usemos, tanto más los polinomios se aproximan al valor de la función cos t.



Ejemplo 1 Gráficas de curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones.

a) $y = 2 \tan x$ b) $y = -\tan x$

Solución Primero graficamos $y = \tan x$ y luego la transformamos según se requiera.

a) Para graficar $y = 2 \tan x$, multiplicamos la coordenada y de cada uno de los puntos sobre la gráfica de $y = \tan x$ por 2. La gráfica resultante se muestra en la figura 6(a).

b) La gráfica de $y = -\tan x$ de la figura 6(b) se obtiene de $y = \tan x$, al reflejarla en el eje x

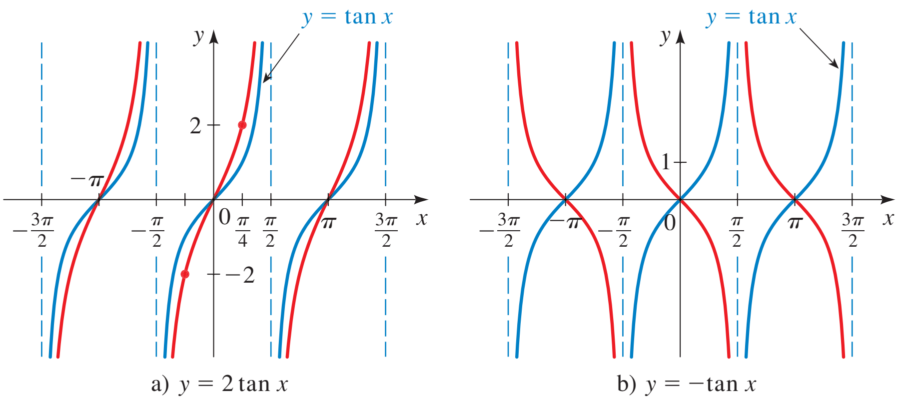


Figura 6 ■

Puesto que las funciones tangente y cotangente tienen periodo π, las funciones

$$y = a \tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cot kx \qquad (k > 0)$$

completan un periodo cuando kx varía desde 0 hasta π, es decir, para $0 \leq kx \leq \pi$. Al resolver esta desigualdad, obtenemos $0 \leq x \leq \pi/k$. Entonces, cada una tiene un periodo π/k.

Curvas tangente y cotangente

Las funciones

$$y = a \tan kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cot kx \qquad (k > 0)$$

tienen un periodo π/k.

Por consiguiente, un periodo completo de las gráficas de estas funciones ocurre en cualquier intervalo de longitud π/k. Para graficar un periodo completo de estas gráficas, conviene elegir un intervalo entre asíntotas verticales:

Para graficar un periodo de $y = a \tan kx$, un intervalo adecuado es $\left(-\dfrac{\pi}{2k}, \dfrac{\pi}{2k}\right)$.

Para graficar un periodo de $y = a \cot kx$, un intervalo adecuado es $\left(0, \dfrac{\pi}{k}\right)$.

Ejemplo 2 Gráficas de curvas tangentes

Grafique cada una de las funciones.

a) $y = \tan 2x$ b) $y = \tan 2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

Solución

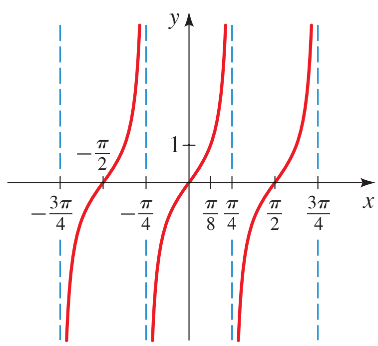
a) El periodo es $\pi/2$ y un intervalo adecuado es $(-\pi/4, \pi/4)$. Los puntos terminales $x = -\pi/4$ y $x = \pi/4$ son asíntotas verticales. Por lo tanto, graficamos un periodo completo de la función en $(-\pi/4, \pi/4)$. La gráfica tiene la misma forma que la de la función tangente, pero está acortada horizontalmente por un factor de $\frac{1}{2}$. Entonces repetimos esa parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha. Véase figura 7(a).

b) La gráfica es la misma que la del inciso a), pero está desplazada a la derecha $\pi/4$, como se ilustra en la figura 7(b).

Puesto que $y = \tan x$ completa un periodo entre $x = -\frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{\pi}{2}$, la función $y = \tan 2(x - \frac{\pi}{4})$ completa un periodo cuando $2(x - \frac{\pi}{4})$ varía desde $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2}$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$
$x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$	$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$
$x = 0$	$x = \frac{\pi}{2}$

Por lo que graficamos un periodo en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.



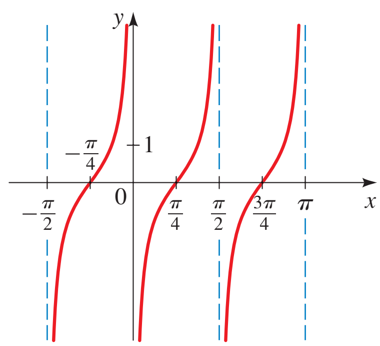


Figura 7 a) $y = \tan 2x$ b) $y = \tan 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ■

Ejemplo 3 Una curva cotangente desplazada

Grafique $y = 2\cot\left(3x - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Solución Primero expresamos la ecuación en la forma $y = a \cot k(x - b)$ tomando como factor a 3 de la expresión $3x - \dfrac{\pi}{2}$:

$$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cot 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

Por consiguiente, la gráfica es la misma que la de $y = 2\cot 3x$, pero está desplazada a la derecha $\pi/6$. El periodo de $y = 2\cot 3x$ es $\pi/3$, por lo que un intervalo adecuado es $(0, \pi/3)$. Para obtener el intervalo correspondiente para la gráfica deseada, desplazamos este intervalo a la derecha $\pi/6$. Esto nos da

$$\left(0 + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Puesto que $y = \cot x$ completa un periodo entre $x = 0$ y $x = \pi$, la función $y = 2\cot(3x - \frac{\pi}{2})$ completa un periodo cuando $3x - \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a π.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$3x - \frac{\pi}{2} = 0$	$3x - \frac{\pi}{2} = \pi$
$3x = \frac{\pi}{2}$	$3x = \frac{3\pi}{2}$
$x = \frac{\pi}{6}$	$x = \frac{\pi}{2}$

Por lo que graficamos un periodo en el intervalo $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2})$.

Para terminar, graficamos un periodo en la forma de la cotangente en el intervalo $(\pi/6, \pi/2)$ y repetimos la parte de la gráfica a la izquierda y a la derecha (véase figura 8).

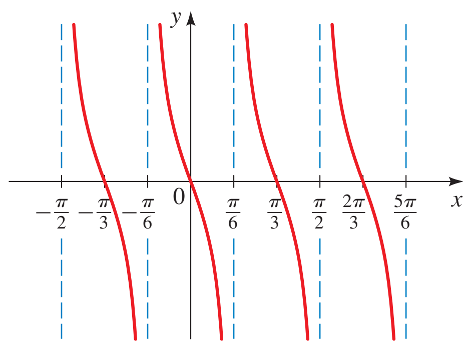


Figura 8
$y = 2\cot\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

Gráficas que contienen funciones cosecante y secante

Ya observamos que las funciones cosecante y secante son los recíprocos de las funciones seno y coseno. Por lo tanto, el resultado siguiente es la parte equivalente del resultado de las curvas seno y coseno de la sección 5.3.

Curvas cosecante y secante

El periodo de las funciones

$$y = a \csc kx \qquad \text{y} \qquad y = a \sec kx \qquad (k > 0)$$

es $2\pi/k$.

Un intervalo adecuado para graficar un periodo completo es $[0, 2\pi/k]$.

Ejemplo 4 Gráfica de curvas cosecantes

Grafique las funciones siguientes.

a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Solución

a) El periodo es $2\pi/2 = \pi$. Un intervalo adecuado es $[0, \pi]$, y las asíntotas se presentan siempre en este intervalo sen $2x = 0$. Entonces, las asíntotas en este intervalo son $x = 0$, $x = \pi/2$ y $x = \pi$. A partir de esta información trazamos una gráfica en el intervalo $[0, \pi]$ con la misma forma general que la de un

periodo de la función cosecante. La gráfica completa de la figura 9(a) se obtiene repitiendo esta parte a la izquierda y a la derecha.

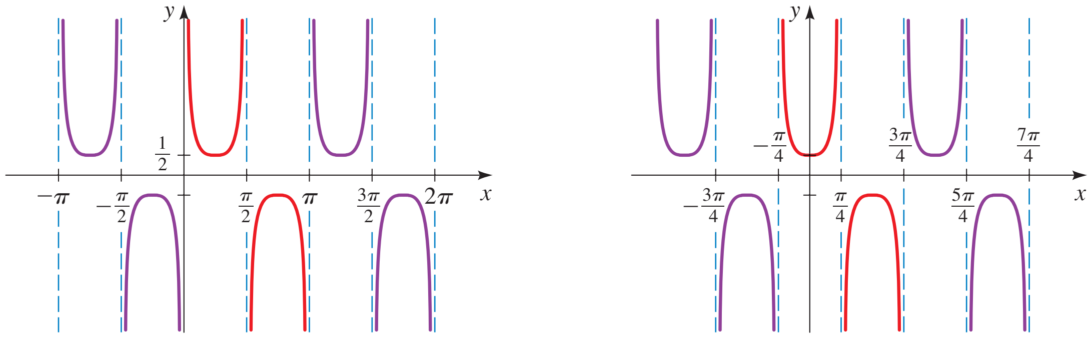


Figura 9 a) $y = \frac{1}{2}\csc 2x$ b) $y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

Puesto que $y = \csc x$ completa un periodo entre $x = 0$ y $x = 2\pi$, la función $y = \frac{1}{2}\csc(2x + \frac{\pi}{2})$ completa un periodo cuando $2x + \frac{\pi}{2}$ varía de 0 a 2π.

Inicio del periodo:	Final del periodo:
$2x + \frac{\pi}{2} = 0$	$2x + \frac{\pi}{2} = 2\pi$
$2x = -\frac{\pi}{2}$	$2x = \frac{3\pi}{2}$
$x = -\frac{\pi}{4}$	$x = \frac{3\pi}{4}$

Por lo que graficamos un periodo en el intervalo $(-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

b) Primero escribimos

$$y = \frac{1}{2}\csc\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\csc 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

A partir de la ecuación vemos que la gráfica es la misma que la del inciso a), pero desplazada a la izquierda $\pi/4$. La gráfica se muestra en la figura 9(b). ■

Ejemplo 5 Gráfica de una curva secante

Grafique $y = 3\sec\frac{1}{2}x$.

Solución El periodo es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$. Un intervalo adecuado es $[0, 4\pi]$, y las asíntotas se presentan en este intervalo siempre que $\cos\frac{1}{2}x = 0$. Por lo tanto, las asíntotas en este intervalo son $x = \pi$, $x = 3\pi$. Con esta información trazamos en el intervalo $[0, 4\pi]$ una gráfica con la misma forma general que la de un periodo de la función secante. La gráfica completa de la figura 10 se obtiene al repetir esta parte a la izquierda y a la derecha.

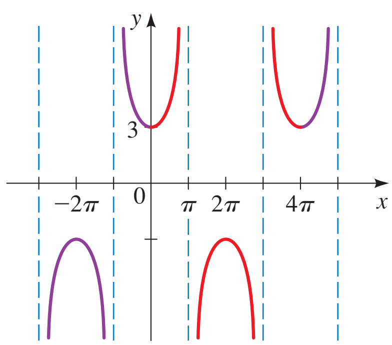


Figura 10
$y = 3\sec\frac{1}{2}x$

■

5.4 Ejercicios

1–6 ■ Diga a qué gráfica corresponde cada una de las funciones.

1. $f(x) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

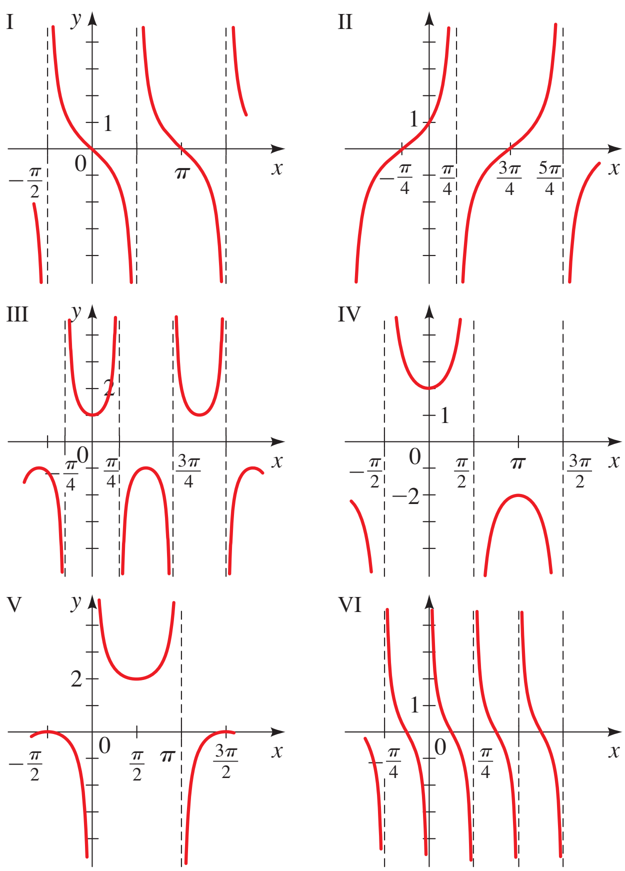
2. $f(x) = \sec 2x$

3. $f(x) = \cot 2x$

4. $f(x) = -\tan x$

5. $f(x) = 2 \sec x$

6. $f(x) = 1 + \csc x$



7–52 ■ Determine el periodo y grafique la función.

7. $y = 4 \tan x$

8. $y = -4 \tan x$

9. $y = -\frac{1}{2} \tan x$

10. $y = \frac{1}{2} \tan x$

11. $y = -\cot x$

12. $y = 2 \cot x$

13. $y = 2 \csc x$

14. $y = \frac{1}{2} \csc x$

15. $y = 3 \sec x$

16. $y = -3 \sec x$

17. $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

18. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

19. $y = \csc\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

20. $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

21. $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

22. $y = 2 \csc\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

23. $y = \frac{1}{2} \sec\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

24. $y = 3 \csc\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

25. $y = \tan 2x$

26. $y = \tan \frac{1}{2}x$

27. $y = \tan \frac{\pi}{4}x$

28. $y = \cot \frac{\pi}{2}x$

29. $y = \sec 2x$

30. $y = 5 \csc 3x$

31. $y = \csc 2x$

32. $y = \csc \frac{1}{2}x$

33. $y = 2 \tan 3\pi x$

34. $y = 2 \tan \frac{\pi}{2}x$

35. $y = 5 \csc \frac{3\pi}{2}x$

36. $y = 5 \sec 2\pi x$

37. $y = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

38. $y = \csc 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

39. $y = \tan 2(x - \pi)$

40. $y = \sec 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

41. $y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

42. $y = \frac{1}{2} \tan(\pi x - \pi)$

43. $y = 2 \csc\left(\pi x - \frac{\pi}{3}\right)$

44. $y = 2 \sec\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{3}\right)$

45. $y = 5 \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

46. $y = \frac{1}{2} \sec(2\pi x - \pi)$

47. $y = \tan\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$

48. $y = \tan \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

49. $y = 3 \sec \pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$

50. $y = \sec\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

51. $y = -2 \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

52. $y = 2 \csc(3x + 3)$

53. **a)** Demuestre que si f es periódica y su periodo es p, entonces $1/f$ también es periódica y su periodo es p.

b) Demuestre que la cosecante y la secante tiene periodo 2π.

54. Demuestre que si f y g son periódicas y su periodo es p, entonces el cociente f/g es periódico también, pero el periodo podría ser más pequeño que p.

Aplicaciones

55. Faros El haz de un faro da una rotación completa cada dos minutos. En el tiempo t, la distancia d que se ilustra en la figura de la página siguiente es

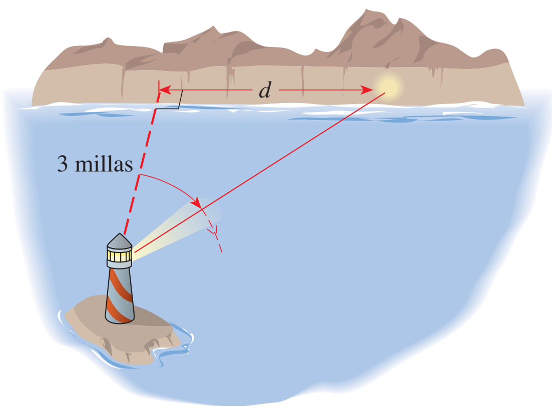
$$d(t) = 3 \tan \pi t$$

donde t se mide en minutos y d en millas.

a) Determine $d(0.15)$, $d(0.25)$ y $d(0.45)$.

b) Grafique la función d para $0 \leq t < \frac{1}{2}$.

c) ¿Qué sucede con la distancia d cuando t tiende a $\frac{1}{2}$?



56. Largo de una sombra En un día cuando el Sol pasa directamente sobre la cabeza a mediodía, un hombre de seis pies de estatura proyecta una sombra cuyo largo es

$$S(t) = 6\left|\cot \frac{\pi}{12} t\right|$$

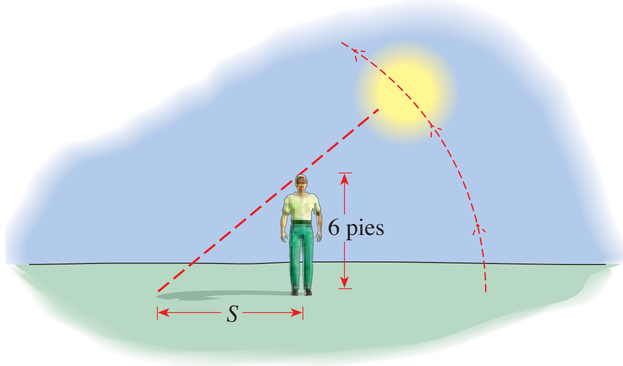
donde S está en pies y t es la cantidad de horas a partir de las 6 AM.

a) Determine el largo de la sombra a las 8 AM, a mediodía, a las 2 PM y a las 5.45 PM.

b) Grafique la función S para $0 < t < 12$.

c) A partir de la gráfica determine los valores de t a los cuales el largo de la sombra es igual a la estatura del hombre. ¿A qué momento del día corresponden cada uno de estos valores?

d) Explique qué pasa con la sombra cerca de las 6 PM. (es decir, cuando $t \to 12^-$).



Descubrimiento • Debate

57. Fórmulas de reducción Utilice las gráficas de la figura 5 para explicar por qué las fórmulas siguientes son verdaderas

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cot x$$

$$\sec\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \csc x$$

5.5 Modelado del movimiento armónico

El comportamiento periódico —comportamiento que se repite una y otra vez— es común en la naturaleza. Tal vez el ejemplo más conocido es la salida y la puesta del Sol de todos los días, lo cual origina el patrón repetitivo de día, noche, día, noche, ... Otro ejemplo es la variación diaria del nivel de la marea en las playas, lo cual da como resultado el patrón repetitivo de marea alta, marea baja, marea alta, marea baja, ... Ciertas poblaciones de animales se incrementan y disminuyen de acuerdo con un patrón periódico predecible: una población grande consume las provisiones alimentarias, lo cual ocasiona que la población decline; a su vez, esto ocasiona provisiones alimentarias abundantes, lo cual hace que la población aumente; y el patrón se repite y se repite (véanse páginas 432 a 433).

Otros ejemplos comunes de comportamiento periódico se relacionan con el movimiento que es originado por vibraciones u oscilaciones. Una masa que cuelga de un resorte, el cual está comprimido y que luego se suelta, es un ejemplo sencillo. Este mismo movimiento hacia arriba y hacia abajo también se observa en fenómenos diversos como las ondas del sonido, las ondas de luz, la corriente eléctrica alterna y las estrellas pulsátiles, para mencionar unos cuantos ejemplos. En esta sección trataremos el problema de modelar el comportamiento periódico.

Modelado del comportamiento periódico

Las funciones trigonométricas son ideales para modelar el comportamiento periódico. Una mirada a las gráficas de las funciones seno y coseno, por ejemplo, nos dice que estas funciones muestran un comportamiento periódico. En la figura 1 se puede observar la gráfica de $y = \text{sen } t$. Si pensamos que t es el tiempo, vemos que a medida que pasa el tiempo, $y = \text{sen } t$ aumenta y disminuye una y otra vez. En la figura 2 se puede observar que el movimiento de una masa que cuelga de un resorte que vibra está modelado con mucha exactitud mediante $y = \text{sen } t$.

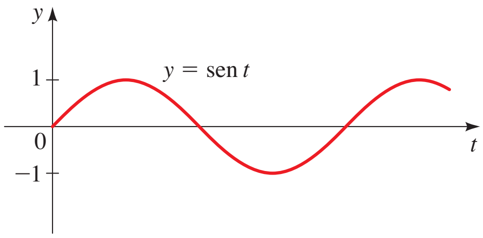


Figura 1
$y = \text{sen } t$

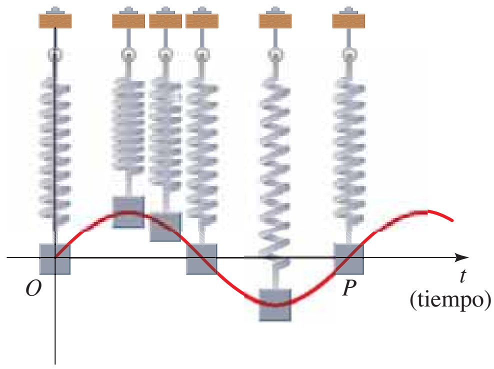


Figura 2
Movimiento de un resorte que vibra modelado mediante $y = \text{sen } t$.

Observe que la masa regresa a su posición original una y otra vez. Un **ciclo** es una vibración completa de un objeto, de modo que la masa de la figura 2 completa un ciclo de su movimiento entre O y P. Las observaciones sobre cómo las funciones seno y coseno modelan el comportamiento periódico se resumen en el siguiente recuadro.

Movimiento armónico simple

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un objeto en el tiempo t es

$$y = a \text{ sen } \omega t \qquad \text{o bien} \qquad y = a \cos \omega t$$

entonces el objeto sigue un **movimiento armónico simple**. En este caso

amplitud $= |a|$ — Desplazamiento máximo del objeto

periodo $= \dfrac{2\pi}{\omega}$ — Tiempo necesario para completar un ciclo

frecuencia $= \dfrac{\omega}{2\pi}$ — Número de ciclos por unidad de tiempo

La diferencia principal entre dos ecuaciones que describen el movimiento armónico simple es el punto de inicio. En $t = 0$, tenemos

$$y = a \text{ sen } \omega \cdot 0 = 0$$

$$y = a \cos \omega \cdot 0 = a$$

En el primer caso, el movimiento "inicia" con cero desplazamiento, en tanto que en el segundo caso, el movimiento "inicia" con el desplazamiento en un punto máximo (a la amplitud a).

El símbolo ω es la letra griega minúscula omega y ν es la letra griega "nu".

Observe que las funciones

$$y = a \operatorname{sen} 2\pi\nu t \qquad \text{y} \qquad y = a \cos 2\pi\nu t$$

tienen frecuencia ν, porque $2\pi\nu/(2\pi) = \nu$. Como podemos leer inmediatamente la frecuencia de estas ecuaciones, las ecuaciones de movimiento armónico simple usualmente se expresan de esta forma.

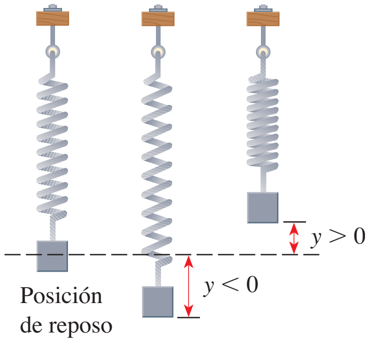


Figura 3

Ejemplo 1 Un resorte en vibración

El desplazamiento de una masa que pende de un resorte está modelado por la función

$$y = 10 \operatorname{sen} 4\pi t$$

donde y está en pulgadas y t es segundos (véase figura 3).

a) Determine amplitud, periodo y frecuencia del movimiento de la masa.

b) Grafique el desplazamiento de la masa.

Solución

a) De acuerdo con las fórmulas de amplitud, periodo y frecuencia, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = 10 \text{ pulgadas}$$

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ s}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2 \text{ Hz}$$

b) La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo t se muestra en la figura 4. ■

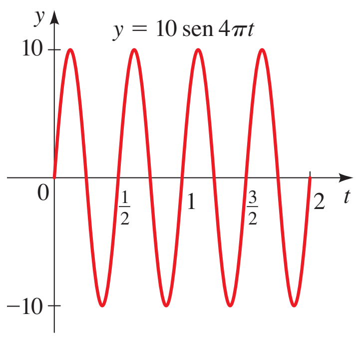


Figura 4

Una situación importante donde se presenta el movimiento armónico simple es en la generación del sonido. El sonido se produce por una variación regular en la presión del aire a partir de la presión normal. Si la presión varía según un movimiento armónico simple, entonces se genera un sonido puro. El tono del sonido depende de la frecuencia y la intensidad depende de la amplitud.

Ejemplo 2 Vibraciones de una nota musical

Un músico toca con una tuba la nota mi y sostiene el sonido durante un tiempo. Para una nota mi pura la variación en la presión a partir de la presión normal de aire está dada por

$$V(t) = 0.2 \operatorname{sen} 80\pi t$$

donde V se mide en libras por pulgada cuadrada y t en segundos.

a) Calcule la amplitud, periodo y frecuencia de V.

b) Grafique V.

c) Si el músico que toca la tuba aumenta la intensidad de la nota, ¿qué tanto se modifica la ecuación de V?

d) Si el músico toca la nota incorrectamente y un poco apagada ¿en qué cambia la ecuación para V?

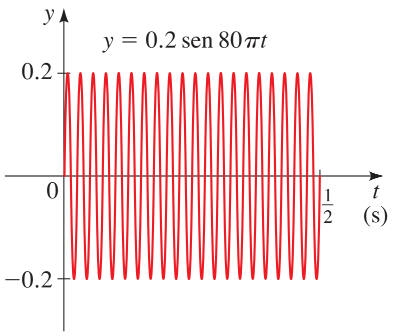


Figura 5

Solución

a) De acuerdo con las fórmulas de amplitud, periodo y frecuencia obtenemos

$$\text{amplitud} = |0.2| = 0.2$$

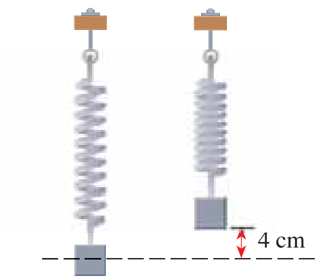
$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{80\pi} = \frac{1}{40}$$

$$\text{frecuencia} = \frac{80\pi}{2\pi} = 40$$

b) La gráfica de V se muestra en la figura 5.

c) Si el músico aumenta la intensidad se incrementa la amplitud. De este modo el número 0.2 se reemplaza por un número mayor.

d) Si la nota es apagada, entonces la frecuencia disminuye. Por lo tanto, el coeficiente de t es menor que 80π. ■



Ejemplo 3 Modelado de un resorte que vibra

Una masa pende de un resorte. El resorte está comprimido y mide 4 cm. Luego se suelta. Se observa que la masa regresa a la posición comprimida después de $\frac{1}{3}$ de segundo.

a) Encuentre una función que modele el desplazamiento de la masa.

b) Grafique el desplazamiento de la masa.

Solución

a) El movimiento de la masa está representado por una de las ecuaciones del movimiento armónico simple. La amplitud del movimiento es 4 cm. Puesto que esta amplitud se alcanza en el tiempo $t = 0$, una función adecuada que modele el desplazamiento es de la forma

$$y = a \cos \omega t$$

Como el periodo es $p = \frac{1}{3}$, podemos determinar ω a partir de la ecuación siguiente:

$$\text{periodo} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{Periodo} = \tfrac{1}{3}$$

$$\omega = 6\pi \qquad \text{Despeje de } \omega$$

Entonces, el movimiento de la masa está modelado por la función

$$y = 4 \cos 6\pi t$$

donde y es el desplazamiento desde el punto de reposo en el tiempo t. Observe que cuando $y = 0$, el desplazamiento es $y = 4$, como era de esperarse.

b) La gráfica del desplazamiento de la masa en el tiempo t se ilustra en la figura 6. ■

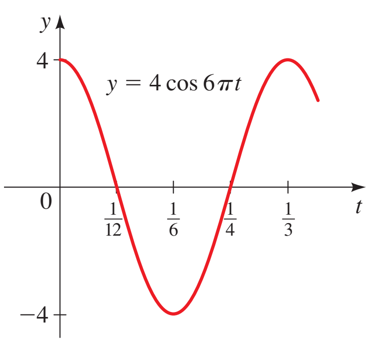


Figura 6

En general, las funciones seno o coseno que representan un movimiento armónico simple podrían estar desplazadas horizontal o verticalmente. En este caso, la ecuación tiene la forma

$$y = a\,\mathrm{sen}(\omega(t - c)) + b \qquad \text{o} \qquad y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

El desplazamiento vertical b indica que la variación ocurre alrededor de un valor promedio b. El desplazamiento horizontal c indica la posición del objeto en $t = 0$. (Véase figura 7.)

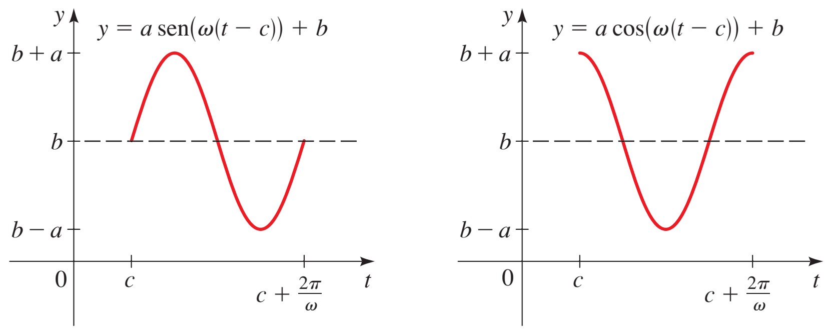


Figura 7

Ejemplo 4 Modelado de la brillantez de una estrella variable

Una estrella variable es aquella cuya brillantez aumenta y disminuye en forma alternada. Para la estrella variable Cefeida delta, el tiempo entre los periodos de brillantez máxima es 5.4 días. La brillantez promedio, es decir, la magnitud, de la estrella es 4.0 y su brillantez varía en una magnitud de ± 0.35.

a) Determine una función que modele la brillantez de la Cefeida delta en función del tiempo.

b) Grafique la brillantez de la Cefeida delta en función del tiempo.

Solución

a) Determinemos una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

La amplitud es la variación máxima de la brillantez promedio, de modo que la amplitud es $a = 0.35$ de magnitud. Sabemos que el periodo es de 5.4 días, de modo que

$$\omega = \frac{2\pi}{5.4} \approx 1.164$$

Puesto que la brillantez varía desde un valor promedio de 4.0 de magnitud, la gráfica se desplaza hacia arriba $b = 4.0$. Si tomamos $t = 0$ como el tiempo cuando la estrella está en su brillantez máxima, no hay desplazamiento horizontal, por lo que $c = 0$ (porque una curva coseno alcanza su máximo a $t = 0$). Por lo tanto, la función que queremos es

$$y = 0.35\cos(1.16t) + 4.0$$

donde t es el número de días a partir del momento cuando la estrella está en su brillantez máxima.

b) La gráfica se ilustra en la figura 8. ■

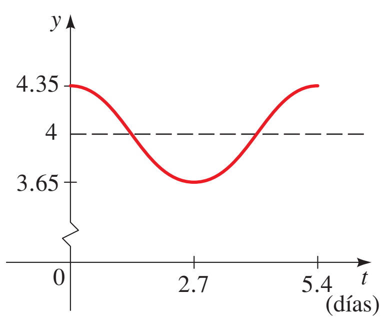


Figura 8

La cantidad de horas con luz del Sol varía a lo largo del año. En el Hemisferio Norte, el día más largo es el 21 de junio, y el más corto es el 21 de diciembre. La duración promedio de la luz de día es de 12 horas, y la variación de este promedio depende de la latitud. (Por ejemplo, en Fairbanks, Alaska, se experimentan ¡más de 20 horas de luz en el día más largo y menos de cuatro horas en el día más corto!) La gráfica de la figura 9 ilustra la cantidad de horas con luz del día en distintas épocas del año para varias latitudes. Es evidente, de acuerdo con la gráfica, que la variación en horas de luz de día es armónica simple.

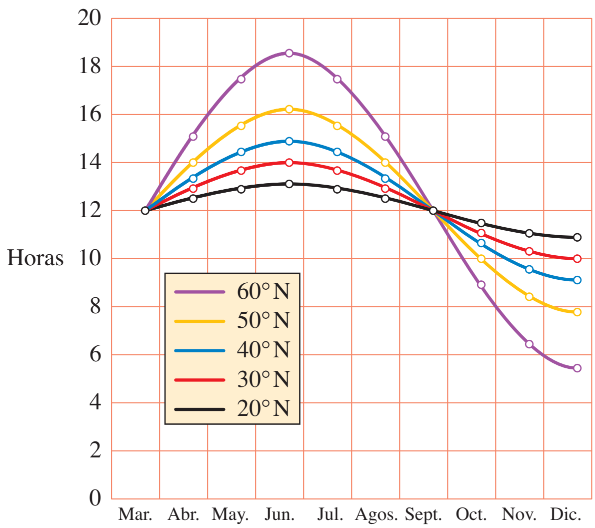


Figura 9
Gráfica de la duración de la luz del día desde el 21 de marzo al 21 de diciembre en varias latitudes

Fuente: Lucia C. Harrison, *Daylight, Twilight, Darkness and Time* (Nueva York: Silver, Burdett, 1935), p. 40.

Ejemplo 5 Modelado del número de horas de luz solar

En Filadelfia (40° de latitud norte), el día más largo del año tiene 14 h 50 min de luz de día y el día más corto tiene 9 h 10 min de luz.

a) Determine una función L que modele la duración de la luz del día en función de t, la cantidad de días desde el 1 de enero.

b) Un astrónomo requiere por lo menos 11 h de oscuridad para una fotografía astronómica de larga exposición. ¿En qué días del año es posible tomar dicha fotografía?

Solución

a) Necesitamos encontrar una función de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(\omega(t - c)) + b$$

cuya gráfica es la curva a 40° de latitud norte de la figura 9. A partir de la información dada, vemos que la amplitud es

$$a = \tfrac{1}{2}\left(14\tfrac{5}{6} - 9\tfrac{1}{6}\right) \approx 2.83 \text{ h}$$

Puesto que hay 365 días en el año, el periodo es 365, por lo que

$$\omega = \frac{2\pi}{365} \approx 0.0172$$

Como la duración promedio de la luz del día es de 12 horas, la gráfica se desplaza 12 hacia arriba, de modo que $b = 12$. Puesto que la curva alcanza el valor promedio (12) el 21 de marzo, el octagésimo día del año, la curva se desplaza 80 unidades a la derecha. Por lo tanto, $c = 80$. Entonces, una función que modela el número de horas de luz del día es

$$y = 2.83 \text{ sen}(0.0172(t - 80)) + 12$$

donde t es el número de días a partir del 1 de enero.

b) Un día tiene 24 h, de modo que 11 horas de noche corresponden a 13 horas de luz de día. Entonces, necesitamos resolver la desigualdad $y \leq 13$. Para resolver esta desigualdad en forma gráfica, trazamos $y = 2.83 \text{ sen } 0.0172(t - 80) + 12$ y $y = 13$ en el mismo sistema. Según la gráfica de la figura 10 vemos que hay menos de 13 h de luz de día entre el día 1 (1 de enero) y el día 101 (11 de abril) y desde el día 241 (29 de agosto) al día 365 (31 de diciembre). ■

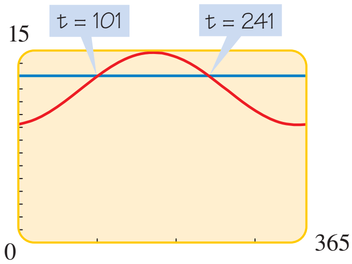


Figura 10

Otra situación donde se presenta movimiento armónico simple es en los generadores de corriente alterna (AC). La corriente alterna se produce cuando una armadura gira alrededor de su eje en un campo magnético.

En la figura 11 se representa una versión sencilla de tal generador. Cuando el alambre atraviesa el campo magnético, un voltaje o tensión E se genera en el alambre. Se puede demostrar que el voltaje generado se representa mediante

$$E(t) = E_0 \cos \omega t$$

donde E_0 es la tensión máxima producida, la cual depende de la fuerza del campo magnético, y $\omega/(2\pi)$ es la cantidad de revoluciones por segundo de la armadura, es decir, la frecuencia.

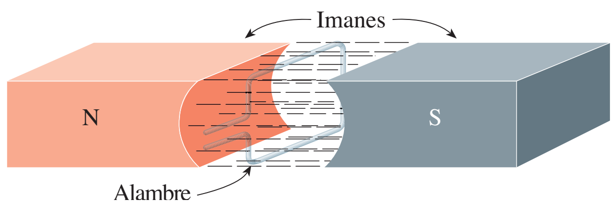


Figura 11

¿Por qué decimos que la corriente de los hogares es de 110 V cuando el voltaje máximo producido es 155 V? De acuerdo con la simetría de la función coseno, vemos que el voltaje promedio generado es cero. Este valor promedio sería el mismo para todos los generadores de corriente alterna y entonces no nos daría información acerca del voltaje generado. Para obtener mayor información del voltaje, los ingenieros usan el método del **valor eficaz de la tensión** (rms). Se puede demostrar que el valor eficaz de la tensión es $1/\sqrt{2}$ por el voltaje máximo. Entonces, en el caso de la corriente de los hogares el valor eficaz de la tensión es

$$155 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 110 \text{ V}$$

Ejemplo 6 Modelado de la corriente alterna

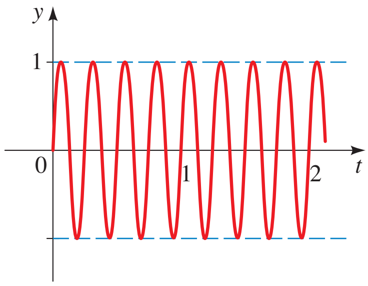
La corriente alterna de 110 V de los hogares varía de +155 V a −155 V con una frecuencia de 60 Hz (ciclos por segundo). Plantee una ecuación que describa esta variación del voltaje.

Solución La variación del voltaje es armónica simple. Puesto que la frecuencia es de 60 ciclos por segundo, tenemos

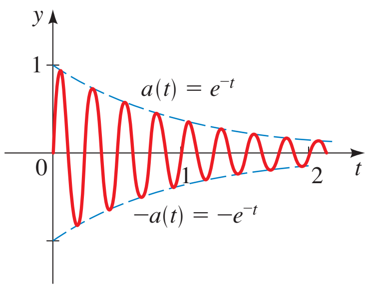
$$\frac{\omega}{2\pi} = 60 \qquad \text{o bien} \qquad \omega = 120\pi$$

Hagamos que $t = 0$ es el tiempo cuando el voltaje es +155 V. Entonces,

$$E(t) = a \cos \omega t = 155 \cos 120\pi t$$ ■



a) Movimiento armónico: $y = \text{sen}\, 8\pi t$



b) Movimiento armónico amortiguado: $y = e^{-t}\, \text{sen}\, 8\pi t$

Figura 12

Movimiento armónico amortiguado

Se supone que el resorte de la figura 2 de la página 443 oscila en un medio sin fricción. En este caso hipotético, la amplitud de la oscilación no cambia. En la presencia de fricción, el movimiento del resorte "se extinguirá" con el tiempo, es decir, la amplitud del movimiento disminuirá con el paso del tiempo. El movimiento de este tipo se llama *movimiento armónico amortiguado.*

Movimiento armónico amortiguado

Si la ecuación que describe el desplazamiento y de un objeto en el tiempo t es

$$y = ke^{-ct}\, \text{sen}\, \omega t \qquad \text{o bien} \qquad y = ke^{-ct} \cos \omega t \qquad (c > 0)$$

entonces, el objeto se desplaza con un **movimiento armónico amortiguado**. La constante c es la **constante de amortiguamiento**, k es la amplitud inicial y $2\pi/\omega$ es el periodo.*

El movimiento armónico amortiguado es movimiento armónico simple para el cual la amplitud está regida por la función $a(t) = ke^{-ct}$. En la figura 12 se muestran las diferencias entre movimiento armónico y movimiento armónico amortiguado.

Ejemplo 7 Modelado del movimiento armónico amortiguado

Dos sistemas masa-resorte están experimentando movimiento armónico amortiguado, ambos a 0.5 ciclos por segundo y con un desplazamiento inicial máximo de 10 cm. El primero tiene una constante de amortiguamiento de 0.5 y el segundo de 0.1.

a) Determine funciones de la forma $g(t) = ke^{-ct} \cos \omega t$ para modelar el movimiento en cada caso.

b) Grafique las dos funciones que determinó en el inciso anterior. ¿En qué difieren?

Solución

Hz es la abreviatura de hertz. Un hertz es un ciclo por segundo.

a) En el tiempo $t = 0$, el desplazamiento es 10 cm. Por lo tanto, $g(0) = ke^{-c\cdot 0} \cos(\omega \cdot 0) = k$, y entonces $k = 10$. Asimismo, la frecuencia es $f = 0.5$ Hz, y como $\omega = 2\pi f$ (véase página 443), obtenemos $\omega = 2\pi(0.5) = \pi$. Al aplicar las constantes de amortiguamiento dadas, encontramos que los movimientos de los dos resortes se representan mediante las funciones

$$g_1(t) = 10e^{-0.5t} \cos \pi t \qquad \text{y} \qquad g_2(t) = 10e^{-0.1t} \cos \pi t$$

b) Las funciones g_1 y g_2 se grafican en la figura 13. Según las gráfica, vemos que en el primer caso, donde la constante de amortiguamiento es mayor, el movimiento se extingue con rapidez, en tanto que en el segundo caso, el movimiento perceptible continúa mucho más tiempo. ■

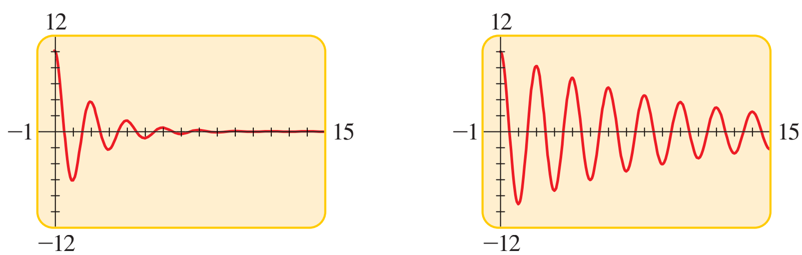


Figura 13 $g_1(t) = 10\, e^{-0.5t} \cos \pi t$ $\qquad g_2(t) = 10\, e^{-0.1t} \cos \pi t$

*En el caso del movimiento armónico amortiguado, el término *cuasi-periodo* se usa con mucha frecuencia en lugar de *periodo* porque el movimiento no es en realidad periódico, sino que disminuye con el tiempo. No obstante, seguiremos utilizando el término *periodo* para evitar confusiones.

Como lo indica el ejemplo anterior, a medida que es más grande la constante de amortiguamiento c, es más rápida la extinción de la oscilación. Cuando se pulsa la cuerda de una guitarra y luego se le permite vibrar libremente, un punto en esa cuerda sufre movimiento armónico simple. Escuchamos el amortiguamiento del movimiento cuando se apaga el sonido que genera la vibración de la cuerda. Qué tan rápido se presenta el amortiguamiento en la cuerda, según la medida de la constante c, es una propiedad de las dimensiones de la cuerda y del material con que esté fabricada. Otro ejemplo de movimiento armónico amortiguado es el movimiento que sufre un amortiguador de automóvil cuando éste golpea contra algo en la carretera. En este caso, el amortiguador del automóvil está diseñado para amortiguar el movimiento tan rápido como sea posible (c grande) y tener una frecuencia tan pequeña como sea posible (ω pequeña). Por otro lado, el sonido producido por un músico que toca una nota con una tuba no es amortiguado siempre que el músico mantenga la intensidad de la nota. Las ondas electromagnéticas que producen luz se desplazan en un movimiento armónico simple que no es amortiguado.

Ejemplo 8 Vibración de una cuerda de violín

Se jala la cuerda sol de un violín una distancia de 0.5 cm por arriba de su posición de reposo, luego se suelta y se le deja vibrar. Se determinó que la constante de amortiguamiento c de esta cuerda es 1.4. Suponga que la nota generada es sol pura (frecuencia = 200 Hz). Determine una ecuación que describa el movimiento en el punto en el cual la cuerda fue pulsada.

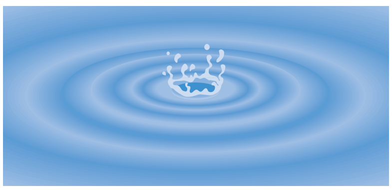
Solución Sea P el punto en el cual la cuerda es pulsada. Determinaremos una función $f(t)$ que da la distancia en el tiempo t del punto P desde su posición original de reposo. Como el desplazamiento máximo ocurre en $t = 0$, encontramos una ecuación de la forma

$$y = ke^{-ct} \cos \omega t$$

A partir de esta ecuación vemos que $f(0) = k$. Pero sabemos que el desplazamiento original de la cuerda es 0.5 cm. Entonces, $k = 0.5$. Como la frecuencia de la vibración es 200, tenemos $\omega = 2\pi f = 2\pi(200) = 400\pi$. Para finalizar, puesto que sabemos que la constante de amortiguamiento es 1.4 tenemos

$$f(t) = 0.5e^{-1.4t} \cos 400\pi t$$ ■

Ejemplo 9 Ondas en un lago



Se arroja una piedra en un lago en calma, lo cual ocasiona que se formen ondas. El movimiento hacia arriba y hacia abajo de un punto en la superficie del agua lo modela el movimiento armónico amortiguado. En un cierto momento se mide la amplitud de la onda y 20 s más tarde se observa que la amplitud disminuyó a $\frac{1}{10}$ de su valor. Calcule la constante de amortiguamiento c.

Solución La amplitud se rige por el coeficiente ke^{-ct} en las ecuaciones para el movimiento armónico amortiguado. Por lo tanto, la amplitud en el tiempo t es ke^{-ct}, y 20 s después es $ke^{-c(t+20)}$. Entonces, como el último valor es $\frac{1}{10}$ del primer valor, tenemos

$$ke^{-c(t+20)} = \tfrac{1}{10}ke^{-ct}$$

Entonces determinamos el valor de c. Al anular k y aplicar las leyes de los exponentes llegamos a

$$e^{-ct} \cdot e^{-20c} = \tfrac{1}{10}e^{-ct}$$

$$e^{-20c} = \tfrac{1}{10} \qquad \text{Anulación de } e^{-ct}$$

$$e^{20c} = 10 \qquad \text{Se determinan los recíprocos}$$

Determinamos los logaritmos naturales de ambos miembros:

$$20c = \ln(10)$$

$$c = \tfrac{1}{20}\ln(10) \approx \tfrac{1}{20}(2.30) \approx 0.12$$

Por lo tanto, la constante de amortiguamiento es $c \approx 0.12$. ■

5.5 Ejercicios

1–8 ■ La función dada modela el desplazamiento de un objeto que se desplaza en movimiento armónico simple.

a) Determine amplitud, periodo y frecuencia del movimiento.

b) Grafique el desplazamiento del objeto en un periodo completo.

1. $y = 2 \text{ sen } 3t$

2. $y = 3 \cos \tfrac{1}{2}t$

3. $y = -\cos 0.3t$

4. $y = 2.4 \text{ sen } 3.6t$

5. $y = -0.25 \cos\left(1.5t - \dfrac{\pi}{3}\right)$

6. $y = -\tfrac{3}{2} \text{ sen}(0.2t + 1.4)$

7. $y = 5 \cos\left(\tfrac{2}{3}t + \tfrac{3}{4}\right)$

8. $y = 1.6 \text{ sen}(t - 1.8)$

9–12 ■ Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que presenta las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$.

9. amplitud = 10 cm, periodo = 3 s

10. amplitud = 24 pies, periodo = 2 min

11. amplitud = 6 pulg, frecuencia = $5/\pi$ Hz

12. amplitud = 1.2 m, frecuencia = 0.5 Hz

13–16 ■ Encuentre una función que modele el movimiento armónico simple que presenta las propiedades dadas. Suponga que el desplazamiento es máximo en el tiempo $t = 0$.

13. amplitud = 60 pies, periodo = 0.5 min

14. amplitud = 35 cm, periodo = 8 s

15. amplitud = 2.4 m, frecuencia = 750 Hz

16. amplitud = 6.25 pulg, frecuencia = 60 Hz

17–24 ■ Se proporcionan una amplitud inicial k, constante de amortiguamiento c y frecuencia f o periodo p. (Recuerde que la frecuencia y el periodo están relacionados mediante la ecuación $f = 1/p$.)

a) Determine una función que modele el movimiento armónico amortiguado. Use una función de la forma $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ en los ejercicios 17 a 20 y de la forma $y = ke^{-ct} \text{ sen } \omega t$ en los ejercicios 21 a 24.

b) Grafique la función.

17. $k = 2, \quad c = 1.5, \quad f = 3$

18. $k = 15, \quad c = 0.25, \quad f = 0.6$

19. $k = 100, \quad c = 0.05, \quad p = 4$

20. $k = 0.75, \quad c = 3, \quad p = 3\pi$

21. $k = 7, \quad c = 10, \quad p = \pi/6$

22. $k = 1, \quad c = 1, \quad p = 1$

23. $k = 0.3, \quad c = 0.2, \quad f = 20$

24. $k = 12, \quad c = 0.01, \quad f = 8$

Aplicaciones

25. Un corcho flotante Un corcho que flota en un lago está sometido a movimiento armónico simple. Su desplazamiento por arriba del fondo del lago está expresado por

$$y = 0.2 \cos 20\pi t + 8$$

donde y está en metros y t en minutos.

a) Calcule la frecuencia del movimiento del corcho.

b) Grafique y.

c) Encuentre el desplazamiento máximo del corcho por arriba del fondo del lago.

26. Señales FM de radio La onda portadora para una señal FM de radio está expresada mediante la función

$$y = a \text{ sen}(2\pi(9.15 \times 10^7)t)$$

donde t está en segundos. Calcule el periodo y la frecuencia de la onda portadora.

27. Modelo de la población de un predador En un modelo de predador/presa (véase página 432), la población del predador se modela mediante la función

$$y = 900 \cos 2t + 8000$$

donde t se mide en años.

a) ¿Cuál es la población máxima?

b) Determine el tiempo entre periodos sucesivos de población máxima.

28. Presión sanguínea Cada vez que late el corazón, la presión sanguínea aumenta, luego disminuye cuando el corazón descansa entre latidos. La presión sanguínea de una persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \text{ sen}(160\pi t)$$

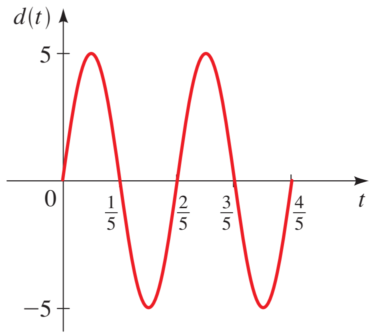
donde $p(t)$ es la presión en mm de Hg en el tiempo t, que se mide en minutos.

a) Calcule la amplitud, periodo y frecuencia de p.

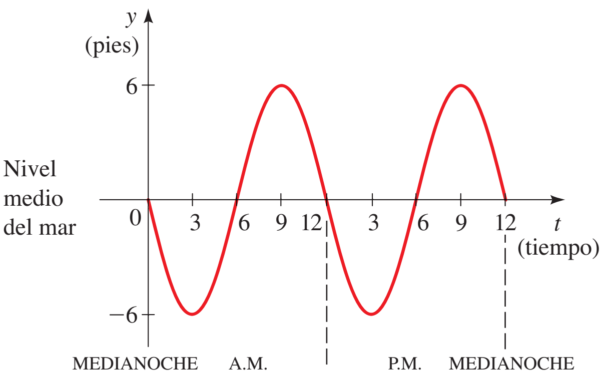
b) Grafique p.

c) Cuando una persona hace ejercicio, su corazón late más rápido. ¿Cómo afecta esta situación el periodo y la frecuencia de p?

29. Sistema resorte-masa Una masa unida a un resorte se desplaza hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple. La gráfica proporciona el desplazamiento $d(t)$ desde el equilibrio en el tiempo t. Exprese la función d en la forma $d(t) = a \text{ sen } \omega t$.

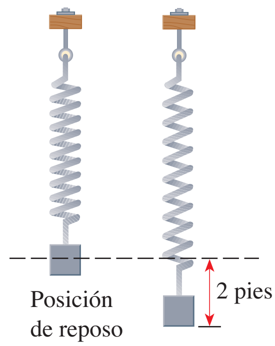


30. Mareas La gráfica muestra la variación del nivel del agua relacionada con el nivel medio del mar en Commencement Bay en Tacoma, Washington, para un periodo particular de 24 h. Si se supone que esta variación está modelada por el movimiento armónico simple, determine una ecuación de la forma $y = a \text{ sen } \omega t$ que describa la variación en el nivel del agua como una función del número de horas después de medianoche.



31. Mareas La Bahía de Fundy en Nueva Escocia tiene las mareas más altas del mundo. En un periodo de 12 horas el agua inicia al nivel medio del mar, se eleva 21 pies y cae hasta 21 pies y luego regresa al nivel medio del mar. Si suponemos que el movimiento de las mareas es armónico simple, proporcione una ecuación que describa la altura de la marea en la Bahía de Fundy por arriba del nivel medio del mar. Trace una gráfica donde se muestre el nivel de las mareas en un periodo de 12 horas.

32. Sistema resorte-masa Se jala hacia abajo una distancia de 2 pies a una masa que está unida a un resorte, desde su posición de reposo según se muestra en la figura. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le deja oscilar. Si la masa regresa a su posición después de 1 s, encuentre una ecuación que describa su movimiento



33. Sistema resorte-masa Una masa pende de un resorte. El resorte se comprime de modo que la masa de localiza 5 cm por arriba de su posición de reposo. La masa se suelta en el tiempo $t = 0$ y se le deja oscilar. Se observa que la masa alcanza su punto más bajo medio segundo después de que se suelta. Dé una ecuación que describa el movimiento de la masa.

34. Sistema resorte-masa La frecuencia de oscilación de un objeto suspendido de un resorte depende de la rigidez k de éste y la masa m del objeto. La rigidez se llama *constante del resorte*. Si el resorte se comprime a una distancia a y luego se le deja oscilar, su desplazamiento se representa mediante

$$f(t) = a \cos \sqrt{k/m}\, t$$

a) Una masa de 10 g está suspendida de un resorte con rigidez $k = 3$. Si el resorte se comprime una distancia de 5 cm y luego se libera, determine la ecuación que describe la oscilación del resorte.

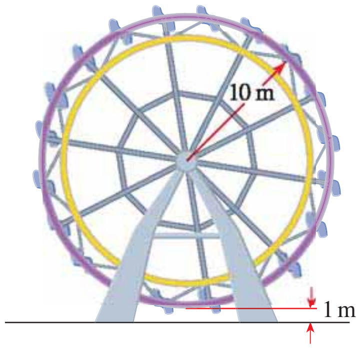
b) Halle una fórmula general para la frecuencia en función de k y m.

c) ¿Qué tanto se afecta la frecuencia si la masa se incrementa? ¿La oscilación es más rápida o más lenta?

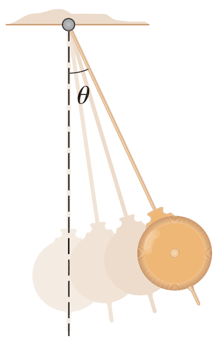
d) ¿Qué tanto resulta afectada la frecuencia si se usa un resorte más rígido (k más grande)? ¿La oscilación es más rápida o más lenta?

35. Rueda de la fortuna Una rueda de la fortuna tiene un radio de 10 m y la parte inferior de la rueda pasa a 1 m por arriba del suelo. Si la rueda da una vuelta completa cada 20 s, determine una ecuación que proporcione la altura por

arriba del suelo, en función del tiempo, de una persona que va sentada en la rueda.



36. Péndulo de reloj El péndulo de un reloj del abuelo da una oscilación completa cada 2 s. El ángulo máximo que el péndulo subtiende con respecto a su posición de reposo es 10°. Sabemos a partir de los principios físicos que el ángulo θ entre el péndulo y su posición de reposo cambia de modo armónico simple. Plantee una ecuación que describa el ángulo θ en función del tiempo. (Tome $t = 0$ como el tiempo cuando el péndulo es vertical.)



37. Estrellas variables El periodo de la estrella variable Géminis zeta es de 10 días. La brillantez promedio de la estrella es 3.8 magnitudes y la variación máxima con respecto al promedio es 0.2 de magnitud. Si suponemos que la variación en la brillantez sigue un patrón armónico simple, determine una ecuación que proporcione la brillantez de la estrella en función del tiempo.

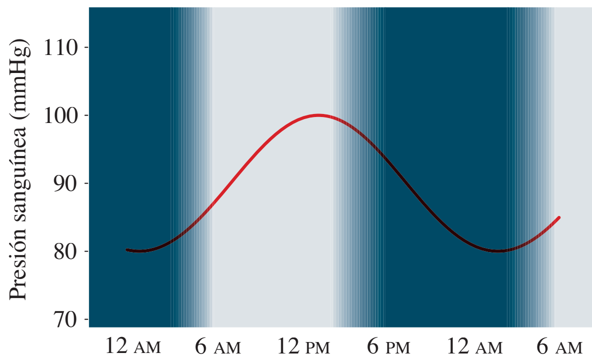
38. Estrellas variables Los astrónomos suponen que el radio de una estrella variable se incrementa y disminuye con la brillantez de la estrella. La estrella variable Cefeida delta (ejemplo 4) tiene un radio promedio de 20 millones de millas y cambia un máximo de 1.5 millones de millas con respecto al promedio durante una sola pulsación. Determine una ecuación que describa el radio de esta estrella en función del tiempo.

39. Generador eléctrico La armadura de un generador eléctrico gira a 100 revoluciones por segundo (rps). Si el voltaje máximo producido es 310 V, plantee una ecuación que describe esta variación en voltaje. ¿Cuál es el valor eficaz de la tensión? (Véase ejemplo 6 y la nota al margen adyacente a él.)

40. Relojes biológicos Los ritmos circadianos son procesos biológicos que oscilan con un periodo de aproximadamente 24 h. Es decir, un ritmo circadiano es un reloj biológico diario interno. Al parecer, la presión sanguínea sigue un ritmo. Para una cierta persona, la presión sanguínea promedio en reposo varía de un máximo de 100 mm de Hg a las 2:00 PM a un mínimo de 80 mm de Hg a las 2:00 AM. Determine la función seno de la forma

$$f(t) = a\ \mathrm{sen}(\omega(t - c)) + b$$

que modela la presión sanguínea en el tiempo t, que se mide en horas a partir de la medianoche.



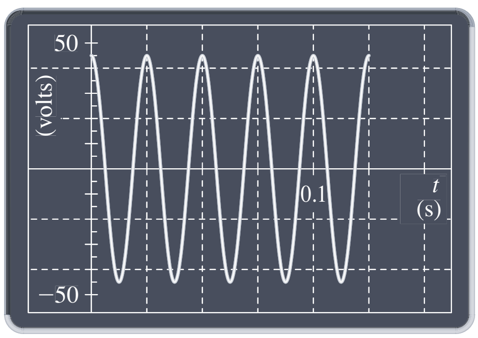
41. Generador eléctrico La gráfica muestra la pantalla de un osciloscopio sobre la lectura de la variación del voltaje de una corriente alterna que produce un generador sencillo.

a) Encuentre el voltaje máximo producido.

b) Determine la frecuencia (ciclos por segundo) del generador.

c) ¿Cuántas revoluciones por segundo da la armadura del generador?

d) Determine una fórmula que describa la variación en el voltaje en función del tiempo.



42. Efecto Doppler Cuando un automóvil hace sonar su claxon al acercarse a un observador, el tono de la bocina parece más alto al aproximarse y más bajo al alejarse (véase la figura). Este fenómeno se llama **efecto Doppler**. Si la fuente del sonido se desplaza a una velocidad v en relación con el observador y si la velocidad del sonido es v_0, entonces la frecuencia percibida f se relaciona con la frecuencia real f_0 según

$$f = f_0\left(\frac{v_0}{v_0 \pm v}\right)$$

Elegimos el signo menos si la fuente se desplaza hacia el observador y el signo más si se aleja.

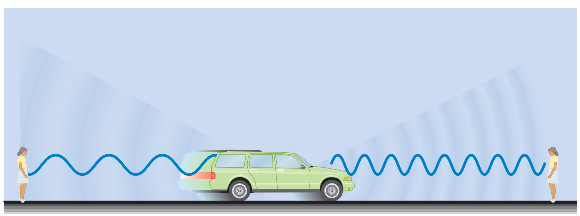
Suponga que un automóvil va 110 pies/s pasa tocando su claxon frente a una mujer que se encuentra de pie en el acotamiento de la carretera; la frecuencia de la bocina es de 500 Hz. Suponga también que la velocidad del sonido es de 1130 pies/s. (Es la velocidad en aire seco a 70°F.)

a) ¿Cuáles son las frecuencias de los sonidos que la mujer escucha cuando el automóvil se aproxima a ella y cuando se aleja de ella?

b) Sea A la amplitud del sonido. Determine unas funciones de la forma

$$y = A \text{ sen } \omega t$$

que modelan el sonido percibido cuando el automóvil se aproxima a la mujer y cuando se aleja.

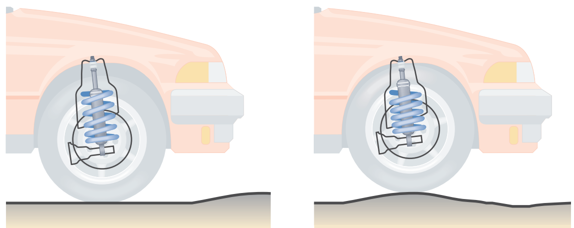


43. Movimiento de un edificio Una fuerte racha de aire golpea a un edificio alto, lo que ocasiona que la construcción se mueva de un lado al otro según un movimiento armónico amortiguado. La frecuencia de la oscilación es 0.5 ciclos por segundo y la constante de amortiguamiento es $c = 0.9$. Calcule una ecuación que describe el movimiento del edificio. (Suponga $k = 1$ y $t = 0$ es el instante cuando la racha de aire golpea al edificio.)

44. Amortiguador de golpes Cuando un automóvil choca contra un tope en el camino, un amortiguador del vehículo se comprime una longitud de 6 pulg, luego se libera (véase la figura). El amortiguador vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 2 ciclos por segundo. La constante de amortiguamiento para este amortiguador en particular es 2.8.

a) Determine una ecuación que describa el desplazamiento del amortiguador desde su posición de reposo como una función del tiempo. Tome $t = 0$ como el instante en el que el amortiguador es liberado.

b) ¿Cuánto tiempo se requiere para que la amplitud de la vibración disminuya a 0.5 pulg?



45. Diapasón Se golpea un diapasón y oscila en movimiento armónico amortiguado. La amplitud del movimiento se mide, y 3 s más tarde se observa que la amplitud ha caído $\frac{1}{4}$ de su valor. Determine la constante de amortiguamiento c para este diapasón.

46. Cuerda de guitarra La cuerda de una guitarra se pulsa en el punto P una distancia de 3 cm por arriba de su posición de reposo. Luego se suelta y vibra en movimiento armónico amortiguado con una frecuencia de 165 ciclos por segundo. Después de 2 s se observa que la amplitud de la vibración en el punto P es 0.6 cm.

a) Calcule la constante de amortiguamiento c.

b) Encuentre una ecuación que describe la posición del punto P por arriba de su posición de reposo como una función del tiempo. Considere que $t = 0$ es el instante en que se suelta la cuerda.

5 Repaso

Revisión de conceptos

1. a) ¿Qué es el círculo unitario?

b) Utilice un diagrama para explicar qué significa el punto sobre la circunferencia determinado por un número real t.

c) ¿Cuál es el número de referencia $\bar{t}$ asociado a t?

d) Si t es un número real y $P(x, y)$ es el punto sobre la circunferencia determinado por t, escriba ecuaciones que definan sen t, cos t, tan t, cot t, sec t y csc t.

e) ¿Cuáles son los dominios de las seis funciones que definió en el inciso d)?

f) ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes I, II, III y IV?

2. a) ¿Qué es una función par?

b) ¿Cuáles funciones trigonométricas son pares?

c) ¿Qué es una función impar?

d) ¿Cuáles funciones trigonométricas son impares?

3. a) Diga ¿cuáles son las identidades recíprocas?

b) Mencione las identidades pitagóricas.

4. a) ¿Qué es una función periódica?

b) ¿Cuáles son los periodos de las seis funciones trigonométricas?

5. Grafique las funciones seno y coseno. ¿Cómo es la gráfica del coseno en relación con la gráfica del seno?

6. Escriba expresiones para amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de la curva seno $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ y la curva coseno $y = a \cos k(x - b)$.

7. a) Grafique las funciones tangente y cotangente.

b) Establezca los periodos de la curva tangente $y = a \tan kx$ y la curva cotangente $y = a \cot kx$.

8. a) Grafique las funciones secante y cosecante.

b) Proporcione los periodos de la curva secante $y = a \sec kx$ y la curva cosecante $y = a \csc kx$.

9. a) ¿Cuál es el movimiento armónico simple?

b) ¿Cuál es el movimiento armónico amortiguado?

c) Mencione tres ejemplos de la vida cotidiana relacionados con el movimiento armónico simple y el movimiento armónico amortiguado.

Ejercicios

1–2 ■ Se proporciona un punto $P(x, y)$.

a) Demuestre que P está sobre el círculo unitario.

b) Suponga que P es el punto sobre la circunferencia determinado por t. Determine sen t, cos t y tan t.

1. $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ **2.** $P\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

3–6 ■ Se da un número real t.

a) Determine el número de referencia para t.

b) Encuentre el punto sobre la circunferencia $P(x, y)$ del círculo unitario determinado por t.

c) Calcule las seis funciones trigonométricas de t.

3. $t = \frac{2\pi}{3}$ **4.** $t = \frac{5\pi}{3}$

5. $t = -\frac{11\pi}{4}$ **6.** $t = -\frac{7\pi}{6}$

7–16 ■ Determine el valor de la función trigonométrica. Si es posible, proporcione el valor exacto; si no es así, utilice una calculadora para encontrar un valor aproximado correcto con cinco cifras decimales.

7. a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ **b)** $\cos \frac{3\pi}{4}$

8. a) $\tan \frac{\pi}{3}$ **b)** $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

9. a) sen 1.1 **b)** cos 1.1

10. a) $\cos \frac{\pi}{5}$ **b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

11. a) $\cos \frac{9\pi}{2}$ **b)** $\sec \frac{9\pi}{2}$

12. a) $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$ **b)** $\csc \frac{\pi}{7}$

13. a) $\tan \frac{5\pi}{2}$ **b)** $\cot \frac{5\pi}{2}$

14. a) $\operatorname{sen} 2\pi$ **b)** $\csc 2\pi$

15. a) $\tan \frac{5\pi}{6}$ **b)** $\cot \frac{5\pi}{6}$

16. a) $\cos \frac{\pi}{3}$ **b)** $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$

17–20 ■ Aplique las identidades fundamentales para plantear la primera expresión en términos de la segunda.

17. $\frac{\tan t}{\cos t}$, sen t **18.** $\tan^2 t \sec t$, cos t

19. tan t, sen t; t en el cuadrante IV

20. sec t, sen t; t en el cuadrante II

21–24 ■ Calcule los valores de las funciones trigonométricas restantes en t a partir de la información proporcionada.

21. $\operatorname{sen} t = \frac{5}{13}$, $\cos t = -\frac{12}{13}$

22. $\operatorname{sen} t = -\frac{1}{2}$, $\cos t > 0$

23. $\cot t = -\frac{1}{2}$, $\csc t = \sqrt{5}/2$

24. $\cos t = -\frac{3}{5}$, $\tan t < 0$

25. Si $\tan t = \frac{1}{4}$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante III, determine $\sec t + \cot t$.

26. Si $\operatorname{sen} t = -\frac{8}{17}$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante IV, determine $\csc t + \sec t$.

27. Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante I, determine $\tan t + \sec t$.

28. Si $\sec t = -5$ y el punto sobre la circunferencia para t está en el cuadrante II, determine $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$.

29–36 ■ Se proporciona una función trigonométrica.

a) Calcule amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de la función.

b) Trace la gráfica.

29. $y = 10 \cos \frac{1}{2}x$ **30.** $y = 4 \operatorname{sen} 2\pi x$

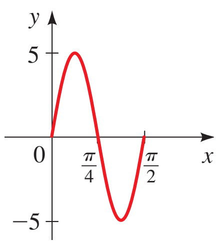
31. $y = -\operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ **32.** $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

33. $y = 3 \operatorname{sen}(2x - 2)$ **34.** $y = \cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

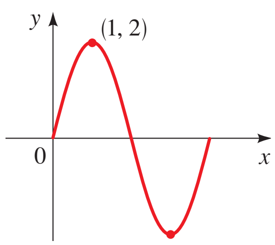
35. $y = -\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ **36.** $y = 10 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

37–40 ■ Se muestra la gráfica de un periodo de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ o $y = a \cos k(x - b)$. Determine la función.

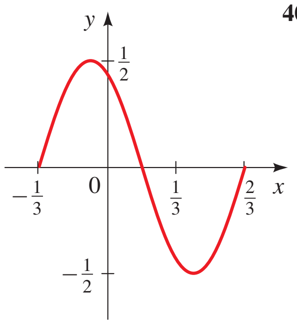
37.



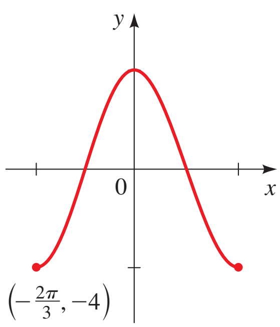
38.



39.



40.



41–48 ■ Determine el periodo y grafique.

41. $y = 3 \tan x$ **42.** $y = \tan \pi x$

43. $y = 2 \cot\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ **44.** $y = \sec\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{2}\right)$

45. $y = 4 \csc(2x + \pi)$ **46.** $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

47. $y = \tan\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)$ **48.** $y = -4 \sec 4\pi x$

49–54 ■ Se proporciona una función.

a) Utilice una calculadora o una computadora para graficar la función.

b) Determine a partir de la gráfica si la función es periódica y, si es así, calcule el periodo.

c) Calcule a partir de la gráfica si la función es impar, par o ninguna de las dos.

49. $y = |\cos x|$ **50.** $y = \operatorname{sen}(\cos x)$

51. $y = \cos(2^{0.1x})$ **52.** $y = 1 + 2^{\cos x}$

53. $y = |x| \cos 3x$ **54.** $y = \sqrt{x} \operatorname{sen} 3x \quad (x > 0)$

55–58 ■ Grafique las tres funciones sobre una misma pantalla. ¿De qué manera se relacionan las gráficas?

55. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \operatorname{sen} x$

56. $y = 2^{-x}, \quad y = -2^{-x}, \quad y = 2^{-x} \cos 4\pi x$

57. $y = x, \quad y = \operatorname{sen} 4x, \quad y = x + \operatorname{sen} 4x$

58. $y = \operatorname{sen}^2 x, \quad y = \cos^2 x, \quad y = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

59–60 ■ Calcule los valores máximo y mínimo de la función.

59. $y = \cos x + \operatorname{sen} 2x$ **60.** $y = \cos x + \operatorname{sen}^2 x$

61. Calcule las soluciones de $\operatorname{sen} x = 0.3$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

62. Calcule las soluciones de $\cos 3x = x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

63. Sea $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x}$.

a) ¿La función f es par, impar o ninguna de las dos?

b) Determine las intersecciones con el eje x de la gráfica de f.

c) Grafique f en un rectángulo de visión adecuado.

d) Describa el comportamiento de la función cuando x se incrementa.

e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué sucede cuando x tiende a 0?

64. Sean $y_1 = \cos(\operatorname{sen} x)$ y $y_2 = \operatorname{sen}(\cos x)$.

a) Grafique y_1 y y_2 en el mismo rectángulo de visión.

b) Determine el periodo de cada una de las funciones a partir de su gráfica.

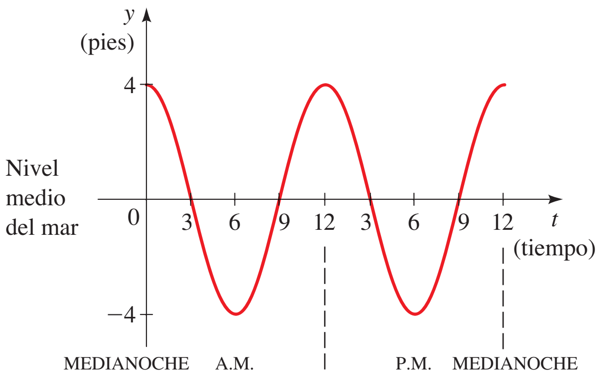
c) Determine una desigualdad entre $\operatorname{sen}(\cos x)$ y $\cos(\operatorname{sen} x)$ que sea válida para toda x.

65. Un punto P que se desplaza en movimiento armónico simple completa ocho ciclos cada segundo. Si la amplitud del movimiento es 50 cm, plantee una ecuación que describa el movimiento de P en función del tiempo. Suponga que el punto P se encuentra en su desplazamiento máximo cuando $t = 0$.

66. Una masa suspendida de un resorte oscila en movimiento armónico simple a una frecuencia de cuatro ciclos por segundo.

La distancia desde el punto más alto al punto más bajo de la oscilación es 100 cm. Determine una ecuación que describa la distancia de la masa desde la posición de reposo en función del tiempo. Suponga que la masa está en su punto más bajo cuando $t = 0$.

67. La gráfica muestra la variación del nivel del agua con respecto al nivel medio del mar en el puerto de Long Beach para un periodo particular de 24 horas. Si suponemos que esta variación es movimiento armónico simple, encuentre una ecuación de la forma $y = a \cos \omega t$ que describa la variación en el nivel del agua en función de la cantidad de horas después de medianoche.



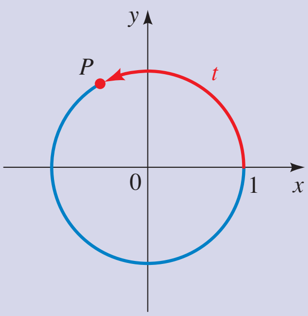
68. El piso superior de una construcción sufre movimiento armónico amortiguado después de un sismo breve. En el tiempo $t = 0$ el desplazamiento es el máximo, 16 cm desde la posición normal. La constante de amortiguamiento es $c = 0.72$ y el edificio vibra a 1.4 ciclos por segundo.

a) Determine una función de la forma $y = ke^{-ct} \cos \omega t$ para modelar el movimiento.

b) Grafique la función que determinó en el inciso a).

c) ¿Cuál es el desplazamiento en el tiempo $t = 10$ s?

5 Evaluación



1. El punto $P(x, y)$ está en el círculo unitario en el cuadrante IV. Si $x = \sqrt{11}/6$, determine y.

2. El punto P de la figura a la izquierda tiene $\frac{4}{5}$ como coordenada y. Determine

a) $\operatorname{sen} t$ b) $\cos t$

c) $\tan t$ d) $\sec t$

3. Calcule el valor exacto.

a) $\operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{6}$ b) $\cos \dfrac{13\pi}{4}$

c) $\tan\left(-\dfrac{5\pi}{3}\right)$ d) $\csc \dfrac{3\pi}{2}$

4. Exprese $\tan t$ en términos de $\operatorname{sen} t$, si el punto sobre la circunferencia determinado por t está en el cuadrante II.

5. Si $\cos t = -\frac{8}{17}$ y si el punto sobre la circunferencia determinado por t está en el cuadrante III, calcule $\tan t \cot t + \csc t$.

6–7 ■ Dada una función trigonométrica.

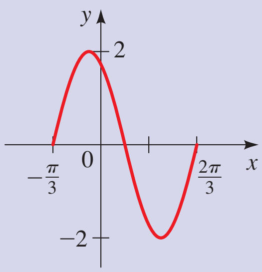
a) Determine la amplitud, el periodo y el desplazamiento de la fase de la función.

b) Trace la gráfica.

6. $y = -5 \cos 4x$ **7.** $y = 2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

8–9 ■ Calcule el periodo y grafique la función.

8. $y = -\csc 2x$ **9.** $y = \tan\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$



10. La gráfica mostrada a la izquierda es un periodo de una función de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$. Determine la función.

11. Sea $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + x^2}$.

a) Utilice una calculadora o una computadora para graficar f en un rectángulo de visión adecuado.

b) Determine con ayuda de la gráfica si f es par, impar o ninguna de las dos.

c) Determine los valores máximo y mínimo de f.

12. Una masa está suspendida de un resorte, y oscila según el movimiento armónico simple. La masa completa dos ciclos cada segundo y la distancia entre el punto más alto y el punto más bajo de la oscilación es 10 cm. Formule una ecuación de la forma $y = a \operatorname{sen} \omega t$ que proporciona la distancia de la masa desde la posición de reposo en función del tiempo.

13. Un objeto se mueve hacia arriba y hacia abajo en un movimiento armónico amortiguado. Su desplazamiento en el tiempo $t = 0$ es 16 pulg; éste es su desplazamiento máximo. La constante de amortiguamiento es $c = 0.1$ y la frecuencia es 12 Hz.

a) Determine una función que modele este movimiento.

b) Grafique la función.

Enfoque en el modelado

Ajuste de curvas sinusoidales a datos

En la sección *Enfoque en el modelado* del capítulo 2 (página 239), aprendimos a construir modelos lineales a partir de datos. En la figura 1 se ilustran algunas gráficas de datos dispersos; la primera gráfica parece ser lineal, pero las otras no. ¿Qué hacer cuando los datos que estudiamos no son lineales? En este caso, el modelo sería algún tipo de función que mejor se ajuste a los datos. Si la gráfica dispersa sugiere movimiento armónico simple, entonces trataríamos de modelar los datos con una función seno o coseno. El ejemplo siguiente ilustra este proceso.

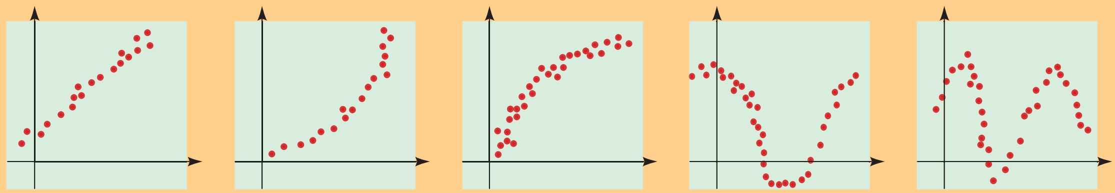


Figura 1

Ejemplo 1 Modelado de la altura de la marea

La profundidad del agua en un canal angosto varía con las mareas. En la tabla 1 se muestra la profundidad del agua en un periodo de 12 horas.

a) Trace una gráfica de dispersión con los datos de profundidad del agua.

b) Encuentre una función que modele la profundidad del agua con respecto al tiempo.

c) Si una embarcación necesita por lo menos 11 pies de agua para pasar por el canal, ¿en qué momentos lo puede hacer con seguridad?

Solución

a) Una gráfica de dispersión de los datos se ilustra en la figura 2.

Tabla 1

Tiempo	Profundidad (pies)
12:00 A.M.	9.8
1:00 A.M.	11.4
2:00 A.M.	11.6
3:00 A.M.	11.2
4:00 A.M.	9.6
5:00 A.M.	8.5
6:00 A.M.	6.5
7:00 A.M.	5.7
8:00 A.M.	5.4
9:00 A.M.	6.0
10:00 A.M.	7.0
11:00 A.M.	8.6
12:00 P.M.	10.0

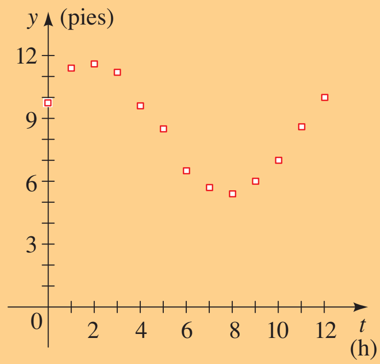


Figura 2

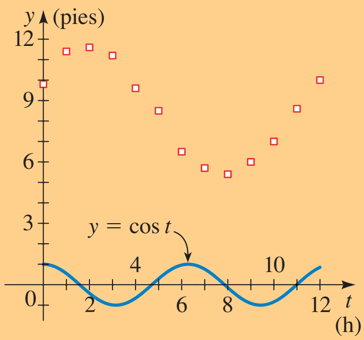
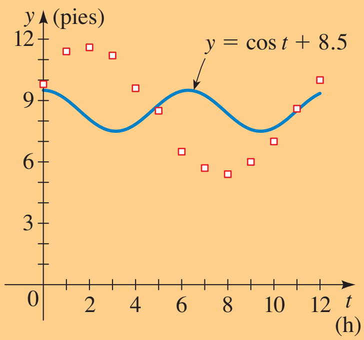


Figura 3

b) Parece que los datos quedan en una curva coseno o seno. Pero si graficamos $y = \cos t$ en la misma gráfica que la gráfica de dispersión, los resultados de la figura 3 no se acercan a los datos. Para ajustar los datos necesitamos ajustar el desplazamiento vertical, amplitud, periodo y desplazamiento de la fase de la curva coseno. En otras palabras necesitamos encontrar una función de la forma

$$y = a\cos(\omega(t - c)) + b$$

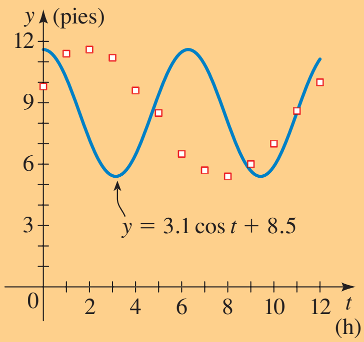
Seguimos los pasos siguientes, los cuales se ilustran mediante las gráficas al margen.



■ **Ajuste del desplazamiento vertical**

El desplazamiento vertical b es el promedio de los valores máximo y mínimo:

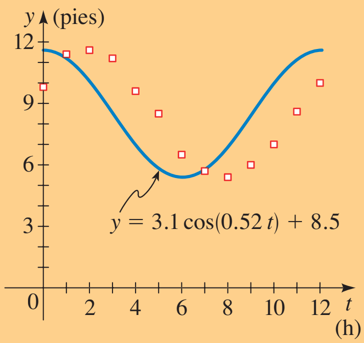
$$\begin{aligned} b &= \text{desplazamiento vertical} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} + \text{valor mínimo}) \\ &= \frac{1}{2}(11.6 + 5.4) = 8.5 \end{aligned}$$



■ **Ajuste de la amplitud**

La amplitud a es la mitad de la diferencia entre los valores máximo y mínimo:

$$\begin{aligned} a &= \text{amplitud} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\text{valor máximo} - \text{valor mínimo}) \\ &= \frac{1}{2}(11.6 - 5.4) = 3.1 \end{aligned}$$



■ **Ajuste del periodo**

El tiempo entre valores consecutivos máximo y mínimo es la mitad de un periodo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\omega} &= \text{periodo} \\ &= 2\cdot(\text{tiempo del valor máximo} - \text{tiempo del valor mínimo}) \\ &= 2(8 - 2) = 12 \end{aligned}$$

Entonces, $\omega = 2\pi/12 = 0.52$.

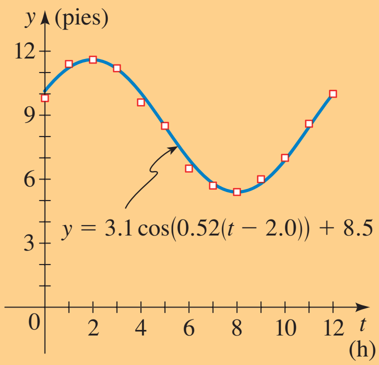


Figura 4

■ Ajuste del desplazamiento horizontal

Puesto que el valor máximo de los datos se presenta en aproximadamente $t = 2.0$, éste representa una curva coseno desplazada 2 h a la derecha. Entonces,

$$\begin{aligned} c &= \text{desplazamiento de fase} \\ &= \text{tiempo del valor máximo} \\ &= 2.0 \end{aligned}$$

■ El modelo

Hemos demostrado que una función que modela las mareas en un periodo está dada por

$$y = 3.1 \cos(0.52(t - 2.0)) + 8.5$$

Una gráfica de la función y la gráfica de dispersión se muestran en la figura 4. Al parecer, el modelo que encontramos es una buena aproximación de los datos.

c) Es necesario resolver la desigualdad $y \geq 11$. Resolvemos la desigualdad por medio de métodos gráficos, para lo cual graficamos $y = 3.1 \cos 0.52(t - 2.0) + 8.5$ y $y = 11$ en el mismo sistema. A partir de la gráfica de la figura 5 vemos que la profundidad del agua es superior a 11 pies entre $t \approx 0.8$ y $t \approx 3.2$. Esto corresponde a los tiempos 12:48 AM a 3:12 AM. ■

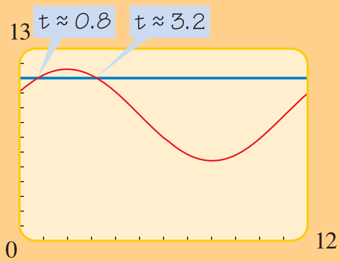


Figura 5

En el caso de las TI-83 y TI-86, el comando `SinReg` (para regresión del seno) encuentra la curva seno que mejor se ajusta a los datos dados.

En el ejemplo 1 recurrimos a la gráfica de dispersión para que funcionara como una guía en la búsqueda de la curva coseno que da un modelo aproximado de los datos. Algunas calculadoras para graficar son capaces de encontrar una curva seno o coseno que mejor se ajuste al conjunto de datos dado. El método que aplican estas calculadoras es similar al método para determinar la recta del mejor ajuste, que se explica en las páginas 239 a 240.

Ejemplo 2 Ajuste de una curva seno a los datos

a) Utilice una calculadora o una computadora para encontrar una curva seno que mejor se ajuste a los datos de la profundidad del agua de la tabla 1 de la página 459.

b) Compare sus resultados con el modelo encontrado en el ejemplo 1.

Solución

```
SinReg
 y=a*sin(bx+c)+d
 a=3.097877596
 b=.5268322697
 c=.5493035195
 d=8.424021899
```

Resultados que proporciona la TI-83 con la función `SinReg`.

a) Utilizamos los datos de la tabla 1 y el comando `SinReg` en la calculadora TI-83, y obtuvimos una función de la forma

$$y = a \operatorname{sen}(bt + c) + d$$

donde

$$a = 3.1 \qquad b = 0.53$$
$$c = 0.55 \qquad d = 8.42$$

Entonces, la función seno que mejor se ajusta a los datos es

$$y = 3.1 \operatorname{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42$$

b) Para comparar esto con la función del ejemplo 1, cambiamos la función seno a función coseno usando la fórmula de reducción $\operatorname{sen} u = \cos(u - \pi/2)$.

$$\begin{aligned} y &= 3.1 \operatorname{sen}(0.53t + 0.55) + 8.42 \\ &= 3.1 \cos\left(0.53t + 0.55 - \frac{\pi}{2}\right) + 8.42 && \text{Fórmula de reducción} \\ &= 3.1 \cos(0.53t - 1.02) + 8.42 \\ &= 3.1 \cos(0.53(t - 1.92)) + 8.42 && \text{Se saca 0.53 como factor} \end{aligned}$$

Al comparar lo anterior con la función obtenida en el ejemplo 1, vemos que hay pequeñas diferencias en los coeficientes. En la figura 6 elaboramos una gráfica de dispersión de los datos junto con la función seno del mejor ajuste.

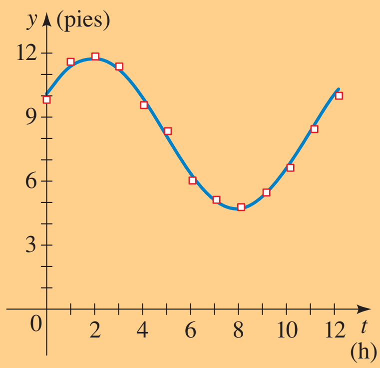


Figura 6 ■

En el ejemplo 1 estimamos los valores de amplitud, periodo y desplazamiento a partir de los datos. En el ejemplo 2, la calculadora obtuvo la curva seno que se ajusta mejor a los datos, es decir, la curva que se desvía lo menos posible de los datos según lo explicado en la página 240. Las maneras distintas de obtener el modelo explican las diferencias en las funciones.

Problemas

1–4 ■ Modelado de datos periódicos Se proporciona un conjunto de datos.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Determine una función coseno de la forma $y = a\cos(\omega(t - c)) + b$ que modele los datos como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función encontrada en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta la curva a los datos?

d) Mediante una calculadora para graficar determine la función seno que mejor se ajusta a los datos, como en el ejemplo 2.

e) Compare las funciones que ha determinado en los incisos b) y d). [Aplique la fórmula de reducción sen $u = \cos(u - \pi/2)$.]

1.

t	y
0	2.1
2	1.1
4	−0.8
6	−2.1
8	−1.3
10	0.6
12	1.9
14	1.5

2.

t	y
0	190
25	175
50	155
75	125
100	110
125	95
150	105
175	120
200	140
225	165
250	185
275	200
300	195
325	185
350	165

3.

t	y
0.1	21.1
0.2	23.6
0.3	24.5
0.4	21.7
0.5	17.5
0.6	12.0
0.7	5.6
0.8	2.2
0.9	1.0
1.0	3.5
1.1	7.6
1.2	13.2
1.3	18.4
1.4	23.0
1.5	25.1

4.

t	y
0.0	0.56
0.5	0.45
1.0	0.29
1.5	0.13
2.0	0.05
2.5	−0.10
3.0	0.02
3.5	0.12
4.0	0.26
4.5	0.43
5.0	0.54
5.5	0.63
6.0	0.59

5. Cambios en la temperatura anual En la tabla se proporcionan las temperaturas medias mensuales en el condado de Montgomery, Maryland.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva coseno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2.

Mes	Temperatura media (°F)	Mes	Temperatura media (°F)
Enero	40.0	Julio	85.8
Febrero	43.1	Agosto	83.9
Marzo	54.6	Septiembre	76.9
Abril	64.2	Octubre	66.8
Mayo	73.8	Noviembre	55.5
Junio	81.8	Diciembre	44.5

6. Ritmos circadianos El ritmo circadiano (de las palabras latinas *circa*, casi, y *diem*, día) es el patrón biológico diario según el cual se modifican la temperatura corporal, la presión sanguínea y otras variables fisiológicas. Los datos en la tabla que sigue muestran cambios característicos en la temperatura corporal del hombre a lo largo de un periodo de 24 horas ($t = 0$ corresponde a la medianoche).

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva coseno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2.

Tiempo	Temperatura corporal (°C)	Tiempo	Temperatura corporal (°C)
0	36.8	14	37.3
2	36.7	16	37.4
4	36.6	18	37.3
6	36.7	20	37.2
8	36.8	22	37.0
10	37.0	24	36.8
12	37.2		

7. Población de predadores Cuando dos especies interactúan en la relación predador/presa (véase página 432), las poblaciones de ambas especies tienden a variar en forma sinusoidal. En un cierto condado del oeste medio, el principal alimento de la lechuza bodeguera es el ratón de campo y otros mamíferos pequeños. En la tabla se proporciona la población de las lechuzas en este condado cada 1 de julio a lo largo de un periodo de 12 años.

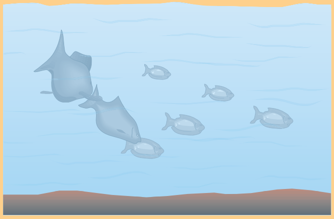
a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva seno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2. Compare su respuesta con la del inciso b).

Año	Población de lechuzas
0	50
1	62
2	73
3	80
4	71
5	60
6	51
7	43
8	29
9	20
10	28
11	41
12	49



8. Supervivencia de los salmones Por razones que todavía no están muy claras, la cantidad de crías de salmón que sobreviven al viaje desde sus áreas de desove del lecho del río hasta el mar abierto varía año con año aproximadamente en forma sinusoidal. En la tabla se muestra la cantidad de salmones que nacen en un cierto arroyo y que emprenden el camino hasta el Estrecho de Georgia. Los datos están en miles de crías en un periodo de 16 años.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva seno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajuste a los datos, como en el ejemplo 2. Compare su respuesta con la del inciso b).

Año	Salmón (en miles)	Año	Salmón (en miles)
1985	43	1993	56
1986	36	1994	63
1987	27	1995	57
1988	23	1996	50
1989	26	1997	44
1990	33	1998	38
1991	43	1999	30
1992	50	2000	22

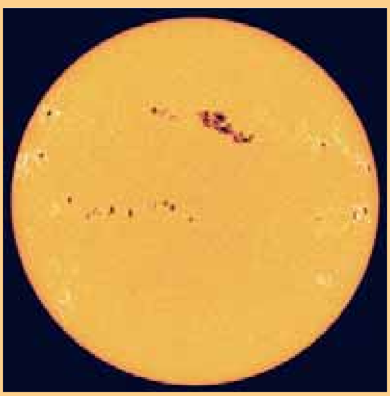
9. Actividad de las manchas solares Las manchas solares son regiones relativamente “frías” en el Sol, que se ven como puntos más oscuros cuando se les observa con filtros solares especiales. La cantidad de manchas solares varía en un ciclo de 11 años. En la tabla se proporciona la cuenta de manchas solares promedio diaria en el periodo de 1975 a 2004.

a) Elabore una gráfica de dispersión de los datos.

b) Encuentre una curva coseno que modele los datos, como en el ejemplo 1.

c) Grafique la función que determinó en el inciso b) junto con la gráfica de dispersión.

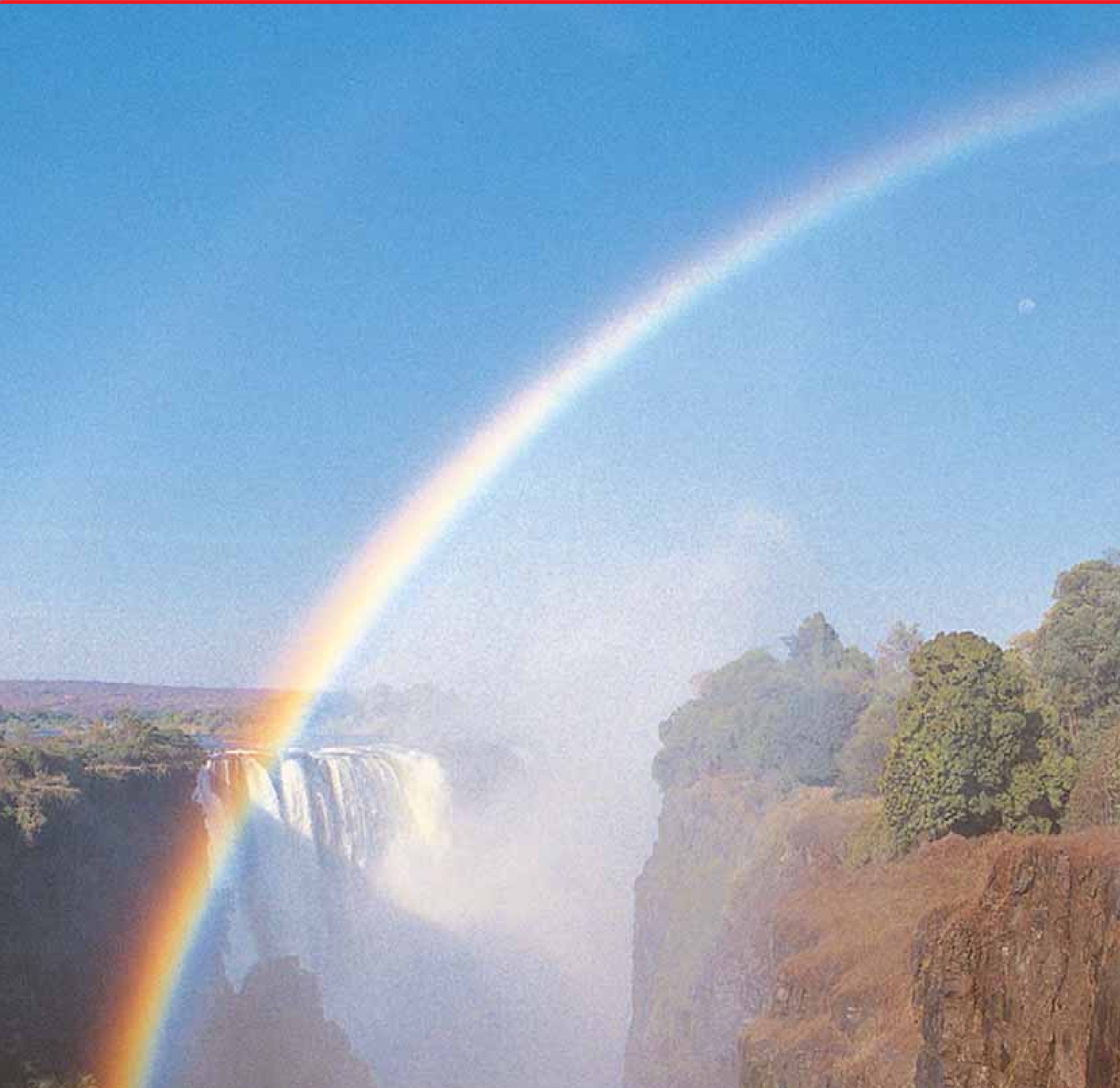
d) Mediante una calculadora para graficar determine la curva seno que mejor se ajusta a los datos, como en el ejemplo 2. Compare esta respuesta con la del inciso b).



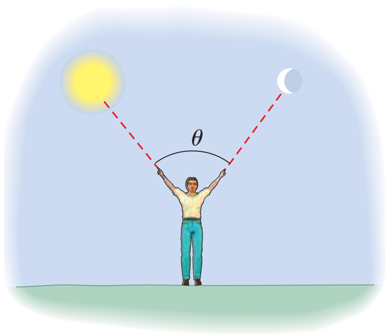
SOHO/ESA/NASA/Photo Researchers, Inc.

Año	Manchas solares	Año	Manchas solares	Año	Manchas solares
1975	16	1985	18	1995	18
1976	13	1986	13	1996	9
1977	28	1987	29	1997	21
1978	93	1988	100	1998	64
1979	155	1989	158	1999	93
1980	155	1990	143	2000	119
1981	140	1991	146	2001	111
1982	116	1992	94	2002	104
1983	67	1993	55	2003	64
1984	46	1994	30	2004	40

6 Funciones trigonométricas de ángulos



Esquema del capítulo



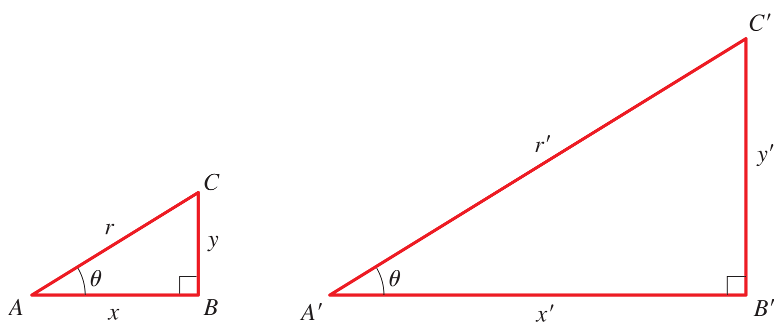
Las funciones trigonométricas se pueden definir de dos maneras distintas pero equivalentes: como funciones de números reales (capítulo 5) o como funciones de ángulos (capítulo 6). Los dos enfoques a la trigonometría son independientes entre sí, así que se puede estudiar primero el capítulo 5 o el capítulo 6. Se estudian ambos métodos porque distintas aplicaciones requieren que sean consideradas desde un punto de vista distinto. El enfoque en este capítulo lleva a problemas geométricos en los que se requiere hallar ángulos y distancias.

Suponga que se quiere hallar la distancia al Sol. Usar una cinta métrica es por supuesto impráctico, así que se necesita algo más que la medición simple para enfrentar este problema. Los ángulos son fáciles de medir; por ejemplo, se puede hallar el ángulo formado entre el Sol, la Tierra y la Luna apuntando simplemente al Sol con un brazo y a la Luna con el otro y estimar el ángulo entre ellos. La idea clave es hallar una relación entre ángulos y distancias. Así que si se tiene una manera de determinar distancias a partir de ángulos, se podría hallar la distancia al Sol sin ir allá. Las funciones trigonométricas proporcionan las herramientas necesarias.

Si *ABC* es un ángulo recto con ángulo agudo θ como en la figura, entonces se define sen θ como la relación y/r. El triángulo $A'B'C'$ es similar al triángulo *ABC*, por lo tanto

$$\frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$$

Aunque las distancias y' y r' son diferentes de y y r, la relación dada es la misma. Así, en *cualquier* ángulo recto con ángulo agudo θ, la relación del ángulo opuesto θ a la hipotenusa es la misma y se llama sen θ. Las otras relaciones trigonométricas se definen de manera similar.



En este capítulo se aprende cómo se pueden usar las funciones trigonométricas para medir distancias sobre la tierra y el espacio. En los ejercicios 61 y 62 de la página 487, se determina en realidad la distancia al Sol por medio de trigonometría.

Gregory D. Dimijian M.D.

La trigonometría del ángulo recto tiene muchas otras aplicaciones, desde determinar la estructura celular óptima en una colmena (ejercicio 67, página 497) hasta explicar la forma de un arco iris (ejercicio 69, página 498). En *Enfoque en el modelado*, páginas 522 y 523, se ve cómo un topógrafo emplea la trigonometría para trazar el mapa de una ciudad.

6.1 Medida angular

Un **ángulo** AOB, consta de dos rayos R_1 y R_2 con un vértice común O (véase la figura 1). A menudo se interpreta un ángulo como una rotación del rayo R_1 sobre R_2. En este caso, R_1 se llama el **lado inicial** y R_2 se llama el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario a las manecillas del reloj, se considera **positivo** al ángulo, y si la rotación es en el sentido de las manecillas del reloj, se considera que el ángulo es **negativo**.

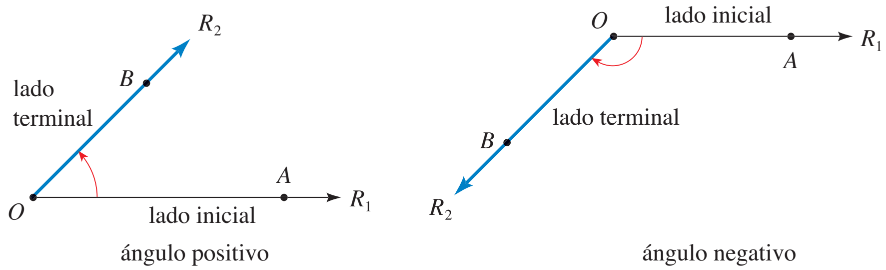


Figura 1

Medida angular

La **medida** de un ángulo es la cantidad de rotación respecto al vértice requerida para mover R_1 sobre R_2. De manera intuitiva, esto es cuánto se "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 se forma al rotar el lado inicial $\frac{1}{360}$ de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de las matemáticas, se usa un modo más natural de medir ángulos, la *medida en radianes*. La cantidad que se abre un ángulo se mide a lo largo del arco de un círculo de radio 1 con su centro en el vértice del ángulo.

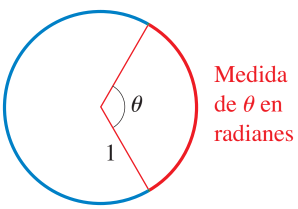


Figura 2

Definición de medida en radianes

Si un círculo de radio 1 se traza con el vértice de un ángulo en su centro, entonces la medida de este ángulo en **radianes** (abreviado **rad**) es la longitud del arco que subtiende el ángulo (véase la figura 2).

La circunferencia del círculo de radio 1 es 2π y, por lo tanto, una revolución completa tiene medida 2π rad, un ángulo llano tiene medida π rad y un ángulo recto tiene

medida $\pi/2$ rad. Un ángulo que está subtendido por un arco de longitud 2 a lo largo de un círculo unitario tiene medida 2 en radianes (véase la figura 3).

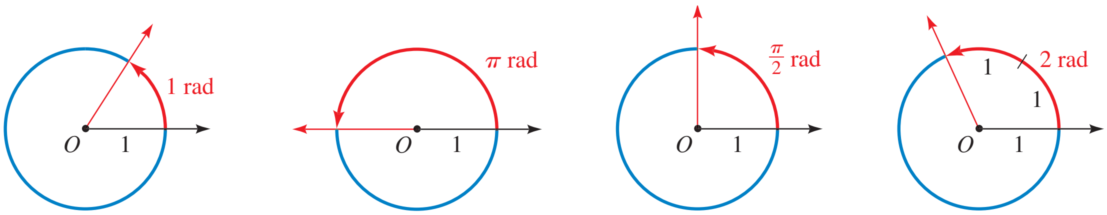


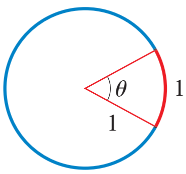
Figura 3
Medida en radianes

Puesto que una revolución completa medida en grados es 360° y medida en radianes es 2π, se obtiene la siguiente relación entre estos dos métodos de medición de ángulo.

Relación entre grados y radianes

$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

1. Para convertir grados en radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes en grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.



Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

Figura 4

Para tener cierta idea del tamaño de un radián, observe que

$$1 \text{ rad} \approx 57.296° \qquad \text{y} \qquad 1° \approx 0.01745 \text{ rad}$$

Un ángulo θ de medida 1 rad se muestra en la figura 4.

Ejemplo 1 Convertir entre radianes y grados

a) Exprese 60° en radianes. b) Exprese $\dfrac{\pi}{6}$ rad en grados.

Solución La relación entre grados y radianes da

$$\text{a) } 60° = 60\left(\frac{\pi}{180}\right) \text{rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \qquad \text{b) } \frac{\pi}{6} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{180}{\pi}\right) = 30°$$

■

Una nota sobre terminología: con frecuencia se emplea una frase como "un ángulo de 30°" para indicar *un ángulo cuya medida es* 30°. Asimismo, para un ángulo θ, se escribe $\theta = 30°$ o $\theta = \pi/6$ para indicar que la *medida de* θ *es* 30° o $\pi/6$ *rad*. Cuando no se da ninguna unidad, se supone que el ángulo se mide en radianes.

Ángulos en posición estándar

Un ángulo está en **posición estándar** si se dibuja en el plano xy con su vértice en el origen y su lado inicial en el eje x positivo. En la figura 5 se dan ejemplos de ángulos en posición estándar.

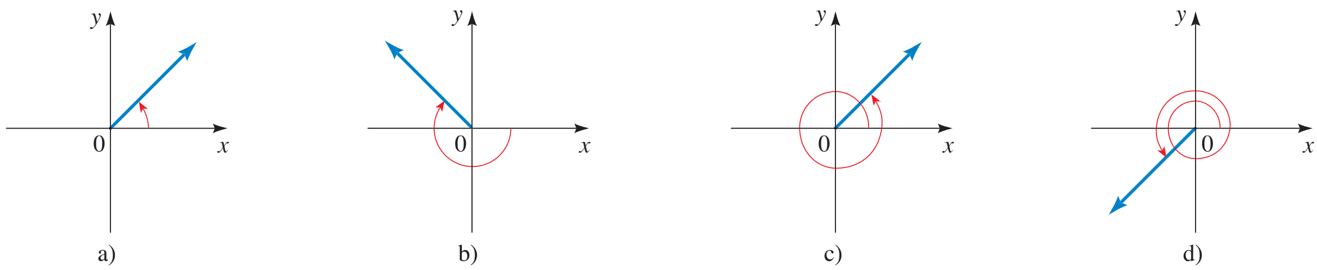


Figura 5
Ángulos en posición estándar

Dos ángulos en posición estándar son **coterminales** si coinciden sus lados. En la figura 5 los ángulos en a) y c) son coterminales.

Ejemplo 2 Ángulos coterminales

a) Encuentre ángulos que son coterminales con el ángulo $\theta = 30°$ en posición estándar.

b) Encuentre ángulos que son coterminales con el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ en posición estándar.

Solución

a) Para hallar ángulos que son coterminales con θ, se añade un múltiplo de 360°. Por lo tanto

$$30° + 360° = 390° \qquad \text{y} \qquad 30° + 720° = 750°$$

son coterminales con $\theta = 30°$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con θ, se resta cualquier múltiplo de 360°. Así,

$$30° - 360° = -330° \qquad \text{y} \qquad 30° - 720° = -690°$$

son coterminales con θ. (Véase la figura 6.)

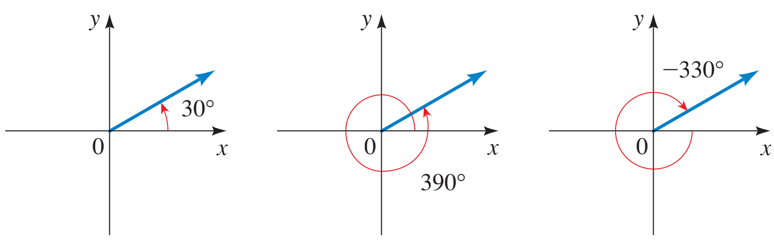


Figura 6

b) Para hallar ángulos positivos que son coterminales con θ, se suma cualquier múltiplo de 2π. Por lo tanto

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{13\pi}{3}$$

son coterminales con $\theta = \pi/3$. Para hallar ángulos negativos que son coterminales con θ, se resta cualquier múltiplo de 2π. Así,

$$\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3} \qquad \text{y} \qquad \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}$$

son coterminales con θ. (Véase la figura 7.)

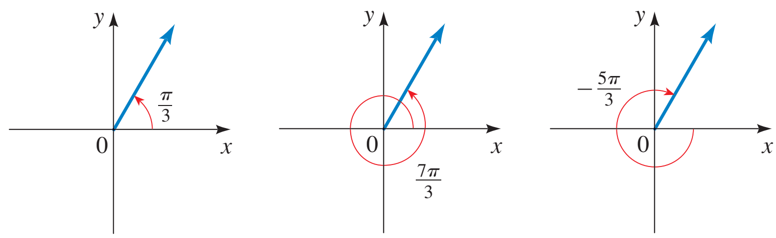


Figura 7

■

Ejemplo 3 Ángulos coterminales

Encuentre un ángulo con medida entre 0° y 360° que es coterminal con el ángulo de medida 1290° en posición estándar.

Solución Se puede restar 360° tantas veces como se desee de 1290°, y el ángulo resultante será coterminal con 1290°. Por lo tanto, $1290° - 360° = 930°$ es coterminal con 1290° y, por lo tanto, es el ángulo $1290° - 2(360)° = 570°$.

Para hallar el ángulo que se desea entre 0° y 360°, se resta 360° de 1290° cuantas veces sea necesario. Una manera eficaz de hacer esto es determinar cuántas veces 360° entra en 1290°, es decir, se divide 1290 entre 360, y el residuo será el ángulo que se está buscando. Se ve que 360 entra tres veces en 1290 con un residuo de 210. Por lo tanto, 210° es el ángulo deseado (véase la figura 8).

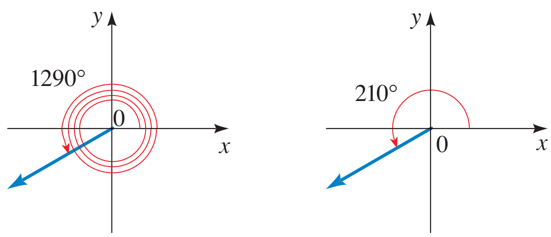


Figura 8

■

Longitud de un arco circular

Un ángulo cuya medida en radianes es θ está subtendido por un arco que es la fracción $\theta/(2\pi)$ de la circunferencia de un círculo. Así, un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende el ángulo θ (véase la figura 9) es

$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia del círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

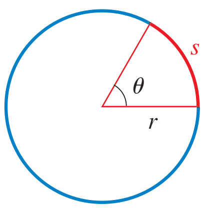


Figura 9

$s = \theta r$

Longitud de un arco

En un círculo de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = r\theta$$

Al despejar θ, se obtiene la fórmula importante

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Esta fórmula permite definir la medida en radianes por medio de un círculo de cualquier radio r. La medida en radianes de un ángulo θ es s/r, donde s es la longitud del arco circular que subtiende θ en un círculo de radio r (véase la figura 10).

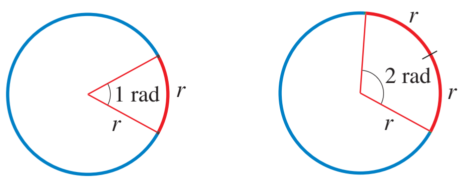


Figura 10
La medida en radianes de θ es el número de "radios" que se pueden ajustar en el arco que subtiende θ; de ahí el término *radián*.

Ejemplo 4 Longitud de arco y medida angular

a) Encuentre la longitud de un arco de un círculo con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

b) Un ángulo central θ en un círculo de radio 4 m es subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre una medida de θ en radianes.

Solución

a) Del ejemplo 1(b) se ve que $30° = \pi/6$ rad. Por lo tanto, la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} \text{ m}$$

La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

b) Por la fórmula $\theta = s/r$, se tiene

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ rad}$$

■

Área de un sector circular

El área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$. Un sector de este círculo con ángulo central θ tiene un área que es la fracción $\theta/(2\pi)$ del área del círculo entero (véase la figura 11). Por lo tanto el área de este sector es

$$A = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{área del círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(\pi r^2) = \frac{1}{2}r^2\theta$$

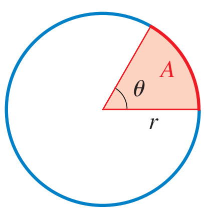


Figura 11
$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

Área de un sector circular

En un círculo de radio r, el área A de un sector con ángulo central de θ radianes es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

Ejemplo 5 Área de un sector

Encuentre el área de un sector de un círculo con ángulo central 60° si el radio del círculo es 3 m.

Solución Para usar la fórmula del área de un sector circular, se debe encontrar el ángulo central del sector en radianes: $60° = 60(\pi/180)$ rad $= \pi/3$ rad. Así, el área del sector es

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(3)^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\pi}{2}\text{ m}^2$$

La fórmula $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

Movimiento circular

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo como se muestra en la figura 12. Hay dos formas de describir el movimiento del punto: velocidad lineal y velocidad angular. La **velocidad lineal** es la razón a la que está cambiando la distancia recorrida, de modo que la velocidad lineal es la distancia recorrida dividida entre el tiempo transcurrido. La **velocidad angular** es la razón a la cual cambia el ángulo central θ, así que la velocidad angular es el número de radianes que cambia este ángulo dividido entre el tiempo transcurrido.

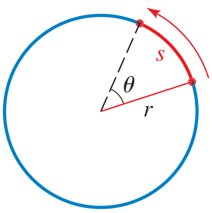


Figura 12

Velocidad lineal y velocidad angular

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r y el rayo desde el centro del círculo al punto cruza θ radianes en el tiempo t. Sea $s = r\theta$ la distancia que viaja el punto en el tiempo t. Entonces la velocidad del objeto está dada por

$$\textbf{Velocidad angular} \quad \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\textbf{Velocidad lineal} \quad v = \frac{s}{t}$$

El símbolo ω es la letra griega "omega."

Ejemplo 6 Hallar la velocidad lineal y la velocidad angular

Un niño hace girar una piedra en una honda de 3 pies de largo a una velocidad de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encuentre las velocidades angular y lineal de la piedra.

Solución En 10 s, el ángulo θ cambia en $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ radianes. Así que la *velocidad angular* de la piedra es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi \text{ rad}}{10 \text{ s}} = 3\pi \text{ rad/s}$$

La distancia recorrida por la piedra en 10 s es $s = 15 \cdot 2\pi r = 15 \cdot 2\pi \cdot 3 = 90\pi$ pies. Por lo tanto, la *velocidad lineal* de la piedra es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\pi \text{ pies}}{10 \text{ s}} = 9\pi \text{ pies/s}$$ ■

Hay que observarse que la velocidad angular *no* depende del radio del círculo, sino sólo del ángulo θ. Sin embargo, si se conoce la velocidad angular ω y el radio r, se puede encontrar la velocidad lineal como sigue: $v = s/t = r\theta/t = r(\theta/t) = r\omega$.

Relación entre velocidad lineal y angular

Si un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r con velocidad angular ω, entonces su velocidad lineal v está dada por

$$v = r\omega$$

Ejemplo 7 Hallar la velocidad lineal a partir de la velocidad angular

Una mujer va en una bicicleta cuyas ruedas tienen 26 pulgadas de diámetro. Si las ruedas giran a 125 revoluciones por minuto (rpm), encuentre la velocidad a la que está viajando, en millas/h.

Solución La velocidad angular de las ruedas es $2\pi \cdot 125 = 250\pi$ radianes/min. Puesto que las ruedas tienen de radio 13 pulg (la mitad del diámetro), la velocidad lineal es

$$v = r\omega = 13 \cdot 250\pi \approx 10\,210.2 \text{ pulg/min}$$

Puesto que hay 12 pulgadas por pie, 5280 pies por milla y 60 minutos por hora, su velocidad en millas por hora es

$$\frac{10\,210.2 \text{ pulg/min} \times 60 \text{ min/h}}{12 \text{ pulg/pies} \times 5280 \text{ pies/mi}} = \frac{612\,612 \text{ pulg/h}}{63\,360 \text{ pulg/mi}} \approx 9.7 \text{ mi/h}$$ ■

6.1 Ejercicios

1–12 ■ Encuentre la medida en radianes del ángulo con la medida de grados dada.

1. $72°$ **2.** $54°$ **3.** $-45°$

4. $-60°$ **5.** $-75°$ **6.** $-300°$

7. $1080°$ **8.** $3960°$ **9.** $96°$

10. $15°$ **11.** $7.5°$ **12.** $202.5°$

13–24 ■ Encuentre la medida en grados del ángulo con la medida en radianes dada.

13. $\frac{7\pi}{6}$ **14.** $\frac{11\pi}{3}$ **15.** $-\frac{5\pi}{4}$

16. $-\frac{3\pi}{2}$ **17.** 3 **18.** -2

19. -1.2 **20.** 3.4 **21.** $\frac{\pi}{10}$

22. $\frac{5\pi}{18}$ **23.** $-\frac{2\pi}{15}$ **24.** $-\frac{13\pi}{12}$

25–30 ■ Se da la medida de un ángulo es posición estándar. Encuentre dos ángulos positivos y dos ángulos negativos que son coterminales con el ángulo dado.

25. $50°$ **26.** $135°$ **27.** $\frac{3\pi}{4}$

28. $\dfrac{11\pi}{6}$ **29.** $-\dfrac{\pi}{4}$ **30.** $-45°$

31–36 ■ Se dan las medidas de dos ángulos en posición estándar. Determine si los ángulos son coterminales.

31. $70°,\quad 430°$

32. $-30°,\quad 330°$

33. $\dfrac{5\pi}{6},\quad \dfrac{17\pi}{6}$

34. $\dfrac{32\pi}{3},\quad \dfrac{11\pi}{3}$

35. $155°,\quad 875°$

36. $50°,\quad 340°$

37–42 ■ Encuentre el ángulo entre 0° y 360° que es coterminal con el ángulo dado.

37. $733°$

38. $361°$

39. $1110°$

40. $-100°$

41. $-800°$

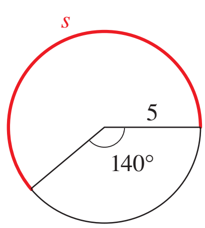
42. $1270°$

43–48 ■ Encuentre el ángulo entre 0 y 2π que es coterminal con el ángulo dado.

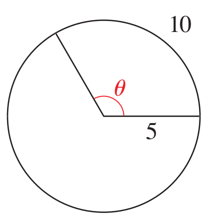
43. $\dfrac{17\pi}{6}$ **44.** $-\dfrac{7\pi}{3}$ **45.** 87π

46. 10 **47.** $\dfrac{17\pi}{4}$ **48.** $\dfrac{51\pi}{2}$

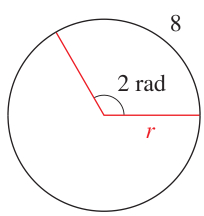
49. Encuentre la longitud del arco s en la figura.



50. Encuentre el ángulo θ en la figura.



51. Encuentre el radio r del círculo en la figura.



52. Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 45° en un círculo de radio 10 m.

53. Encuentre la longitud de un arco que subtiende un ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio 2 mi.

54. Un ángulo central θ en un círculo de radio 5 m es subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

55. Un arco de longitud 100 m subtiende un ángulo central θ en un círculo de radio 50 m. Encuentre la medida de θ en grados y en radianes.

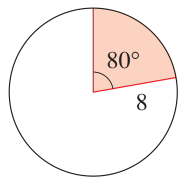
56. Un arco circular de longitud 3 pies subtiende un ángulo central de 25°. Encuentre el radio del círculo.

57. Determine el radio del círculo si un arco de longitud 6 m en el círculo subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

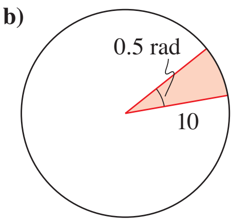
58. Halle el radio del círculo si un arco de longitud 4 pies en el círculo subtiende un ángulo central de 135°.

59. Encuentre el área del sector mostrado en cada figura.

a)

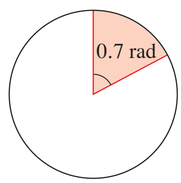


b)

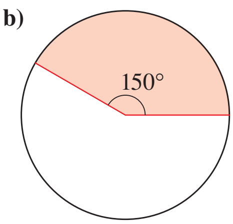


60. Determine el radio de cada círculo si el área del sector es 12.

a)



b)



61. Encuentre el área de un sector con un ángulo central 1 radián en un círculo de radio 10 m.

62. Un sector de un círculo tiene un ángulo central de 60°. Encuentre el área del sector si el radio del círculo es 3 millas.

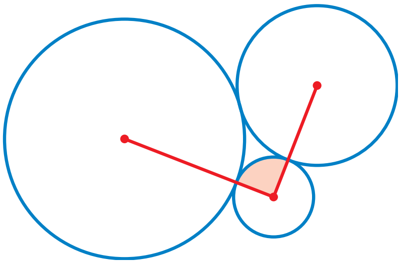
63. El área de un sector de un círculo con un ángulo central de 2 radianes es 16 m^2. Encuentre el radio del círculo.

64. El sector de un círculo con radio de 24 millas tiene una superficie de 288 millas^2. Encuentre el ángulo central del sector.

65. El área de un círculo es 72 cm^2. Encuentre el área de un sector de este círculo que subtiende un ángulo central de $\pi/6$ radianes.

66. Tres círculos con radios 1, 2 y 3 pies son externamente tangentes entre sí, como se ilustra en la figura de la página siguiente. Encuentre el área del sector del círculo de radio 1

que es cortado por los segmentos de recta que unen el centro de ese círculo con los centros de los otros dos círculos.

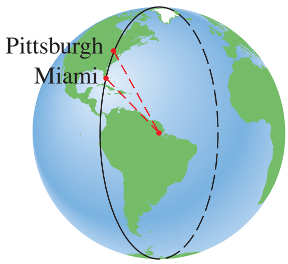


Aplicaciones

67. Distancia recorrida Las ruedas de un automóvil miden 28 pulgadas de diámetro. ¿Qué tan lejos viajará el automóvil (en millas) si su ruedas giran 10 000 veces sin deslizamiento?

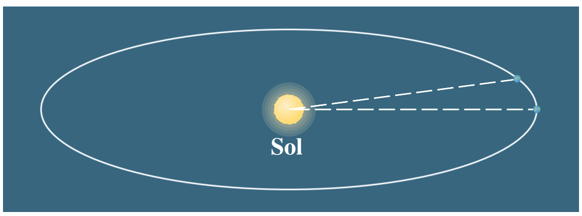
68. Revoluciones de las ruedas ¿Cuántas revoluciones dará una rueda de 30 pulgadas de diámetro cuando el automóvil recorre una distancia de una milla.

69. Latitudes Pittsburgh, Pennsylvania y Miami, Florida, se encuentran aproximadamente sobre el mismo meridiano. Pittsburgh tiene una latitud de 40.5° N y Miami, 25.5° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

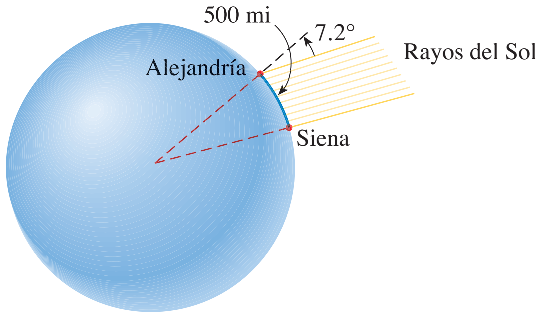


70. Latitudes Memphis, Tennessee y Nueva Orleans, Louisiana, se encuentran aproximadamente en el mismo meridiano. Memphis tiene latitud 35° N y Nueva Orleans, 30° N. Encuentre la distancia entre estas dos ciudades. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

71. Órbita de la Tierra Encuentre la distancia que viaja la Tierra en un día y su trayectoria alrededor del Sol. Suponga que un año tiene 365 días y que la trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es un círculo de radio 93 millones de millas. [La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es en realidad una *elipse* con el Sol en un foco (véase la sección 10.2). Esta elipse, sin embargo, tiene excentricidad muy pequeña, así que es aproximadamente circular.]

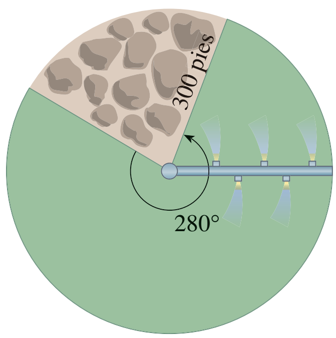


72. Circunferencia de la Tierra El matemático griego Eratóstenes (276-195 a.C.) midió la circunferencia de la Tierra a partir de las siguientes observaciones. Él observó que en cierto día el Sol brillaba directamente en un pozo profundo en Siena (en la actualidad Assuán). Al mismo tiempo en Alejandría, 500 millas al norte (en el mismo meridiano), los rayos del Sol brillaban a un ángulo de 7.2° respecto al cenit. Use esta información y la figura para hallar el radio y la circunferencia de la Tierra.

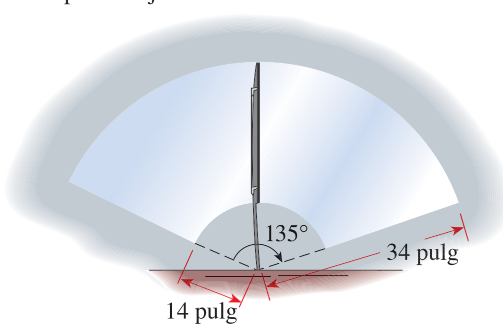


73. Millas naúticas Encuentre la distancia a lo largo de un arco en la superficie de la Tierra que subtiende un ángulo central de 1 minuto (1 minuto = $\frac{1}{60}$ de grado). La distancia se llama una *milla náutica*. (El radio de la Tierra mide 3960 millas.)

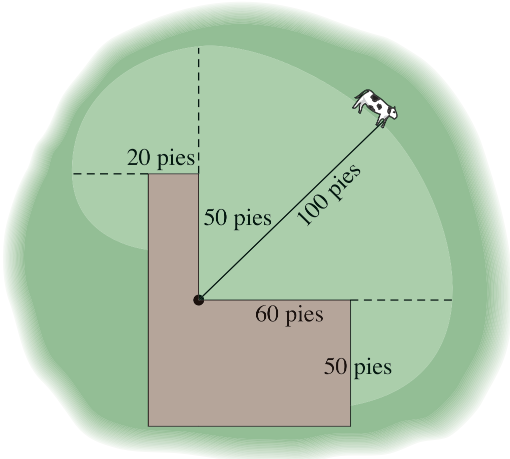
74. Irrigación Un sistema de irrigación emplea un tubo rociador recto de 300 pies de largo que gira alrededor de un punto central como se ilustra. Debido a un obstáculo sólo se permite que el tubo gire 280°. Encuentre el área irrigada por este sistema.



75. Limpia parabrisas Los extremos superior e inferior de una hoja de limpia parabrisas están a 34 pulg y 14 pulg del punto central, respectivamente. Mientras está en operación el limpiador abarca 135°. Encuentre el área barrida por la hoja.



76. La vaca amarrada Una vaca está sujeta a una cuerda de 100 pies a la esquina interna de un edificio en forma de L, como se muestra en la figura. Encuentre el área en la que puede pastar la vaca.



77. Malacate Se emplea un malacate de radio 2 pies para levantar cargas pesadas. Si el malacate da 8 revoluciones cada 15 s, encuentre la velocidad a la cual sube la carga.

78. Ventilador Un ventilador de techo con aspas de 16 pulg gira a 45 rpm.

a) Determine el velocidad angular del ventilador en rad/min.

b) Encuentre la velocidad lineal de las puntas de las aspas en pulg/min.

79. Sierra radial Una sierra radial tiene una aspa con un radio de 6 pulg. Suponga que el aspa gira a 1000 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del aspa en rad/min.

b) Determine la velocidad radial de los dientes de la sierra en pies/s.

80. Velocidad en el Ecuador La Tierra gira respecto a su eje una vez cada 23 h 56 min 4 s, y el radio de la Tierra mide 3960 millas. Calcule la velocidad lineal de un punto en el Ecuador en millas/h.

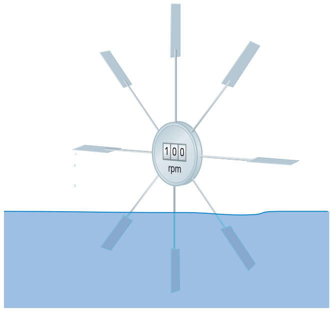
81. Velocidad de un automóvil Las ruedas de un automóvil tienen un radio de 11 pulg y giran a 600 rpm. Determine la velocidad del automóvil en millas/h.

82. Ruedas de un camión Un camión con ruedas de 48 pulg de diámetro viaja a 50 millas/h.

a) Encuentre la velocidad angular de las ruedas en rad/min.

b) ¿Cuántas revoluciones por minuto dan las ruedas?

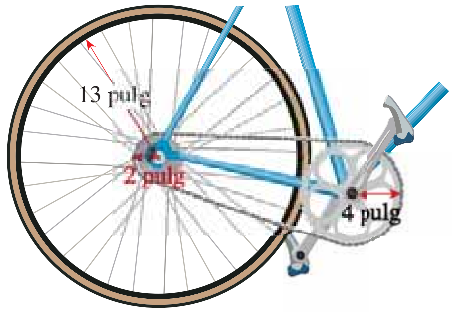
83. Velocidad de una corriente Para medir la velocidad de una corriente, los científicos colocan una rueda de paletas en la corriente y observan la velocidad a la cual gira. Si la rueda de paletas tiene un radio de 0.20 m y gira a 100 rpm, encuentre la velocidad de la corriente en m/s.



84. Rueda de bicicleta En la figura se muestran las coronas dentadas y la cadena de una bicicleta. La corona dentada de los pedales tiene un radio de 4 pulg, la corona dentada de la rueda tiene un radio de 2 pulg y la rueda tiene un radio de 13 pulg. El ciclista pedalea a 40 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular de la corona dentada de la rueda.

b) Determine la velocidad de la bicicleta. (Suponga que la rueda gira a la misma velocidad que la corona dentada de la rueda.)



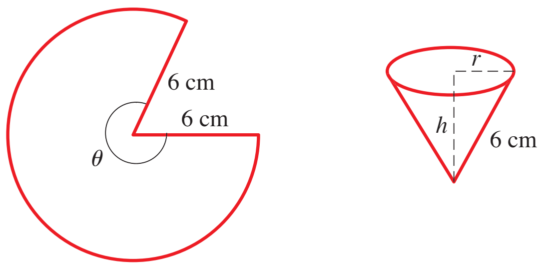
85. Taza cónica Una taza cónica se construye a partir de una pieza circular de papel con radio 6 cm al cortar un sector y unir los bordes como se muestra. Suponga que $\theta = 5\pi/3$.

a) Encuentre la circunferencia C de la abertura de la taza.

b) Obtenga el radio r de la abertura de la taza. [*Sugerencia*: use $C = 2\pi r$.]

c) Encuentre la altura h de la taza. [*Sugerencia*: use el teorema de Pitágoras.]

d) Encuentre el volumen de la taza.



86. Taza cónica En este ejercicio se determina el volumen de la taza cónica del ejercicio 85 para un ángulo θ.

a) Siga los pasos del ejercicio 85 para mostrar que el volumen de la taza como una función de θ es

$$V(\theta) = \frac{9}{\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

b) Grafique la función V.

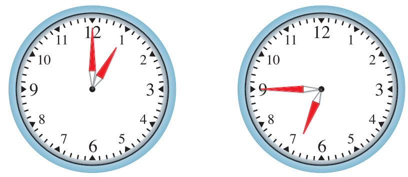
c) ¿Para qué ángulo θ el volumen de la taza es un máximo?

Descubrimiento • Debate

87. Formas diferentes de medir ángulos La costumbre de medir ángulos por medio de grados, con 360° en un círculo, data de los antiguos babilonios, quienes usaron un sistema numérico basado en grupos de 60. Otro sistema de medición de ángulos divide el círculo en 400 unidades, llamadas *gradianes*. En este sistema un ángulo recto mide 100 gradianes, de modo que se ajusta en el sistema numérico de base 10.

Escriba un ensayo corto que compare las ventajas y desventajas de estos dos sistemas y el sistema de radianes para medir ángulos. ¿Cuál sistema preferiría?

88. Relojes y ángulos En una hora, el minutero de un reloj recorre un círculo completo y la manecilla que marca las horas se mueve $\frac{1}{12}$ de un círculo. ¿Cuántos radianes se mueven el minutero y el horario entre la 1:00 P.M. y las 6.45 P.M. (en el mismo día)?



6.2 Trigonometría de ángulos rectos

En esta sección se estudian ciertas relaciones de los lados de triángulos rectángulos, llamadas relaciones trigonométricas y se dan varias aplicaciones.

Relaciones trigonométricas

Considere un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos. Las relaciones trigonométricas se definen como sigue (véase la figura 1).

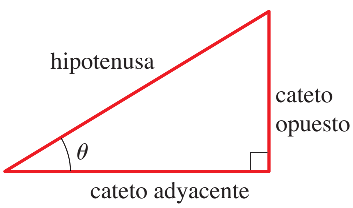


Figura 1

Relaciones trigonométricas

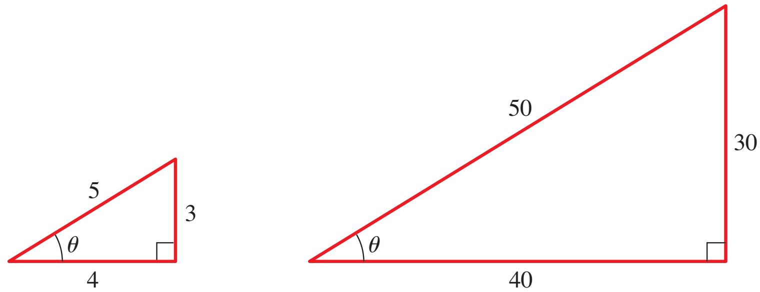
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$$

Los símbolos que se usan para estas relaciones son abreviaturas para sus nombres completos: **seno, coseno, tangente, cosecante, secante, cotangente.** Puesto que dos triángulos rectángulos con ángulo θ son similares, estas relaciones son las mismas,

Hiparco (cerca de 140 a.C.) es considerado el fundador de la trigonometría. Construyó tablas para una función estrechamente relacionada con la moderna función seno y evaluó ángulos a intervalos de medio grado. Estas son consideradas las primeras tablas trigonométricas. Utilizó sus tablas sobre todo para calcular las trayectorias de los planetas por el cielo.

sin importar el tamaño del triángulo; las relaciones trigonométricas dependen sólo del ángulo θ (véase la figura 2).



$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\text{sen}\,\theta = \frac{30}{50} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\cos\theta = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$

Figura 2

Ejemplo 1 Hallar relaciones trigonométricas

Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en la figura 3.

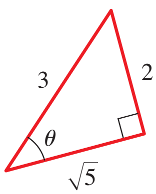


Figura 3

Solución

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3} \qquad \cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\csc\theta = \frac{3}{2} \qquad \sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \qquad \cot\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

■

Ejemplo 2 Hallar relaciones trigonométricas

Si $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, bosqueje un triángulo rectángulo con ángulo α agudo y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de α.

Solución Puesto que $\cos\alpha$ se define como la relación del cateto adyacente a la hipotenusa, se bosqueja un triángulo con hipotenusa de longitud 4 y un cateto de longitud 3 adyacente a α. Si el lado opuesto es x, entonces por el teorema de Pitágoras, $3^2 + x^2 = 4^2$ o $x^2 = 7$, por lo tanto, $x = \sqrt{7}$. Después se usa el triángulo de la figura 4 para hallar las relaciones.

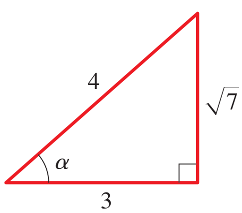


Figura 4

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{4} \qquad \tan\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{4}{\sqrt{7}} \qquad \sec\alpha = \frac{4}{3} \qquad \cot\alpha = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

■

Triángulos especiales

Ciertos triángulos rectángulos tienen relaciones que se pueden calcular fácilmente a partir del teorema de Pitágoras. Puesto que se usan con frecuencia, se mencionan aquí.

El primer triángulo se obtiene al dibujar una diagonal en un cuadrado de lado 1 (véase la figura 5 en la página 480). Por el teorema de Pitágoras esta diagonal tiene

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) fue un famoso científico griego, músico, astrónomo y geómetra. En su libro *On the Sizes and Distances of the Sun and the Moon*, estimó la distancia al Sol observando que cuando la Luna está exactamente en media luna, el triángulo que forman el Sol, la Luna y la Tierra tiene un ángulo recto en la Luna. Su método fue muy similar al descrito en el ejercicio 61 de esta sección. Aristarco fue el primero en adelantar la teoría de que la Tierra y los planetas se mueven alrededor del Sol, una idea que no tuvo completa aceptación hasta después del tiempo de Copérnico, 1800 años después. Por esta razón es común llamarlo el "Copérnico de la antigüedad".

longitud $\sqrt{2}$. El triángulo resultante tiene ángulos 45°, 45° y 90° (o $\pi/4$, $\pi/4$ y $\pi/2$). Para obtener el segundo triángulo, se empieza con un triángulo equilátero ABC de lado 2 y se dibuja la bisectriz perpendicular DB de la base, como en la figura 6. Por el teorema de Pitágoras la longitud de DB es $\sqrt{3}$. Puesto que DB biseca al ángulo ABC, se obtiene un triángulo con ángulos 30°, 60° y 90° (o $\pi/6$, $\pi/3$ y $\pi/2$).

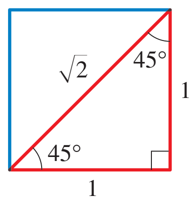


Figura 5

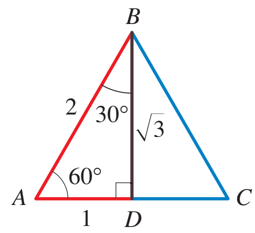


Figura 6

Ahora se pueden usar los triángulos especiales de las figuras 5 y 6 para calcular las relaciones trigonométricas para ángulos con medidas 30°, 45° y 60° (o $\pi/6$, $\pi/4$ y $\pi/3$). Éstos se listan en la tabla 1.

Tabla 1 Valores de la relaciones trigonométricas para ángulos especiales.

θ en grados	θ en radianes	sen θ	cos θ	tan θ	csc θ	sec θ	cot θ
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Es útil recordar estas relaciones trigonométricas especiales porque se presentan con frecuencia. Por supuesto, se pueden recordar con facilidad si se recuerdan los triángulos de las que se obtuvieron.

Para hallar los valores de las relaciones trigonométricas para otros ángulos, se emplea una calculadora. Los métodos matemáticos (llamados *métodos numéricos*) usados para hallar las relaciones trigonométricas se programan directamente en las calculadoras científicas. Por ejemplo, cuando se pulsa la tecla SEN, la calculadora computa una aproximación al valor del seno del ángulo dado. Las calculadoras proporcionan los valores de seno, coseno y tangente; las otras relaciones se pueden calcular fácilmente a partir de éstas por medio de las siguientes *relaciones recíprocas*.

Para una explicación de métodos numéricos, véase la nota al margen en la página 436.

$$\csc t = \frac{1}{\text{sen } t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Se debe comprobar que estas relaciones se deducen inmediatamente de las definiciones de las relaciones trigonométricas.

Se sigue la convención de que cuando se escribe sen t, *se denota el seno del ángulo cuya medida en radianes es* t. Por ejemplo, sen 1 significa el seno del ángulo

cuya medida en radianes es 1. Al usar una calculadora para hallar un valor aproximado para este número, fije su calculadora en el modo radianes; encontrará que

$$\operatorname{sen} 1 \approx 0.841471$$

Si desea hallar el seno del ángulo cuya medida es 1°, coloque su calculadora en el modo de grados; encontrará que

$$\operatorname{sen} 1° \approx 0.0174524$$

Ejemplo 3 Cómo usar una calculadora para hallar relaciones trigonométricas

Con la calculadora en el modo de grados, y escribiendo los resultados correctos hasta cinco decimales, se encuentra que

$$\operatorname{sen} 17° \approx 0.29237 \qquad \sec 88° = \frac{1}{\cos 88°} \approx 28.65371$$

Con la calculadora en el modo de radianes, y escribiendo los resultados correctos hasta cinco decimales, se encuentra que

$$\cos 1.2 \approx 0.36236 \qquad \cot 1.54 = \frac{1}{\tan 1.54} \approx 0.03081$$

■

Aplicaciones de trigonometría de triángulos rectángulos

Un triángulo tiene seis partes: tres ángulos y tres lados. **Resolver un triángulo** significa determinar todas sus partes a partir de la información conocida acerca del triángulo, es decir, determinar las longitudes de los tres lados y las medidas de los tres ángulos.

Ejemplo 4 Resolver un triángulo rectángulo

Resolver el triángulo ABC, mostrado en la figura 7.

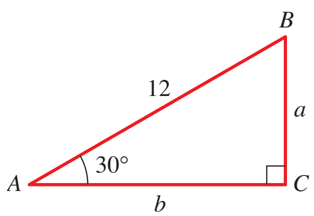


Figura 7

Solución Es claro que $\angle B = 60°$. Para encontrar a, se busca una ecuación que relacione a con las longitudes y ángulos ya conocidos. En este caso, se tiene $\operatorname{sen} 30° = a/12$, por lo tanto

$$a = 12 \operatorname{sen} 30° = 12\left(\tfrac{1}{2}\right) = 6$$

De manera similar, $\cos 30° = b/12$, por lo tanto

$$b = 12 \cos 30° = 12\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

■

Es muy útil saber que, usando la información dada en la figura 8, las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo son

$$a = r \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad b = r \cos \theta$$

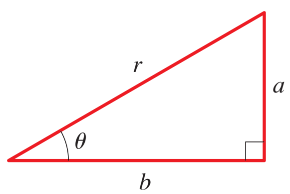


Figura 8
$a = r \operatorname{sen} \theta$
$b = r \cos \theta$

La capacidad para resolver triángulos rectángulos por medio de relaciones trigonométricas es fundamental en muchos problemas de navegación, levantamiento de planos, astronomía y la medición de distancias. Las aplicaciones consideradas en esta sección siempre tienen que ver con triángulos rectángulos pero, como se verá en las tres secciones siguientes, la trigonometría también es útil para resolver triángulos que no son triángulos rectángulos.

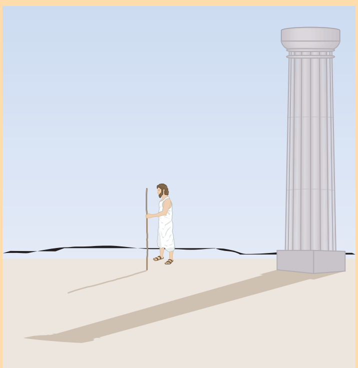
Para el análisis de los ejemplos siguientes se requiere cierta terminología. Si un observador está mirando un objeto, entonces la línea del ojo del observador al objeto

Tales de Mileto (alrededor de 625-547 a.C.) es el fundador legendario de la geometría griega. Se dice que calculó la altura de una columna griega comparando la longitud de la sombra de su bastón con la de la columna. Por medio de propiedades de triángulos semejantes, argumentó que la relación de la altura h de la columna a la altura h' de su bastón era igual a la relación de la longitud s de la sombra de la columna a la longitud s' de la sombra del bastón:

$$\frac{h}{h'} = \frac{s}{s'}$$

Puesto que tres de estas cantidades son conocidas, Tales pudo calcular la altura de la columna.

Según la leyenda, Tales usó un método similar para encontrar la altura de la Gran Pirámide en Egipto, una proeza que impresionó al rey de Egipto. Plutarco escribió que "aunque él [el rey de Egipto] te admira [Tales] por otras cosas, le gustó la manera particular mediante la cual mediste la altura de la pirámide sin tener que molestarte y sin ningún instrumento". El principio que usó Tales, el hecho de que relaciones de lados correspondientes de triángulos similares sean iguales, es la base de la materia de la geometría.



se llama **línea de visión** (figura 9). Si el objeto que está siendo observado está arriba de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de elevación.** Si el objeto está abajo de la horizontal, entonces el ángulo entre la línea de visión y la horizontal se llama **ángulo de depresión**. En muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo, los ángulos de elevación y depresión se dan para un observador hipotético al nivel del suelo. Si la línea de visión sigue un objeto físico, como un plano inclinado o una ladera, se usa el término **ángulo de inclinación**.

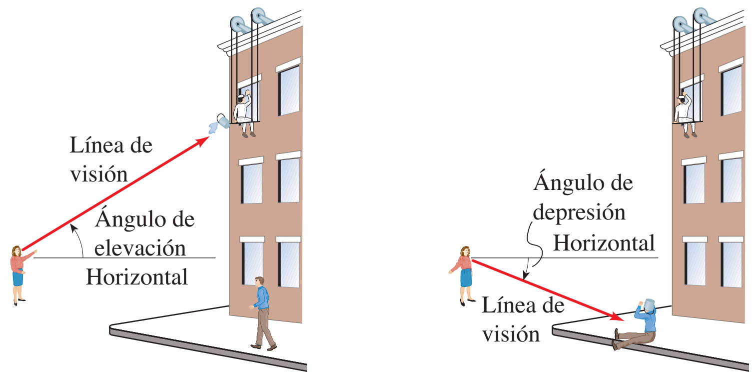


Figura 9

En el ejemplo siguiente se da una aplicación importante de la trigonometría al problema de medición: se mide la altura de un árbol alto sin tener que subirse a él. Aunque el ejemplo es simple, el resultado es fundamental para entender cómo se aplican las relaciones trigonométricas a tales problemas.

Ejemplo 5 Hallar la altura de un árbol

Una secoya proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encuentre la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es 25.7°.

Solución Sea h la altura del árbol. De la figura 10 se puede observar que

$$\frac{h}{532} = \tan 25.7° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 532 \tan 25.7° \qquad \text{Multiplique por 532}$$

$$\approx 532(0.48127) \approx 256 \qquad \text{Use una calculadora}$$

Por lo tanto, la altura del árbol es aproximadamente 256 pies.

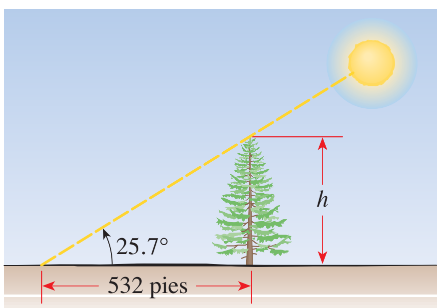


Figura 10 ■

Ejemplo 6 Un problema relacionado con triángulos rectángulos

Desde un punto sobre el suelo a 500 pies de la base de un edificio, un observador encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es 24° y que el ángulo de elevación a la parte superior de un asta de bandera sobre el edificio es 27°. Determine la altura del edificio y la longitud del asta.

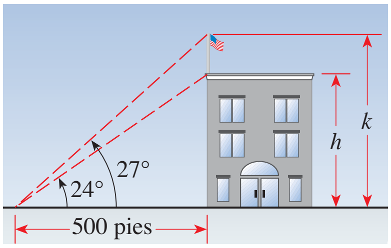


Figura 11

Solución En la figura 11 se ilustra la situación. La altura del edificio se encuentra de la misma manera como se halló la altura del árbol del ejemplo 5.

$$\frac{h}{500} = \tan 24° \qquad \text{Definición de tangente}$$

$$h = 500 \tan 24° \qquad \text{Multiplique por 500}$$

$$\approx 500(0.4452) \approx 223 \qquad \text{Use una calculadora}$$

La altura del edificio es aproximadamente 223 pies.

Para hallar la longitud del asta de bandera, se determinará primero la altura desde el suelo hasta la parte superior del asta:

$$\frac{k}{500} = \tan 27°$$

$$k = 500 \tan 27°$$

$$\approx 500(0.5095)$$

$$\approx 255$$

Para hallar la longitud del asta, se resta h de k. Por lo tanto, la longitud del asta es cercana a $255 - 223 = 32$ pies. ■

Las teclas SEN^{-1} o INV SEN representan el "seno inverso". En la sección 7.4 se estudian las funciones trigonométricas inversas.

En algunos problemas es necesario hallar un ángulo en un triángulo rectángulo cuyos catetos se dan. Para hacer esto, se usa la tabla 1 (página 480) "hacia atrás"; es decir, se encuentra el *ángulo* con la relación trigonométrica específica. Por ejemplo, si sen $\theta = \frac{1}{2}$, ¿cuál es el ángulo θ? De la tabla 1 se puede decir que $\theta = 30°$. Para hallar un ángulo cuyo seno no se da en la tabla, se usan las teclas SEN^{-1} o INV SEN o ARCSEN en una calculadora. Por ejemplo, si sen $\theta = 0.8$, se aplica la tecla SEN^{-1} a 0.8 para obtener $\theta = 53.13°$ o 0.927 radianes. La calculadora también proporciona ángulos cuyo coseno o tangente se conocen, con la tecla COS^{-1} o TAN^{-1}.

Ejemplo 7 Determinar el ángulo en un triángulo rectángulo

Una escalera de 40 pies está apoyada en un edificio. Si la base de la escalera está separada 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo que forman la escalera y el edificio?

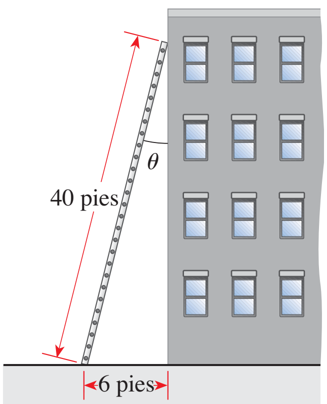


Figura 12

Solución Primero se bosqueja un diagrama como el de la figura 12. Si θ es el ángulo entre la escalera y el edificio, entonces

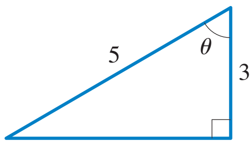
$$\text{sen}\,\theta = \frac{6}{40} = 0.15$$

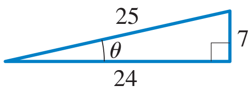
Por lo tanto, θ es el ángulo cuyo seno es 0.15. Para hallar el ángulo θ, se usa la tecla SEN^{-1} en una calculadora. Con la calculadora en el modo de grados, se obtiene

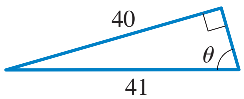
$$\theta \approx 8.6°$$ ■

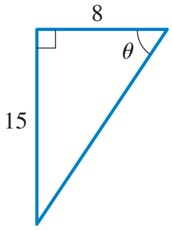
6.2 Ejercicios

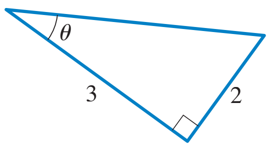
1–6 ■ Encuentre los valores exactos de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en el triángulo.

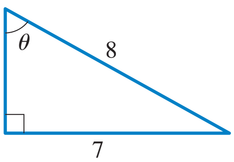
1.


2.


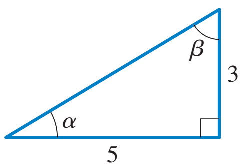
3.


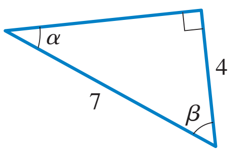
4.


5.


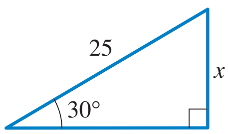
6.


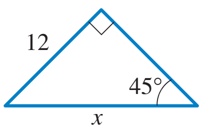
7–8 ■ Encuentre a) sen α, cos β, b) tan α y cot β y c) sec α y csc β.

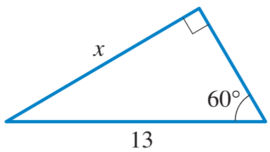
7.


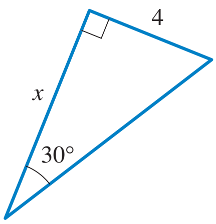
8.


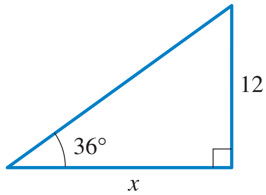
9–14 ■ Encuentre el lado marcado con x. En los ejercicios 13 y 14 exprese su respuesta correcta hasta cinco decimales.

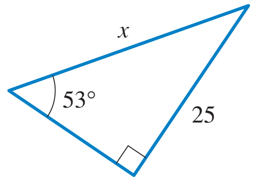
9.


10.


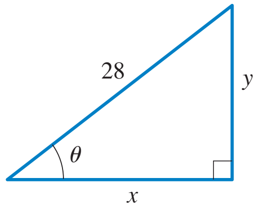
11.


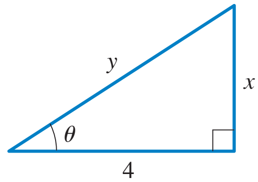
12.


13.


14.


15–16 ■ Exprese x y y en términos de relaciones trigonométricas de θ.

15.


16.


17–22 ■ Bosqueje el triángulo que tiene ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco relaciones trigonométricas de θ.

17. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}$ **18.** $\cos\theta = \frac{9}{40}$

19. $\cot\theta = 1$ **20.** $\tan\theta = \sqrt{3}$

21. $\sec\theta = \frac{7}{2}$ **22.** $\csc\theta = \frac{13}{12}$

23–28 ■ Evalúe la expresión sin usar una calculadora.

23. $\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{6}$

24. sen 30° csc 30°

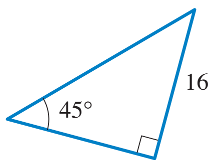
25. sen 30° cos 60° + sen 60° cos 30°

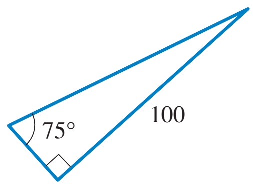
26. $(\operatorname{sen} 60°)^2 + (\cos 60°)^2$

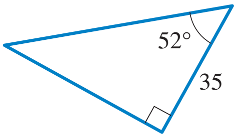
27. $(\cos 30°)^2 - (\operatorname{sen} 30°)^2$

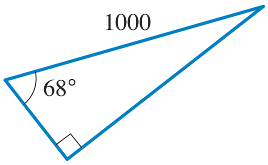
28. $\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}\right)^2$

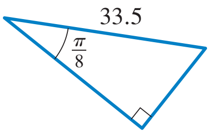
29–36 ■ Resuelva el triángulo.

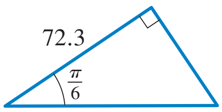
29.


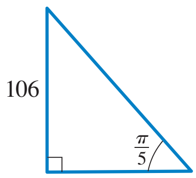
30.


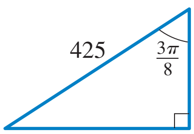
31.


32.


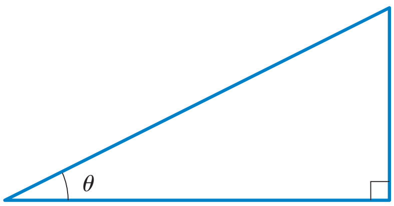
33.


34.


35.


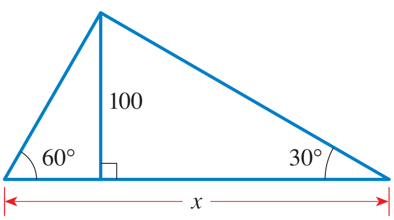
36.


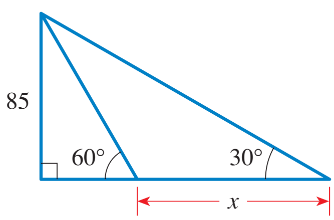
37. Use una regla para medir de manera cuidadosa los lados del triángulo, y después use sus mediciones para estimar las seis relaciones trigonométricas de θ.

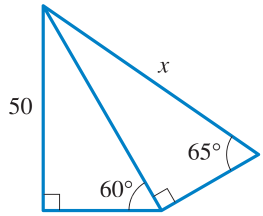


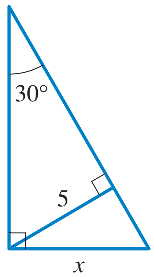
38. Con un transportador, bosqueje el triángulo rectángulo que tiene el ángulo agudo 40°. Mida los lados con cuidado y use sus resultados para estimar las seis relaciones trigonométricas de 40°.

39–42 ■ Encuentre x correcta hasta un decimal.

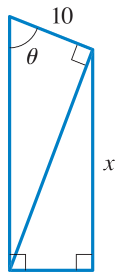
39.


40.


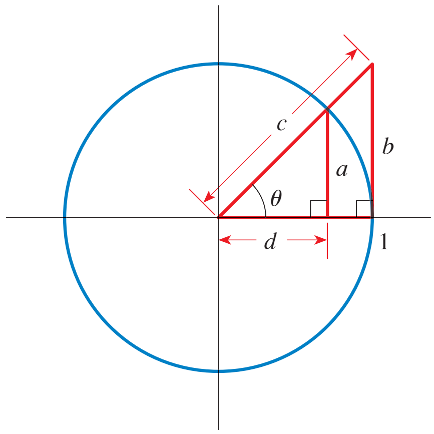
41.


42.


43. Exprese la longitud x en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



44. Exprese la longitud a, b, c y d en la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



Aplicaciones

45. Altura de un edificio Se encuentra que el ángulo de elevación hasta la parte superior del Empire State en Nueva York es 11° desde el suelo a una distancia de 1 milla a partir de la base del edificio. Use esta información para hallar la altura del edificio Empire State.

46. Gateway Arch Un avión está volando dentro de la vista del Gateway Arch en St. Louis, Missouri, a una altura de 35 000 pies. Al piloto le gustaría estimar su distancia desde el Gateway Arch. Encuentra que el ángulo de depresión respecto a un punto sobre el suelo debajo del arco es 22°.

a) ¿Cuál es la distancia entre el plano y el arco?

b) ¿Cuál es la distancia entre un punto sobre el suelo directamente abajo del avión y el arco?

47. Desviación de un rayo láser Un rayo láser se dirigirá hacia el centro de la Luna, pero se desvía 0.5° de su trayectoria deseada.

a) ¿Cuánto se ha desviado el rayo de su objetivo asignado cuando llega a la Luna? (La distancia de la Tierra a la Luna es de 240 000 millas).

b) El radio de la Luna mide alrededor de 1000 millas. ¿El rayo choca con la Luna?

48. Distancia al mar Desde la parte superior de un faro de 200 pies, el ángulo de depresión respecto a un barco en el océano es de 23°. ¿Qué tan lejos está el barco desde la base del faro?

49. Escalera apoyada Una escalera de 20 pies se apoya contra un edificio de modo que el ángulo entre el suelo y la escalera es de 72°. ¿A qué altura llega la escalera sobre el edificio?

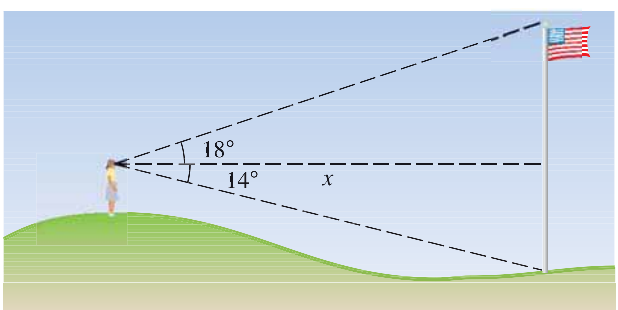
50. Escalera apoyada Una escalera de 20 pies se apoya sobre un edificio. Si la base de la escalera está a 6 pies de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo de elevación de la escalera? ¿Qué altura alcanza la escalera sobre el edificio?

51. Ángulo del Sol Un árbol de 96 pies proyecta una sombra de 120 pies de largo. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol?

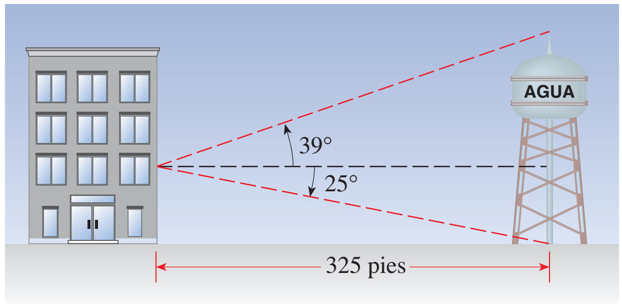
52. Altura de una torre Un cable de sujeción de 600 pies se une a la parte superior de una torre de comunicaciones. Si el alambre forma un ángulo de 65° con el suelo, ¿cuál es la altura de la torre de comunicaciones?

53. Elevación de una cometa Una persona yace sobre la playa, volando una cometa. Mantiene el extremo de la cuerda de la cometa al nivel del suelo, y estima que el ángulo de elevación de la cometa es de 50°. Si la cuerda mide 450 pies de largo, ¿cuál es la altura de la cometa arriba del nivel del suelo?

54. Cálculo de una distancia Una mujer parada sobre una colina ve un asta de bandera que sabe tiene 60 pies de altura. El ángulo de depresión respecto de la parte inferior del asta es 14° y el ángulo de elevación respecto de la parte superior del asta es de 18°. Encuentre la distancia x desde el asta.



55. Altura de una torre Una torre de agua se localiza a 325 pies de un edificio (véase la figura). Desde una ventana en el edificio, un observador nota que el ángulo de elevación de la parte superior de la torre es de 39° y que el ángulo de depresión respecto a la base de la torre es de 25°. ¿Qué tan alta es la torre? ¿A qué altura está la ventana?



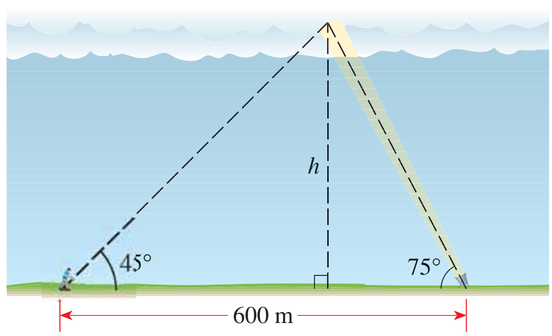
56. Cálculo de una distancia Un aeroplano vuela a una altura de 5150 pies directamente arriba de una carretera recta. Dos automovilistas conducen en la carretera en lados opuestos del avión, y el ángulo de depresión respecto a un automóvil es 35° y respecto al otro es 52°. ¿Cuál es la distancia que separa a los automóviles?

57. Cálculo de una distancia Si ambos automóviles del ejercicio 56 están en un lado del avión y si el ángulo de depresión respecto a un automóvil es de 38° y respecto al otro es de 52°, ¿qué tan apartados están los automóviles?

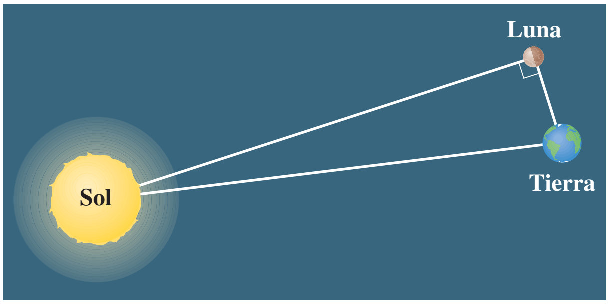
58. Altura de un globo Un globo de aire caliente flota arriba de una carretera recta. Para estimar su altura respecto al nivel del suelo, los aeronautas miden de manera simultánea el ángulo de depresión respecto a dos postes de kilometraje consecutivos sobre la carretera del mismo lado del globo. Se encuentra que los ángulos de depresión son 20° y 22°. ¿Cuál es la altitud del globo?

59. Altura de una montaña Para estimar la altura de una montaña arriba de una llanura plana, el ángulo de elevación hasta la parte superior de la montaña es 32°. Mil pies más cerca de la montaña a lo largo de la llanura, se encuentra que el ángulo de elevación es 35°. Estime la altura de la montaña.

60. Altura de una cubierta de nubes Para medir la altura de la cubierta de nubes en un aeropuerto, un trabajador dirige un reflector hacia arriba a un ángulo de 75° desde la horizontal. Un observador a 600 m mide el ángulo de elevación hasta el punto de luz y encuentra que es de 45°. Determine la altura h de la cubierta de nubes.



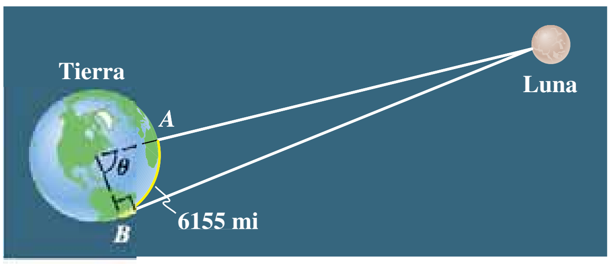
61. Distancia al Sol Cuando la Luna se encuentra exactamente en la fase de media luna, la Tierra, la Luna y el Sol forman un ángulo recto (véase la figura). En ese momento el ángulo que forman el Sol, la Tierra y la Luna es de 89.85°. Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 240 000 millas, estime la distancia de la Tierra al Sol.



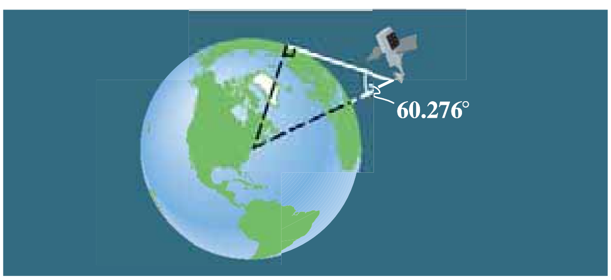
62. Distancia a la Luna Para hallar la distancia al Sol como en el ejercicio 61, se necesita conocer la distancia a la Luna. A continuación se da una manera para estimar esa distancia: cuando se ve que la Luna está en su cenit en un punto A sobre la Tierra, se observa que está en el horizonte desde el punto B (véase la figura). Los puntos A y B están separados 6155 millas, y el radio de la Tierra mide 3960 millas.

a) Encuentre el ángulo θ en grados.

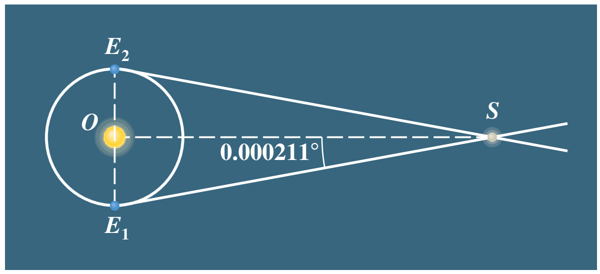
b) Estime la distancia del punto A a la Luna.



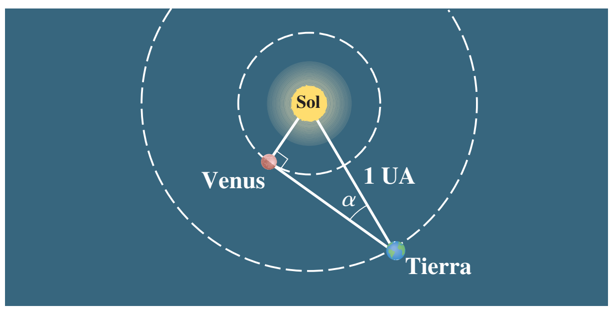
63. Radio de la Tierra En el ejercicio 72 de la sección 6.1 se dio un método para determinar el radio de la Tierra. A continuación se describe un método más moderno: desde un satélite a 600 millas arriba de la Tierra, se observa que el ángulo formado por la vertical y la línea de visión al horizonte es 60.276°. Use esta información para hallar el radio de la Tierra.



64. Paralaje Para hallar la distancia a estrellas cercanas, se usa el método de paralaje. La idea es hallar un triángulo con la estrella en un vértice y con una base tan grande como sea posible. Para esto, se observa a la estrella en dos tiempos distintos separados exactamente seis meses, y se registra su cambio de posición aparente. De estas dos observaciones, se puede calcular $\angle E_1SE_2$ (Los tiempos se eligen de modo que $\angle E_1SE_2$ sea lo más grande posible, lo que garantiza que $\angle E_1OS$ sea 90°.) El ángulo E_1SO se denomina *paralaje* de la estrella. Alpha Centauri, la estrella más cercana a la Tierra, tiene un paralaje de 0.000211°. Estime la distancia a esta estrella. (Tome la distancia de la Tierra al Sol como 9.3×10^7 millas.)



65. Distancia de Venus al Sol La **elongación** α de un planeta es el ángulo que forman el planeta, la Tierra y el Sol (véase la figura). Cuando Venus alcanza su elongación máxima de 46.3°, la Tierra, Venus y el Sol forman un triángulo con un ángulo recto en Venus. Encuentre la distancia entre Venus y el Sol en unidades astronómicas (UA). (Por definición, la distancia entre la Tierra y el Sol es 1 UA.)



Descubrimiento • Discusión

66. Triángulos semejantes Si dos triángulos son similares, ¿qué propiedades comparten? Explique cómo estas propiedades hacen posible definir relaciones trigonométricas sin considerar el tamaño del triángulo.

6.3 Funciones trigonométricas de ángulos

En la sección precedente se definieron relaciones trigonométricas para ángulos agudos. Aquí se amplían las relaciones trigonométricas a todos los ángulos definiendo las funciones trigonométricas de ángulos. Con estas funciones se pueden resolver problemas prácticos en los que los ángulos no necesariamente son agudos.

Funciones trigonométricas de ángulos

Sea POQ un triángulo rectángulo con ángulo agudo θ como se muestra en la figura 1a). Coloque θ en la posición estándar como se muestra en la figura 1b).

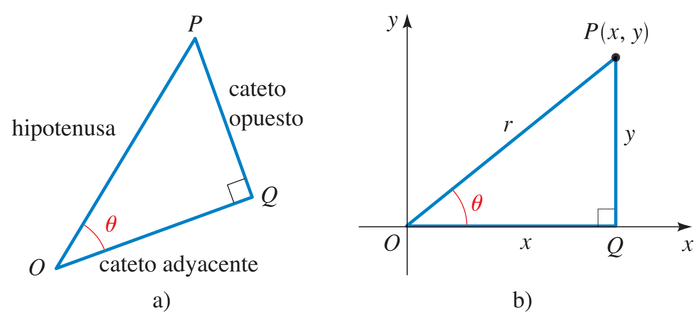


Figura 1

Entonces $P = P(x, y)$ es un punto sobre el lado terminal de θ. En el triángulo POQ, el cateto opuesto tiene longitud y y el cateto adyacente tiene longitud x. Por medio del teorema de Pitágoras se puede observar que la hipotenusa tiene longitud $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

Las otras relaciones trigonométricas se pueden hallar de la misma forma.

Estas observaciones permiten ampliar las relaciones trigonométricas a cualquier ángulo. Se definen las funciones trigonométricas de ángulos como sigue (véase la figura 2).

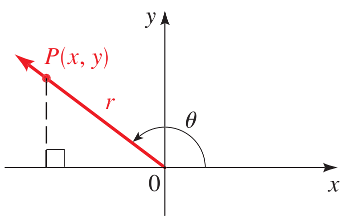


Figura 2

Definición de funciones trigonométricas

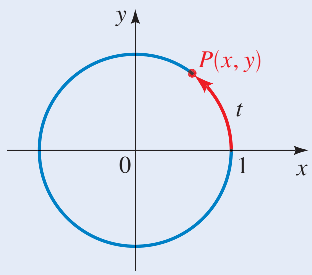
Sea θ un ángulo en posición estándar y sea $P(x, y)$ un punto sobre el lado terminal. Si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$, entonces

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \qquad \cos \theta = \frac{x}{r} \qquad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec \theta = \frac{r}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot \theta = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

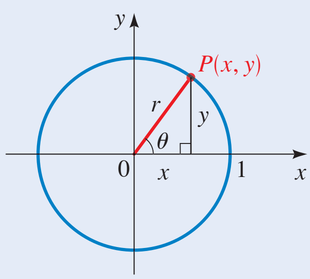
Relación con las funciones trigonométricas de números reales

Es posible que ya haya estudiado las funciones trigonométricas definidas por medio del círculo unitario (capítulo 5). Para ver cómo se relacionan las funciones trigonométricas de un *ángulo*, se comenzará con el círculo unitario en el plano coordenado.



$P(x, y)$ es el punto sobre la circunferencia determinado por t.

Sea $P(x, y)$ el punto sobre la circunferencia determinado por un arco de longitud t en el círculo unitario. Entonces t subtiende un ángulo θ en el centro del círculo. Si se baja una perpendicular de P sobre el punto Q sobre el eje x, el triángulo ΔOPQ es un triángulo rectángulo con catetos de longitud x y y, como se muestra en la figura.



El triángulo OPQ es un triángulo rectángulo

Ahora, por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t, se tiene

$$\operatorname{sen} t = y$$

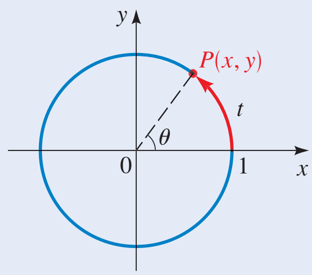
$$\cos t = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *ángulo* θ, se tiene

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{1} = x$$

Si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$. (Véase la figura a continuación.) Al comparar las dos formas de definir las funciones trigonométricas, podemos observar que son idénticas. En otras palabras, como funciones, asignan valores idénticos a un determinado número real (el número real es la medida en radianes de θ en un caso o la longitud t de un arco en el otro).



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué entonces se estudia trigonometría en dos formas distintas? Debido a que aplicaciones diferentes requieren que las funciones trigonométricas sean consideradas de forma diferente. (Véanse *Enfoque en el modelado*, páginas 459, 522 y 575 y las secciones 6.2, 6.4 y 6.5.)

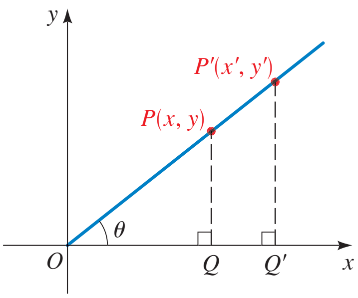


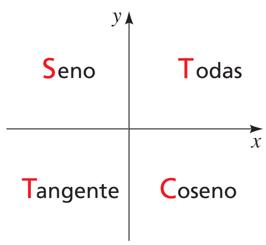
Figura 3

Puesto que la división entre 0 no es una operación definida, ciertas funciones trigonométricas no están definidas para ciertos ángulos. Por ejemplo, tan 90° $= y/x$ no está definida porque $x = 0$. Los ángulos para los que podrían no estar definidas las funciones trigonométricas son los ángulos para los que la coordenada x o y de un punto en el lado terminal del ángulo es 0. Estos son los **ángulos de un cuadrante**, ángulos que son coterminales con los ejes coordenados.

Es un hecho crucial que los valores de las funciones trigonométricas *no* dependen de la elección del punto $P(x, y)$. Esto es porque si $P'(x', y')$ es cualquier otro punto sobre el lado terminal, como en la figura 3, entonces los triángulos POQ y $P'OQ'$ son similares.

Evaluación de funciones trigonométricas a cualquier ángulo

El siguiente dispositivo nemotécnico se puede usar para recordar qué funciones trigonométricas son positivas en cada cuadrante: **t**odas, **s**eno, **t**angente o **c**oseno.



Esto se puede recordar como "Todas las Señoritas Toman Cálculo".

De la definición se puede observar que los valores de las funciones trigonométricas son todos positivos si el ángulo θ tiene su lado terminal en el cuadrante I. Esto es porque x y y son positivos en este cuadrante. [Por supuesto, r es positivo siempre, puesto que es simplemente la distancia del origen al punto $P(x, y)$.] Sin embargo, si el lado terminal de θ está en el cuadrante II, entonces x es negativa y y es positiva. Así, en el cuadrante II las funciones sen θ csc θ son positivas, y las otras funciones trigonométricas tienen valores negativos. Se pueden comprobar los otros elementos de la tabla siguiente.

Signos de las funciones trigonométricas

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen, csc	cos, sec, tan, cot
III	tan, cot	sen, csc, cos, sec
IV	cos, sec	sen, csc, tan, cot

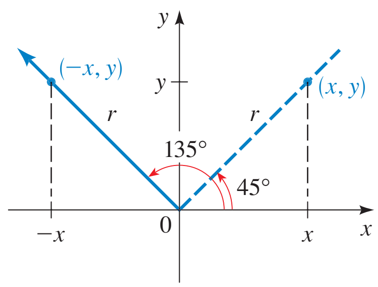


Figura 4

Ahora dirigiremos la atención a hallar los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos.

Ejemplo 1 Hallar las funciones trigonométricas de ángulos

Hallar a) cos 135° y b) tan 390°.

Solución

a) De la figura 4 se puede observar que cos 135° $= -x/r$. Pero cos 45° $= x/r$ y, puesto que cos 45° $= \sqrt{2}/2$, se tiene

$$\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

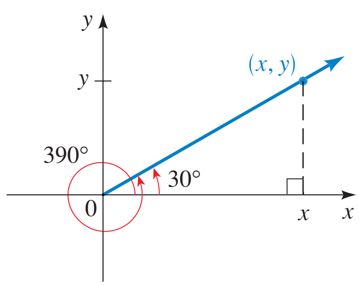


Figura 5

b) Los ángulos 390° y 30° son coterminales. De la figura 5 es claro que tan 390° = tan 30° y, puesto que tan 30° $= \sqrt{3}/3$, se tiene

$$\tan 390° = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

■

Del ejemplo 1 se puede observar que las funciones trigonométricas para ángulos que no son agudos tienen el mismo valor, excepto posiblemente por el signo, que las funciones trigonométricas correspondientes de un ángulo agudo. Al ángulo agudo se le llamará *ángulo de referencia*.

Ángulo de referencia

Sea θ un ángulo en posición estándar. El **ángulo de referencia** $\bar{\theta}$ relacionado con θ es el ángulo agudo formado por el lado terminal de θ y el eje x.

En la figura 6 se muestra que para encontrar un ángulo de referencia es útil conocer el cuadrante en que se localiza el lado terminal del ángulo.

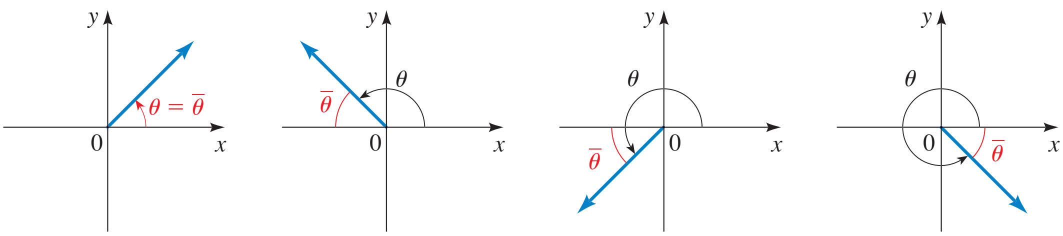


Figura 6
El ángulo de referencia $\bar{\theta}$ para un ángulo θ

Ejemplo 2 Hallar ángulos de referencia

Encuentre el ángulo de referencia para a) $\theta = \dfrac{5\pi}{3}$ y b) $\theta = 870°$.

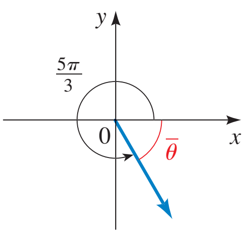


Figura 7

Solución

a) El ángulo de referencia es el ángulo agudo formado por el lado terminal del ángulo $5\pi/3$ y el eje x (véase la figura 7). Puesto que el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante IV, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

b) Los ángulos 870° y 150° son coterminales [porque $870 - 2(360) = 150$]. Así, el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante II (véase la figura 8). Por lo tanto, el ángulo de referencia es

$$\bar{\theta} = 180° - 150° = 30°$$

■

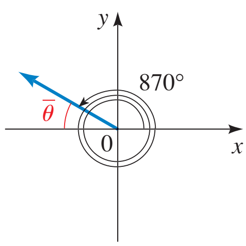


Figura 8

Evaluación de funciones trigonométricas para cualquier ángulo

Para hallar los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo, se llevan a cabo los siguientes pasos.

1. Encuentre el ángulo de referencia $\bar{\theta}$ relacionado con el ángulo θ.
2. Determine el signo de la función trigonométrica de θ observando el cuadrante en el que se localiza θ.
3. El valor de la función trigonométrica de θ es el mismo, excepto posiblemente por el signo, que el valor de la función trigonométrica de $\bar{\theta}$.

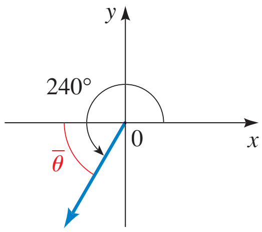


Figura 9

S | T
T | C

sen 240° es *negativo*.

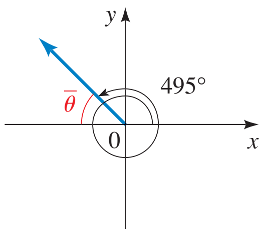


Figura 10

S | T
T | C

tan 495° *es negativa, por lo tanto* cot 495° *es negativa.*

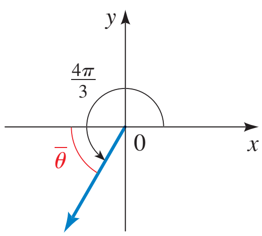


Figura 11

S | T
T | C

sen $\frac{16\pi}{3}$ *es negativa.*

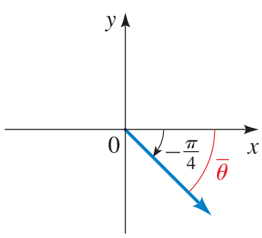


Figura 12

S | T
T | C

$\cos(-\frac{\pi}{4})$ *es positiva, por lo tanto* $\sec(-\frac{\pi}{4})$ *es positiva.*

Ejemplo 3 Cómo usar el ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre a) sen 240° y b) cot 495°.

Solución

a) Este ángulo tiene su lado terminal en el cuadrante III, como se muestra en la figura 9. Por lo tanto, el ángulo de referencia es 240° − 180° = 60°, y el valor de sen 240° es negativo. Así,

$$\text{sen } 240° = -\text{sen } 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Signo — Ángulo de referencia

b) El ángulo 495° es coterminal con el ángulo 135°, y el lado terminal de este ángulo está en el cuadrante II, como se muestra en la figura 10. Por consiguiente, el ángulo de referencia es 180° − 135° = 45°, y el valor de cot 495° es negativo. Se tiene

$$\cot 495° = \cot 135° = -\cot 45° = -1$$

Ángulos coterminales — Signo — Ángulo de referencia

■

Ejemplo 4 Cómo usar el ángulo de referencia para evaluar funciones trigonométricas

Encuentre a) sen $\frac{16\pi}{3}$ y b) $\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

Solución

a) El ángulo $16\pi/3$ es coterminal con $4\pi/3$, y estos ángulos están en el cuadrante III (véase la figura 11). Así, el ángulo de referencia es $(4\pi/3) - \pi = \pi/3$. Puesto que el valor del seno es negativo en el cuadrante III, se tiene

$$\text{sen } \frac{16\pi}{3} = \text{sen } \frac{4\pi}{3} = -\text{sen } \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ángulos coterminales — Signo — Ángulo de referencia

b) El ángulo $-\pi/4$ está en el cuadrante IV, y su ángulo de referencia es $\pi/4$ (véase la figura 12). Puesto que la secante es positiva en este cuadrante, se tiene

$$\sec\left(-\frac{\pi}{4}\right) = +\sec\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Signo — Ángulo de referencia

■

Identidades trigonométricas

Las funciones trigonométricas de ángulos están relacionadas entre sí por varias ecuaciones importantes llamadas **identidades trigonométricas.** Ya se han encontrado las

identidades recíprocas. Estas identidades todavía se cumplen para cualquier ángulo θ, siempre que estén definidos ambos miembros de la ecuación. Las identidades pitagóricas son una consecuencia del teorema de Pitágoras.*

Identidades fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

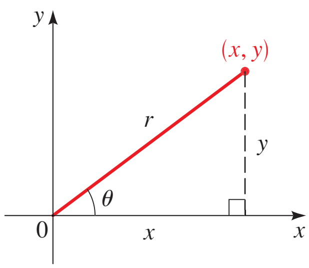


Figura 13

■ **Demostración** Se demostrará primero la identidad pitagórica. Si se utiliza $x^2 + y^2 = r^2$ (el teorema de Pitágoras) en la figura 13, se tiene

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

Así, $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$. (Aunque en la figura se indica un ángulo agudo, se debe comprobar que la demostración se cumple para todos los ángulos θ.) ■

Véanse los ejercicios 59 y 60 para las demostraciones de las otras dos identidades pitagóricas.

Ejemplo 5 Expresar una función trigonométrica en términos de otra

a) Exprese sen θ en términos de cos θ.

b) Exprese tan θ en términos de sen θ, donde θ está en el cuadrante II.

Solución

a) A partir de la primera identidad pitagórica se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = \pm\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

donde el signo depende del cuadrante. Si θ está en el cuadrante I o II, entonces sen θ es positivo y, en consecuencia,

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

mientras que si θ está en el cuadrante III o IV, sen θ es negativo y, por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\theta = -\sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

---

* Seguimos la convención usual de escribir $\operatorname{sen}^2\theta$ para $(\operatorname{sen}\theta)^2$. En general, se escribe $\operatorname{sen}^n\theta$ para $(\operatorname{sen}\theta)^n$ para los enteros n excepto $n = -1$. En la sección 7.4 se asignará otro significado al exponente $n = -1$. Por supuesto, se aplica la misma convención a las otras cinco funciones trigonométricas.

b) Puesto que $\tan\theta = \operatorname{sen}\theta/\cos\theta$, se necesita escribir $\cos\theta$ en términos de $\operatorname{sen}\theta$. Por el inciso a)

$$\cos\theta = \pm\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}$$

y puesto que $\cos\theta$ es negativo en el cuadrante II, aquí se aplica el signo negativo. Así,

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{-\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta}}$$

■

Ejemplo 6 Evaluar una función trigonométrica

Si $\tan\theta = \frac{2}{3}$ y θ está en el cuadrante III, encuentre $\cos\theta$.

Solución 1 Se necesita escribir $\cos\theta$ en términos de $\tan\theta$. De la identidad $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$, se obtiene $\sec\theta = \pm\sqrt{\tan^2\theta + 1}$. En el cuadrante III, $\sec\theta$ es negativa, por lo tanto

$$\sec\theta = -\sqrt{\tan^2\theta + 1}$$

Así
$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{1}{-\sqrt{\tan^2\theta + 1}}$$
$$= \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{-\sqrt{\frac{13}{9}}} = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

Si desea racionalizar el denominador, se puede expresar a $\cos\theta$ como

$$-\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Solución 2 Este problema se puede resolver más fácilmente con el método del ejemplo 2 de la sección 6.2. Recuerde que, excepto por el signo, los valores de las funciones trigonométricas de cualquier ángulo son los mismos que los de un ángulo agudo (el ángulo de referencia). Así, sin considerar el signo por el momento, se bosqueja un triángulo rectángulo con un ángulo agudo $\bar{\theta}$ que satisface a $\tan\bar{\theta} = \frac{2}{3}$ (véase la figura 14). Por el teorema de Pitágoras la hipotenusa de este triángulo tiene longitud $\sqrt{13}$. Del triángulo de la figura 14 se puede observar de inmediato que $\cos\bar{\theta} = 3/\sqrt{13}$. Puesto que θ está en el cuadrante III, $\cos\theta$ es negativo y, por lo tanto,

$$\cos\theta = -\frac{3}{\sqrt{13}}$$

■

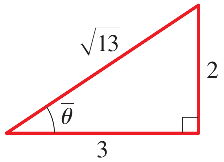


Figura 14

Ejemplo 7 Evaluación de funciones trigonométricas

Si $\sec\theta = 2$ y θ está en el cuadrante IV, encuentre las otras cinco funciones trigonométricas de θ.

Solución Se bosqueja un triángulo como en la figura 15 de modo que $\sec\bar{\theta} = 2$. Tomando en cuenta el hecho de que θ está en el cuadrante IV, se obtiene

$$\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\theta = \frac{1}{2} \qquad \tan\theta = -\sqrt{3}$$
$$\csc\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}} \qquad \sec\theta = 2 \qquad \cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

■

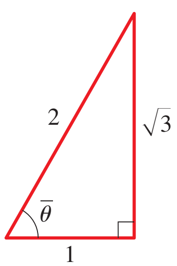
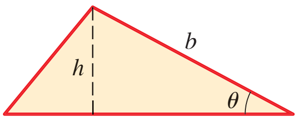


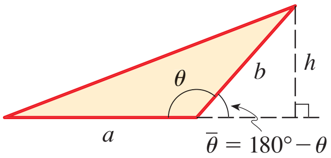
Figura 15

Áreas de triángulos

Concluimos esta sección con una aplicación de las funciones trigonométricas en las que los ángulos no necesariamente son agudos. En las dos secciones siguientes aparecen aplicaciones más extensas.



a)



b)

Figura 16

El área de un triángulo es $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura}$. Si se conocen dos lados y el ángulo incluido de un triángulo, entonces se determina la altura por medio de las funciones trigonométricas, y de ésta se encuentra el área.

Si θ es un ángulo agudo, entonces la altura del triángulo de la figura 16(a) se determina mediante $h = b \operatorname{sen} \theta$. Así, el área es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Si el ángulo θ no es agudo, entonces de la figura 16(b) se puede observar que la altura del triángulo es

$$h = b \operatorname{sen}(180° - \theta) = b \operatorname{sen} \theta$$

Esto es así porque el ángulo de referencia de θ es el ángulo $180° - \theta$. Así, también en este caso el área del triángulo es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2} \times \text{base} \times \text{altura} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Área de un triángulo

El área $\mathcal{A}$ de un triángulo con lados de longitudes a y b y con ángulo θ incluido es

$$\mathcal{A} = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta$$

Ejemplo 8 Hallar el área de un triángulo

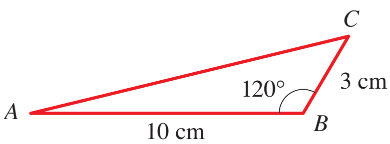


Figura 17

Encuentre el área del triángulo ABC mostrado en la figura 17.

Solución El triángulo tiene lados de longitudes 10 cm y 3 cm, con ángulo incluido de 120°. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} \theta \\
&= \tfrac{1}{2}(10)(3) \operatorname{sen} 120° \\
&= 15 \operatorname{sen} 60° && \text{Ángulo de referencia} \\
&= 15\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 13 \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

■

6.3 Ejercicios

1–8 ■ Encuentre el ángulo de referencia para el ángulo dado.

1. a) 150° **b)** 330° **c)** $-30°$

2. a) 120° **b)** $-210°$ **c)** 780°

3. a) 225° **b)** 810° **c)** $-105°$

4. a) 99° **b)** $-199°$ **c)** 359°

5. a) $\frac{11\pi}{4}$ **b)** $-\frac{11\pi}{6}$ **c)** $\frac{11\pi}{3}$

6. a) $\frac{4\pi}{3}$ **b)** $\frac{33\pi}{4}$ **c)** $-\frac{23\pi}{6}$

7. a) $\frac{5\pi}{7}$ **b)** -1.4π **c)** 1.4

8. a) 2.3π **b)** 2.3 **c)** -10π

9–32 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica.

9. sen 150°
10. sen 225°
11. cos 135°
12. $\cos(-60°)$
13. $\tan(-60°)$
14. sec 300°
15. $\csc(-630°)$
16. cot 210°
17. cos 570°
18. sec 120°
19. tan 750°
20. cos 660°
21. $\operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{3}$
22. $\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{3}$
23. $\operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{2}$
24. $\cos \dfrac{7\pi}{3}$
25. $\cos\left(-\dfrac{7\pi}{3}\right)$
26. $\tan \dfrac{5\pi}{6}$
27. $\sec \dfrac{17\pi}{3}$
28. $\csc \dfrac{5\pi}{4}$
29. $\cot\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$
30. $\cos \dfrac{7\pi}{4}$
31. $\tan \dfrac{5\pi}{2}$
32. $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{6}$

33–36 ■ Encuentre el cuadrante en el que se localiza θ a partir de la información dada.

33. $\operatorname{sen} \theta < 0$ y $\cos \theta < 0$
34. $\tan \theta < 0$ y $\operatorname{sen} \theta < 0$
35. $\sec \theta > 0$ y $\tan \theta < 0$
36. $\csc \theta > 0$ y $\cos \theta < 0$

37–42 ■ Escriba la primera función trigonométrica en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

37. $\tan \theta$, $\cos \theta$; θ en el cuadrante III
38. $\cot \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el cuadrante II
39. $\cos \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el cuadrante IV
40. $\sec \theta$, $\operatorname{sen} \theta$; θ en el cuadrante I
41. $\sec \theta$, $\tan \theta$; θ en el cuadrante II
42. $\csc \theta$, $\cot \theta$; θ en el cuadrante III

43–50 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

43. $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$, θ en el cuadrante II
44. $\cos \theta = -\frac{7}{12}$, θ en el cuadrante III
45. $\tan \theta = -\frac{3}{4}$, $\cos \theta > 0$
46. $\sec \theta = 5$, $\operatorname{sen} \theta < 0$
47. $\csc \theta = 2$, θ en el cuadrante I
48. $\cot \theta = \frac{1}{4}$, $\operatorname{sen} \theta < 0$
49. $\cos \theta = -\frac{2}{7}$, $\tan \theta < 0$
50. $\tan \theta = -4$, $\operatorname{sen} \theta > 0$

51. Si $\theta = \pi/3$, encuentre el valor de cada expresión.
a) $\operatorname{sen} 2\theta$, $2 \operatorname{sen} \theta$ **b)** $\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta$, $\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta$
c) $\operatorname{sen}^2\theta$, $\operatorname{sen}(\theta^2)$

52. Encuentre el área del triángulo con lados de longitud 7 y 9 y ángulo incluido de 72°.

53. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 10 y 22 y ángulo incluido de 10°.

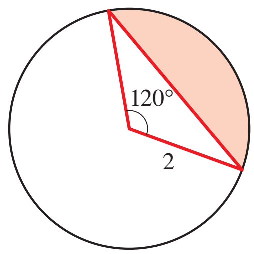
54. Encuentre el área de un triángulo equilátero con lado de longitud 10.

55. Un triángulo tiene un área de 16 in^2, y dos de los lados del triángulo tienen longitudes de 5 pulg y 7 pulg. Encuentre el ángulo que incluyen estos dos lados.

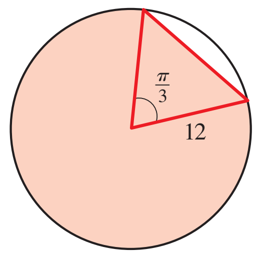
56. Un triángulo isósceles tiene un área de 24 cm^2, y el ángulo entre los dos lados iguales es $5\pi/6$. ¿Cuál es la longitud de los dos lados iguales?

57–58 ■ Encuentre el área de la región sombreada en la figura.

57.



58.



59. Use la primera identidad pitagórica para probar la segunda. [*Sugerencia*: divida entre $\cos^2\theta$.]

60. Use la primera identidad pitagórica para probar la tercera.

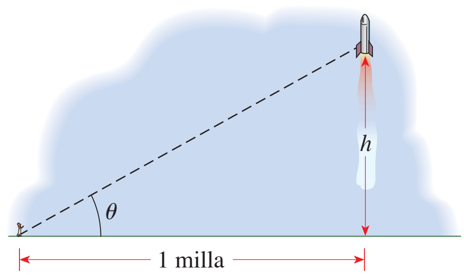
Aplicaciones

61. Altura de un cohete La trayectoria de un cohete en posición recta es seguida por un observador sobre el suelo a una milla de distancia.

a) Muestre que cuando el ángulo de elevación es θ, la altura del cohete en pies es $h = 5280 \tan \theta$.

b) Complete la tabla para encontrar la altura del cohete a los ángulos de elevación dados.

θ	20°	60°	80°	85°
h				



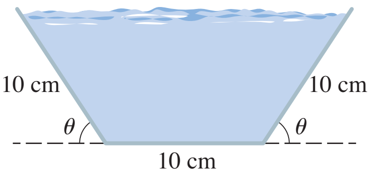
62. Canal de agua de lluvia Se construirá un canal de agua de lluvia a partir de una hoja de metal de 30 cm de ancho doblando hacia arriba un tercio de la hoja en cada lado por un ángulo θ.

a) Muestre que el área de sección transversal del canal se moldea mediante la función

$$A(\theta) = 100 \text{ sen } \theta + 100 \text{ sen } \theta \cos \theta$$

b) Grafique la función A para $0 \le \theta \le \pi/2$.

c) ¿Para qué ángulo θ se logra el área de sección transversal más grande?

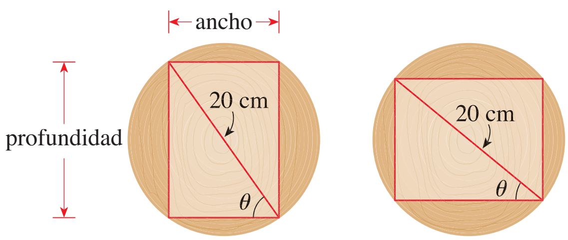


63. Viga de madera Una viga rectangular se cortará de un tronco cilíndrico de diámetro 20 cm. En las figuras se muestran distintas formas de hacer esto.

a) Exprese el área de sección transversal de la viga como una función del ángulo θ en las figuras.

b) Grafique la función que encontró en el inciso a).

c) Encuentre las dimensiones de la viga con el área de sección transversal más grande.



64. Resistencia de una viga La resistencia de una viga es proporcional al ancho y al cuadrado de la profundidad. Se corta una viga de un tronco como en el ejercicio 63. Exprese la resistencia de la viga como una función del ángulo θ en las figuras.

65. Lanzamiento de bala El alcance R y la altura H de una bala lanzada con una velocidad inicial de v_0 pies/s a un ángulo θ están dados por

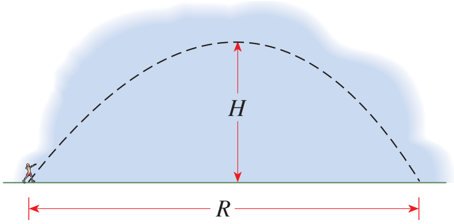
$$R = \frac{v_0^2 \text{ sen}(2\theta)}{g}$$

$$H = \frac{v_0^2 \text{ sen}^2\theta}{2g}$$

En la Tierra $g = 32$ pies/s^2 y en la Luna $g = 5.2$ pies/s^2. Encuentre el alcance y la altura de un lanzamiento de bala en las condiciones dadas.

a) En la Tierra con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$

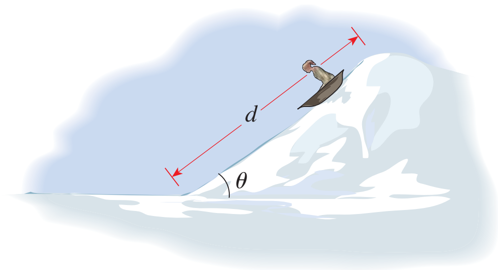
b) En la Luna con $v_0 = 12$ pies/s y $\theta = \pi/6$



66. Transporte en trineo El tiempo en segundo que tarda un trineo en bajar una columna inclinada un ángulo θ es

$$t = \sqrt{\frac{d}{16 \text{ sen } \theta}}$$

donde d es la longitud de la pendiente en pies. Encuentre el tiempo que tarda en bajar una pendiente de 2000 pies inclinada a 30°.



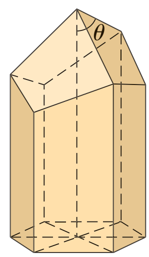
67. Colmenas En una colmena cada celda es un prisma hexagonal regular, como se muestra en la figura. La cantidad de cera W en la celda depende del ángulo en el vértice θ y está dada por

$$W = 3.02 - 0.38 \cot \theta + 0.65 \csc \theta$$

Las abejas eligen por instinto a θ para usar la mínima cantidad de cera posible.

a) Use un dispositivo de graficación para trazar W como una función de θ para $0 < \theta < \pi$.

b) ¿Para qué valor de θ el valor de W es mínimo? [*Nota*: los biólogos han descubierto que las abejas rara vez se desvían de este valor en más de un grado o dos.]



68. Vuelta en una esquina Se lleva un tubo de acero por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final del pasillo hay una vuelta en ángulo recto hacia un pasillo más estrecho de 6 pies de ancho.

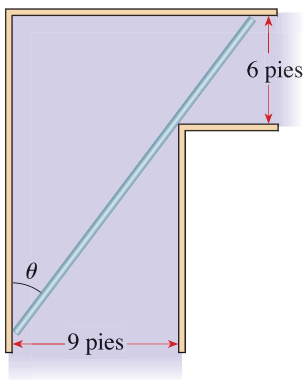
a) Muestre que la longitud del tubo de la figura se modeló mediante la función

$$L(\theta) = 9 \csc \theta + 6 \sec \theta$$

b) Grafique la función L para $0 < \theta < \pi/2$.

c) Encuentre el valor mínimo de la función L.

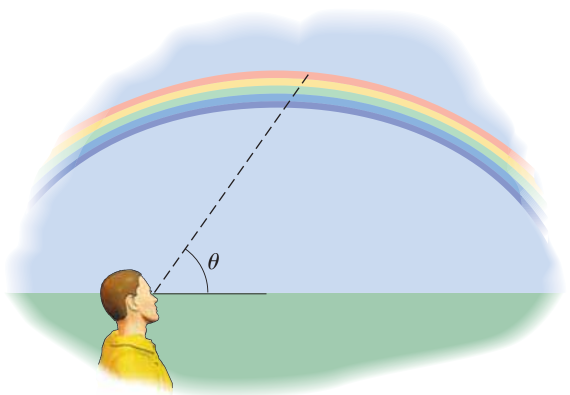
d) Explique por qué el valor de L que encontró en el inciso c) es la longitud del tubo más largo que puede ser llevado alrededor de la esquina.



69. Arco iris Los arco iris se forman cuando la luz solar de diferentes longitudes de onda (colores) se refracta y refleja en gotas de agua. El ángulo de elevación θ de un arco iris es siempre el mismo. Se puede demostrar que $\theta = 4\beta - 2\alpha$, donde

$$\operatorname{sen} \alpha = k \operatorname{sen} \beta$$

y $\alpha = 59.4°$ y $k = 1.33$ es el índice de refracción del agua. Use la información dada para encontrar el ángulo de elevación θ de un arco iris. (Para una explicación matemática de los arco iris véase *Calculus*, 5a ed. de James Stewart, páginas 288 y 289.)



Descubrimiento • Debate

70. Uso de una calculadora Para resolver cierto problema, se requiere hallar el seno de 4 rad. Su compañero usa su calculadora y le dice que

$$\operatorname{sen} 4 = 0.0697564737$$

En su calculadora usted obtiene

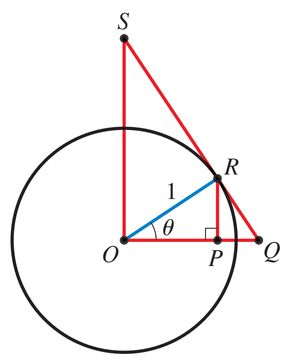
$$\operatorname{sen} 4 = -0.7568024953$$

¿Qué está mal? ¿Qué error cometió su compañero?

71. Diagrama trigonométrico de Viète En el siglo XVI, el matemático francés François Viète (véase la página 49) publicó el siguiente diagrama notable. Cada una de las seis funciones trigonométricas de θ es igual a la longitud de un segmento de recta en la figura. Por ejemplo, sen $\theta = |PR|$, puesto que de $\triangle OPR$ se puede observar que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \\ &= \frac{|PR|}{|OR|} \\ &= \frac{|PR|}{1} \\ &= |PR| \end{aligned}$$

Para cada una de las otras cinco funciones trigonométricas, encuentre un segmento de recta en la figura cuya longitud es igual al valor de la función en θ. (*Nota*: el radio del círculo es 1, el centro es O, el segmento QS es tangente al círculo en R y $\angle SOQ$ es un ángulo recto.)

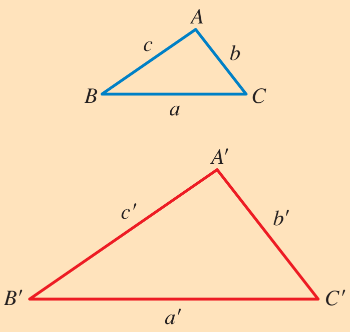


PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Similitud

En geometría aprendió que dos triángulos son semejantes si tienen los mismos ángulos. En este caso, las relaciones de lados correspondientes son iguales. Los triángulos ABC y $A'B'C'$ del margen son similares, por lo tanto

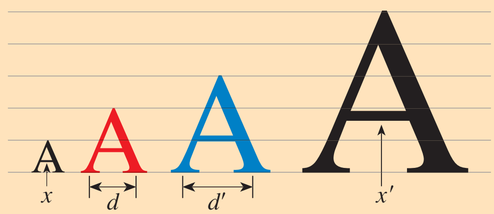
$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$



Tales empleó triángulos similares para hallar la altura de una columna alta (véase la página 482.)

La similitud es la idea crucial que sustenta a la trigonometría. Se puede definir sen θ como la relación del cateto opuesto a la hipotenusa en *cualquier* triángulo rectángulo con un ángulo θ, porque todos los triángulos rectángulos son similares. Por lo tanto, la relación representada por sen θ no depende del tamaño del triángulo rectángulo sino sólo del ángulo θ. Esta es una idea eficaz porque con frecuencia los ángulos son más fáciles de medir que las distancias. Por ejemplo, el ángulo que forman el Sol, la Tierra y la Luna se puede medir desde la Tierra. El secreto para hallar la distancia al Sol es que las relaciones trigonométricas son las mismas para el enorme triángulo que forman el Sol, la Tierra y la Luna que para cualquier otro triángulo similar (véase el ejercicio 61 en la sección 6.2).

En general, dos objetos son **similares** si tienen la misma forma aunque puedan no ser del mismo tamaño.* Por ejemplo, se reconoce lo siguiente como representaciones de la letra A porque todas son similares.



Si dos figuras son similares, entonces las distancias entre puntos correspondientes en las figuras son proporcionales. Las letras A azul y roja son similares: la relación de distancias entre puntos correspondientes es $\frac{3}{2}$. Se dice que la **relación de similitud** es $s = \frac{3}{2}$. Para obtener la distancia d' entre dos puntos cualesquiera en la A azul, se multiplica la distancia d correspondiente en la A roja por $\frac{3}{2}$. Por lo tanto,

$$d' = sd \qquad \text{o} \qquad d' = \tfrac{3}{2}d$$

Asimismo, la relación de similitud entre las letras primera y última es $s = 5$, así que $x' = 5x$.

1. Escriba un párrafo corto que explique cómo se emplea el concepto de similitud para definir las relaciones trigonométricas.

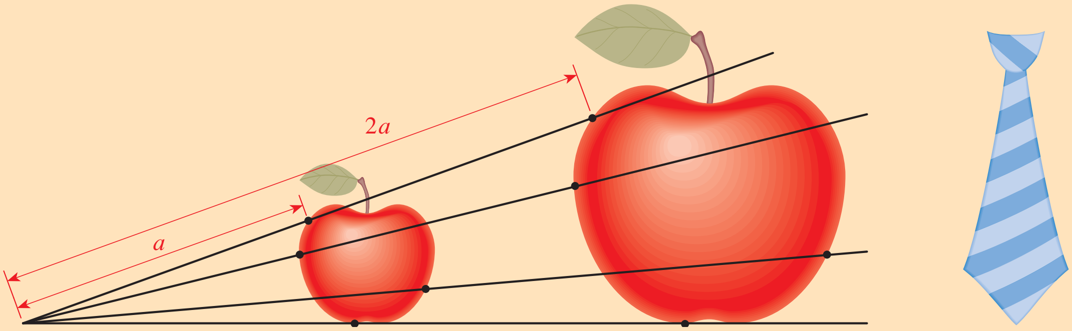
2. ¿Cómo se emplea la similitud en la elaboración de mapas? ¿Cómo se relacionan las distancias en un mapa de carreteras de una ciudad con las distancias reales?

---

* Si tienen la misma forma *y* tamaño, son congruentes, que es un caso especial de similitud.

3. ¿Qué tanto te pareces a tu fotografía del año anterior? Compare distancias entre puntos distintos de su cara (como distancia entre orejas, longitud de la nariz, distancia entre ojos, etc.) con las distancias correspondientes en una fotografía. ¿Cuál es la relación de similitud?

4. En la figura se ilustra un método para dibujar una manzana del doble de tamaño de una manzana dada. Use el método para dibujar una corbata tres veces el tamaño (relación de similitud 3) de la corbata azul.

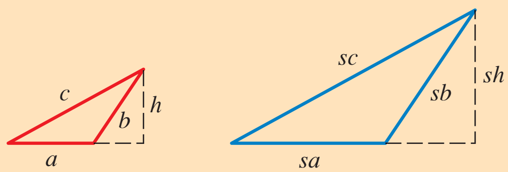


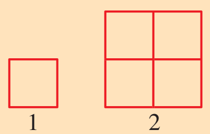
5. Proporcione las condiciones en las que dos rectángulos son similares entre sí. Haga lo mismo para dos triángulos isósceles.

6. Suponga que dos triángulos similares tienen relación de similitud s.

a) ¿Cómo se relacionan los perímetros de los triángulos?

b) ¿Cómo se relacionan las áreas de los triángulos?



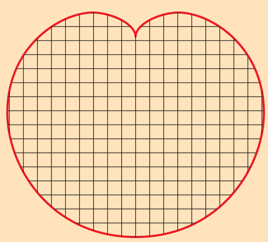


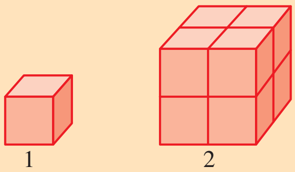
Si se duplica el lado de un cuadrado, su área se multiplica por 2^2.

7. a) Si dos cuadrados tienen relación de similitud s, muestre que sus áreas A_1 y A_2 tienen la propiedad de que $A_2 = s^2A_1$.

b) Si se triplica el lado de un cuadrado, ¿por cuál factor se multiplica su área?

c) Una figura plana se puede aproximar por medio de cuadrados (como se muestra). Explique cómo se puede concluir que para dos figuras planas cualesquiera con relación de similitud s, sus áreas satisfacen $A_2 = s^2A_1$. (Use el inciso a).)





Si se duplica el lado de un cubo, su volumen se multiplica por 2^3.

8. a) Si dos cubos tienen relación de similitud s, muestre que sus volúmenes V_1 y V_2 tienen la propiedad de que $V_2 = s^3V_1$.

b) Si el lado de un cubo se multiplica por 10, ¿por cuál factor se multiplica el volumen?

c) ¿Cómo se puede usar el hecho de que un objeto sólido se puede "llenar" mediante cubos pequeños para mostrar que para dos sólidos cualesquiera con relación de similitud s, los volúmenes satisfacen $V_2 = s^3V_1$?

9. King Kong es 10 veces tan alto como Joe, un gorila de tamaño normal que pesa 300 lb. Si se supone que King Kong y Joe son similares, use los resultados de los problemas 7 y 8 para contestar las siguientes preguntas.

a) ¿Cuánto pesa King Kong?

b) Si la mano de Joe mide 13 pulg de largo, ¿cuánto mide la mano de King Kong?

c) Si hacer una camisa para Joe requiere 2 yardas cuadradas de tela, ¿cuánta tela requeriría una camisa para King Kong?

6.4 Ley de los senos

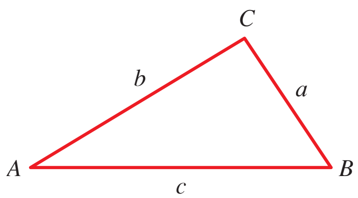


Figura 1

En la sección 6.2 se emplearon relaciones trigonométricas para resolver triángulos rectángulos. Las funciones trigonométricas se pueden usar también para resolver *triángulos oblicuos*, es decir, triángulos sin ángulos rectos. Para hacer esto, se estudia primero la ley de los senos y luego la ley de los cosenos en la siguiente sección. Para expresar estas leyes (o fórmulas) con más facilidad, se sigue la convención de marcar los ángulos de un triángulo como A, B, C y las longitudes de los lados opuestos correspondientes como a, b, c, como en la figura 1.

Para resolver el triángulo, es necesario conocer cierta información acerca de sus lados y ángulos. Para decidir si se tiene información suficiente, con frecuencia es útil hacer un bosquejo. Por ejemplo, si se dan dos ángulos y el lado incluido, entonces es claro que sólo se puede formar un solo triángulo (véase la figura 2a)). De manera similar, si se conocen dos lados y el ángulo incluido, entonces está determinado un solo triángulo (figura 2c)). Pero si se conocen los tres ángulos y ninguno de los lados, no se puede determinar de manera única el triángulo porque muchos triángulos tienen los mismos tres ángulos. (Por supuesto todos estos triángulos serían similares.) Así que no se considerará este último caso.

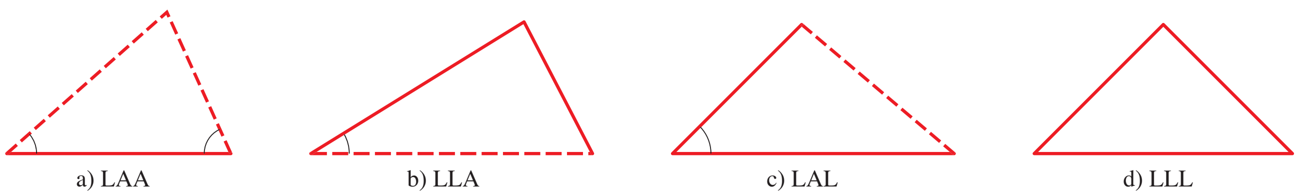


Figura 2

En general, un triángulo está determinado por tres de sus seis partes (ángulos y lados) siempre que por lo menos una de estas tres partes sea un lado. Así, las posibilidades, ilustradas en la figura 2, son como sigue.

Caso 1 Un lado y dos ángulos (LAA)

Caso 2 Dos lados y el ángulo opuesto a uno de esos lados (LLA)

Caso 3 Dos lados y el ángulo incluido (LAL)

Caso 4 Tres lados (LLL)

Los casos 1 y 2 se resuelven por medio de la ley de los senos; los casos 3 y 4 requieren la ley de los cosenos.

Ley de los senos

La **ley de los senos** dice que en cualquier triángulo las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos correspondientes.

Ley de los senos

En el triángulo ABC se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

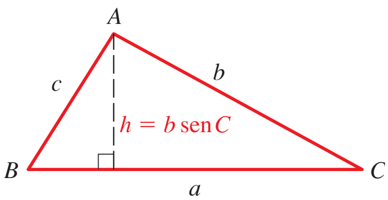


Figura 3

■ **Demostración** Para ver por qué es cierta la ley de los senos, refiérase a la figura 3. Por la fórmula de la sección 6.3 el área de un triángulo ABC es $\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$. Por la misma fórmula el área de este triángulo es también $\frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B$ y $\frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$. Así,

$$\tfrac{1}{2}bc \operatorname{sen} A = \tfrac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$$

Al multiplicar por $2/(abc)$ se obtiene la ley de los senos. ■

Ejemplo 1 Rastreo de un satélite (LAA)

Un satélite que orbita la Tierra pasa directamente arriba de las estaciones de observación en Phoenix y Los Ángeles, apartadas 340 millas. En un instante cuando el satélite está entre estas dos estaciones, su ángulo de elevación es observado de manera simultánea como 60° en Phoenix y 75° en Los Ángeles. ¿Qué tan lejos está el satélite de Los Ángeles? En otras palabras, encuentre la distancia AC en la figura 4.

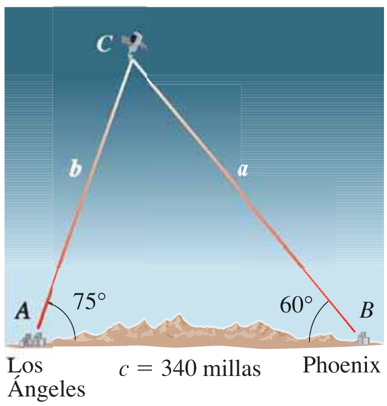


Figura 4

Solución Siempre que dos ángulos en un triángulo se conocen, el tercer ángulo se puede determinar de inmediato porque la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. En este caso, $\angle C = 180° - (75° + 60°) = 45°$ (véase la figura 4), por lo tanto se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\frac{\operatorname{sen} 60°}{b} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{340} \qquad \text{Sustituya}$$

$$b = \frac{340 \operatorname{sen} 60°}{\operatorname{sen} 45°} \approx 416 \qquad \text{Resuelva para } b$$

La distancia del satélite desde Los Ángeles es aproximadamente 416 millas. ■

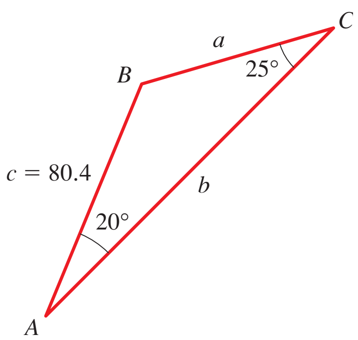


Figura 5

Ejemplo 2 Resolver un triángulo (LLA)

Resuelva el triángulo de la figura 5.

Solución Primero, $\angle B = 180° - (20° + 25°) = 135°$. Puesto que se conoce el lado c, para hallar el lado a se usa la relación

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \textit{Ley de los senos}$$

$$a = \frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 20°}{\text{sen } 25°} \approx 65.1 \qquad \textit{Despeje } a$$

De manera similar, para encontrar b utilizamos

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \textit{Ley de los senos}$$

$$b = \frac{c \text{ sen } B}{\text{sen } C} = \frac{80.4 \text{ sen } 135°}{\text{sen } 25°} \approx 134.5 \qquad \textit{Despeje } b$$

■

El caso ambiguo

En los ejemplos 1 y 2 se determina un triángulo único por la información dada. Esto se cumple siempre para el caso 1 (LAA). Pero en el caso 2 (LLA) podría haber dos triángulos, un triángulo o ninguno con las propiedades dadas. Por esta razón, el caso 2 a veces se llama **caso ambiguo.** Para ver por qué esto es así, se muestran en la figura 6 las posibilidades cuando se dan el ángulo A y los lados a y b. En el inciso a) ninguna solución es posible, puesto que el lado a es demasiado corto para completar el triángulo. En el inciso b) la solución es un triángulo rectángulo. En el inciso c) dos soluciones son posibles y en el inciso d) hay un triángulo único con las propiedades dadas. En los ejemplos siguientes se ilustran las posibilidades del caso 2.

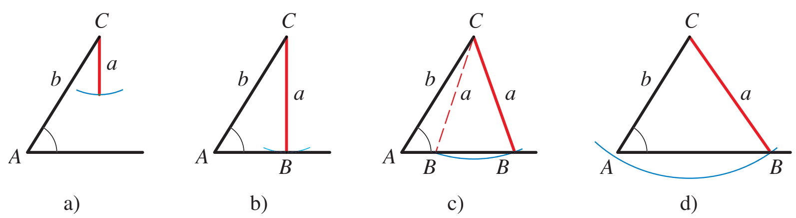


Figura 6
El caso ambiguo

Ejemplo 3 LLA, el caso de una solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 45°$, $a = 7\sqrt{2}$ y $b = 7$.

Solución Primero se bosqueja el triángulo con la información que se tiene (véase la figura 7). El bosquejo es necesariamente tentativo puesto que aún no se conocen los otros ángulos. Sin embargo, ahora se pueden ver las posibilidades.

Se encuentra primero $\angle B$.

$$\frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} \qquad \textit{Ley de los senos}$$

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{7}{7\sqrt{2}} \text{ sen } 45° = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad \textit{Despeje sen } B$$

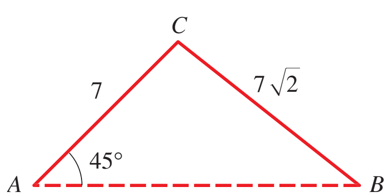


Figura 7

Se consideran sólo ángulos más pequeños que 180°, puesto que ningún ángulo puede contener un ángulo de 180° o más grande.

¿Cuáles ángulos B tiene sen $B = \frac{1}{2}$? De la sección anterior se sabe que hay dos ángulos más pequeños que 180° (estos son 30° y 150°). ¿Cuál de estos ángulos es compatible con lo que se sabe acerca del triángulo ABC? Puesto que $\angle A = 45°$, no se puede tener $\angle B = 150°$, porque $45° + 150° > 180°$. Por lo tanto, $\angle B = 30°$, y el ángulo restante es $\angle C = 180° - (30° + 45°) = 105°$.

Ahora se puede hallar el lado c.

$$\frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$c = \frac{b \text{ sen } C}{\text{sen } B} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\text{sen } 30°} = \frac{7 \text{ sen } 105°}{\frac{1}{2}} \approx 13.5 \qquad \text{Despeje } c$$

■

El *complemento* de un ángulo θ (donde $0 \leq \theta \leq 180°$) es el ángulo $180° - \theta$.

En el ejemplo 3 hubo dos posibilidades para el ángulo B, y una de éstas no fue compatible con el resto de la información. En general, si sen $A < 1$, se debe comprobar el ángulo y su complemento como posibilidades, porque cualquier ángulo más pequeño que 180° puede estar en el triángulo. Para decidir si cualquiera de las posibilidades funciona, se comprueba si la suma resultante de los ángulos excede 180°. Puede suceder, como en la figura 6(c), que ambas posibilidades son compatibles con la información dada. En ese caso, dos triángulos diferentes son soluciones del problema.

Alan Oddie/PhotoEdit

La **agrimensura** es un método de medición del suelo usado para elaborar mapas. Los agrimensores usan un proceso llamado *triangulación* en el que se crea una red de miles de triángulos entrelazados en el área de la cual se elaborará un mapa. Se inicia el proceso midiendo la longitud de una *línea base* entre dos estaciones de agrimensura. Entonces, usando un instrumento llamado *teodolito*, se miden los ángulos entre estas dos estaciones y una tercera estación. Entonces se usan las leyes de los senos para calcular los otros dos lados del triángulo formado por las tres estaciones. Los lados calculados se utilizan como líneas base, y el proceso se repite una y otra vez para crear una red de triángulos. En este método, la única distancia medida

(*continúa*)

Ejemplo 4 LLA, el caso de dos soluciones

Resuelva el triángulo ABC si $\angle A = 43.1°$, $a = 186.2$ y $b = 248.6$.

Solución De la información dada se bosqueja el triángulo mostrado en la figura 8. Hay que observar que el lado a se puede dibujar en dos posiciones posibles para completar el triángulo. De la ley de los senos

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{248.6 \text{ sen } 43.1°}{186.2} \approx 0.91225$$

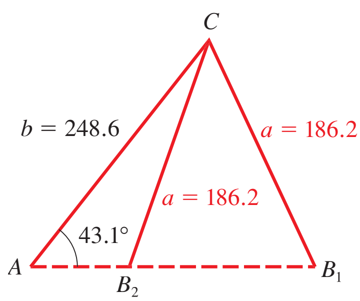
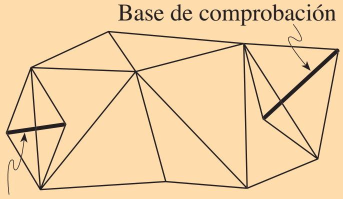


Figura 8

Hay dos posibles ángulos B entre 0° y 180° tal que si sen $B = 0.91225$. Por medio de la tecla SEN^{-1} en una calculadora (o INV SEN o ARCSEN), se encuentra que uno de estos ángulos es aproximadamente 65.8°. El otro es aproximadamente $180° - 65.8° = 114.2°$. Se denotan estos ángulos por B_1 y B_2, de modo que

$$\angle B_1 \approx 65.8° \qquad \text{y} \qquad \angle B_2 \approx 114.2°$$

es la línea base inicial; las otras distancias se calculan a partir de la ley de los senos. Este método es práctico porque es mucho más fácil medir ángulos que distancias.



Uno de los esfuerzos de mapeo más ambiciosos de todos los tiempos fue la gran medición trigonométrica de la India (véase el problema 8, página 525) que requirió varias expediciones y tomó un siglo completarla. La famosa expedición de 1823 conducida por **Sir George Everest**, duró 20 años. Para llegar se tuvo que pasar por terreno peligroso y encontrar a los temidos mosquitos portadores de la malaria, y por fin la expedición llegó al pie de los Himalayas. Una expedición posterior, por medio de triangulación, calculó la altura del pico más alto de los Himalayas como 29 002 pies. El nombre de la montaña fue asignado en honor de Sir George Everest.

Hoy día, con la ayuda de satélites, la altura del Monte Everest se estima en 29 028 pies. La concordancia muy cercana de estas dos estimaciones muestra la gran exactitud del método trigonométrico.

Así, dos triángulos satisfacen las condiciones dadas: triángulo $A_1B_1C_1$ y triángulo $A_2B_2C_2$.

Resolver el triángulo $A_1B_1C_1$:

$$\angle C_1 \approx 180° - (43.1° + 65.8°) = 71.1° \qquad \text{Encuentre } \angle C_1$$

Así, $$c_1 = \frac{a_1 \operatorname{sen} C_1}{\operatorname{sen} A_1} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 71.1°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 257.8 \qquad \text{Ley de los senos}$$

Resolver el triángulo $A_2B_2C_2$:

$$\angle C_2 \approx 180° - (43.1° + 114.2°) = 22.7° \qquad \text{Encuentre } \angle C_2$$

Por tanto, $$c_2 = \frac{a_2 \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen} A_2} \approx \frac{186.2 \operatorname{sen} 22.7°}{\operatorname{sen} 43.1°} \approx 105.2 \qquad \text{Ley de los senos}$$

Los triángulos $A_1B_1C_1$ y $A_2B_2C_2$ se muestran en la figura 9.

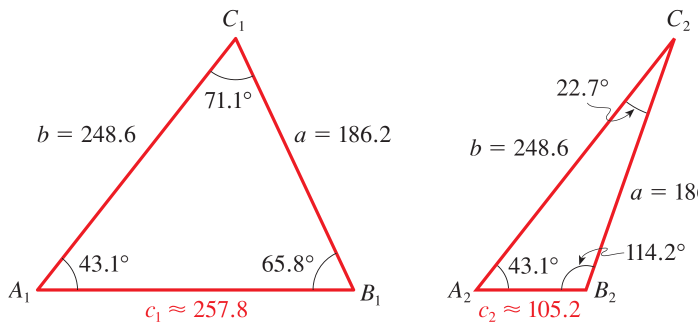


Figura 9 ■

En el ejemplo siguiente se presenta una situación para la cual ningún triángulo es compatible con los datos.

Ejemplo 5 LLA, caso sin solución

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 42°$, $a = 70$ y $b = 122$.

Solución Para organizar la información dada, se bosqueja el diagrama en la figura 10. Se intentará hallar $\angle B$. Se tiene

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{122 \operatorname{sen} 42°}{70} \approx 1.17 \qquad \text{Despeje sen } B$$

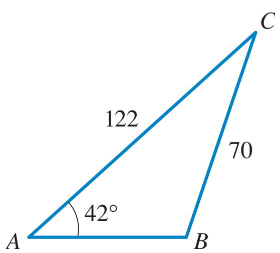


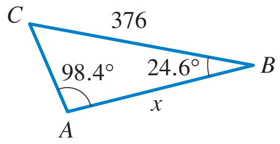
Figura 10

Puesto que el seno de un ángulo nunca es mayor que 1, se concluye que ningún triángulo satisface las condiciones dadas en este problema. ■

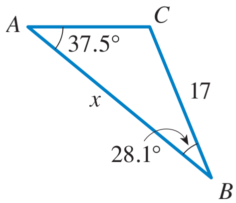
6.4 Ejercicios

1–6 ■ Use la ley de los senos para hallar el lado indicado x o el ángulo θ.

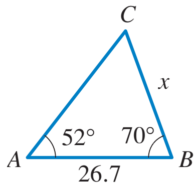
1.



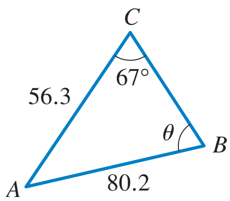
2.



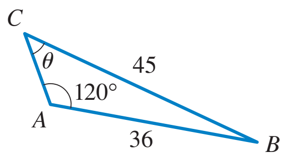
3.



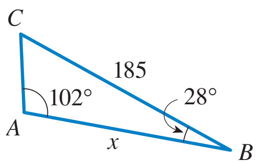
4.



5.

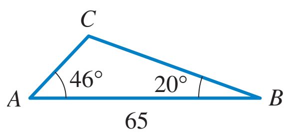


6.

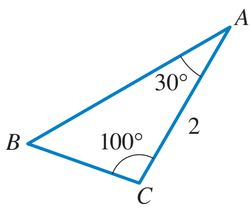


7–10 ■ Resuelva el triángulo por medio de la ley de los senos.

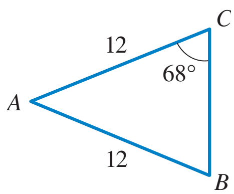
7.



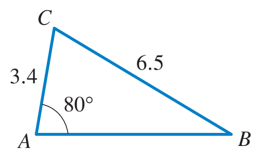
8.



9.



10.



11–16 ■ Bosqueje cada triángulo y después resuélvalo por medio de la ley de los senos.

11. $\angle A = 50°$, $\angle B = 68°$, $c = 230$

12. $\angle A = 23°$, $\angle B = 110°$, $c = 50$

13. $\angle A = 30°$, $\angle C = 65°$, $b = 10$

14. $\angle A = 22°$, $\angle B = 95°$, $a = 420$

15. $\angle B = 29°$, $\angle C = 51°$, $b = 44$

16. $\angle B = 10°$, $\angle C = 100°$, $c = 115$

17–26 ■ Use la ley de los senos para resolver los posibles triángulos que satisfacen las condiciones dadas.

17. $a = 28$, $b = 15$, $\angle A = 110°$

18. $a = 30$, $c = 40$, $\angle A = 37°$

19. $a = 20$, $c = 45$, $\angle A = 125°$

20. $b = 45$, $c = 42$, $\angle C = 38°$

21. $b = 25$, $c = 30$, $\angle B = 25°$

22. $a = 75$, $b = 100$, $\angle A = 30°$

23. $a = 50$, $b = 100$, $\angle A = 50°$

24. $a = 100$, $b = 80$, $\angle A = 135°$

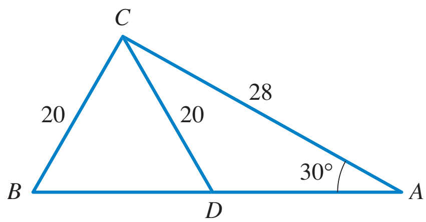
25. $a = 26$, $c = 15$, $\angle C = 29°$

26. $b = 73$, $c = 82$, $\angle B = 58°$

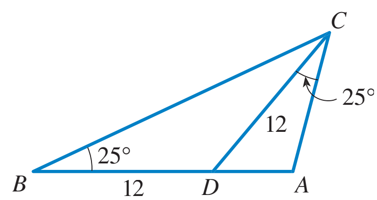
27. Para el triángulo mostrado, hallar

a) $\angle BCD$ y

b) $\angle DCA$.



28. Para el triángulo mostrado, halle la longitud AD.



29. En el triángulo ABC, $\angle A = 40°$, $a = 15$ y $b = 20$.

a) Muestre que hay dos triángulos, ABC y $A'B'C'$, que satisfacen estas condiciones.

b) Muestre que las áreas de los triángulos del inciso a) son proporcionales a los senos de los ángulos C y C', es decir,

$$\frac{\text{área de } \triangle ABC}{\text{área de } \triangle A'B'C'} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } C'}$$

30. Muestre que, dados los tres ángulos A, B, C de un triángulo y un lado, por ejemplo a, el área del triángulo es

$$\text{área} = \frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{2 \text{ sen } A}$$

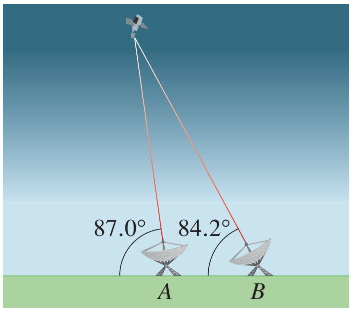
Aplicaciones

31. Rastreo de un satélite La trayectoria de un satélite que orbita la Tierra ocasiona que pase directamente sobre dos estaciones de rastreo A y B separadas 50 millas. Cuando el

satélite está sobre una de las dos estaciones, los ángulos de elevación en A y B son 87.0° y 84.2°, respectivamente.

a) ¿Qué tan lejos está el satélite de la estación A?

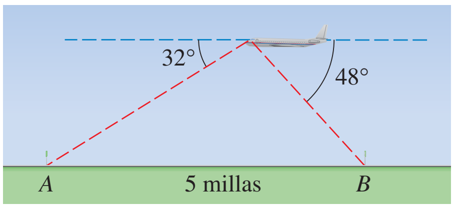
b) ¿A qué altura respecto del suelo está el satélite?



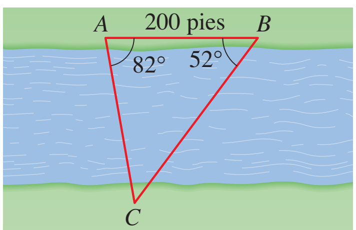
32. Vuelo de un avión Un piloto vuela sobre una carretera recta. Determina los ángulos de depresión hasta dos postes de medición de millaje apartados 5 millas, como 32° y 48°, según se ilustra en la figura.

a) Encuentre la distancia del avión al punto A.

b) Encuentre la elevación del avión.



33. Distancia a través de un río Para hallar la distancia a través de un río, una topógrafa elige los puntos A y B, que están separados 200 pies sobre un lado del río (véase la figura). La topógrafa elige entonces un punto de referencia C sobre el lado opuesto del río y encuentra que $\angle BAC \approx 82°$ y $\angle ABC \approx 52°$. Aproxime la distancia de A a C.

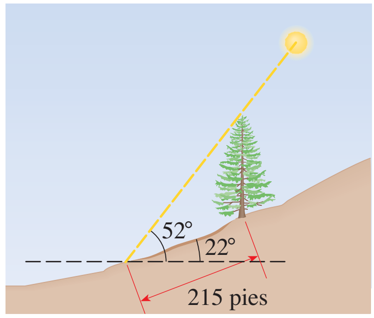


34. Distancia a través de un lago Los puntos A y B están separados por un lago. Para hallar la distancia entre ellos, un topógrafo localiza un punto C sobre el suelo tal que $\angle CAB = 48.6°$. También mide CA como 312 pies y CB como 527 pies. Encuentre la distancia entre A y B.

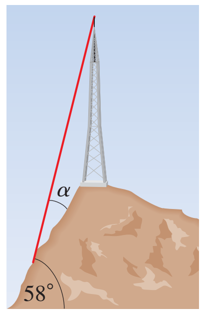
35. La torre inclinada de Pisa El campanario de la catedral en Pisa, Italia, se inclina 5.6° desde la vertical. Una turista se para a 105 m de su base, con la inclinación de la torre directamente hacia ella. Ella mide el ángulo de elevación hasta la parte superior de la torre como 29.2°. Encuentre la longitud de la torre hasta el metro más próximo.

36. Antena de radio Una antena de radio de onda corta está apoyada por dos cables cuyas longitudes son 165 y 180 pies. Cada alambre está fijo a la parte superior de la antena y anclado al suelo, en dos puntos de anclaje en lados opuestos de la antena. El cable más corto forma un ángulo de 67° con el suelo. ¿Qué tan apartados están los puntos de anclaje?

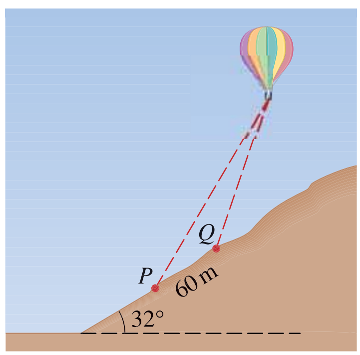
37. Altura de un árbol Un árbol en una ladera proyecta una sombra de 215 pies colina abajo. Si el ángulo de inclinación de la ladera es 22° respecto a la horizontal y el ángulo de elevación del Sol es de 52°, encuentre la altura del árbol.



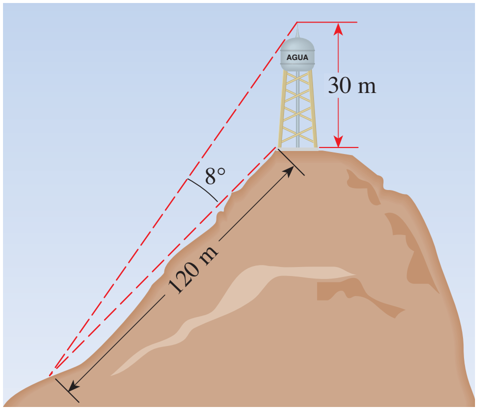
38. Longitud de un cable de sujeción Una torre de comunicaciones se localiza en la cima de una colina elevada, como se ilustra. El ángulo de inclinación de la colina es de 58°. Se fijará un cable de sujeción a la parte superior de la torre y al suelo, 100 m colina abajo de la base de la torre. El ángulo α en la figura se determina como 12°. Encuentre la longitud del cable requerido.



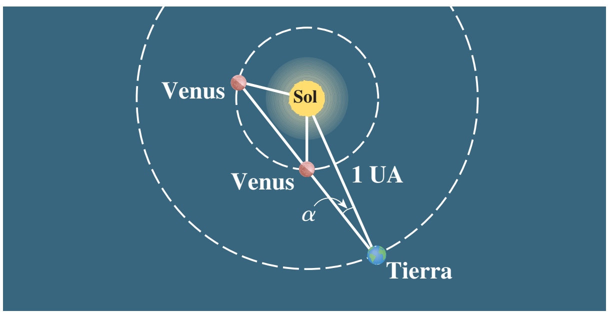
39. Cálculo de una distancia Observadores en P y Q están localizados en el lado de una colina que está inclinada 32° respecto de la horizontal, como se muestra. El observador en P determina el ángulo de elevación hasta un globo de aire caliente como 62°. Al mismo tiempo, el observador en Q mide el ángulo de elevación hasta el globo como 71°. Si P está 60 m colina abajo desde Q, encuentre la distancia de Q al globo.



40. Cálculo de un ángulo Una torre de agua de 30 m de alto se localiza en la cima de una colina. Desde una distancia de 120 m colina abajo, se observa que el ángulo entre la parte superior y la base de la torre es de 8°. Encuentre el ángulo de inclinación de la colina.



41. Distancias a Venus La *elongación* α de un planeta es el ángulo que forman el planeta, la Tierra y el Sol (véase la figura). Se sabe que la distancia del Sol a Venus es de 0.723 UA (véase el ejercicio 65 de la sección 6.2). En cierto momento se encuentra que la elongación de Venus es de 39.4°. Encuentre las distancias posibles de la Tierra a Venus en ese momento en unidades astronómicas (UA).



42. Burbujas de jabón Cuando dos burbujas se adhieren en el aire, su superficie común es parte de una esfera cuyo centro D yace sobre una línea que pasa por los centros de las burbujas (véase la figura). También, los ángulos ACB y ACD miden cada uno 60°.

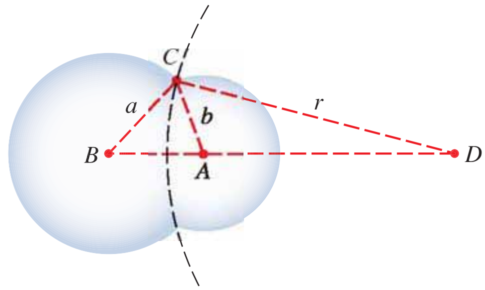
a) Muestre que el radio r de la cara común está dado por

$$r = \frac{ab}{a - b}$$

[*Sugerencia*: use la ley de los senos junto con el hecho de que un ángulo θ y su complemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno.]

b) Encuentre el radio de la cara común si los radios de las burbujas son 4 y 3 cm.

c) ¿Qué forma toma la cara común si las dos burbujas tienen radios iguales?



Descubrimiento • Debate

43. Número de soluciones en el caso ambiguo Se ha visto que al usar la ley de los senos para resolver un triángulo en el caso LLA, puede haber dos soluciones, una o ninguna. Bosqueje triángulos como los de la figura 6 para comprobar los criterios de la tabla para varias soluciones si se tiene $\angle A$ y los lados a y b.

Criterio	Número de soluciones
$a \geq b$	1
$b > a > b \operatorname{sen} A$	2
$a = b \operatorname{sen} A$	1
$a < b \operatorname{sen} A$	0

Si $\angle A = 30°$ y $b = 100$, use estos criterios para hallar el intervalo de valores de a para los cuales el triángulo ABC tiene dos soluciones, una solución o ninguna.

6.5 Ley de los cosenos

La ley de los senos no se puede usar de manera directa para resolver triángulos si se conocen dos lados y el ángulo entre ellos o si se conocen los tres lados (éstos son los casos 3 y 4 de la sección anterior). En estos dos casos, se aplica la **ley de los cosenos.**

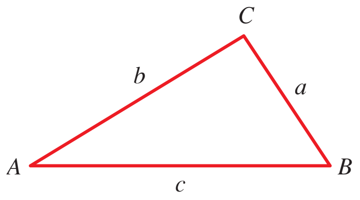


Figura 1

Ley de los cosenos

En cualquier triángulo ABC (véase la figura 1), se tiene

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

■ **Demostración** Para probar la ley de los cosenos, coloque el triángulo ABC de modo que $\angle A$ está en el origen, como se muestra en la figura 2. Las coordenadas de los vértices B y C son $(c, 0)$ y $(b\cos A, b\operatorname{sen} A)$, respectivamente. (Se debe comprobar que las coordenadas de estos puntos serán las mismas si se dibuja el ángulo A como un ángulo agudo.) Con la fórmula de la distancia, se obtiene

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\cos A - c)^2 + (b\operatorname{sen} A - 0)^2 \\ &= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\operatorname{sen}^2 A \\ &= b^2(\cos^2 A + \operatorname{sen}^2 A) - 2bc\cos A + c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \qquad \text{Porque } \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1 \end{aligned}$$

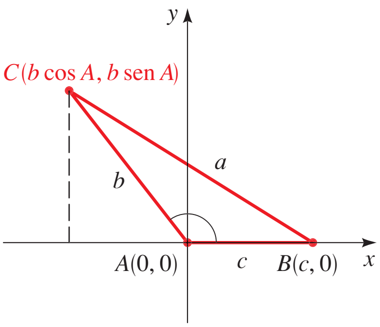


Figura 2

Esto demuestra la primera fórmula. Las otras dos formas se obtienen de la misma manera colocando cada uno de los otros vértices del triángulo en el origen y repitiendo el argumento anterior. ■

En palabras, la ley de los cosenos dice que el cuadrado de cualquier lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos del doble producto de esos dos lados por el coseno del ángulo incluido.

Si uno de los ángulos de un triángulo, por ejemplo $\angle C$, es un ángulo recto, entonces $\cos C = 0$ y la ley de los cosenos se reduce al teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$. Así, el teorema de Pitágoras es un caso especial de la ley de los cosenos.

Ejemplo 1 Longitud de un túnel

Se construirá un túnel por una montaña. Para estimar la longitud del túnel, un topógrafo hace las mediciones mostradas en la figura 3. Use los datos del topógrafo para aproximar la longitud del túnel.

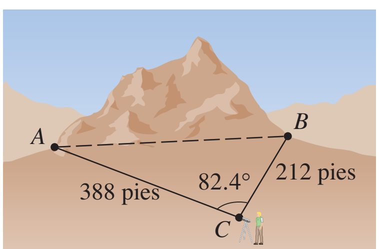


Figura 3

Solución Para aproximar la longitud c del túnel, se usa la ley de los cosenos:

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C && \text{Ley de los cosenos} \\ &= 388^2 + 212^2 - 2(388)(212)\cos 82.4° && \text{Sustituya} \\ &\approx 173730.2367 && \text{Use una calculadora} \\ c &\approx \sqrt{173730.2367} \approx 416.8 && \text{Saque la raíz cuadrada} \end{aligned}$$

Así, el túnel medirá alrededor de 417 pies de largo. ■

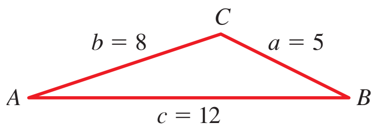


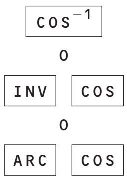
Figura 4

Ejemplo 2 LLL, ley de los cosenos

Los lados de un triángulo son $a = 5$, $b = 8$ y $c = 12$ (véase la figura 4). Encuentre los ángulos del triángulo.

Solución Primero se encuentra $\angle A$. De la ley de los cosenos, se tiene $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$. Al despejar $\cos A$, se obtiene

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 12^2 - 5^2}{2(8)(12)} = \frac{183}{192} = 0.953125$$



Con una calculadora se encuentra que $\angle A \approx 18°$. De la misma forma las ecuaciones

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{5^2 + 12^2 - 8^2}{2(5)(12)} = 0.875$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 8^2 - 12^2}{2(5)(8)} = -0.6875$$

dan $\angle B \approx 29°$ y $\angle C \approx 133°$. Por supuesto, una vez calculados dos ángulos, el tercero se encuentra con más facilidad a partir del hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo es 180°. Sin embargo, es una buena idea calcular los tres ángulos por medio de la ley de los cosenos y sumar los tres ángulos como una comprobación de sus cálculos. ■

Ejemplo 3 LAL, ley de los cosenos

Resuelva el triángulo ABC, donde $\angle A = 46.5°$, $b = 10.5$ y $c = 18.0$.

Solución Se puede encontrar a por medio de la ley de los cosenos.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ &= (10.5)^2 + (18.0)^2 - 2(10.5)(18.0)(\cos 46.5°) \approx 174.05 \end{aligned}$$

Así, $a \approx \sqrt{174.05} \approx 13.2$. La ley de los cosenos se usa también para hallar $\angle B$ y $\angle C$, como en el ejemplo 2.

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{13.2^2 + 18.0^2 - 10.5^2}{2(13.2)(18.0)} \approx 0.816477$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{13.2^2 + 10.5^2 - 18.0^2}{2(13.2)(10.5)} \approx -0.142532$$

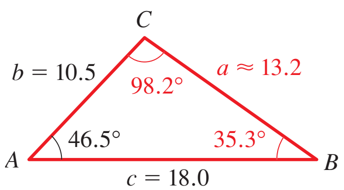


Figura 5

Con una calculadora se encuentra que $\angle B \approx 35.3°$ y $\angle C \approx 98.2°$.

Para resumir: $\angle B \approx 35.3°$, $\angle C \approx 98.2°$ y $a \approx 13.2$. (Véase la figura 5.) ■

Se podría haber usado la ley de los senos para hallar $\angle B$ y $\angle C$ en el ejemplo 3, puesto que se conocen los tres lados y un ángulo del triángulo. Pero se sabe que el seno de un ángulo no especifica de manera única al ángulo, puesto que un ángulo θ y su complemento $180° - \theta$ tienen el mismo seno. Así que sería necesario decidir cuál de los dos ángulos es la elección correcta. Esta ambigüedad no surge cuando se usa la ley de los cosenos, porque todo ángulo entre 0° y 180° tiene un coseno único. Por lo tanto, usar sólo la ley de los cosenos es preferible en los problemas como el ejemplo 3.

Navegación: dirección y rumbo

En navegación una dirección con frecuencia se da como un **rumbo**, es decir, como un ángulo agudo medido a partir del norte o del sur. El rumbo N 30° E, por ejemplo, indica una dirección que apunta 30° al este del norte (véase la figura 6).

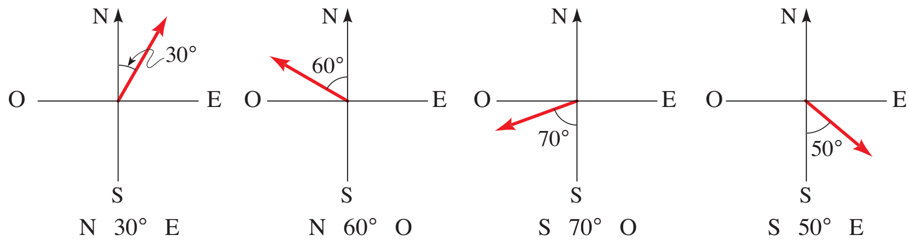


Figura 6

Ejemplo 4 Navegación

Un piloto parte de un aeropuerto y se dirige en dirección N 20° E, volando a 200 millas/h. Después de una hora, hace una corrección de curso y se dirige en la dirección N 40° E. Media hora después, un problema en el motor lo obliga a hacer un aterrizaje de emergencia.

a) Encuentre la distancia entre el aeropuerto y su punto de aterrizaje final.

b) Encuentre el rumbo desde el aeropuerto hasta su punto final de aterrizaje.

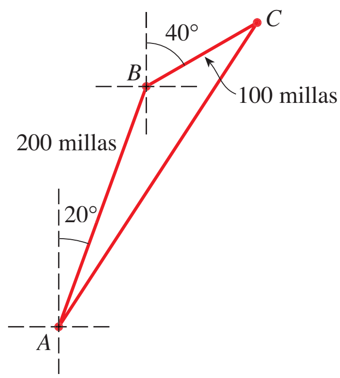


Figura 7

Solución

a) En una hora el avión viaja 200 millas y en media hora viaja 100 millas, de modo que se puede graficar el curso del piloto como en la figura 7. Cuando hace su corrección de curso, vira 20° a la derecha, así que el ángulo entre los dos tramos de su viaje es $180° - 20° = 160°$. Así que por la ley de los cosenos se tiene

$$\begin{aligned} b^2 &= 200^2 + 100^2 - 2 \cdot 200 \cdot 100 \cos 160° \\ &\approx 87\,587.70 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \approx 295.95$. El piloto aterriza a unas 296 millas de su punto de partida.

b) Primero se usa la ley de los senos para hallar $\angle A$.

$$\frac{\operatorname{sen} A}{100} = \frac{\operatorname{sen} 160°}{295.95}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= 100 \cdot \frac{\operatorname{sen} 160°}{295.95} \\ &\approx 0.11557 \end{aligned}$$

Si se usa la tecla SEN^{-1} de una calculadora, se encuentra que $\angle A \approx 6.636°$. De la figura 7 se puede observar que la línea del aeropuerto al sitio de aterrizaje final apunta en la dirección $20° + 6.636° = 26.636°$ al este del norte. Por lo tanto, el rumbo es aproximadamente N 26.6° E. ■

Otro ángulo con sen 0.11557 es $180° - 6.636° = 173.364°$. Pero es evidente que es demasiado grande para que $\angle A$ esté en $\angle ABC$.

Área de un triángulo

Una explicación interesante de la ley de los cosenos tiene que ver con una fórmula para hallar el área de un triángulo a partir de las longitudes de sus tres lados (véase la figura 8).

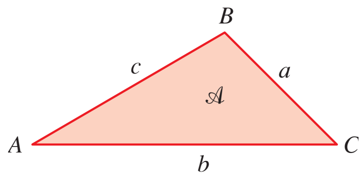


Figura 8

Fórmula de Herón

El área $\mathscr{A}$ de un triángulo ABC está dada por

$$\mathscr{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ es el **semiperímetro** del triángulo; es decir, s es la mitad del perímetro.

■ **Demostración** Se inicia con la fórmula $\mathscr{A} = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$ de la sección 6.3. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \operatorname{sen}^2 C \\ &= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos^2 C) && \text{Identidad pitagórica} \\ &= \tfrac{1}{4}a^2b^2(1 - \cos C)(1 + \cos C) && \text{Factorice} \end{aligned}$$

A continuación, se escriben las expresiones $1 - \cos C$ y $1 + \cos C$ en términos de a, b y c. Por la ley de los cosenos, se tiene

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Ley de los cosenos} \\ 1 + \cos C &= 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Sume 1} \\ &= \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} && \text{Común denominador} \\ &= \frac{(a + b)^2 - c^2}{2ab} && \text{Factorice} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} && \text{Diferencia de cuadrados} \end{aligned}$$

De manera similar,

$$1 - \cos C = \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab}$$

Al sustituir estas expresiones en la fórmula obtenida para $\mathscr{A}^2$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathscr{A}^2 &= \tfrac{1}{4}a^2b^2 \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab} \frac{(c + a - b)(c - a + b)}{2ab} \\ &= \frac{(a + b + c)}{2} \frac{(a + b - c)}{2} \frac{(c + a - b)}{2} \frac{(c - a + b)}{2} \\ &= s(s - c)(s - b)(s - a) \end{aligned}$$

Para ver que los factores en los dos últimos productos son iguales, observe por ejemplo que

$$\begin{aligned} \frac{a + b - c}{2} &= \frac{a + b + c}{2} - c \\ &= s - c \end{aligned}$$

La fórmula de Herón ahora se deduce al sacar raíz cuadrada en cada miembro. ■

Figura 9

Ejemplo 5 Área de un lote

Un hombre de negocios desea comprar un lote triangular en un transitado lugar de la ciudad (véase la figura 9). Los frentes del lote en las tres calles adyacentes son 125, 280 y 315 pies. Encuentre el área del lote.

Solución El semiperímetro del lote es

$$s = \frac{125 + 280 + 315}{2} = 360$$

Por la fórmula de Heron el área es

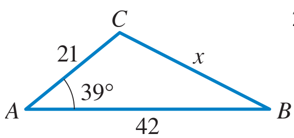
$$\mathscr{A} = \sqrt{360(360 - 125)(360 - 280)(360 - 315)} \approx 17\,451.6$$

Así, el área es aproximadamente 17 452 pies^2. ■

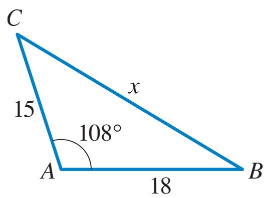
6.5 Ejercicios

1–8 ■ Use la ley de los cosenos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ.

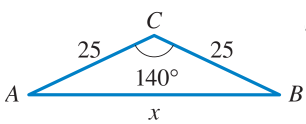
1.



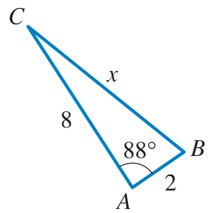
2.



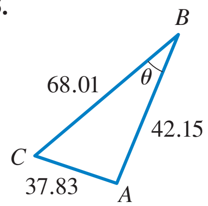
3.



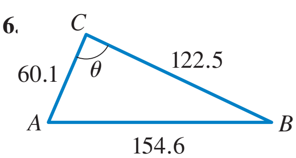
4.



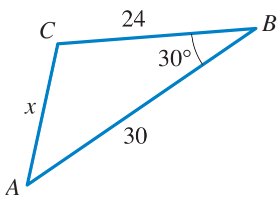
5.



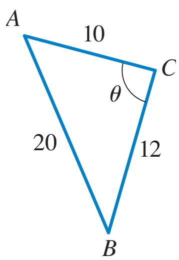
6.



7.

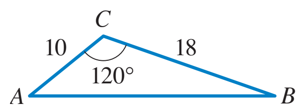


8.

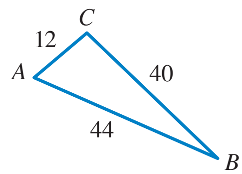


9–18 ■ Resuelva el triángulo ABC.

9.



10.



11. $a = 3.0, \quad b = 4.0, \quad \angle C = 53°$

12. $b = 60, \quad c = 30, \quad \angle A = 70°$

13. $a = 20, \quad b = 25, \quad c = 22$

14. $a = 10, \quad b = 12, \quad c = 16$

15. $b = 125, \quad c = 162, \quad \angle B = 40°$

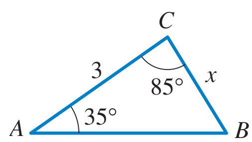
16. $a = 65, \quad c = 50, \quad \angle C = 52°$

17. $a = 50, \quad b = 65, \quad \angle A = 55°$

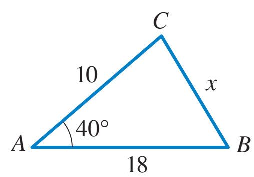
18. $a = 73.5, \quad \angle B = 61°, \quad \angle C = 83°$

19–26 ■ Encuentre el lado indicado x o el ángulo θ. (Use la ley de los senos o la ley de los cosenos, según convenga.)

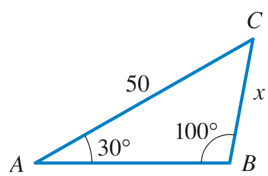
19.



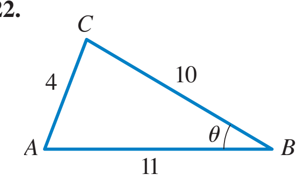
20.



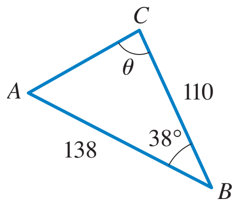
21.



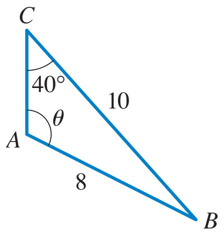
22.



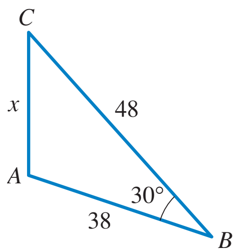
23.



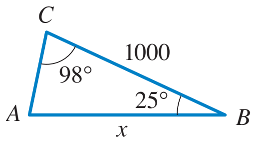
24.



25.



26.



27–30 ■ Encuentre el área del triángulo cuyos lados tiene las longitudes dadas.

27. $a = 9, \quad b = 12, \quad c = 15$

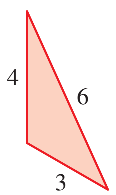
28. $a = 1, \quad b = 2, \quad c = 2$

29. $a = 7, \quad b = 8, \quad c = 9$

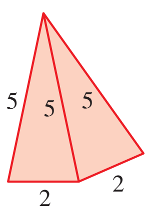
30. $a = 11, \quad b = 100, \quad c = 101$

31–34 ■ Encuentre el área de la figura sombreada, correcta hasta dos decimales.

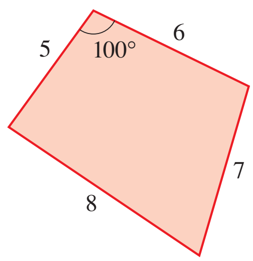
31.



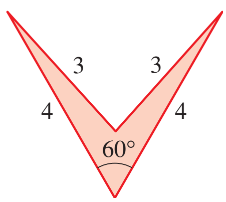
32.



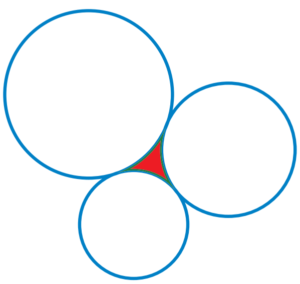
33.



34.



35. Tres círculos de radios 4, 5 y 6 cm son mutuamente tangentes. Encuentre el área sombreada encerrada entre los tres círculos.



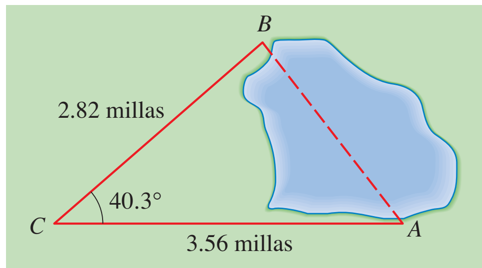
36. Pruebe que en el triángulo ABC

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a\cos B + b\cos A$$

Éstas se llaman *leyes de proyección*. [*Sugerencia*: para obtener la primera ecuación, sume las ecuaciones segunda y tercera en la ley de los cosenos y despeje a.]

Aplicaciones

37. Agrimensura Para hallar la distancia a través de un pequeño lago, un agrimensor ha tomado las mediciones mostradas. Encuentre la distancia a través de un lago por medio de esta información.



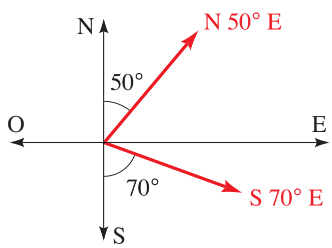
38. Geometría Un paralelogramo tiene lados de longitudes 3 y 5, y un ángulo es 50°. Encuentre las longitudes de las diagonales.

39. Cálculo de una distancia Dos carreteras rectas divergen en un ángulo de 65°. Dos automóviles salen de la intersección a las 2:00 P.M., uno viaja a 50 millas/h y el otro a 30 millas/h. ¿Qué tan apartados están los automóviles a las 2:30 P.M.?

40. Cálculo de una distancia Un automóvil viaja a lo largo de una carretera, con rumbo este durante 1 h, luego viaja durante 30 minutos en otra carretera que se dirige al noreste. Si el automóvil ha mantenido una velocidad constante de 40 millas/h, ¿qué tan lejos está de su posición de partida?

41. Estimación Un piloto vuela en una trayectoria recta durante 1 h 30 minutos. Después hace una corrección de curso, en dirección 10° a la derecha de su curso original y vuela 2 h en la nueva dirección. Si mantiene una velocidad constante de 625 millas/h, ¿qué tan lejos está de su punto de partida?

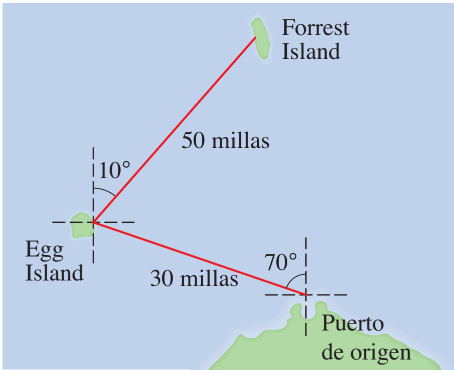
42. Navegación Dos botes salen del mismo puerto a la misma hora. Uno viaja a una velocidad de 30 millas/h en la dirección N 50° E y el otro viaja a una velocidad de 26 millas/h en una dirección S 70° E (véase la figura). ¿Qué tan apartados están los botes después de una hora?



43. Navegación Un pescador sale de su puerto de origen y se dirige en la dirección N 70° O. Viaja 30 minutos y llega a Egg Island. El siguiente día navega en dirección N 10° E durante 50 millas y llega a Forrest Island.

a) Encuentre la distancia entre el puerto de origen del pescador y Forrest Island.

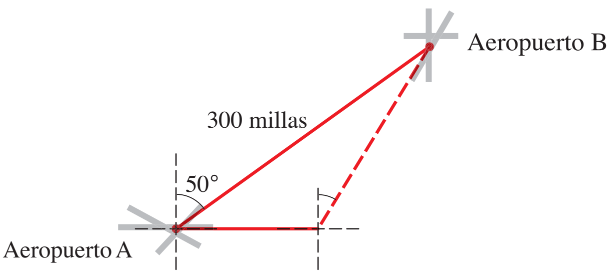
b) Encuentre el rumbo desde Forrest Island de regreso a su puerto de origen.



44. Navegación El aeropuerto B está a 300 millas del aeropuerto A a un rumbo N 50° E (véase la figura). Un piloto que desea volar de A a B vuela erróneamente al este a 200 millas/h durante 30 minutos, cuando nota su error.

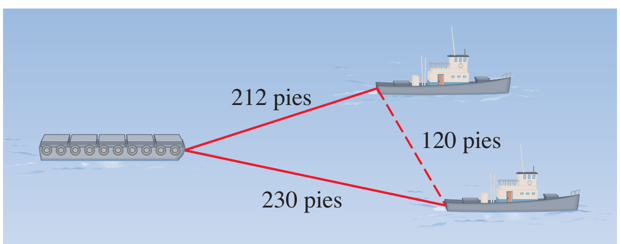
a) ¿Qué tan lejos está el piloto de su destino al momento de notar su error?

b) ¿En qué rumbo debe dirigir su avión a fin de llegar al aeropuerto B?

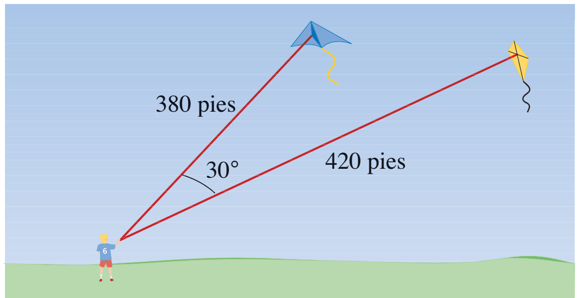


45. Campo triangular Un campo triangular tiene lados de longitudes 22, 36 y 44 yardas. Encuentre el ángulo más grande.

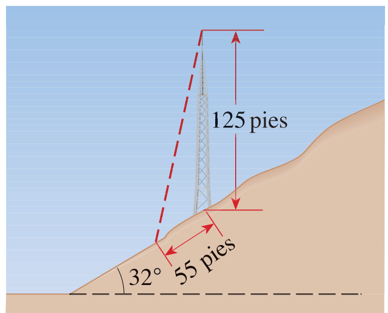
46. Remolque de una barcaza Dos remolcadores separados 120 pies jalan una barcaza, según se ilustra. Si la longitud de un cable es 212 pies y la longitud del otro es 230 pies, encuentre el ángulo formado por los dos cables.



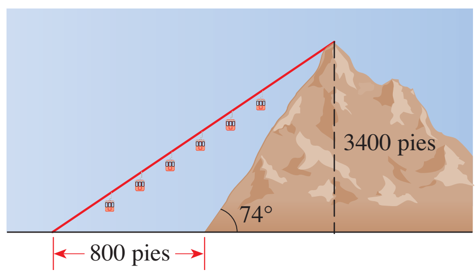
47. Papalotes (cometas) Un niño vuela dos cometas al mismo tiempo. Tiene 380 pies de línea hasta una cometa y 420 pies hasta la otra. El niño estima el ángulo entre las dos líneas como 30°. Aproxime la distancia entre las dos cometas.



48. Aseguramiento de una torre Una torre de 125 pies se localiza en la ladera de una montaña que tiene una inclinación de 32° respecto de la horizontal. Se fijará un alambre de sujeción a la parte superior de la torre y se anclará en un punto 55 pies colina abajo de la base de la torre. Encuentre la longitud más corta de alambre necesario.

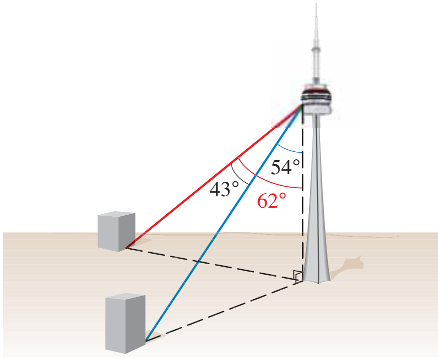


49. Teleférico Una montaña pronunciada tiene una inclinación de 74° respecto de la horizontal y se eleva 3400 pies sobre la llanura circundante. Se va a instalar un teleférico desde un punto a 800 pies de la base hasta la cima de la montaña, como se ilustra. Encuentre la longitud más corta del cable necesario.



50. Torre CN La torre CN en Toronto, Canadá, es la estructura independiente más alta del mundo. Una mujer sobre la plataforma de observación, 1150 pies sobre el suelo, quiere determinar la distancia entre dos señales sobre el suelo. Ella observa que el ángulo que forman las líneas de visión hasta estas dos señales es de 43°. También observa que el ángulo entre la vertical y la línea de visión hasta una de las señales

es de 62° y hasta la otra señal es de 54°. Encuentre la distancia entre las dos señales.



51. Valor del terreno La tierra en el centro de Columbia está valuada en 20 dólares un pie cuadrado. ¿Cuál es el valor de un lote triangular con lados de longitudes 112, 148 y 190 pies?

Descubrimiento • Debate

52. Determinación de los ángulos de un triángulo El párrafo que sigue a la solución del ejemplo 3 en la página 510 explica un método alternativo para hallar $\angle B$ y $\angle C$, por medio de las leyes de los senos. Use este método para resolver el triángulo del ejemplo. Encuentre primero $\angle B$ y luego $\angle C$. Explique cómo elige el valor apropiado para la medida de $\angle B$. ¿Cuál método prefiere para resolver un problema de triángulo LAL, el que se explicó en el ejemplo 3 o el que usó en este ejercicio?

6 Repaso

Revisión de conceptos

1. a) Explique la diferencia entre un ángulo positivo y un ángulo negativo.

b) ¿Cómo se forma un ángulo de medida 1 grado?

c) ¿Cómo se forma un ángulo de medida 1 radián?

d) ¿Cómo se define la medida radián de un ángulo θ?

e) ¿Cómo convierte de grados a radianes?

f) ¿Cómo convierte de radianes a grados?

2. a) ¿Cuándo un ángulo está en posición estándar?

b) ¿Cuándo dos ángulos son coterminales?

3. a) ¿Cuál es la longitud s de un arco de un círculo con radio r que subtiende un ángulo central de θ radianes?

b) ¿Cuál es el área A de un sector de un círculo con radio r y ángulo central θ radianes?

4. Si θ es un ángulo agudo en un triángulo rectángulo, defina las seis relaciones trigonométricas en términos de los catetos adyacente y opuesto y la hipotenusa.

5. ¿Qué significa resolver un triángulo?

6. Si θ es un ángulo en posición estándar, $P(x, y)$ es un punto en el lado terminal y r es la distancia del origen a P, escriba expresiones para las seis funciones trigonométricas de θ.

7. ¿Cuáles funciones trigonométricas son positivas en los cuadrantes I, II, III y IV?

8. Si θ es un ángulo en posición estándar, ¿cuál es su ángulo de referencia $\bar{\theta}$?

9. a) Exprese las identidades recíprocas.

b) Exprese las identidades pitagóricas.

10. a) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a y b y con ángulo incluido θ?

b) ¿Cuál es el área de un triángulo con lados de longitud a, b y c?

11. a) Exprese la ley de los senos.

b) Exprese la ley de los cosenos.

12. Explique el caso ambiguo en la ley de los senos.

Ejercicios

1–2 ■ Encuentre la medida en radianes que corresponda a la medida en grados dada.

1. a) 60° **b)** 330° **c)** −135° **d)** −90°

2. a) 24° **b)** −330° **c)** 750° **d)** 5°

3–4 ■ Encuentre la medida en grados que corresponda a la medida en radianes dada.

3. a) $\dfrac{5\pi}{2}$ **b)** $-\dfrac{\pi}{6}$ **c)** $\dfrac{9\pi}{4}$ **d)** 3.1

4. **a)** 8 **b)** $-\frac{5}{2}$ **c)** $\frac{11\pi}{6}$ **d)** $\frac{3\pi}{5}$

5. Encuentre la longitud de un arco de un círculo de radio 8 m si el arco subtiende un ángulo central de 1 rad.

6. Determine la medida del ángulo central θ en un círculo de radio 5 pies si el ángulo es subtendido por un arco de longitud 7 pies.

7. Un arco circular de longitud 100 pies subtiende un ángulo central de 70°. Encuentre el radio del círculo.

8. ¿Cuántas revoluciones dará una rueda de automóvil de diámetro 28 pulgadas en un periodo de media hora si el automóvil viaja a 60 millas/h?

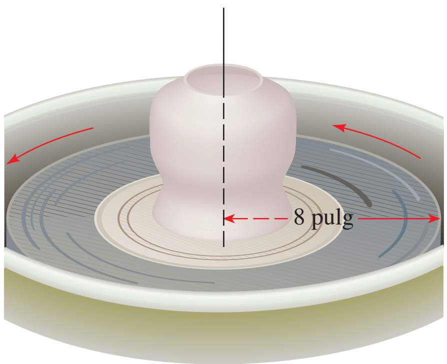
9. Nueva York y Los Ángeles están separadas 2450 millas. Encuentre el ángulo que subtiende el arco entre estas dos ciudades en el centro de la Tierra. (El radio de la Tierra es de 3960 millas.)

10. Encuentre el área de un sector con ángulo central de 2 radianes en un círculo de radio 5 m.

11. Encuentre el área de un sector con ángulo central de 52° radianes en un círculo de radio de 200 pies.

12. Un sector en un círculo de radio 25 pies tiene un área de 125 pies^2. Encuentre el ángulo central del sector.

13. Un torno de alfarero con radio de 8 pulgadas gira a 150 rpm. Encuentre las velocidades angular y lineal de un punto en el borde de la rueda.



14. En una transmisión de automóvil una relación de engranaje g es la relación

$$g = \frac{\text{velocidad angular del motor}}{\text{velocidad angular de las ruedas}}$$

La velocidad angular del motor se muestra en el tacómetro (en rpm).

Cierto automóvil deportivo tiene ruedas con radio de 11 pulg. Sus relaciones de engranaje se muestran en la siguiente tabla. Suponga que el automóvil está en cuarta y que el tacómetro marca 3500 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del motor.

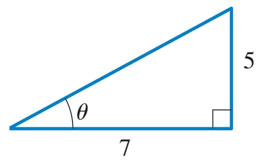
b) Encuentre la velocidad angular de las ruedas.

c) ¿A qué velocidad se desplaza el automóvil (en millas/h)?

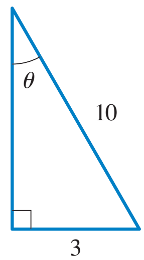
Velocidad	Relación
1a.	4.1
2a.	3.0
3a.	1.6
4a.	0.9
5a.	0.7

15–16 ■ Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas de θ.

15.

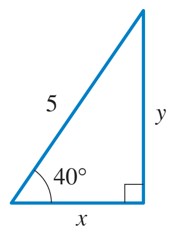


16.

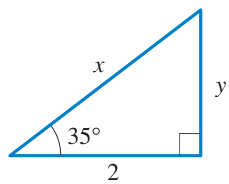


17–20 ■ Encuentre los lados marcados con x y y, correctos hasta dos decimales.

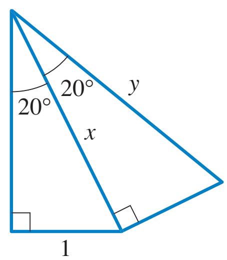
17.



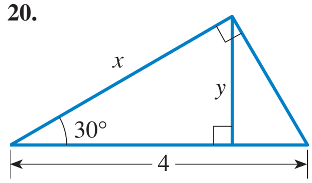
18.



19.

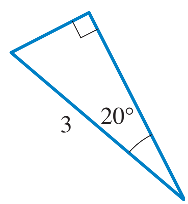


20.

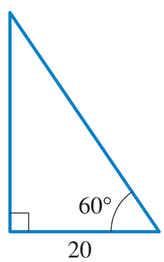


21–22 ■ Resuelva el triángulo.

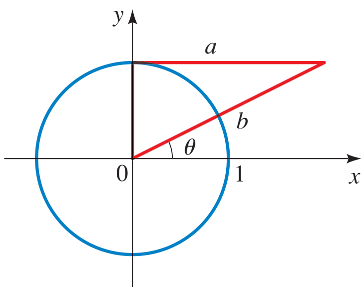
21.



22.



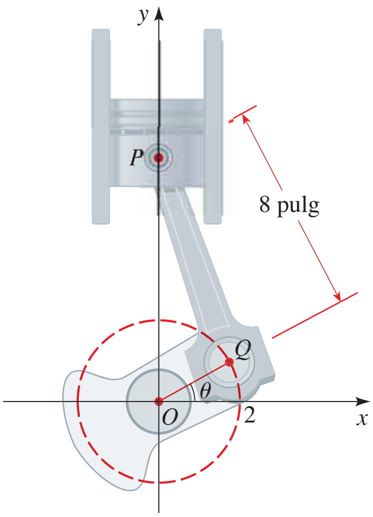
23. Exprese las longitudes a y b de la figura en términos de las relaciones trigonométricas de θ.



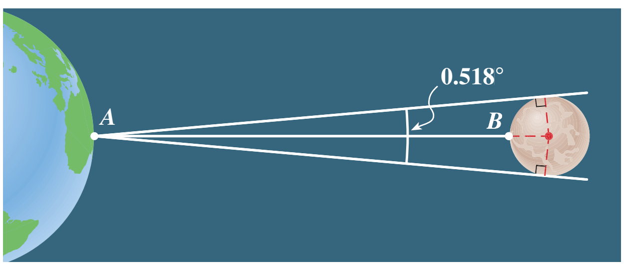
24. La torre autónoma más alta del mundo es la de CN en Toronto, Canadá. A una distancia de 1 km de su base, el ángulo de elevación hasta la parte superior de la torre es 28.81°. Encuentre la altura de la torre.

25. Encuentre el perímetro de un hexágono regular que está inscrito en un círculo de radio 8 m.

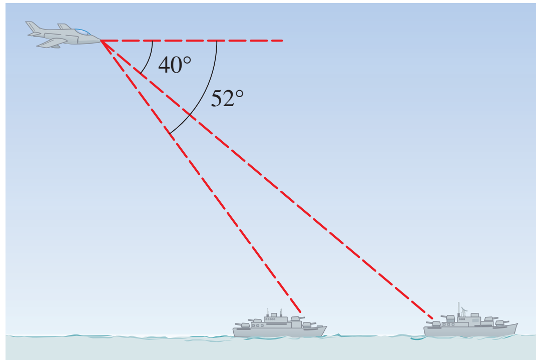
26. Los pistones de un motor de automóvil suben y bajan en forma repetida para hacer girar el cigüeñal, como se muestra. Encuentre la altura del punto P arriba del centro O del cigüeñal en términos del ángulo θ.



27. Visto desde la Tierra, el ángulo subtendido por la luna llena es 0.518°. Use esta información y el hecho de que la distancia AB de la Tierra a la Luna es de 236 900 millas para determinar el radio de la Luna.



28. Un piloto mide los ángulos de depresión hasta dos barcos como 40° y 52° (véase la figura). Si el piloto vuela a una altura de 35 000 pies, encuentre la distancia entre los dos barcos.



29–40 ■ Encuentre el valor exacto.

29. sen 315°

30. $\csc \dfrac{9\pi}{4}$

31. $\tan(-135°)$

32. $\cos \dfrac{5\pi}{6}$

33. $\cot\left(-\dfrac{22\pi}{3}\right)$

34. sen 405°

35. $\cos 585°$

36. $\sec \dfrac{22\pi}{3}$

37. $\csc \dfrac{8\pi}{3}$

38. $\sec \dfrac{13\pi}{6}$

39. $\cot(-390°)$

40. $\tan \dfrac{23\pi}{4}$

41. Encuentre los valores de las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar si el punto $(-5, 12)$ está sobre el lado terminal de θ.

42. Encuentre sen θ si θ está en posición estándar y su lado terminal interseca el círculo de radio 1 centrado en el origen en el punto $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$.

43. Encuentre el ángulo agudo formado por la línea $y - \sqrt{3}x + 1 = 0$ y el eje x.

44. Encuentre las seis relaciones trigonométricas del ángulo θ en posición estándar si su lado terminal está en el cuadrante III y es paralelo a la línea $4y - 2x - 1 = 0$.

45–48 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda para θ en el cuadrante dado.

45. $\tan \theta$, $\cos \theta$; θ en el cuadrante II

46. $\sec \theta$, sen θ; θ en el cuadrante III

47. $\tan^2\theta$, sen θ; θ en cualquier cuadrante

48. $\csc^2\theta \cos^2\theta$, sen θ; θ en cualquier cuadrante

49–52 ■ Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas de θ a partir de la información dada.

49. $\tan\theta = \sqrt{7}/3, \quad \sec\theta = \frac{4}{3}$ **50.** $\sec\theta = \frac{41}{40}, \quad \csc\theta = -\frac{41}{9}$

51. $\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{5}, \quad \cos\theta < 0$ **52.** $\sec\theta = -\frac{13}{5}, \quad \tan\theta > 0$

53. Si $\tan\theta = -\frac{1}{2}$ para θ en el cuadrante II, encuentre $\operatorname{sen}\theta + \cos\theta$.

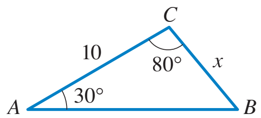
54. Si $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ para θ en el cuadrante I, encuentre $\tan\theta + \sec\theta$.

55. Si $\tan\theta = -1$, encuentre $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta$.

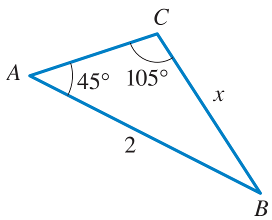
56. Si $\cos\theta = -\sqrt{3}/2$ y $\pi/2 < \theta < \pi$, encuentre $\operatorname{sen} 2\theta$.

57–62 ■ Encuentre el lado marcado con x.

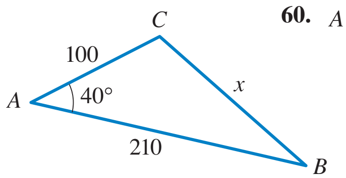
57.



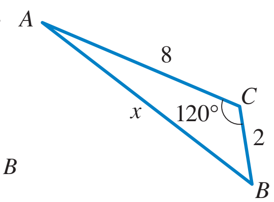
58.



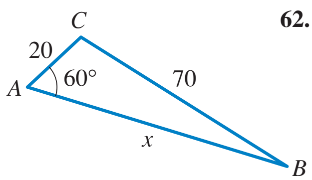
59.



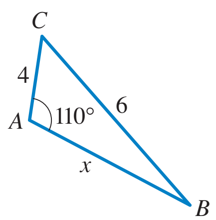
60.



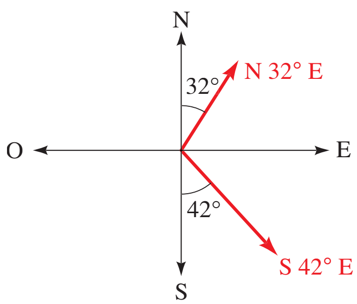
61.



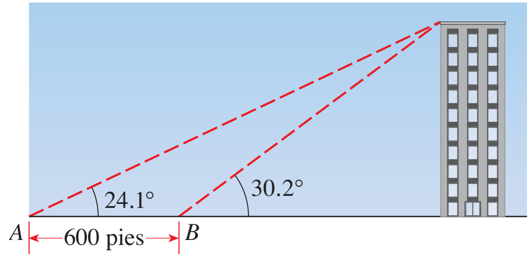
62.



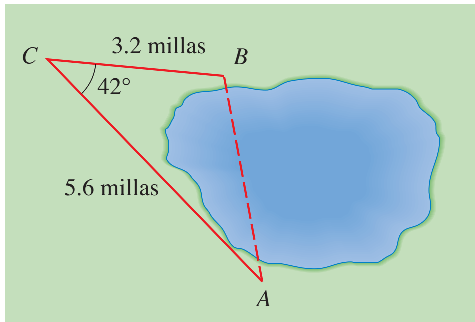
63. Dos naves salen de un puerto al mismo tiempo. Una viaja a 20 millas/h en dirección N 32° E y la otra viaja a 28 millas/h en dirección S 42° E (véase la figura). ¿Qué tan apartadas están las dos naves después de dos horas?



64. De un punto A sobre el suelo, el ángulo de elevación hasta la parte superior de un edificio alto es 24.1°. Desde el punto B, que está 600 pies más cerca del edificio, el ángulo de elevación se mide como 30.2°. Encuentre la altura del edificio.

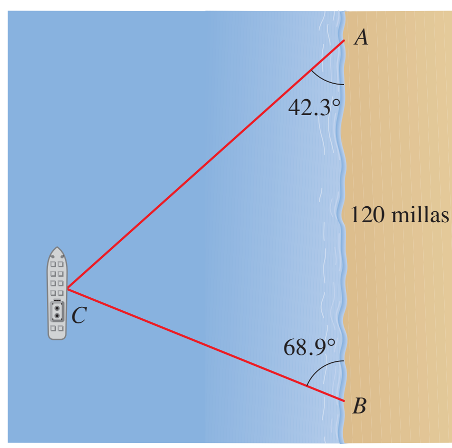


65. Encuentre la distancia entre los puntos A y B en lados opuestos de un lago a partir de la información mostrada.



66. Un bote que cruza el océano pasa cerca de una costa recta. Los puntos A y B están apartados 120 millas en la costa, como se ilustra. Se encuentra que $\angle A = 42.3°$ y $\angle B = 68.9°$. Encuentre la distancia más corta del bote a la costa.

Costa



67. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 8 y 14 y ángulo incluido de 35°.

68. Encuentre el área de un triángulo con lados de longitud 5, 6 y 8.

6 Evaluación

1. Encuentre la medida en radianes que corresponda a las medidas en grados 330° y $-135°$.

2. Encuentre las medidas en grados que correspondan a las medidas en radianes $\frac{4\pi}{3}$ y -1.3.

3. Las aspas del rotor de un helicóptero son 16 pies de largo y giran a 120 rpm.

a) Encuentre la velocidad angular del rotor.

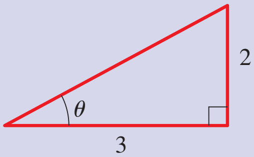
b) Encuentre la velocidad lineal de un punto en la punta del aspa.

4. Encuentre el valor exacto de cada una de las siguientes expresiones.

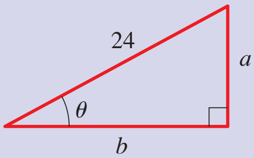
a) $\operatorname{sen} 405°$ b) $\tan(-150°)$

c) $\sec \frac{5\pi}{3}$ d) $\csc \frac{5\pi}{2}$

5. Encuentre $\tan \theta + \operatorname{sen} \theta$ para el ángulo θ mostrado.



6. Exprese las longitudes a y b mostradas en la figura en términos de θ.

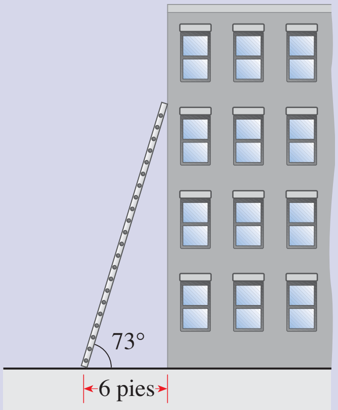


7. Si $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ y θ está en el cuadrante III, encuentre $\tan \theta \cot \theta + \csc \theta$.

8. Si $\operatorname{sen} \theta = \frac{5}{13}$ y $\tan \theta = -\frac{5}{12}$, encuentre $\sec \theta$.

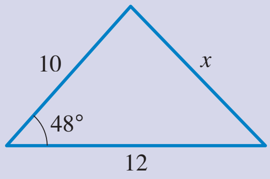
9. Exprese $\tan \theta$ en términos de $\sec \theta$ para θ en el cuadrante II.

10. La base de la escalera de la figura está a 6 pies del edificio, y el ángulo formado por la escalera y el suelo es 73°. ¿A qué altura del edificio llega la escalera?

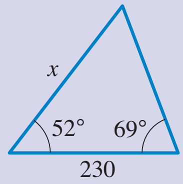


11–14 ■ Encuentre el lado marcado con x.

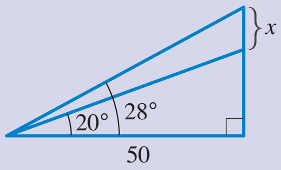
11.



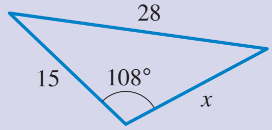
12.



13.



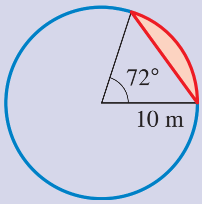
14.



15. Refiérase a la figura de abajo.

a) Encuentre el área de la región sombreada.

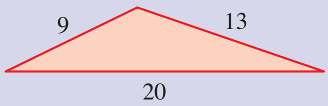
b) Encuentre el perímetro de la región sombreada.



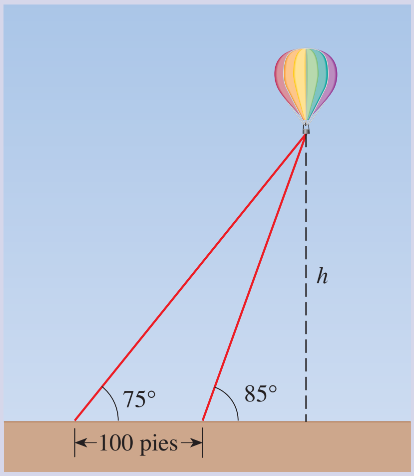
16. Refiérase a la figura siguiente.

a) Encuentre el ángulo opuesto al lado más largo.

b) Encuentre el área del triángulo.



17. Dos cables sujetan a un globo al suelo, como se ilustra. ¿A qué altura sobre el suelo está el globo?



Enfoque en el modelado

Agrimensura

¿Cómo se puede medir la altura de una montaña, o la distancia a través de un lago? Es evidente que podría ser difícil, inconveniente o imposible medir estas distancias de manera directa (es decir, por medio de una cinta o una vara). Por otro lado, es fácil medir *ángulos* hasta objetos distantes. Ahí es donde entra la trigonometría: las relaciones trigonométricas relacionan ángulos con distancias, de modo que se pueden usar para *calcular* distancias a partir de ángulos *medidos*. En este *Enfoque*, se examina cómo se usa la trigonometría para trazar el mapa de una ciudad. Los métodos modernos para la elaboración de mapas emplean satélites y el Sistema de Posicionamiento Global, pero las matemáticas siguen siendo el núcleo del proceso.

Mapeo de una ciudad

Un estudiante quiere trazar el mapa de su ciudad. Para construir un mapa exacto (o modelo a escala), necesita hallar las distancias entre varias señales de la ciudad. El estudiante hace las mediciones mostradas en la figura 1. Observe que sólo se mide una distancia, entre el ayuntamiento y el primer puente. Las otras mediciones son ángulos.

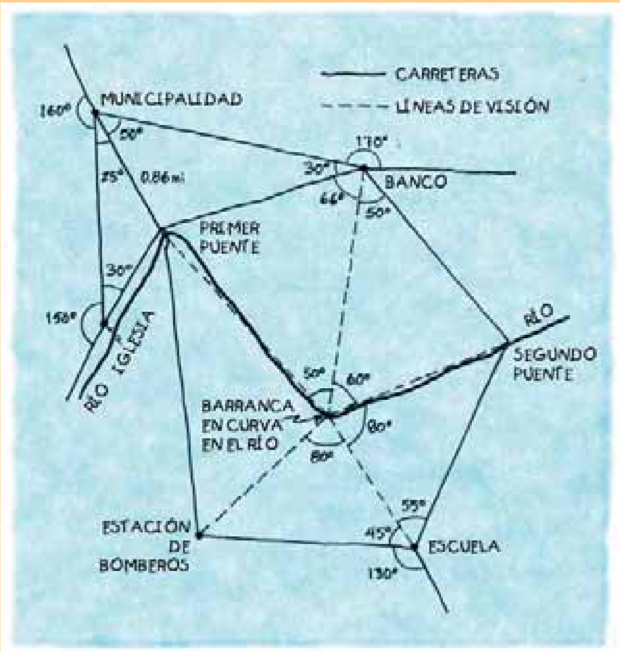


Figura 1

Las distancias entre otras señales ahora se pueden encontrar por medio de la ley de los senos para el triángulo con vértices en la municipalidad, el banco y el primer puente:

$$\frac{x}{\text{sen } 50°} = \frac{0.86}{\text{sen } 30°} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$x = \frac{0.86 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 30°} \qquad \text{Despeje } x$$

$$\approx 1.32 \text{ millas} \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

Por lo tanto la distancia entre el banco y el primer puente es 1.32 millas.

La distancia hallada ahora se puede usar para encontrar las otras distancias. Por ejemplo, se encuentra la distancia y entre el banco y el barranco como sigue:

$$\frac{y}{\text{sen } 64°} = \frac{1.32}{\text{sen } 50°} \qquad \text{Ley de los senos}$$

$$y = \frac{1.32 \text{ sen } 64°}{\text{sen } 50°} \qquad \text{Despeje } y$$

$$\approx 1.55 \text{ millas} \qquad \text{Resultado de la calculadora}$$

Continuando de este modo, se pueden calcular todas las distancias entre las señales mostradas en el bosquejo aproximado de la figura 1. Se puede usar esta información para trazar el mapa mostrado en la figura 2.

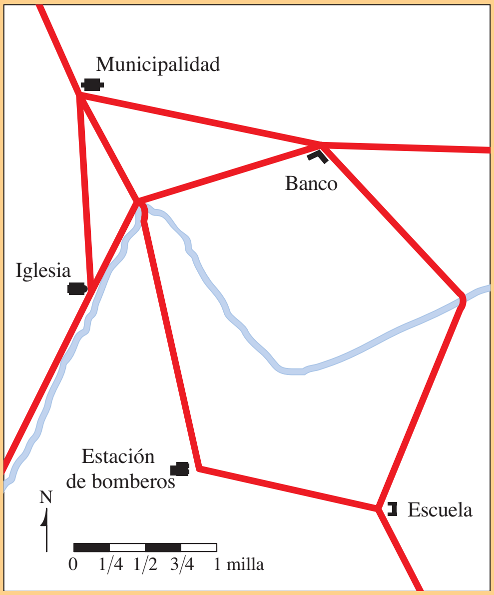


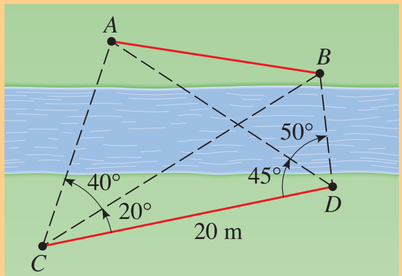
Figura 2

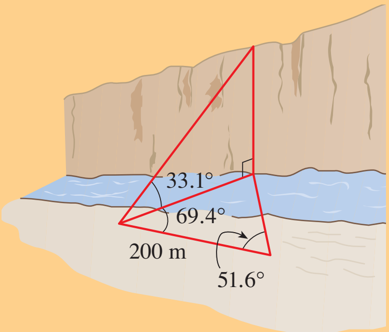
Para elaborar un mapa topográfico, se necesita medir la elevación. Este concepto se explora en los problemas 4-6.

Problemas

1. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la iglesia y la municipalidad.
2. **Completar el mapa** Encuentre la distancia entre la municipalidad y la escuela. (Necesitará hallar primero las otras distancias.)

3. Determinar una distancia Una topógrafa en un lado de un río desea hallar la distancia entre los puntos A y B en el lado opuesto del río. De su lado, elige los puntos C y D, que están apartados 20 m, y mide los ángulos mostrados en la figura siguiente. Encuentre la distancia entre A y B.





4. Altura de un acantilado Para medir la altura de un acantilado inaccesible en el lado opuesto de un río, un topógrafo hace las mediciones mostradas en la figura a la izquierda. Encuentre la altura del acantilado.

5. Altura de una montaña Para calcular la altura h de una montaña, se miden los ángulos α, β y la distancia d, como se muestra en la figura siguiente.

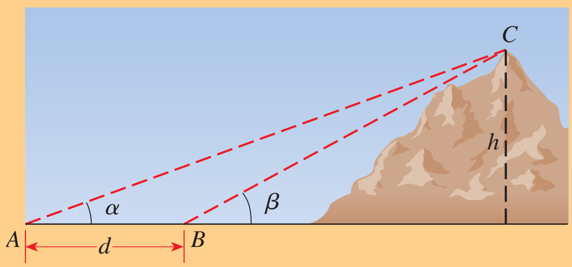
a) Muestre que

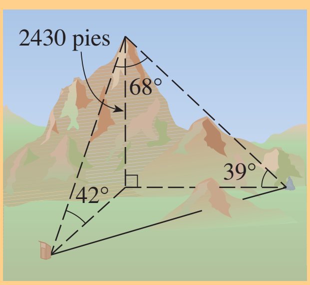
$$h = \frac{d}{\cot \alpha - \cot \beta}$$

b) Muestre que

$$h = d\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta - \alpha)}$$

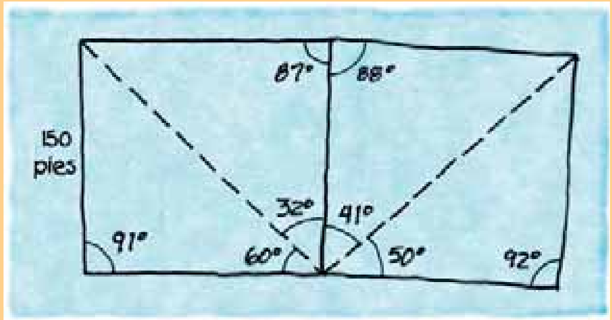
c) Use las fórmulas de los incisos a) y b) para hallar la altura de una montaña si $\alpha = 25°$, $\beta = 29°$ y $d = 800$ pies. ¿Obtiene la misma respuesta de cada fórmula?



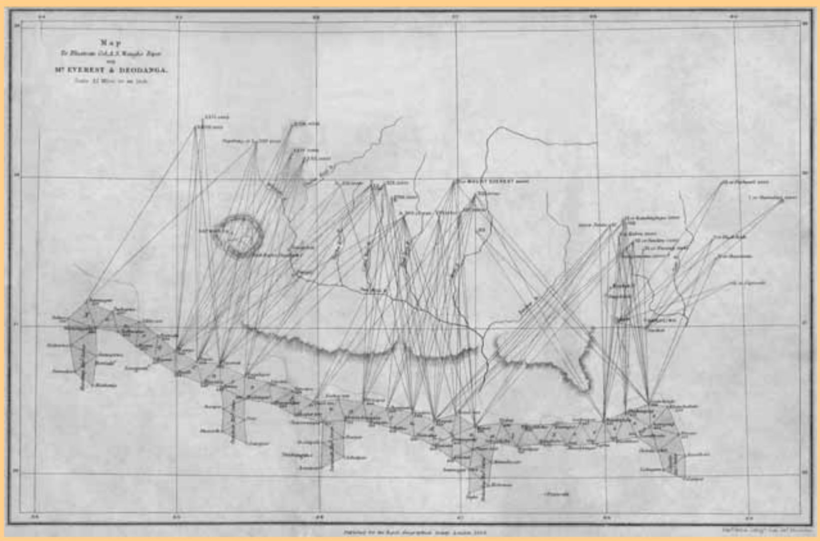


6. Determinar una distancia Un topógrafo ha determinado que una montaña mide 2430 pies de alto. Desde la cima de la montaña mide los ángulos de depresión hasta dos señales en la base de la montaña, y encuentra que son 42° y 39°. (Observe que éstos son los mismos ángulos de elevación de las señales como se muestra en la figura de la izquierda.) El ángulo entre las líneas de visión y las señales es de 68°. Calcule la distancia entre las dos señales.

7. Levantamiento de lotes de edificios Un topógrafo levanta el plano de dos lotes adyacentes y hace el siguiente bosquejo aproximado que muestra sus mediciones. Calcule las distancias mostradas en la figura y use su resultado para trazar un mapa exacto de los dos lotes.



8. Gran medición de la India La gran medición trigonométrica de la India se inició en 1803. No sólo se mapeó el subcontinente, sino que se llevó a cabo la medición más grande de la superficie de la Tierra nunca antes intentada, llamada Gran Arco, que incluyó las 70 cumbres de los Himalayas.



Mapa de la triangulación de los Himalayas realizada por Andrew Waugh, encargado de la gran medición trigonométrica de los Himalayas (1862)

7 Trigonometría analítica

Esquema del capítulo

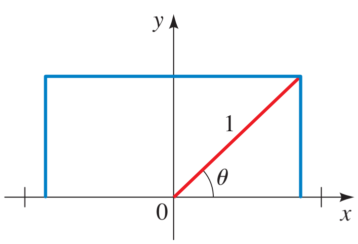
En los capítulos 5 y 6 estudiamos las propiedades gráficas y geométricas de las funciones trigonométricas. En este capítulo tratamos los aspectos algebraicos de la trigonometría, es decir, simplificación y factorización de expresiones y resolución de ecuaciones que contienen funciones trigonométricas. Las herramientas básicas en el álgebra de la trigonometría son las identidades trigonométricas.

Una *identidad trigonométrica* es una ecuación que contiene funciones trigonométricas que se cumplen para todos los valores de la variable. Por ejemplo, de acuerdo con las definiciones de seno y coseno se infiere que para cualquier θ tenemos

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

A continuación presentamos otras identidades que tratamos en este capítulo:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \qquad \operatorname{sen} A \cos B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$$

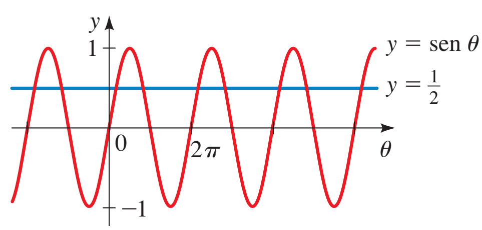


Al aplicar estas identidades podemos simplificar una expresión complicada que contenga funciones trigonométricas a una expresión mucho más simple, con lo que podemos entender mejor lo que significa la expresión. Por ejemplo, el área del rectángulo de la figura a la izquierda es $A = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$, luego, al aplicar una de las identidades anteriores, vemos que $A = \operatorname{sen} 2\theta$.

Una *ecuación trigonométrica* es una ecuación que contiene funciones trigonométricas. Por ejemplo, la ecuación

$$\operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2} = 0$$

es una ecuación trigonométrica. Para resolver esta ecuación necesitamos determinar todos los valores de θ que satisfacen la ecuación. Una gráfica de $y = \operatorname{sen}\theta$ muestra que $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$ infinitamente, de modo que la ecuación tiene infinitas soluciones. Dos de estas soluciones son $\theta = \frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$, y las otras soluciones las podemos calcular sumando múltiplos de 2π a dichas soluciones.



También tratamos las *funciones trigonométricas inversas.* Con objeto de definir la inversa de una función trigonométrica, primero limitamos su dominio a un intervalo

en el cual la función es uno-a-uno. Por ejemplo, restringimos el dominio de la función seno a $[-\pi/2, \pi/2]$. En este intervalo sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, de modo que $\text{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Ya veremos que estas funciones inversas son útiles al resolver ecuaciones trigonométricas.

En la sección de *Enfoque en el modelado* (página 575) estudiamos algunas aplicaciones de los conceptos de este capítulo al movimiento de las ondas.

7.1 Identidades trigonométricas

Empezamos por listar algunas de las identidades trigonométricas básicas. Hay más de ellas en los capítulos 5 y 6, y se le pide que demuestre las identidades de cofunciones en el ejercicio 100.

Identidades trigonométricas fundamentales

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}$$

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Identidades pares-impares

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Identidades de cofunciones

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cos u \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \text{sen}\, u \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$$

Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades permiten plantear la misma expresión de diferentes maneras. Con frecuencia es posible volver a escribir de una manera mucho más simple una expresión que se ve complicada. Para simplificar las expresiones algebraicas, usamos la factorización, denominadores comunes y las fórmulas de productos especiales. Para simplificar expresiones trigonométricas usamos estas mismas técnicas junto con las identidades trigonométricas fundamentales.

Ejemplo 1 Simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\cos t + \tan t \operatorname{sen} t$.

Solución Primero volvemos a escribir la expresión en términos de seno y coseno.

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \cos t + \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)\operatorname{sen} t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

$$= \frac{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}{\cos t} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{1}{\cos t} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \sec t \qquad \text{Identidad recíproca}$$

■

Ejemplo 2 Simplificación mediante combinación de fracciones

Simplifique la expresión $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta}$.

Solución Combinamos las fracciones usando un denominador común.

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta} = \frac{\operatorname{sen}\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta) + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Denominador común}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Distribución de sen } \theta$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\theta + 1}{\cos\theta\,(1 + \operatorname{sen}\theta)} \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} = \sec\theta \qquad \text{Cancelación y uso de la identidad recíproca}$$

■

Demostración de identidades trigonométricas

Muchas identidades provienen de las identidades fundamentales. En los ejemplos que siguen, aprenderemos cómo demostrar que una ecuación trigonométrica es una identidad, y en el proceso veremos cómo descubrir nuevas identidades.

Primero, es fácil decidir cuándo una ecuación *no* es una identidad. Todo lo que necesitamos hacer es demostrar que la ecuación no se cumple para algunos valores de la variable (o variables). Por consiguiente, la ecuación

$$\operatorname{sen} x + \cos x = 1$$

no es una identidad, porque cuando $x = \pi/4$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \neq 1$$

Para comprobar que una ecuación trigonométrica es una identidad, transformamos un miembro de la ecuación en el otro mediante una serie de pasos, cada uno de los cuales es en sí mismo una identidad.

Criterios para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un miembro.** Elija un miembro de la ecuación y escríbalo. Su objetivo es transformarlo en el otro miembro. Por lo regular es más fácil iniciar con el lado más complicado.
2. **Aplicar identidades conocidas.** Use el álgebra y las identidades que conozca para cambiar el lado con el que empezó. Obtenga el común denominador de las expresiones, factorice y aplique las identidades fundamentales para simplificar las expresiones.
3. **Convertir en senos y cosenos.** Si encuentra difícil continuar, es útil volver a escribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

¡Atención! Para demostrar una identidad no ejecutamos las mismas operaciones en ambos miembros de la ecuación. Por ejemplo, si empezamos con una ecuación que no es una identidad, como

1) $$\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x$$

y elevamos al cuadrado ambos miembros obtenemos la ecuación

2) $$\operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen}^2 x$$

la cual es evidentemente una identidad. ¿Esto significa que la ecuación original es una identidad? Claro que no. El problema en este caso es que la operación de elevar al cuadrado es **irreversible** en el sentido de que no podemos regresar a 1) a partir de 2) al calcular las raíces cuadradas, es decir, al invertir el procedimiento. Sólo operaciones que son reversibles transformarán necesariamente una identidad en una identidad.

Ejemplo 3 Demostración de una identidad mediante la reescritura en términos de seno y coseno

Compruebe la identidad $\cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta$.

Solución El primer miembro se ve más complicado, así que iniciamos con él y tratamos de transformarlo en el segundo miembro.

$$\begin{aligned}
\text{PM} &= \cos\theta\,(\sec\theta - \cos\theta) \\
&= \cos\theta\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) && \text{Identidad recíproca} \\
&= 1 - \cos^2\theta && \text{Desarrollo} \\
&= \operatorname{sen}^2\theta = \text{SM} && \text{Identidad pitagórica}
\end{aligned}$$

■

En el ejemplo 3 no es fácil ver cómo transformar el segundo miembro en el primero, pero definitivamente es posible. Observe nada más que cada paso sea reversible. En otras palabras, si empezamos con la última expresión en la demostración y regresamos por cada uno de los pasos, el segundo miembro se transforma en el primero. Quizás esté de acuerdo en que es más difícil comprobar la identidad por este camino. Esta

es la razón de por qué es mejor cambiar el lado más complicado de la identidad en el lado más sencillo.

Ejemplo 4 Demostración de una identidad mediante la combinación de fracciones

Verifique la identidad

$$2 \tan x \sec x = \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x}$$

Solución Mediante un común denominador y la combinación de las fracciones en el segundo miembro de esta ecuación obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{SM} &= \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \frac{1}{1 + \operatorname{sen} x} \\
&= \frac{(1 + \operatorname{sen} x) - (1 - \operatorname{sen} x)}{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)} && \text{Común denominador} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} && \text{Simplificación} \\
&= \frac{2 \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2 \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\left(\frac{1}{\cos x}\right) && \text{Factorización} \\
&= 2 \tan x \sec x = \text{PM} && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}$$

■

Vea *Enfoque en la resolución de problemas* de las páginas 138 a 145.

En el ejemplo 5 existe "un elemento extra" en el problema al multiplicar el numerador y el denominador por una expresión trigonométrica, elegida de modo que se pueda simplificar el resultado.

Ejemplo 5 Demostración de una identidad mediante la introducción de un elemento extra

Verificar la identidad $\dfrac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} = \sec u + \tan u$.

Solución Empezamos con el primer miembro y multiplicamos numerador y denominador por $1 + \operatorname{sen} u$.

Multiplicamos por $1 + \operatorname{sen} u$ porque sabemos por la fórmula de la diferencia de cuadrados que $(1 - \operatorname{sen} u)(1 + \operatorname{sen} u) = 1 - \operatorname{sen}^2 u$, y esto es justamente $\cos^2 u$, una expresión más sencilla.

$$\begin{aligned}
\text{PM} &= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \\
&= \frac{\cos u}{1 - \operatorname{sen} u} \cdot \frac{1 + \operatorname{sen} u}{1 + \operatorname{sen} u} && \text{Multiplicación del numerador y del denominador por } 1 + \operatorname{sen} u \\
&= \frac{\cos u\,(1 + \operatorname{sen} u)}{1 - \operatorname{sen}^2 u} && \text{Desarrollo del denominador}
\end{aligned}$$

Euclides (alrededor de 300 años antes de nuestra era) dio clases en Alejandría. Su obra *Elementos* es el libro que más influencia científica ha ejercido en la historia. Durante dos mil años fue la introducción normal a la geometría en las escuelas y durante muchas generaciones se consideró la mejor forma de desarrollar el razonamiento lógico. Por ejemplo, Abraham Lincoln estudió en los *Elementos* para agudizar su mente. La leyenda cuenta que el rey Ptolomeo preguntó una vez a Euclides si había una manera más rápida de aprender geometría que a través de los *Elementos*. Euclides replicó que "no había un camino para la realeza hacia la geometría", con lo que quería decir que las matemáticas no respetan riqueza o clase social. Euclides fue respetado en su época, y le llamaban "El geómetra" o bien, "El escritor de los *Elementos*". La grandeza de los *Elementos* radica en su tratamiento preciso, lógico y sistemático de la geometría. Al trabajar con la igualdad, Euclides proporciona las reglas siguientes, a las que llama "nociones comunes".

1. Las cosas que son iguales a una misma cosa son iguales entre sí.

2. Si se suman cantidades iguales a cantidades iguales, las sumas son iguales.

3. Si se restan cantidades iguales a cantidades iguales, las restas son iguales.

4. Las cosas que coinciden con otra son iguales.

5. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\cos u\,(1+\operatorname{sen} u)}{\cos^2 u} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \frac{1+\operatorname{sen} u}{\cos u} && \text{Cancelación del factor común}\\
&= \frac{1}{\cos u} + \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} && \text{Separación en dos fracciones}\\
&= \sec u + \tan u && \text{Identidades recíprocas}
\end{aligned}
$$

■

A continuación presentamos otro método para demostrar que una ecuación es una identidad. Si podemos transformar por *separado* cada miembro de la ecuación, por medio de identidades, a fin de llegar al mismo resultado, entonces la ecuación es una identidad. En el ejemplo 6 se ilustra este procedimiento.

Ejemplo 6 Demostración de una identidad trabajando ambos miembros por separado

Verificar la identidad $\dfrac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1}$.

Solución Comprobamos esta identidad transformando por separado cada miembro en la misma expresión. Proporcione la razón de cada paso.

$$\text{PM} = \frac{1+\cos\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta} = \sec\theta + 1$$

$$\text{SM} = \frac{\tan^2\theta}{\sec\theta - 1} = \frac{\sec^2\theta - 1}{\sec\theta - 1} = \frac{(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1)}{\sec\theta - 1} = \sec\theta + 1$$

Se infiere que PM = SM, de modo que la ecuación es una identidad. ■

Esta sección finaliza con la descripción de la técnica de la *sustitución trigonométrica*, la cual aplicamos para convertir expresiones algebraicas en trigonométricas. Con frecuencia es útil en el cálculo infinitesimal, por ejemplo, para determinar el área de un círculo o de una elipse.

Ejemplo 7 Sustitución trigonométrica

Sustituir x por $\operatorname{sen}\theta$ en la expresión $\sqrt{1-x^2}$ y simplifique. Suponga que $0 \le \theta \le \pi/2$.

Solución Hacemos $x = \operatorname{sen}\theta$, tenemos

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-x^2} &= \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} && \text{Sustitución de } x = \operatorname{sen}\theta\\
&= \sqrt{\cos^2\theta} && \text{Identidad pitagórica}\\
&= \cos\theta && \text{Obtención de la raíz cuadrada}
\end{aligned}
$$

La última igualdad es verdadera porque $\cos\theta \ge 0$ para los valores de θ en cuestión. ■

7.1 Ejercicios

1–10 ■ Escriba la expresión trigonométrica en términos de seno y coseno, y después simplifique.

1. $\cos t \tan t$

2. $\cos t \csc t$

3. $\operatorname{sen} \theta \sec \theta$

4. $\tan \theta \csc \theta$

5. $\tan^2 x - \sec^2 x$

6. $\dfrac{\sec x}{\csc x}$

7. $\operatorname{sen} u + \cot u \cos u$

8. $\cos^2 \theta \, (1 + \tan^2 \theta)$

9. $\dfrac{\sec \theta - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$

10. $\dfrac{\cot \theta}{\csc \theta - \operatorname{sen} \theta}$

11–24 ■ Simplifique la expresión trigonométrica.

11. $\dfrac{\operatorname{sen} x \sec x}{\tan x}$

12. $\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x \cos x$

13. $\dfrac{1 + \cos y}{1 + \sec y}$

14. $\dfrac{\tan x}{\sec(-x)}$

15. $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$

16. $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$

17. $\dfrac{1 + \csc x}{\cos x + \cot x}$

18. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x}$

19. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} u}{\cos u} + \dfrac{\cos u}{1 + \operatorname{sen} u}$

20. $\tan x \cos x \csc x$

21. $\dfrac{2 + \tan^2 x}{\sec^2 x} - 1$

22. $\dfrac{1 + \cot A}{\csc A}$

23. $\tan \theta + \cos(-\theta) + \tan(-\theta)$

24. $\dfrac{\cos x}{\sec x + \tan x}$

25–88 ■ Verifique la identidad.

25. $\dfrac{\operatorname{sen} \theta}{\tan \theta} = \cos \theta$

26. $\dfrac{\tan x}{\sec x} = \operatorname{sen} x$

27. $\dfrac{\cos u \sec u}{\tan u} = \cot u$

28. $\dfrac{\cot x \sec x}{\csc x} = 1$

29. $\dfrac{\tan y}{\csc y} = \sec y - \cos y$

30. $\dfrac{\cos v}{\sec v \operatorname{sen} v} = \csc v - \operatorname{sen} v$

31. $\operatorname{sen} B + \cos B \cot B = \csc B$

32. $\cos(-x) - \operatorname{sen}(-x) = \cos x + \operatorname{sen} x$

33. $\cot(-\alpha) \cos(-\alpha) + \operatorname{sen}(-\alpha) = -\csc \alpha$

34. $\csc x \left[\csc x + \operatorname{sen}(-x)\right] = \cot^2 x$

35. $\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \csc \theta$

36. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x$

37. $(1 - \cos \beta)(1 + \cos \beta) = \dfrac{1}{\csc^2 \beta}$

38. $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} = 1$

39. $\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{(\operatorname{sen} x - \cos x)^2}$

40. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^4 = (1 + 2 \operatorname{sen} x \cos x)^2$

41. $\dfrac{\sec t - \cos t}{\sec t} = \operatorname{sen}^2 t$

42. $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = (\sec x - \tan x)^2$

43. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 y} = 1 + \tan^2 y$

44. $\csc x - \operatorname{sen} x = \cos x \cot x$

45. $(\cot x - \csc x)(\cos x + 1) = -\operatorname{sen} x$

46. $\operatorname{sen}^4 \theta - \cos^4 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta$

47. $(1 - \cos^2 x)(1 + \cot^2 x) = 1$

48. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2 \cos^2 x - 1$

49. $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

50. $(\tan y + \cot y) \operatorname{sen} y \cos y = 1$

51. $\dfrac{1 - \cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$

52. $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$

53. $\tan^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \tan^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta$

54. $\cot^2 \theta \cos^2 \theta = \cot^2 \theta - \cos^2 \theta$

55. $\dfrac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1} = \dfrac{-\cos^2 x}{(\operatorname{sen} x + 1)^2}$

56 $\dfrac{\operatorname{sen} w}{\operatorname{sen} w + \cos w} = \dfrac{\tan w}{1 + \tan w}$

57. $\dfrac{(\operatorname{sen} t + \cos t)^2}{\operatorname{sen} t \cos t} = 2 + \sec t \csc t$

58. $\sec t \csc t \, (\tan t + \cot t) = \sec^2 t + \csc^2 t$

59. $\dfrac{1 + \tan^2 u}{1 - \tan^2 u} = \dfrac{1}{\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u}$

60. $\dfrac{1 + \sec^2 x}{1 + \tan^2 x} = 1 + \cos^2 x$

61. $\dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x} = \sec x \, (\sec x + \tan x)$

62. $\dfrac{\sec x + \csc x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x + \cos x$

63. $\sec v - \tan v = \dfrac{1}{\sec v + \tan v}$

64. $\dfrac{\operatorname{sen} A}{1 - \cos A} - \cot A = \csc A$

65. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\sec x + \csc x} = \operatorname{sen} x \cos x$

66. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} = 2 \csc x$

67. $\dfrac{\csc x - \cot x}{\sec x - 1} = \cot x$

68. $\dfrac{\csc^2 x - \cot^2 x}{\sec^2 x} = \cos^2 x$

69. $\tan^2 u - \operatorname{sen}^2 u = \tan^2 u \operatorname{sen}^2 u$

70. $\dfrac{\tan v \operatorname{sen} v}{\tan v + \operatorname{sen} v} = \dfrac{\tan v - \operatorname{sen} v}{\tan v \operatorname{sen} v}$

71. $\sec^4 x - \tan^4 x = \sec^2 x + \tan^2 x$

72. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \sec\theta + \tan\theta$

73. $\dfrac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta - \csc\theta}{\cos\theta - \cot\theta}$

74. $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \dfrac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$

75. $\dfrac{\cos^2 t + \tan^2 t - 1}{\operatorname{sen}^2 t} = \tan^2 t$

76. $\dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} = 2 \sec x \tan x$

77. $\dfrac{1}{\sec x + \tan x} + \dfrac{1}{\sec x - \tan x} = 2 \sec x$

78. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} - \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{sen} x} = 4 \tan x \sec x$

79. $(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$

80. $\tan^2 x - \cot^2 x = \sec^2 x - \csc^2 x$

81. $\dfrac{\sec u - 1}{\sec u + 1} = \dfrac{1 - \cos u}{1 + \cos u}$

82. $\dfrac{\cot x + 1}{\cot x - 1} = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

83. $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 1 - \operatorname{sen} x \cos x$

84. $\dfrac{\tan v - \cot v}{\tan^2 v - \cot^2 v} = \operatorname{sen} v \cos v$

85. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x} = (\tan x + \sec x)^2$

86. $\dfrac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$

87. $(\tan x + \cot x)^4 = \csc^4 x \sec^4 x$

88. $(\operatorname{sen}\alpha - \tan\alpha)(\cos\alpha - \cot\alpha) = (\cos\alpha - 1)(\operatorname{sen}\alpha - 1)$

89–94 ■ Efectúe la sustitución trigonométrica indicada en la expresión algebraica que se proporciona y simplifique (véase ejemplo 7). Suponga que $0 \le \theta < \pi/2$.

89. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $x = \operatorname{sen}\theta$

90. $\sqrt{1 + x^2}$, $x = \tan\theta$

91. $\sqrt{x^2 - 1}$, $x = \sec\theta$

92. $\dfrac{1}{x^2\sqrt{4 + x^2}}$, $x = 2\tan\theta$

93. $\sqrt{9 - x^2}$, $x = 3\operatorname{sen}\theta$

94. $\dfrac{\sqrt{x^2 - 25}}{x}$, $x = 5\sec\theta$

95–98 ■ Grafique f y g en el mismo rectángulo de visión. ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

95. $f(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, $g(x) = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

96. $f(x) = \tan x(1 + \operatorname{sen} x)$, $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$

97. $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2$, $g(x) = 1$

98. $f(x) = \cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x$, $g(x) = 2\cos^2 x - 1$

99. Demuestre que la ecuación no es una identidad.

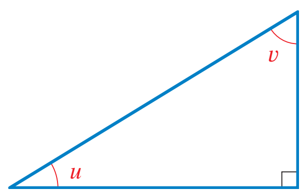
a) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x$ **b)** $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$

c) $\sec^2 x + \csc^2 x = 1$

d) $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \csc x + \sec x$

Descubrimiento • Debate

100. Identidades de cofunciones En el triángulo rectángulo que se muestra, explique por qué $v = (\pi/2) - u$. Explique además cómo puede obtener las seis identidades de cofunciones a partir de este triángulo para $0 < u < \pi/2$.



101. Gráficas e identidades Suponga que grafica dos funciones f y g en una calculadora o en una computadora, y que sus gráficas son idénticas en el rectángulo de visión. ¿Esto demuestra que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Explique.

102. Forme su propia identidad Si empieza con una expresión trigonométrica y la vuelve a escribir o la simplifica, entonces al hacer la expresión original igual a la que volvió a escribir obtiene una identidad trigonométrica. Por ejemplo, a partir del ejemplo 1 tenemos la identidad:

$$\cos t + \tan t \operatorname{sen} t = \sec t$$

Aplique esta técnica para formar su propia identidad, luego proporciónela a sus compañeros de clase para que la comprueben.

7.2 Fórmulas de adición y sustracción

En seguida derivaremos identidades de funciones trigonométricas de sumas y diferencias.

Fórmulas de adición y sustracción

Fórmulas para el seno:
$$\text{sen}(s+t) = \text{sen}\, s \cos t + \cos s\, \text{sen}\, t$$
$$\text{sen}(s-t) = \text{sen}\, s \cos t - \cos s\, \text{sen}\, t$$

Fórmulas para el coseno:
$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$$
$$\cos(s-t) = \cos s \cos t + \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$$

Fórmulas para la tangente:
$$\tan(s+t) = \frac{\tan s + \tan t}{1 - \tan s \tan t}$$
$$\tan(s-t) = \frac{\tan s - \tan t}{1 + \tan s \tan t}$$

■ Demostración de la fórmula de la adición en el caso del coseno

Para demostrar la fórmula $\cos(s+t) = \cos s \cos t - \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$ recurrimos a la figura 1. En la figura, las distancias t, $s+t$ y $-s$ están señaladas en el círculo unitario empezando en $P_0(1, 0)$ y finalizando en Q_1, P_1 y Q_0, respectivamente. Las coordenadas de estos puntos son

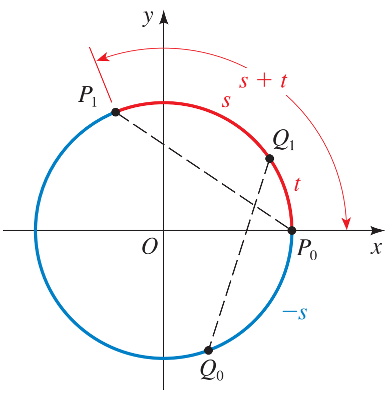


Figura 1

$$P_0(1, 0) \qquad Q_0(\cos(-s), \text{sen}(-s))$$
$$P_1(\cos(s+t), \text{sen}(s+t)) \qquad Q_1(\cos t, \text{sen}\, t)$$

Puesto que $\cos(-s) = \cos s$ y $\text{sen}(-s) = -\text{sen}\, s$, se infiere que el punto Q_0 tiene las coordenadas $Q_0(\cos s, -\text{sen}\, s)$. Obsérvese que las distancias entre P_0 y P_1 y entre Q_0 y Q_1 medidas a lo largo del arco del círculo son iguales. Como los arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, se infiere que $d(P_0, P_1) = d(Q_0, Q_1)$. Aplicando la fórmula de la distancia obtenemos

$$\sqrt{[\cos(s+t) - 1]^2 + [\text{sen}(s+t) - 0]^2} = \sqrt{(\cos t - \cos s)^2 + (\text{sen}\, t + \text{sen}\, s)^2}$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros y desarrollamos los cuadrados tenemos

esto se añade a 1

$$\cos^2(s+t) - 2\cos(s+t) + 1 + \text{sen}^2(s+t)$$
$$= \cos^2 t - 2\cos s \cos t + \cos^2 s + \text{sen}^2 t + 2\, \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t + \text{sen}^2 s$$

esto se añade a 1 esto se añade a 1

Al aplicar la identidad pitagórica $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ tres veces obtenemos

$$2 - 2\cos(s+t) = 2 - 2\cos s \cos t + 2\, \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$$

Para terminar, restamos 2 de cada miembro y dividimos entre -2 ambos miembros:

$$\cos(s+t) = \cos s \cos t - \text{sen}\, s\, \text{sen}\, t$$

lo cual demuestra la fórmula de la adición para el caso del coseno. ■

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) fue el descubridor de las aplicaciones más sorprendentes de las funciones trigonométricas (véase la nota al margen en la página 427). Utilizó las sumas de estas funciones para describir fenómenos físicos como la transmisión del sonido y el flujo del calor.

Fourier quedó huérfano a corta edad, por lo que recibió su educación en una escuela militar, de donde se convirtió en maestro de matemáticas cuando tenía 20 años. Más tarde fue designado profesor de la École Polytechnique, pero rechazó este puesto para acompañar a Napoleón en su expedición a Egipto, en donde Fourier fue gobernador. Cuando regresó a Francia empezó a hacer experimentos relacionados con el calor. La Academia Francesa se rehusó a publicar sus primeros trabajos sobre el tema debido a la falta de rigor. Con el paso del tiempo, Fourier fue secretario de la Academia, y ya con este puesto pudo publicar sus trabajos en la forma original. Quizá debido a sus estudios sobre el calor y a los años que pasó en el desierto de Egipto, Fourier estaba obsesionado por mantenerse caliente; usaba varias ropas encimadas, incluso en el verano, y mantenía sus habitaciones incómodamente calientes. Evidentemente, estos hábitos sobrecargaron a su corazón y contribuyeron a su muerte a la edad de 62 años.

■ **Demostración de la fórmula de la adición en el caso del coseno** Si reemplazamos t con $-t$ en la fórmula de la adición para el coseno tenemos

$$\begin{aligned} \cos(s-t) &= \cos(s+(-t)) \\ &= \cos s \cos(-t) - \operatorname{sen} s \operatorname{sen}(-t) && \text{Fórmula de la adición para el coseno} \\ &= \cos s \cos t + \operatorname{sen} s \operatorname{sen} t && \text{Identidades pares-impares} \end{aligned}$$

Esto demuestra la fórmula de la sustracción en el caso del coseno. ■

Refiérase a los ejercicios 56 y 57 para ver las demostraciones de otras fórmulas de adición.

Ejemplo 1 Uso de las fórmulas de adición y sustracción

Calcule el valor exacto de cada expresión

a) $\cos 75°$ b) $\cos \dfrac{\pi}{12}$

Solución

a) Observe que $75° = 45° + 30°$. Puesto que conocemos los valores exactos del seno y el coseno de 45° y 30°, aplicamos la fórmula de la adición para el coseno para llegar a

$$\begin{aligned} \cos 75° &= \cos(45° + 30°) \\ &= \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

b) Puesto que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}$, la fórmula de sustracción para el caso del coseno da

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{12} &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2 Uso de la fórmula de la adición en el caso del seno

Determine el valor exacto de la expresión $\operatorname{sen} 20° \cos 40° + \cos 20° \operatorname{sen} 40°$.

Solución Identificamos la expresión como el segundo miembro de la fórmula de la adición para el seno con $s = 20°$ y $t = 40°$. De modo que tenemos

$$\operatorname{sen} 20° \cos 40° + \cos 20° \operatorname{sen} 40° = \operatorname{sen}(20° + 40°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

Ejemplo 3 Demostración de una identidad de cofunciones

Demuestre la identidad de cofunciones $\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \operatorname{sen} u$.

Solución Por la fórmula de sustracción en el caso del coseno,

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos u + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} u \\ &= 0 \cdot \cos u + 1 \cdot \operatorname{sen} u = \operatorname{sen} u\end{aligned}$$

■

Ejemplo 4 Demostración de una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.

Solución Empezamos con el segundo miembro y usamos la fórmula de la adición para la tangente con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}\text{SM} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x} \\ &= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \text{PM}\end{aligned}$$

■

El siguiente ejemplo es un uso característico de las fórmulas de la adición y de la sustracción en el cálculo infinitesimal.

Ejemplo 5 Una identidad del cálculo infinitesimal

Si $f(x) = \operatorname{sen} x$, demuestre que

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

Solución

$$\begin{aligned}\frac{f(x + h) - f(x)}{h} &= \frac{\operatorname{sen}(x + h) - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Definición de } f \\ &= \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \cos x \operatorname{sen} h - \operatorname{sen} x}{h} && \text{Fórmula de la adición para el seno} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x\,(\cos h - 1) + \cos x \operatorname{sen} h}{h} && \text{Factorización} \\ &= \operatorname{sen} x\left(\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \cos x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right) && \text{Separación de las fracciones}\end{aligned}$$

■

Expresiones de la forma A sen $x + B$ cos x

Podemos escribir expresiones de la forma A sen $x + B$ cos x en términos de una función trigonométrica sencilla usando la fórmula de la adición para el caso del seno. Por ejemplo, considere la expresión

$$\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$$

Si hacemos $\phi = \pi/3$, entonces $\cos\phi = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\phi = \sqrt{3}/2$, y podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x &= \cos\phi\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi\cos x\\ &= \operatorname{sen}(x+\phi) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

Podemos hacerlo porque los coeficientes $\frac{1}{2}$ y $\sqrt{3}/2$ son precisamente el coseno y el seno de un cierto número particular, en este caso, $\pi/3$. Podemos aplicar la misma idea en general para escribir A sen $x + B$ cos x en la forma $k\operatorname{sen}(x + \phi)$. Empezamos por multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{A^2 + B^2}$ para obtener

$$A\operatorname{sen} x + B\cos x = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\operatorname{sen} x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x\right)$$

Necesitamos un número ϕ con la propiedad de que

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

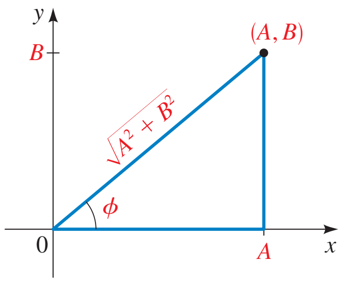


Figura 2

En la figura 2 se ilustra que el punto (A, B) en el plano determina un número ϕ con esta propiedad, precisamente. Con esta ϕ, tenemos

$$\begin{aligned}A\operatorname{sen} x + B\cos x &= \sqrt{A^2+B^2}(\cos\phi\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\phi\cos x)\\ &= \sqrt{A^2+B^2}\operatorname{sen}(x+\phi)\end{aligned}$$

Hemos demostrado el siguiente teorema.

Sumas de senos y cosenos

Si A y B son números reales, entonces

$$A\operatorname{sen} x + B\cos x = k\operatorname{sen}(x+\phi)$$

donde $k = \sqrt{A^2+B^2}$ y ϕ cumple con lo siguiente

$$\cos\phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Ejemplo 6 Una suma de términos con senos y cosenos

Exprese $3 \text{ sen } x + 4 \cos x$ en la forma $k \text{ sen } (x + \phi)$.

Solución De acuerdo con el teorema anterior, $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. El ángulo ϕ tiene la propiedad de que $\text{sen } \phi = \frac{4}{5}$ y $\cos \phi = \frac{3}{5}$. Mediante una calculadora encontramos que $\phi \approx 53.1°$. Por lo tanto,

$$3 \text{ sen } x + 4 \cos x \approx 5 \text{ sen}(x + 53.1°)$$

■

Ejemplo 7 Gráfica de una función trigonométrica

Escriba la función $f(x) = -\text{sen } 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ en la forma $k \text{ sen}(2x + \phi)$ y utilice la nueva forma para graficar la función.

Solución Puesto que $A = -1$ y $B = \sqrt{3}$, tenemos entonces $k = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{1 + 3} = 2$. El ángulo ϕ satisface $\cos \phi = -\frac{1}{2}$ y $\text{sen } \phi = \sqrt{3}/2$. De acuerdo con los signos de estas cantidades concluimos que ϕ está en el cuadrante II. Por lo tanto, $\phi = 2\pi/3$. De acuerdo con el teorema precedente podemos escribir

$$f(x) = -\text{sen } 2x + \sqrt{3} \cos 2x = 2 \text{ sen}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Usando la forma

$$f(x) = 2 \text{ sen } 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

vemos que la gráfica es una curva seno cuya amplitud es 2, el periodo es $2\pi/2 = \pi$ y el desplazamiento de fase es $-\pi/3$. La gráfica se muestra en la figura 3. ■

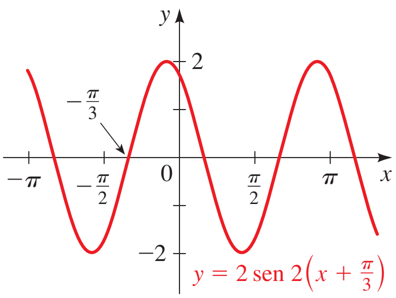


Figura 3

7.2 Ejercicios

1–12 ■ Aplique la fórmula de la adición o de la sustracción para calcular el valor exacto de la expresión, según se demostró en el ejemplo 1.

1. $\text{sen } 75°$

2. $\text{sen } 15°$

3. $\cos 105°$

4. $\cos 195°$

5. $\tan 15°$

6. $\tan 165°$

7. $\text{sen } \frac{19\pi}{12}$

8. $\cos \frac{17\pi}{12}$

9. $\tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

10. $\text{sen}\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

11. $\cos \frac{11\pi}{12}$

12. $\tan \frac{7\pi}{12}$

13–18 ■ Mediante la fórmula de la adición o de la sustracción para plantear la expresión como una función trigonométrica de un número, y después determinar su valor exacto.

13. $\text{sen } 18° \cos 27° + \cos 18° \text{ sen } 27°$

14. $\cos 10° \cos 80° - \text{sen } 10° \text{ sen } 80°$

15. $\cos \frac{3\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{21} + \text{sen } \frac{3\pi}{7} \text{ sen } \frac{2\pi}{21}$

16. $\dfrac{\tan \frac{\pi}{18} + \tan \frac{\pi}{9}}{1 - \tan \frac{\pi}{18} \tan \frac{\pi}{9}}$

17. $\dfrac{\tan 73° - \tan 13°}{1 + \tan 73° \tan 13°}$

18. $\cos \frac{13\pi}{15} \cos\left(-\frac{\pi}{5}\right) - \text{sen } \frac{13\pi}{15} \text{ sen}\left(-\frac{\pi}{5}\right)$

19–22 ■ Demuestre la identidad de la cofunción usando las fórmulas de adición y sustracción.

19. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \cot u$

20. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \tan u$

21. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \csc u$

22. $\csc\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \sec u$

23–40 ■ Demuestre la identidad.

23. $\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

24. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

25. $\operatorname{sen}(x - \pi) = -\operatorname{sen} x$ **26.** $\cos(x - \pi) = -\cos x$

27. $\tan(x - \pi) = \tan x$

28. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

29. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

30. $\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1}$

31. $\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = 2 \cos x \operatorname{sen} y$

32. $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2 \cos x \cos y$

33. $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cot y + 1}{\cot y - \cot x}$

34. $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

35. $\tan x - \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x - y)}{\cos x \cos y}$

36. $1 - \tan x \tan y = \frac{\cos(x + y)}{\cos x \cos y}$

37. $\frac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan y$

38. $\cos(x + y)\cos(x - y) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y$

39. $\operatorname{sen}(x + y + z) = \operatorname{sen} x \cos y \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \cos z + \cos x \cos y \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$

40. $\tan(x - y) + \tan(y - z) + \tan(z - x) = \tan(x - y)\tan(y - z)\tan(z - x)$

41–44 ■ Escriba la función sólo en términos de seno.

41. $-\sqrt{3} \operatorname{sen} x + \cos x$ **42.** $\operatorname{sen} x + \cos x$

43. $5(\operatorname{sen} 2x - \cos 2x)$ **44.** $3 \operatorname{sen} \pi x + 3\sqrt{3} \cos \pi x$

45–46 ■ **a)** Exprese la función sólo en términos del seno.
b) Grafique la función.

45. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$ **46.** $g(x) = \cos 2x + \sqrt{3} \operatorname{sen} 2x$

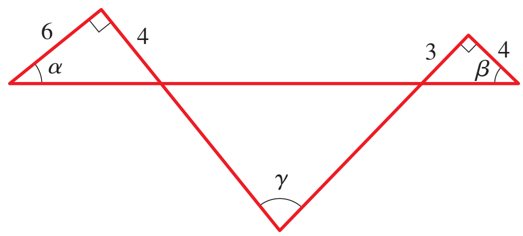
47. Demuestre que si $\beta - \alpha = \pi/2$, entonces

$$\operatorname{sen}(x + \alpha) + \cos(x + \beta) = 0$$

48. Sea $g(x) = \cos x$. Demuestre que

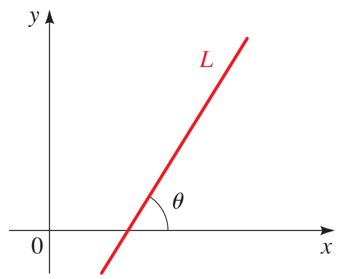
$$\frac{g(x + h) - g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1 - \cos h}{h}\right) - \operatorname{sen} x\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h}\right)$$

49. Refiérase a la figura. Demuestre que $\alpha + \beta = \gamma$, y calcule $\tan \gamma$.



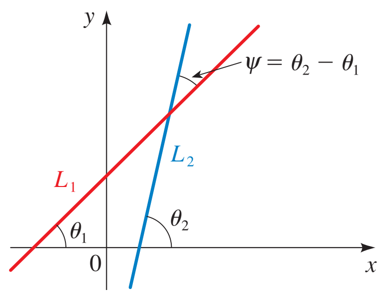
50. **a)** Si L es una recta en el plano y θ es el ángulo que forma la recta y el eje x como se muestra en la figura, demuestre que la pendiente m de la recta está dada por

$$m = \tan \theta$$



b) Sea L_1 y L_2 dos rectas no paralelas en el plano con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Sea ψ el ángulo agudo que forman las dos rectas (véase la figura). Demuestre que

$$\tan \psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$



c) Calcule el ángulo agudo que forman las dos rectas

$$y = \tfrac{1}{3}x + 1 \quad \text{y} \quad y = -\tfrac{1}{2}x - 3$$

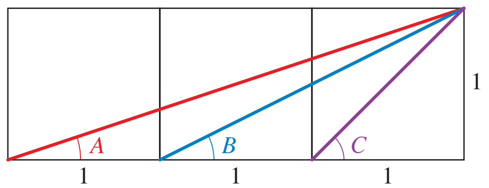
d) Demuestre que si dos rectas son perpendiculares, entonces la pendiente de una es el recíproco negativo de la pendiente de la otra. [*Sugerencia*: primero encuentre una expresión para $\cot \psi$.]

51–52 ■ **a)** Grafique la función y plantee una conjetura, luego, **b)** demuestre que su conjetura es cierta.

51. $y = \operatorname{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

52. $y = -\frac{1}{2}[\cos(x + \pi) + \cos(x - \pi)]$

53. Calcule $\angle A + \angle B + \angle C$ de la figura. [*Sugerencia*: primero aplique una fórmula de adición para encontrar $\tan(A + B)$.]



Aplicaciones

54. Adición de un eco Un dispositivo digital de retardo forma eco de una señal de entrada repitiéndola un tiempo fijo después de que la recibe. Si tal dispositivo recibe la nota pura $f_1(t) = 5 \operatorname{sen} t$ y repite la nota pura $f_2(t) = 5 \cos t$, entonces el sonido combinado $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

a) Grafique $y = f(t)$ y observe que la gráfica tiene la forma de una curva seno, $y = k \operatorname{sen}(t + \phi)$.

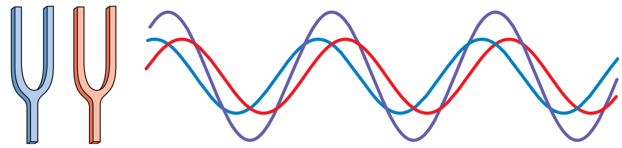
b) Calcule k y ϕ.

55. Interferencia Dos diapasones idénticos se pulsan: uno a una fracción de segundo después que el otro. Los sonidos generados son modelados mediante $f_1(t) = C \operatorname{sen} \omega t$ y $f_2(t) = C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$. Las dos ondas sonoras interfieren para producir un solo sonido modelado por la suma de estas funciones.

$$f(t) = C \operatorname{sen} \omega t + C \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

a) Use la fórmula de la adición para el seno con el fin de demostrar que f se puede expresar en la forma $f(t) = A \operatorname{sen} \omega t + B \cos \omega t$, donde A y B son constantes que dependen de α.

b) Suponga que $C = 10$ y $\alpha = \pi/3$. Calcule constantes k y ϕ para que $f(t) = k \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$.



Descubrimiento • Debate

56. Fórmula de adición para el caso del seno En el texto demostramos sólo las fórmulas de adición y sustracción para el coseno. Aplique estas fórmulas y las identidades de las cofunciones

$$\operatorname{sen} x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

para demostrar la fórmula de adición para el caso del seno. [*Sugerencia*: para empezar use la primera identidad de las cofunciones para escribir

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(s + t) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (s + t)\right) \\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - s\right) - t\right)\end{aligned}$$

y aplique la fórmula de la sustracción para el coseno.]

57. Fórmula de la adición para la tangente Aplique las fórmulas de la adición para el coseno y el seno con el objeto de demostrar la fórmula de la adición para la tangente. [*Sugerencia*: use

$$\tan(s + t) = \frac{\operatorname{sen}(s + t)}{\cos(s + t)}$$

y divida tanto el numerador como el denominador entre $\cos s \cos t$.]

7.3 Fórmulas para el ángulo doble, mitad de ángulo o semiángulo y producto-a-suma

Las identidades que estudiamos en esta sección son consecuencias de las fórmulas de adición. Las **fórmulas para el ángulo doble** permiten calcular valores de las funciones trigonométricas en $2x$ a partir de los valores en x. Las **fórmulas de la mitad de ángulo o semiángulo** relacionan valores de las funciones trigonométricas en $\frac{1}{2}x$ con sus valores en x. Las **fórmulas del producto-a-suma** relacionan productos de senos y cosenos con sumas de senos y cosenos.

Fórmulas para el ángulo doble

Las fórmulas en el recuadro siguiente son consecuencias inmediatas de las fórmulas de adición, que demostramos en la sección anterior.

Fórmulas para el ángulo doble

Fórmula para el seno: $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Fórmulas para el coseno:
$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

Fórmula para la tangente: $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

Las demostraciones de las fórmulas para el coseno se presentan aquí. A usted se le pide que demuestre las fórmulas restantes en los ejercicios 33 y 34.

Demostración de las fórmulas del ángulo doble para el caso del coseno

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \\ &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

Las fórmulas segunda y tercera para $\cos 2x$ se obtienen de la fórmula que apenas demostramos y de la identidad pitagórica. Al sustituir $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ tenemos

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

La tercera fórmula se obtiene de la misma manera, sustituyendo $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$. ■

Ejemplo 1 Uso de las fórmulas del ángulo doble

Si $\cos x = -\frac{2}{3}$ y x está en el cuadrante II, calcule $\cos 2x$ y $\operatorname{sen} 2x$.

Solución Si usamos una de las fórmulas para el ángulo doble en el caso del coseno obtenemos

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{8}{9} - 1 = -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Para aplicar la fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, necesitamos determinar primero $\operatorname{sen} x$. Tenemos entonces

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

donde hemos usado la raíz cuadrada positiva porque $\operatorname{sen} x$ es positivo en el cuadrante II. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9} \end{aligned}$$ ■

Ejemplo 2 Una fórmula para el ángulo triple

Escriba $\cos 3x$ en términos de $\cos x$.

Solución

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x + x) \\
&= \cos 2x \cos x - \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x && \text{Fórmula de adición} \\
&= (2\cos^2 x - 1)\cos x - (2 \operatorname{sen} x \cos x)\operatorname{sen} x && \text{Fórmulas del ángulo doble} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x && \text{Desarrollo} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x(1 - \cos^2 x) && \text{Identidad pitagórica} \\
&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x && \text{Desarrollo} \\
&= 4\cos^3 x - 3\cos x && \text{Simplificación}
\end{aligned}$$

■

En el ejemplo 2 se muestra que $\cos 3x$ se puede expresar como un polinomio grado 3 en $\cos x$. La identidad $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ muestra que $\cos 2x$ es un polinomio grado 2 en $\cos x$. En realidad, para cualquier número natural n podemos escribir $\cos nx$ como un polinomio en $\cos x$ de grado n (véase ejercicio 87). En general, el resultado análogo para $\operatorname{sen} nx$ no es verdadero.

Ejemplo 3 Demostración de una identidad

Demuestre la identidad $\dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 4\cos x - \sec x$.

Solución Empezamos con el primer miembro.

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x \cos x} &= \frac{\operatorname{sen}(x + 2x)}{\operatorname{sen} x \cos x} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmula de adición} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1) + \cos x(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Fórmulas para el ángulo doble} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x(2\cos^2 x - 1)}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos x(2\operatorname{sen} x \cos x)}{\operatorname{sen} x \cos x} && \text{Separación de fracciones} \\
&= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Cancelación} \\
&= 2\cos x - \frac{1}{\cos x} + 2\cos x && \text{Separación de fracciones} \\
&= 4\cos x - \sec x && \text{Identidad recíproca}
\end{aligned}$$

■

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

Las fórmulas siguientes nos permiten escribir cualquier expresión trigonométrica que contenga incluso potencias de seno y coseno sólo en términos de la primera potencia del coseno. Esta técnica es importante en el cálculo infinitesimal. Las fórmulas mitad de ángulo o semiángulo son consecuencias inmediatas de dichas fórmulas.

Fórmulas para reducir las potencias

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

■ **Demostración** La primera fórmula se obtiene determinando $\operatorname{sen}^2 x$ en la fórmula del ángulo doble $\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$. De igual manera, la segunda fórmula se obtiene calculando $\cos^2 x$ en la fórmula del ángulo doble $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

La última fórmula se deduce de las primeras dos y de las identidades recíprocas:

$$\tan^2 x = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\dfrac{1 - \cos 2x}{2}}{\dfrac{1 + \cos 2x}{2}} = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$ ■

Ejemplo 4 **Reducción de potencias en una expresión trigonométrica**

Exprese $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$ en términos de la primera potencia del coseno.

Solución Usamos en forma repetida las fórmulas para reducir la potencia.

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \\
&= \frac{1 - \cos^2 2x}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} \\
&= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos 4x = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)
\end{aligned}$$

Otra manera de obtener esta identidad es usar la fórmula del ángulo doble para el seno en la forma $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x$. Por consiguiente,

$$\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{1}{8}(1 - \cos 4x)$$ ■

Fórmulas mitad de ángulo o semiángulo

$$\operatorname{sen}\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos u}{2}} \qquad \cos\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos u}{2}}$$

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$$

La elección del signo + o − depende del cuadrante en el que se encuentre $u/2$.

Demostración Sustituimos $x = u/2$ en las fórmulas para reducir la potencia y calculamos la raíz cuadrada de cada miembro. Esto genera las dos primeras fórmulas mitad de ángulo. En el caso de la fórmula mitad de ángulo para la tangente, tenemos

$$\tan\frac{u}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos u}{1+\cos u}}$$

$$= \pm\sqrt{\left(\frac{1-\cos u}{1+\cos u}\right)\left(\frac{1-\cos u}{1-\cos u}\right)}$$ Multiplicación del numerador y del denominador por $1-\cos u$

$$= \pm\sqrt{\frac{(1-\cos u)^2}{1-\cos^2 u}}$$ Simplificación

$$= \pm\frac{|1-\cos u|}{|\operatorname{sen} u|}$$ $\sqrt{A^2} = |A|$ y $1-\cos^2 u = \operatorname{sen}^2 u$

Entonces, $1 - \cos u$ es no negativo para todos los valores de u. Asimismo, es cierto que sen u y $\tan(u/2)$ siempre tienen el mismo signo. Verifíquelo. Entonces, se infiere que

$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u}$$

La otra fórmula semiángulo para la tangente se deriva de ésta al multiplicar tanto el numerador como el denominador por $1 + \cos u$. ■

Ejemplo 5 Uso de la fórmula del semiángulo

Calcule el valor exacto de sen 22.5°.

Solución Puesto que 22.5° es la mitad de 45°, usamos la fórmula del semiángulo para el caso del seno con $u = 45$. Elegimos el signo + porque 22.5° está en el primer cuadrante.

$$\operatorname{sen}\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}$$ Fórmula del semiángulo

$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{2}/2}{2}}$$ $\cos 45^\circ = \sqrt{2}/2$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$ Común denominador

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$ Simplificación ■

Ejemplo 6 Uso de la fórmula del semiángulo

Determinación $\tan(u/2)$ si sen $u = \frac{2}{5}$ y u está en el cuadrante II.

Solución Para aplicar las fórmulas del semiángulo en el caso de la tangente, es necesario determinar primero cos u. Puesto que el coseno es negativo en el cuadrante II, tenemos

$$\cos u = -\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 u}$$

$$= -\sqrt{1-\left(\tfrac{2}{5}\right)^2} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Por consiguiente,
$$\tan\frac{u}{2} = \frac{1-\cos u}{\operatorname{sen} u} = \frac{1+\sqrt{21}/5}{\frac{2}{5}} = \frac{5+\sqrt{21}}{2}$$ ■

Fórmulas del producto-a-suma

Es posible expresar el producto sen u cos v como una suma de funciones trigonométricas. Para comprenderlo, considere las fórmulas de adición y sustracción para el caso de la función seno:

$$\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{sen} u \cos v + \cos u \operatorname{sen} v$$
$$\operatorname{sen}(u-v) = \operatorname{sen} u \cos v - \cos u \operatorname{sen} v$$

Al sumar el primero y el segundo miembros a estas fórmulas tenemos

$$\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) = 2 \operatorname{sen} u \cos v$$

Si dividimos entre 2 llegamos a la fórmula

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$

Las otras tres **fórmulas del producto-a-suma** se deducen de una manera similar a partir de las fórmulas de adición.

Fórmulas del producto-a-suma

$$\operatorname{sen} u \cos v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v)]$$
$$\cos u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(u+v) - \operatorname{sen}(u-v)]$$
$$\cos u \cos v = \tfrac{1}{2}[\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$
$$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \tfrac{1}{2}[\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

Ejemplo 7 Expresión en forma de producto-suma trigonométrico

Exprese sen $3x$ sen $5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

Solución Aplicamos la cuarta fórmula del producto-a-suma con $u = 3x$ y $v = 5x$ y el hecho de que el coseno es una función par para obtener

$$\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x = \tfrac{1}{2}[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)]$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos(-2x) - \tfrac{1}{2}\cos 8x$$
$$= \tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\cos 8x$$ ■

Las fórmulas del producto-a-suma también se pueden aplicar como fórmulas de suma-a-producto. Esto es posible porque el segundo miembro de cada fórmula del producto-a-suma es una suma y el primer miembro es un producto. Por ejemplo, si hacemos

$$u = \frac{x+y}{2} \quad \text{y} \quad v = \frac{x-y}{2}$$

en la primera fórmula del producto-a-suma, tenemos entonces

$$\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}=\tfrac{1}{2}(\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y)$$

de modo que
$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

Las tres **fórmulas de suma-a-producto** restantes se obtienen de manera similar.

Fórmulas suma-a-producto

$$\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y=2\cos\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

Ejemplo 8 Expresión en la forma de un producto de una suma trigonométrica

Exprese sen $7x$ + sen $3x$ en la forma de un producto.

Solución La primera fórmula de suma-a-producto proporciona

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}7x+\operatorname{sen}3x&=2\operatorname{sen}\frac{7x+3x}{2}\cos\frac{7x-3x}{2}\\&=2\operatorname{sen}5x\cos 2x\end{aligned}$$

■

Ejemplo 9 Demostración de una identidad

Verifique la identidad $\dfrac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}{\cos 3x+\cos x}=\tan x$.

Solución Aplicamos la segunda fórmula de suma-a-producto al numerador y la tercera fórmula al denominador.

$$\text{PM}=\frac{\operatorname{sen}3x-\operatorname{sen}x}{\cos 3x+\cos x}=\frac{2\cos\frac{3x+x}{2}\operatorname{sen}\frac{3x-x}{2}}{2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}}\qquad\text{Fórmulas de suma-a-producto}$$

$$=\frac{2\cos 2x\operatorname{sen}x}{2\cos 2x\cos x}\qquad\text{Simplificación}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\tan x=\text{SM}\qquad\text{Cancelación}$$

■

7.3 Ejercicios

1–8 ■ Determinar sen $2x$, cos $2x$ y tan $2x$ a partir de la información proporcionada.

1. $\operatorname{sen} x = \frac{5}{13}$, x en el cuadrante I

2. $\tan x = -\frac{4}{3}$, x en el cuadrante II

3. $\cos x = \frac{4}{5}$, $\csc x < 0$

4. $\csc x = 4$, $\tan x < 0$

5. $\operatorname{sen} x = -\frac{3}{5}$, x en el cuadrante III

6. $\sec x = 2$, x en el cuadrante IV

7. $\tan x = -\frac{1}{3}$, $\cos x > 0$

8. $\cot x = \frac{2}{3}$, $\operatorname{sen} x > 0$

9–14 ■ Aplique las fórmulas para reducir la potencia y poder volver a escribir la expresión en términos de la primera potencia del coseno, como en el ejemplo 4.

9. $\operatorname{sen}^4 x$

10. $\cos^4 x$

11. $\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x$

12. $\cos^4 x \operatorname{sen}^2 x$

13. $\cos^4 x \operatorname{sen}^4 x$

14. $\cos^6 x$

15–26 ■ Utilice una fórmula apropiada de mitad de ángulo o semiángulo para determinar el valor exacto de la expresión.

15. sen 15°

16. tan 15°

17. tan 22.5°

18. sen 75°

19. cos 165°

20. cos 112.5°

21. $\tan \dfrac{\pi}{8}$

22. $\cos \dfrac{3\pi}{8}$

23. $\cos \dfrac{\pi}{12}$

24. $\tan \dfrac{5\pi}{12}$

25. $\operatorname{sen} \dfrac{9\pi}{8}$

26. $\operatorname{sen} \dfrac{11\pi}{12}$

27–32 ■ Simplifique la expresión mediante la aplicación de una fórmula del ángulo doble o una fórmula del semiángulo.

27. a) $2 \operatorname{sen} 18° \cos 18°$ **b)** $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$

28. a) $\dfrac{2 \tan 7°}{1 - \tan^2 7°}$ **b)** $\dfrac{2 \tan 7\theta}{1 - \tan^2 7\theta}$

29. a) $\cos^2 34° - \operatorname{sen}^2 34°$ **b)** $\cos^2 5\theta - \operatorname{sen}^2 5\theta$

30. a) $\cos^2 \dfrac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$ **b)** $2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

31. a) $\dfrac{\operatorname{sen} 8°}{1 + \cos 8°}$ **b)** $\dfrac{1 - \cos 4\theta}{\operatorname{sen} 4\theta}$

32. a) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 30°}{2}}$ **b)** $\sqrt{\dfrac{1 - \cos 8\theta}{2}}$

33. Utilice la fórmula de la adición para el caso del seno con el fin de demostrar la fórmula del ángulo doble para el caso del seno.

34. Aplique la fórmula de la adición para la tangente con el fin de demostrar la fórmula del ángulo doble para la tangente.

35–40 ■ Calcule $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$ y $\tan \dfrac{x}{2}$ a partir de la información proporcionada.

35. $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$, $0° < x < 90°$

36. $\cos x = -\frac{4}{5}$, $180° < x < 270°$

37. $\csc x = 3$, $90° < x < 180°$

38. $\tan x = 1$, $0° < x < 90°$

39. $\sec x = \frac{3}{2}$, $270° < x < 360°$

40. $\cot x = 5$, $180° < x < 270°$

41–46 ■ Exprese el producto en la forma de una suma

41. $\operatorname{sen} 2x \cos 3x$

42. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 5x$

43. $\cos x \operatorname{sen} 4x$

44. $\cos 5x \cos 3x$

45. $3 \cos 4x \cos 7x$

46. $11 \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{4}$

47–52 ■ Escriba la suma como un producto

47. $\operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

48. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 4x$

49. $\cos 4x - \cos 6x$

50. $\cos 9x + \cos 2x$

51. $\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 7x$

52. $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x$

53–58 ■ Calcule el valor del producto o suma.

53. $2 \operatorname{sen} 52.5° \operatorname{sen} 97.5°$

54. $3 \cos 37.5° \cos 7.5°$

55. $\cos 37.5° \operatorname{sen} 7.5°$

56. $\operatorname{sen} 75° + \operatorname{sen} 15°$

57. $\cos 255° - \cos 195°$

58. $\cos \dfrac{\pi}{12} + \cos \dfrac{5\pi}{12}$

59–76 ■ Demuestre la identidad.

59. $\cos^2 5x - \operatorname{sen}^2 5x = \cos 10x$

60. $\operatorname{sen} 8x = 2 \operatorname{sen} 4x \cos 4x$

61. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x$

62. $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

63. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} x} = 4 \cos x \cos 2x$

64. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1 + \frac{1}{2} \sec x \csc x$

65. $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \operatorname{sen} 2x$

66. $\cot 2x = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$

67. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

68. $4(\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3\operatorname{sen}^2 2x$

69. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x = \cos 2x$

70. $\tan^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}$

71. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 5x} = \tan 3x$ **72.** $\dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 7x}{\cos 3x - \cos 7x} = \cot 2x$

73. $\dfrac{\operatorname{sen} 10x}{\operatorname{sen} 9x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$

74. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$

75. $\dfrac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x + y}{2}\right)$

76. $\tan y = \dfrac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$

77. Demuestre que $\operatorname{sen} 130° - \operatorname{sen} 110° = -\operatorname{sen} 10°$.

78. Demuestre que $\cos 100° - \cos 200° = \operatorname{sen} 50°$.

79. Demuestre que $\operatorname{sen} 45° + \operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen} 75°$.

80. Demuestre que $\cos 87° + \cos 33° = \operatorname{sen} 63°$.

81. Demuestre la identidad.

$$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x} = \tan 3x$$

82. Aplique la identidad

$$\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$$

n veces para demostrar que

$$\operatorname{sen}(2^n x) = 2^n \operatorname{sen} x\cos x\cos 2x\cos 4x\cdots\cos 2^{n-1}x$$

83. **a)** Grafique $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos 3x}{\cos x}$ y plantee una conjetura.

b) Demuestre la conjetura que planteó en el inciso a).

84. **a)** Grafique $f(x) = \cos 2x + 2\operatorname{sen}^2 x$ y haga una conjetura.

b) Demuestre la conjetura que formuló en el inciso a).

85. Sea $f(x) = \operatorname{sen} 6x + \operatorname{sen} 7x$.

a) Grafique $y = f(x)$.

b) Verifique que $f(x) = 2\cos\frac{1}{2}x\operatorname{sen}\frac{13}{2}x$.

c) Grafique $y = 2\cos\frac{1}{2}x$ y $y = -2\cos\frac{1}{2}x$, junto con la gráfica del inciso a) en el mismo rectángulo de visión. ¿Cuál es la relación entre estas gráficas y la gráfica de f?

86. Sea $3x = \pi/3$ y $y = \cos x$. Utilice el resultado del ejemplo 2 para mostrar que y cumple con la ecuación

$$8y^3 - 6y - 1 = 0$$

NOTA Esta ecuación tiene raíces de cierta clase que se utilizan para demostrar que el ángulo $\pi/3$ no se puede trisecar usando sólo una regla y compás.

87. **a)** Demuestre que hay un polinomio $P(t)$ de cuarto grado tal que $\cos 4x = P(\cos x)$ (véase ejemplo 2).

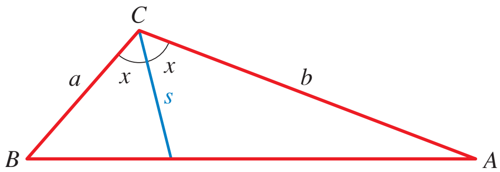
b) Demuestre que hay un polinomio $Q(t)$ de quinto grado tal que $\cos 5x = Q(\cos x)$.

NOTA En general, hay un polinomio $P_n(t)$ de grado n tal que $\cos nx = P_n(\cos x)$. Estos polinomios se denominan *polinomios de Tchebycheff*, en honor al matemático ruso P. L. Tchebycheff (1821-1894).

88. En el triángulo ABC (véase la figura) el segmento de recta s biseca el ángulo C. Demuestre que la longitud de s se determina mediante

$$s = \frac{2ab\cos x}{a + b}$$

[*Sugerencia*: aplique la ley de los senos.]



89. Si A, B y C son los ángulos de un triángulo, demuestre que

$$\operatorname{sen} 2A + \operatorname{sen} 2B + \operatorname{sen} 2C = 4\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C$$

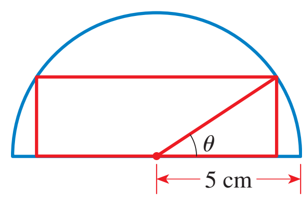
90. Se desea inscribir un rectángulo en un semicírculo de radio igual a 5 cm, según se muestra en la figura.

a) Demuestre que el área del rectángulo está modelada por la función

$$A(\theta) = 25\operatorname{sen} 2\theta$$

b) Encuentre el área más grande posible para tal rectángulo inscrito.

c) Calcule las dimensiones del rectángulo inscrito con el área más grande posible.



Aplicaciones

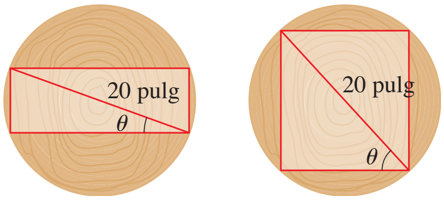
91. Corte de una viga de madera Se desea cortar una viga de sección rectangular de un madero cilíndrico de 20 pulg de diámetro.

a) Demuestre que el área de la sección transversal de la viga está modelada por la función

$$A(\theta) = 200\operatorname{sen} 2\theta$$

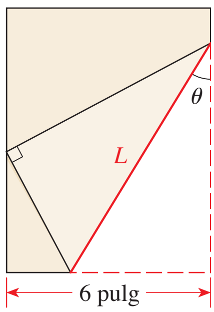
donde θ es como se ilustra en la figura de la página siguiente.

b) Muestre que el área máxima de sección transversal de la viga es 200 in^2. [*Sugerencia*: aplique el hecho de que sen u alcanza su valor máximo en $u = \pi/2$.]



92. Longitud del doblez La esquina inferior derecha de una pieza de papel de 6 pulg de ancho se dobla a la izquierda como se muestra. La longitud L del doblez depende del ángulo θ. Demuestre que

$$L = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta}$$



93. Mezcla de sonidos Cuando se tocan juntas dos notas puras cuyas frecuencias son muy cercanas, sus sonidos interfieren para producir *batimientos*; es decir, la intensidad o amplitud del sonido aumenta y disminuye en forma alterna. Si las dos notas son

$$f_1(t) = \cos 11t \qquad \text{y} \qquad f_2(t) = \cos 13t$$

el sonido resultante es $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

a) Grafique la función $y = f(t)$.

b) Verifique que $f(t) = 2\cos t \cos 12t$.

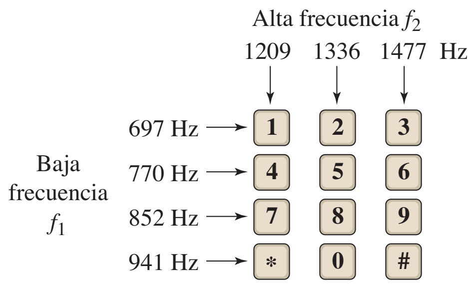
c) Grafique $y = 2\cos t$ y $y = -2\cos t$, junto con la gráfica del inciso a), en el mismo rectángulo de visión. ¿Describen estas gráficas la variación en la intensidad del sonido?

94. Teléfonos por tonos Cuando se presiona una tecla en un teléfono por tonos, se generan dos tonos puros, los cuales se combinan para producir un sonido que identifica exclusivamente a esa tecla. En la figura se muestra la frecuencia baja f_1 y la frecuencia alta f_2 asociadas con cada una de las teclas. Al presionar una tecla se produce la onda sonora $y = \operatorname{sen}(2\pi f_1 t) + \operatorname{sen}(2\pi f_2 t)$.

a) Determine la función que modela el sonido generado cuando se presiona la tecla 4.

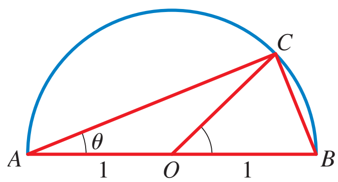
b) Aplique la fórmula de suma-a-producto para expresar el sonido que produce la tecla 4 como un producto de una función seno y una función coseno.

c) Grafique la onda sonora generada por la tecla 4 desde $t = 0$ a $t = 0.006$ s.



Descubrimiento • Debate

95. Demostración geométrica de una fórmula para el ángulo doble Use la figura para demostrar que sen $2\theta = 2$ sen θ cos θ.



Sugerencia: calcule el área del triángulo ABC de dos maneras distintas. Son necesarios los hechos siguientes de la geometría:

Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto, de modo que $\angle ACB$ es un ángulo recto.

El ángulo central que subtiende la cuerda de un círculo es el doble del ángulo que subtiende la cuerda en el círculo, de modo que $\angle BOC$ es 2θ.

7.4 Funciones trigonométricas inversas

Si f es una función uno a uno o biunívoca con dominio A y rango B, entonces su inversa f^{-1} es la función con dominio B y rango A definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

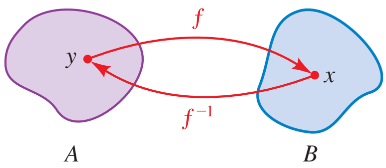


Figura 1
$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

(Véase la sección 2.8.) En otras palabras, f^{-1} es la regla que invierte la acción de f. En la figura 1 se representa gráficamente la acción de f y de f^{-1}.

Para que una función tenga una inversa, debe ser uno a uno. Puesto que las funciones trigonométricas no son uno a uno, no tienen inversas. No obstante, es posible limitar los dominios de las funciones trigonométricas de tal manera que las funciones resultantes sean uno a uno o biunívocas.

La función inversa del seno

Primero consideremos la función seno. Hay muchas maneras de restringir el dominio del seno de modo que la nueva función sea uno a uno. Una manera natural de hacerlo es limitar el dominio al intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$. La razón de esta elección es que el seno alcanza cada uno de estos valores exactamente una vez en este intervalo. Como podemos observar en la figura 2, en este dominio restringido la función seno es uno a uno (por la Prueba de la recta horizontal), de modo que tiene una inversa.

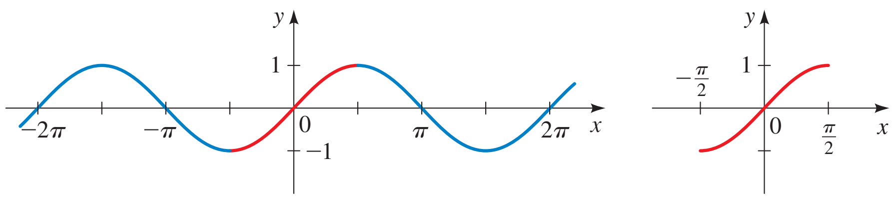


Figura 2 $y = \operatorname{sen} x$ $\quad$ $y = \operatorname{sen} x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

La inversa de la función seno es la función sen^{-1} definida por

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \quad \iff \quad \operatorname{sen} y = x$$

para $-1 \le x \le 1$ y $-\pi/2 \le y \le \pi/2$. La gráfica de $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ se muestra en la figura 3, y se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ en la recta $y = x$.

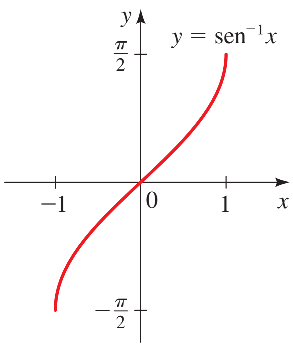


Figura 3

Definición de la función inversa del seno

La **función inversa del seno** es la función $\mathbf{sen^{-1}}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[-\pi/2, \pi/2]$ definido por

$$\operatorname{sen}^{-1} x = y \quad \iff \quad \operatorname{sen} y = x$$

La función inversa del seno también se llama **arco seno** y se escribe como **arcsen**.

Por consiguiente, $\operatorname{sen}^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$ *cuyo seno es* x. En otras palabras, $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x$. De hecho, a partir de las propiedades generales de las funciones inversas estudiadas en la sección 2.8, tenemos las relaciones siguientes.

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} x) = x \qquad \text{para } -1 \le x \le 1$$

$$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Ejemplo 1 Evaluación de la función inversa seno

Determine: a) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$, b) $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ y c) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{2}$.

Solución

a) El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{1}{2}$ es $\pi/6$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2} = \pi/6$.

b) El número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $-\frac{1}{2}$ es $-\pi/6$. Por lo tanto, $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi/6$.

c) Como $\frac{3}{2} > 1$, no está en el dominio de $\operatorname{sen}^{-1} x$, de modo que $\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{2}$ no está definido. ■

Ejemplo 2 Uso de una calculadora para evaluar el seno inverso

Calcule los valores aproximados de a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.82)$ y b) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}$.

Solución Puesto que ningún múltiplo racional de π tiene un seno de 0.82, $\frac{1}{3}$, usamos una calculadora para encontrar un valor aproximado. Usamos las teclas INV SEN, o bien, SEN^{-1}, o bien, ARC SEN de la calculadora (la calculadora debe estar en modo radianes), y obtenemos

a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.82) \approx 0.96141$ b) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} \approx 0.33984$ ■

Ejemplo 3 Combinación de funciones trigonométricas y sus inversas

Calcule $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$.

Solución 1 Es fácil determinar $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$. De hecho, de acuerdo con las propiedades de las funciones inversas, este valor es exactamente $\frac{3}{5}$. Para determinar $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}\right)$, se le reduce al problema más fácil de escribir la función coseno en términos de la función seno. Sea $u = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Como $-\pi/2 \le u \le \pi/2$, $\cos u$ es positiva y podemos escribir

$$\cos u = +\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 u}$$

Por lo tanto,
$$\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right)}$$
$$= \sqrt{1 - \left(\tfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \tfrac{9}{25}} = \sqrt{\tfrac{16}{25}} = \tfrac{4}{5}$$

Solución 2 Sea $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$. Entonces, θ es el número en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ cuyo seno es $\frac{3}{5}$. Interpretemos a θ como un ángulo y dibujemos un triángulo rectángulo con θ como uno de sus ángulos agudos, cuyo cateto opuesto mide 3 y la hipotenusa mide 5 (véase la figura 4). El cateto restante del triángulo se determina mediante el teorema de Pitágoras y resulta ser 4. Según la figura, tenemos

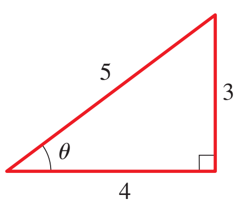


Figura 4

$$\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \cos\theta = \tfrac{4}{5}$$ ■

A partir de la solución 2 del ejemplo 3 podemos calcular inmediatamente los valores de las otras funciones trigonométricas de $\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$ del triángulo. Por lo tanto,

$$\tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{3}{4} \qquad \sec\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{5}{4} \qquad \csc\left(\operatorname{sen}^{-1}\tfrac{3}{5}\right) = \tfrac{5}{3}$$

La función inversa del coseno

Si el dominio de la función coseno se restringe al intervalo $[0, \pi]$, la función resultante es uno a uno, por lo que tiene una inversa. Elegimos este intervalo porque en él el coseno alcanza cada uno de sus valores exactamente una vez (véase la figura 5).

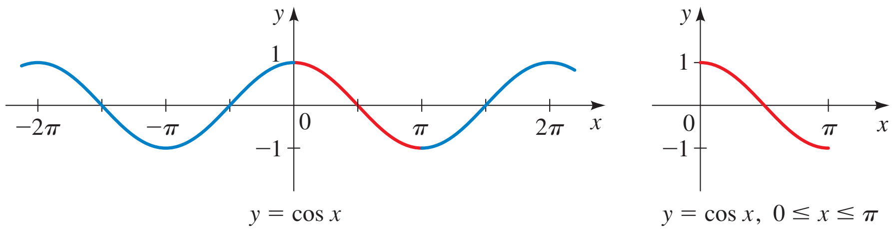


Figura 5

Definición de la función inversa del coseno

La **función inversa del coseno** es la función $\mathbf{cos^{-1}}$ con dominio $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$ definido por

$$\cos^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos y = x$$

La función inversa del coseno también se denomina **arco coseno** y se escribe **arccos**.

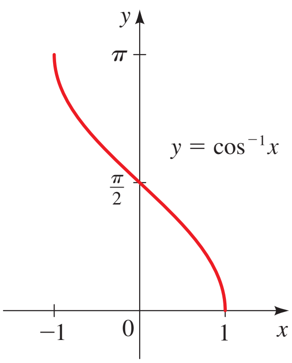


Figura 6

Por consiguiente, $y = \cos^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $[0, \pi]$ *cuyo coseno es* x. Las relaciones siguientes se infieren de las propiedades de las funciones inversas.

$$\cos(\cos^{-1} x) = x \qquad \text{para } -1 \leq x \leq 1$$
$$\cos^{-1}(\cos x) = x \qquad \text{para } 0 \leq x \leq \pi$$

La gráfica de $y = \cos^{-1} x$ se ilustra en la figura 6; se obtiene al reflejar la gráfica de $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \pi$, en la recta $y = x$.

Ejemplo 4 Evaluación de la función inversa del coseno

Calcule: a) $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)$, b) $\cos^{-1} 0$ y c) $\cos^{-1} \frac{5}{7}$.

Solución

a) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es $\sqrt{3}/2$ es $\pi/6$. Por lo tanto, $\cos^{-1}(\sqrt{3}/2) = \pi/6$.

b) El número en el intervalo $[0, \pi]$ cuyo coseno es 0 es $\pi/2$. Por lo tanto, $\cos^{-1} 0 = \pi/2$.

c) Como ningún múltiplo racional de π tiene coseno $\frac{5}{7}$, usamos una calculadora en el modo radianes para determinar su valor aproximado: $\cos^{-1} \frac{5}{7} \approx 0.77519$. ■

Ejemplo 5 Combinación de funciones trigonométricas y sus inversas

Escriba $\operatorname{sen}(\cos^{-1}x)$ y $\tan(\cos^{-1}x)$ como expresiones algebraicas en x para $-1 \le x \le 1$.

Solución 1 Sea $u = \cos^{-1}x$. Es necesario encontrar sen u y tan u en términos de x. Como en el ejemplo 3, la idea en este caso es escribir el seno y la tangente en términos del coseno. Tenemos que

$$\operatorname{sen} u = \pm\sqrt{1 - \cos^2 u} \qquad \text{y} \qquad \tan u = \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} = \frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 u}}{\cos u}$$

Para elegir los signos adecuados, observe que u está en el intervalo $[0, \pi]$ porque $u = \cos^{-1}x$. Como sen u es positivo en este intervalo, el signo $+$ es la elección correcta. Al sustituir $u = \cos^{-1}x$ en las ecuaciones mostradas y aplicar la relación $\cos(\cos^{-1}x) = x$ tenemos

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1}x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

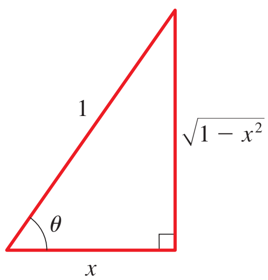


Figura 7

$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

Solución 2 Sea $\theta = \cos^{-1}x$, de modo que $\cos\theta = x$. En la figura 7 hay un triángulo rectángulo con un ángulo agudo θ, cateto adyacente x e hipotenusa igual a 1. Según el teorema de Pitágoras, el cateto faltante mide $\sqrt{1 - x^2}$. De acuerdo con la figura,

$$\operatorname{sen}(\cos^{-1}x) = \operatorname{sen}\theta = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{y} \qquad \tan(\cos^{-1}x) = \tan\theta = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$ ■

NOTA En la solución 2 del ejemplo 5 podría parecer que como estamos dibujando, el ángulo $\theta = \cos^{-1} x$ debe ser agudo. Pero resulta que el método del triángulo funciona para cualquier θ y para cualquier x. Los dominios y los rangos de las seis funciones trigonométricas inversas han sido escogidos de tal manera que podemos usar siempre un triángulo para determinar $S(T^{-1}(x))$, donde S y T son funciones trigonométricas cualquiera.

Ejemplo 6 Combinación de función trigonométrica y una inversa

Escriba $\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x)$ como una expresión algebraica en x para $-1 \le x \le 1$.

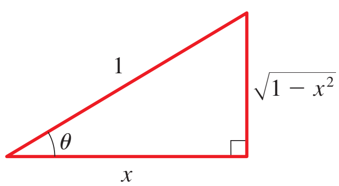


Figura 8

$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$

Solución Sea $\theta = \cos^{-1}x$ y dibuje un triángulo como el mostrado en la figura 8. Necesitamos determinar sen 2θ, pero a partir del triángulo podemos determinar funciones trigonométricas sólo de θ, no de 2θ. La identidad del ángulo doble para el seno es útil en este caso. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2\cos^{-1}x) &= \operatorname{sen} 2\theta \\
&= 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta && \text{Fórmula para el ángulo doble} \\
&= 2\left(\sqrt{1 - x^2}\right)x && \text{Según el triángulo} \\
&= 2x\sqrt{1 - x^2}
\end{aligned}$$ ■

La función inversa de la tangente

Restringimos el dominio de la función tangente al intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con objeto de obtener una función uno a uno.

Definición de la función inversa de la tangente

La **función inversa de la tangente** es la función $\mathbf{tan^{-1}}$ con dominio $\mathbb{R}$ y rango $(-\pi/2, \pi/2)$ definida por

$$\tan^{-1} x = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan y = x$$

La función inversa de la tangente también recibe el nombre de **arco tangente** y se escribe **arctan**.

Por lo tanto, $\tan^{-1} x$ *es el número en el intervalo* $(-\pi/2, \pi/2)$ *cuya tangente es* x. Las relaciones siguientes se infieren de las propiedades inversas de las funciones.

$$\tan(\tan^{-1} x) = x \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}$$
$$\tan^{-1}(\tan x) = x \qquad \text{para } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

En la figura 9 se observa la gráfica de $y = \tan x$ en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ y la gráfica de su función inversa, $y = \tan^{-1} x$.

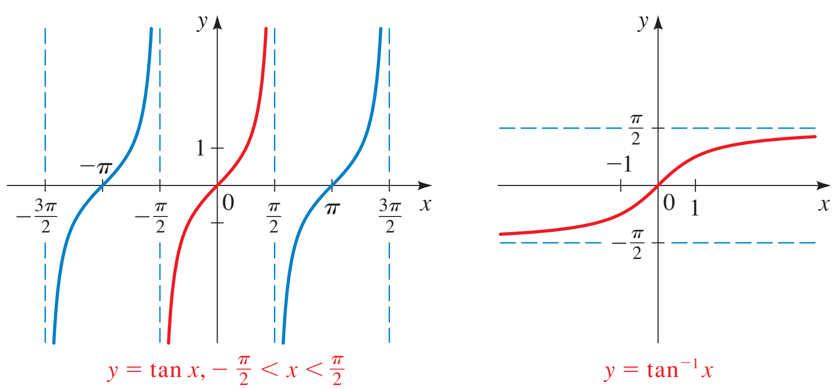


Figura 9

Ejemplo 7 Evaluación de la función inversa de la tangente

Determinar: a) $\tan^{-1} 1$, b) $\tan^{-1}\sqrt{3}$ y c) $\tan^{-1}(-20)$.

Solución

a) El número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ con tangente 1 es $\pi/4$. Por lo tanto, $\tan^{-1} 1 = \pi/4$.

b) El número en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ cuya tangente es $\sqrt{3}$ es $\pi/3$. Por lo tanto, $\tan^{-1}\sqrt{3} = \pi/3$.

c) Usamos una calculadora para determinar que $\tan^{-1}(-20) \approx -1.52084$. ■

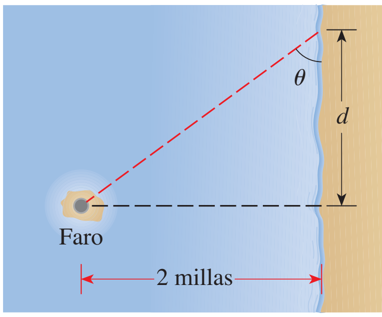


Figura 10

Ejemplo 8 El ángulo de un rayo de luz

Un faro está situado en una isla que está a dos millas fuera de la costa (véase la figura 10). Exprese el ángulo formado por el haz de luz y la costa en términos de la distancia d en la figura.

Solución A partir de la figura vemos que $\tan\theta = 2/d$. Si obtenemos la tangente inversa de ambos miembros, tenemos

$$\tan^{-1}(\tan\theta) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right)$$

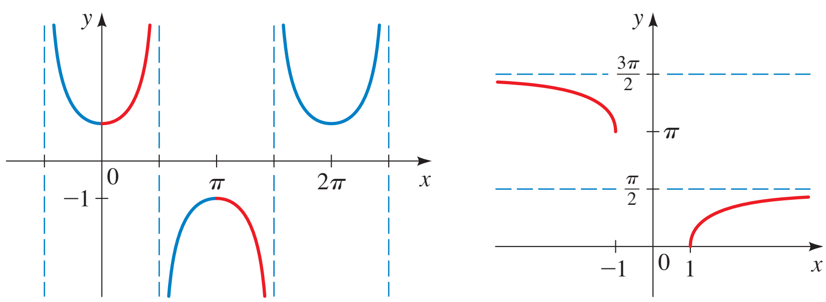
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{d}\right) \qquad \text{Propiedad de cancelación}$$

■

Las funciones inversas de la secante, cosecante y cotangente

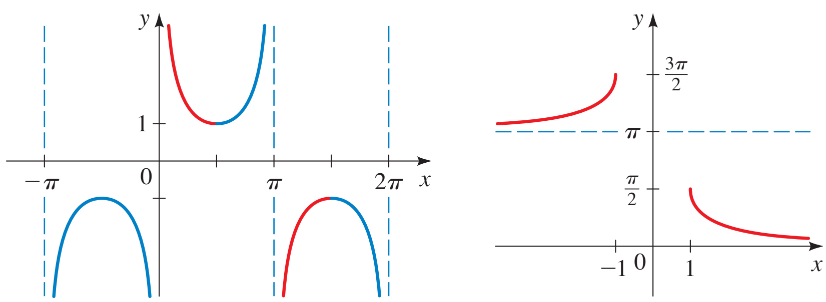
Refiérase al ejercicio 59 en donde se trata la determinación de las funciones trigonométricas inversas mediante una calculadora.

Para definir las funciones inversas de las funciones secante, cosecante y cotangente, restringimos el dominio de cada función a un conjunto en el cual dicha función es uno a uno y en el cual alcanza todos sus valores. Cualquier intervalo que cumpla estos criterios es adecuado, pero elegimos limitar el dominio de manera que se simplifique la elección del signo en los cálculos que se relacionan con funciones trigonométricas inversas. Las elecciones que efectuamos son también adecuadas para el cálculo infinitesimal. Esto explica la restricción aparentemente extraña de los dominios de las funciones secante y cosecante. La sección finaliza con las gráficas de las funciones secante, cosecante y cotangente con sus dominios restringidos y las gráficas de las funciones inversas (figuras 11 a 13).



$y = \sec x,\ 0 \le x < \frac{\pi}{2},\ \pi \le x < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad y = \sec^{-1} x$

Figura 11
La función secante inversa



$y = \csc x,\ 0 < x \le \frac{\pi}{2},\ \pi < x \le \frac{3\pi}{2}$ $\qquad y = \csc^{-1} x$

Figura 12
La función cosecante inversa

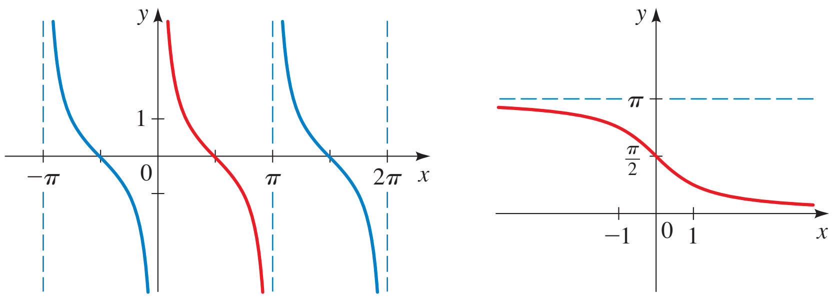


Figura 13
La función cotangente inversa

$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ $\qquad$ $y = \cot^{-1} x$

7.4 Ejercicios

1–8 ■ Calcule el valor exacto de cada una de las expresiones, si está definida.

1. a) $\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}$ **b)** $\cos^{-1} \frac{1}{2}$ **c)** $\cos^{-1} 2$

2. a) $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **c)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

3. a) $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **b)** $\cos^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. a) $\tan^{-1} \sqrt{3}$ **b)** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1} \sqrt{3}$

5. a) $\operatorname{sen}^{-1} 1$ **b)** $\cos^{-1} 1$ **c)** $\cos^{-1}(-1)$

6. a) $\tan^{-1} 1$ **b)** $\tan^{-1}(-1)$ **c)** $\tan^{-1} 0$

7. a) $\tan^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **b)** $\tan^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}(-2)$

8. a) $\operatorname{sen}^{-1} 0$ **b)** $\cos^{-1} 0$ **c)** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

9–12 ■ Por medio de una calculadora halle un valor aproximado de cada una de las expresiones con cinco cifras decimales, si está definida.

9. a) $\operatorname{sen}^{-1}(0.13844)$
b) $\cos^{-1}(-0.92761)$

10. a) $\cos^{-1}(0.31187)$
b) $\tan^{-1}(26.23110)$

11. a) $\tan^{-1}(1.23456)$
b) $\operatorname{sen}^{-1}(1.23456)$

12. a) $\cos^{-1}(-0.25713)$
b) $\tan^{-1}(-0.25713)$

13–28 ■ Calcule el valor exacto de la expresión, si está definida.

13. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{4}\right)$

14. $\cos\left(\cos^{-1} \frac{2}{3}\right)$

15. $\tan(\tan^{-1} 5)$

16. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 5)$

17. $\cos^{-1}\left(\cos \dfrac{\pi}{3}\right)$

18. $\tan^{-1}\left(\tan \dfrac{\pi}{6}\right)$

19. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

20. $\operatorname{sen}^{-1}\left(\operatorname{sen} \dfrac{5\pi}{6}\right)$

21. $\tan^{-1}\left(\tan \dfrac{2\pi}{3}\right)$

22. $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

23. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2}\right)$

24. $\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1} 0)$

25. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

26. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

27. $\tan^{-1}\left(2 \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}\right)$

28. $\cos^{-1}\left(\sqrt{3} \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6}\right)$

29–40 ■ Evalúe las expresiones dibujando un triángulo, como en la solución 2 del ejemplo 3.

29. $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

30. $\tan\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{4}{5}\right)$

31. $\operatorname{sen}\left(\tan^{-1} \frac{12}{5}\right)$

32. $\cos(\tan^{-1} 5)$

33. $\sec\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{12}{13}\right)$

34. $\csc\left(\cos^{-1} \frac{7}{25}\right)$

35. $\cos(\tan^{-1} 2)$

36. $\cot\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{2}{3}\right)$

37. $\operatorname{sen}\left(2 \cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

38. $\tan\left(2 \tan^{-1} \frac{5}{13}\right)$

39. $\operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{1}{2} + \cos^{-1} \frac{1}{2}\right)$

40. $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1} \frac{3}{5} - \cos^{-1} \frac{3}{5}\right)$

41–48 ■ Vuelva a escribir las expresiones en forma de una expresión algebraica en x.

41. $\cos(\operatorname{sen}^{-1} x)$

42. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

43. $\tan(\operatorname{sen}^{-1} x)$

44. $\cos(\tan^{-1} x)$

45. $\cos(2 \tan^{-1} x)$

46. $\operatorname{sen}(2 \operatorname{sen}^{-1} x)$

47. $\cos(\cos^{-1} x + \operatorname{sen}^{-1} x)$

48. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x - \operatorname{sen}^{-1} x)$

49–50 ■ **a)** Grafique la función y plantee una conjetura, y **b)** demuestre que la conjetura planteada es verdadera.

49. $y = \operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x$

50. $y = \tan^{-1} x + \tan^{-1} \dfrac{1}{x}$

51–52 ■ **a)** Por medio de una calculadora o una computadora determine todas las soluciones de la ecuación con dos cifras decimales y **b)** encuentre la solución exacta.

51. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} 2x = \dfrac{\pi}{4}$

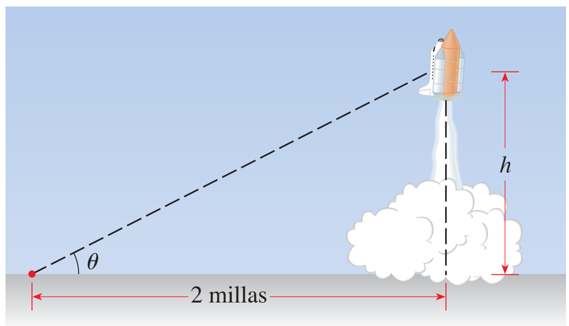
52. $\operatorname{sen}^{-1} x - \cos^{-1} x = 0$

Aplicaciones

53. Altura del transbordador espacial Un observador mira al transbordador a dos millas de la plataforma de lanzamiento.

a) Exprese la altura del transbordador espacial en función del ángulo de elevación θ.

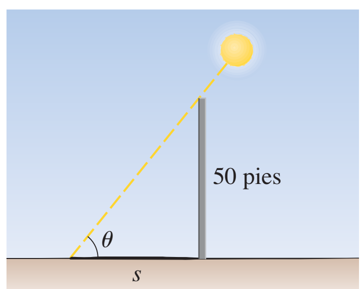
b) Exprese el ángulo de elevación θ en función de la altura h del transbordador espacial



54. Altura de un poste Un poste de 50 pies arroja una sombra como se ilustra en la figura.

a) Exprese el ángulo de elevación θ del Sol en función del largo s de la sombra.

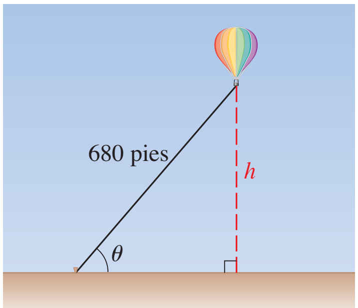
b) Calcule el ángulo θ de la elevación del Sol cuando la sombra mide 20 pies de largo



55. Altura del globo Una cuerda de 680 pies mantiene anclado a un globo de aire caliente como se muestra en la figura.

a) Exprese el ángulo θ en función de la altura h del globo.

b) Calcule el ángulo θ si el globo está a 500 pies de altura.



56. Vista desde un satélite Las figuras señalan que a medida que es más alta la órbita de un satélite, más es lo que puede "ver" el satélite de la Tierra. Sean θ, s y h las de la figura y suponga que la Tierra es una esfera de radio 3960 millas.

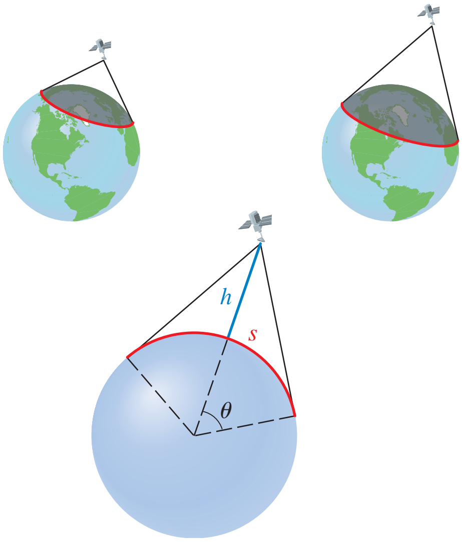
a) Exprese el ángulo θ en función de h.

b) Dé la distancie s en función de θ.

c) Exprese la distancia s en función de h. [*Sugerencia:* determine la combinación de las funciones en los incisos a) y b).]

d) Si el satélite está a 100 millas por arriba de la Tierra, ¿cuál es la distancia s que puede ver?

e) ¿Qué tan alto tiene que estar el satélite para que pueda ver tanto Los Ángeles como Nueva York, que están separadas 2450 millas?



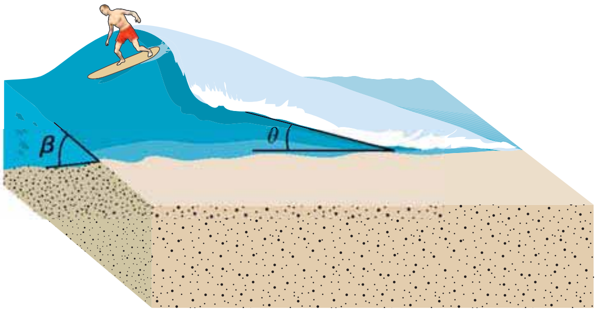
57. Surfing en la ola perfecta Para que se pueda surfear en una ola, ésta no se tiene que romper toda al mismo tiempo. Robert Guza y Tony Bowen han demostrado que una ola tiene una curva en la que se puede surfear si ésta golpea a la playa con un ángulo θ dado por

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{(2n+1)\tan\beta}\right)$$

donde β es el ángulo al cual desciende la playa y donde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

a) Calcule θ cuando $n = 3$ para $\beta = 10°$.

b) Calcule θ cuando $n = 2$, 3 y 4 para $\beta = 15°$. Explique por qué la fórmula no proporciona un valor de θ cuando $n = 0$ o 1.



Descubrimiento • Debate

58. Dos combinaciones distintas Las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen} x)$$

simplifican a x con valores aceptables de x. Pero estas funciones no son las mismas para todas las x. Grafique tanto f como g para mostrar qué tanto difieren las funciones. (Piense con todo cuidado sobre el dominio y el rango de sen^{-1}.)

59. Funciones trigonométricas inversas en calculadora La mayor parte de las calculadoras no tiene teclas para $\sec^{-1}$, $\csc^{-1}$ o $\cot^{-1}$. Demuestre las siguientes identidades, luego utilícelas junto con una calculadora para determinar $\sec^{-1} 2$, $\csc^{-1} 3$ y $\cot^{-1} 4$.

$$\sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geq 1$$

$$\csc^{-1}x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \geq 1$$

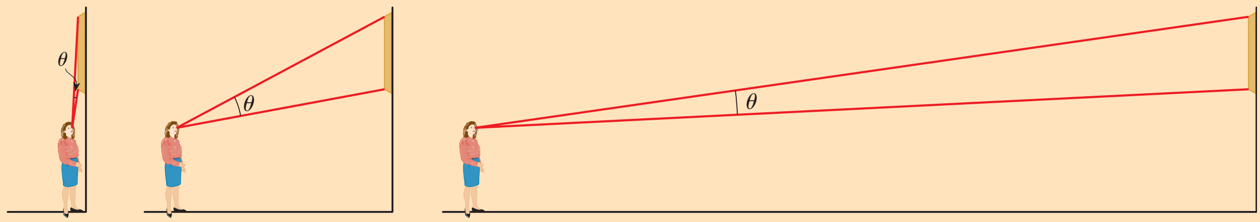
$$\cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

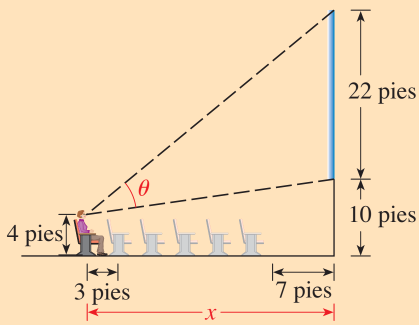
Dónde sentarse en el cine

Todo mundo sabe que las dimensiones aparentes de un objeto dependen de su distancia al observador. Entre más lejano esté un objeto, más pequeñas son sus dimensiones aparentes. El tamaño aparente está determinado por el ángulo que el objeto subtiende en el ojo del observador.

Si usted está mirando una pintura que cuelga de una pared, ¿qué tan lejos tiene que estar para obtener la vista máxima? Si la pintura cuelga por arriba del nivel de sus ojos, entonces las siguientes figuras muestran que el ángulo subtendido en el ojo es pequeño si usted está demasiado cerca o demasiado lejos. La misma situación se presenta cuando elegimos dónde sentarnos en la sala de cine.



1. La pantalla de la sala mide 22 pies de alto y está colocada a 10 pies por arriba del piso, el cual es plano. La primera hilera de asientos está a 7 pies de la pantalla y las hileras están separadas 3 pies. Usted decide sentarse en la hilera donde tiene la máxima visión, es decir, donde es máximo el ángulo θ que subtiende la pantalla en sus ojos. Suponga que sus ojos están a 4 pies por arriba del piso, como en la figura, y se sienta a una distancia x de la pantalla.

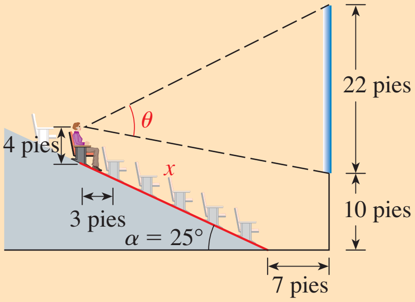


a) Demuestre que $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{28}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{6}{x}\right)$.

b) Aplique la fórmula de sustracción para la tangente para demostrar que

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{22x}{x^2 + 168}\right)$$

c) Utilice una calculadora o una computadora para graficar θ en función de x. ¿Qué valor de x hace máximo a θ? ¿En qué hilera se debe sentar? ¿Cuál es el ángulo de visión en esta hilera?



2. Ahora suponga que, si empezamos en la primera hilera de asientos, el piso del área donde se encuentran éstos se eleva con un ángulo $a = 25°$ con respecto a la horizontal, y la distancia inclinada hasta donde usted se sienta es x, como se muestra en la figura.

a) Utilice la ley de los cosenos para demostrar que

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - 484}{2ab}\right)$$

donde

$$a^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (28 - x\operatorname{sen}\alpha)^2$$

y

$$b^2 = (7 + x\cos\alpha)^2 + (x\operatorname{sen}\alpha - 6)^2$$

b) Utilice una calculadora o una computadora para graficar θ en función de x, y estimar el valor de x que hace máximo a θ. ¿En qué hilera se debe sentar? ¿Cuál es el ángulo de visión θ en esta hilera?

7.5 Ecuaciones trigonométricas

Una ecuación que contiene funciones trigonométricas se denomina **ecuación trigonométrica**. Por ejemplo, las expresiones siguientes son ecuaciones trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \tan^2 2x - 1 = 0$$

La primera ecuación es una *identidad*, es decir, es cierta para todo valor de la variable x. Las otras dos ecuaciones se cumplen sólo para ciertos valores de x. Para resolver una ecuación trigonométrica, calculamos todos los valores de la variable que hacen que la ecuación sea cierta. Siempre usaremos radianes para la variable excepto en algunos problemas de aplicación.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Para resolver una ecuación trigonométrica, aplicamos las reglas del álgebra para aislar la función trigonométrica en un lado del signo igual. Luego usamos los conocimientos de los valores de las funciones trigonométricas para determinar la variable.

Ejemplo 1 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $2\operatorname{sen} x - 1 = 0$.

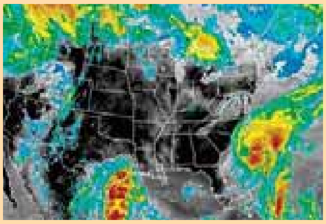
Solución Empezamos por aislar sen x.

$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\operatorname{sen} x = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$

Matemáticas en el mundo moderno



Getty Images

Pronóstico del tiempo

Los meteorólogos modernos hacen mucho más que predecir el tiempo de mañana. Investigan patrones climáticos de larga duración, el adelgazamiento de la capa de ozono, el calentamiento global y otros efectos de la actividad humana en el clima. Pero el pronóstico diario del clima es aún una parte principal de la meteorología. Su valor se mide por las innumerables vidas humanas que se salvan todos los años gracias a los pronósticos exactos de huracanes, tempestades de nieve y otros fenómenos catastróficos del clima. A principios del siglo XX los matemáticos propusieron modelar el clima con ecuaciones que usaban los valores actuales de cientos de variables atmosféricas. Aunque este modelo funcionó al principio, fue imposible predecir patrones futuros del clima mediante este modelo debido a la dificultad de medir con exactitud todas las variables y resolver todas las ecuaciones. En la actualidad, los nuevos modelos matemáticos combinados con simulaciones en computadoras de alta velocidad han mejorado en forma notable la predicción del clima. Como resultado, se han evitado muchas muertes así como desastres económicos. Los matemáticos del National Oceanographic and Atmospheric Administration, NOAA (Centro Nacional de Oceanografía y de la Atmósfera) investigan en forma continua mejores métodos para pronosticar el clima..

Puesto que el seno tiene un periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$. Éstas son $x = \pi/6$ y $x = 5\pi/6$. Para determinar todas las otras soluciones sumamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. En la figura 1 se ilustra una representación gráfica de las soluciones.

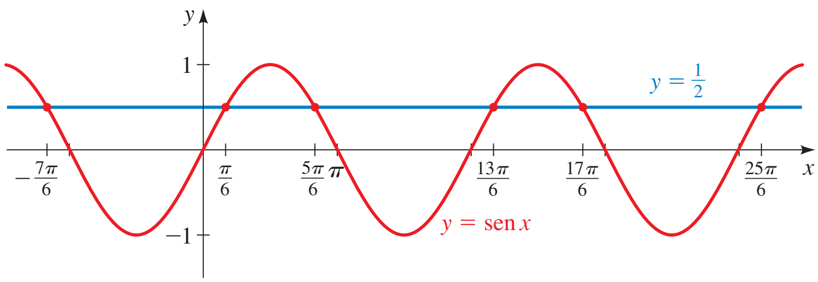


Figura 1

■

Ejemplo 2 Resolución de una ecuación trigonométrica

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - 3 = 0$.

Solución Empezamos por aislar a $\tan x$.

$\tan^2 x - 3 = 0$	Ecuación dada
$\tan^2 x = 3$	Suma de 3
$\tan x = \pm\sqrt{3}$	Obtención de las raíces cuadradas

Como la tangente tiene periodo π, primero determinamos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, que son $x = -\pi/3$ y $x = \pi/3$. Para determinar todas las otras soluciones, sumamos cualquier entero múltiplo de π a dichas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

Ejemplo 3 Determinación de los puntos de intersección

Calcule los valores de x en los cuales se cortan las gráficas de $f(x) = \operatorname{sen} x$ y $g(x) = \cos x$.

Solución 1: Gráfica

Las gráficas se cortan donde $f(x) = g(x)$. En la figura 2 se ilustra $y_1 = \operatorname{sen} x$ y $y_2 = \cos x$ en la misma pantalla, para x entre 0 y 2π. Al usar `TRACE` o el comando `Intersect` en la calculadora para graficar, observamos que los dos puntos de corte en este intervalo se presentan donde $x \approx 0.785$ y $x \approx 3.927$. Como el seno y el coseno son periódicos en el periodo 2π, los puntos de intersección se presentan donde

$$x \approx 0.785 + 2k\pi \qquad \text{y} \qquad x \approx 3.927 + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

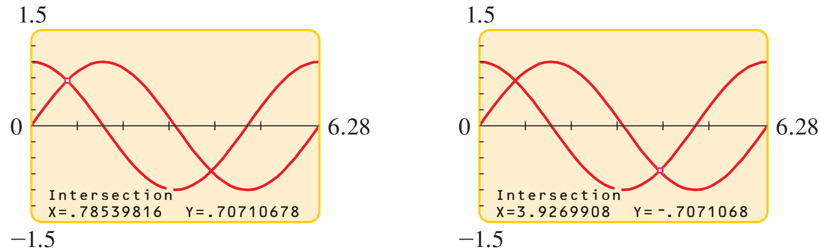


Figura 2 a) b)

Solución 2: Algebraica

Para hallar la solución exacta, hacemos $f(x) = g(x)$ y resolvemos algebraicamente la ecuación resultante.

$$\operatorname{sen} x = \cos x \qquad \text{Igualación de funciones}$$

Puesto que los números de x para los cuales $\cos x = 0$ no son soluciones de la ecuación, podemos dividir ambos miembros entre $\cos x$.

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1 \qquad \text{División entre } \cos x$$

$$\tan x = 1 \qquad \text{Identidad recíproca}$$

Puesto que la tangente tiene periodo π, primero encontramos las soluciones en el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. La única solución en este intervalo es $x = \pi/4$. Para obtener todas las soluciones sumamos cualquier entero múltiplo de π a esta solución. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. Las gráficas se cortan para estos valores de x. Utilice su calculadora para comprobar que estos son los mismos valores, con tres cifras decimales, que obtuvimos en la solución 1. ■

Resolución de ecuaciones trigonométricas mediante factorización

Propiedad del producto nulo
Si $AB = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

La factorización es una de las técnicas más útiles para resolver ecuaciones, sin olvidar las ecuaciones trigonométricas. La idea es pasar todos los términos a un lado de la ecuación, factorizar, y luego usar la propiedad del producto nulo (véase la sección 1.5).

Ejemplo 4 Una ecuación de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0.2$.

Solución Factorizamos el primer miembro de la ecuación.

Ecuación de tipo cuadrático
$2C^2 - 7C + 3 = 0$
$(2C - 1)(C - 3) = 0$

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x - 3) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$2\cos x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \cos x - 3 = 0 \qquad \text{Cada factor se iguala a 0}$$

$$\cos x = \tfrac{1}{2} \quad \text{o} \quad \cos x = 3 \qquad \text{Determinación de } \cos x$$

Puesto que el coseno tiene periodo de 2π, primero calculamos las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$. En el caso de la primera ecuación, son $x = \pi/3$ y $x = 5\pi/3$. La segunda ecuación no tiene soluciones porque $\cos x$ nunca es mayor que 1. Por consiguiente, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

Ejemplo 5 Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x$.

Solución Usamos una identidad trigonométrica para volver a escribir la ecuación en términos de una sola función trigonométrica.

$$1 + \operatorname{sen} x = 2\cos^2 x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$1 + \operatorname{sen} x = 2(1 - \operatorname{sen}^2 x) \qquad \text{Identidad pitagórica}$$

$$2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \text{Todos los términos se pasan a un solo lado de la ecuación}$$

Ecuación de tipo cuadrático

$$2S^2 + S - 1 = 0$$

$$(2S - 1)(S + 1) = 0$$

$$(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x + 1 = 0 \qquad \text{Todos los factores se igualan a 0}$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} x = -1 \qquad \text{Determinación de sen } x$$

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad \text{o} \quad x = \frac{3\pi}{2} \qquad \text{Determinación de } x \text{ en el intervalo } [0, 2\pi)$$

Como el periodo del seno es 2π, obtenemos todas las soluciones de la ecuación sumando cualquier entero múltiplo de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ■

Ejemplo 6 Uso de una identidad trigonométrica

Resuelva la ecuación $\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0$.

Solución El primer término es una función de $2x$ y el segundo es una función de x, de modo que empezamos por usar una identidad trigonométrica para volver a escribir el primer término sólo en función de x.

$$\operatorname{sen} 2x - \cos x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2\operatorname{sen} x\cos x - \cos x = 0 \qquad \text{Fórmula del ángulo doble}$$

$$\cos x\,(2\operatorname{sen} x - 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$\cos x = 0 \quad \text{o} \quad 2\ \text{sen}\ x - 1 = 0$$ *Cada factor se iguala a 0*

$$\text{sen}\ x = \frac{1}{2}$$ *Determinación de sen x*

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$ *Determinación de x en el intervalo [0, 2π)*

El periodo tanto del seno como del coseno es 2π, de modo que obtenemos todas las soluciones de la ecuación mediante la adición de un múltiplo entero cualquiera de 2π a estas soluciones. Por lo tanto, las soluciones son

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \qquad x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \qquad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

donde k es un entero cualquiera. ■

Ejemplo 7 Elevación al cuadrado y uso de una identidad

Resuelva la ecuación $\cos x + 1 = \text{sen}\ x$ en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución Para obtener una ecuación que contenga sólo seno o sólo coseno, elevamos ambos miembros y aplicamos la identidad pitagórica.

$$\cos x + 1 = \text{sen}\ x$$ *Ecuación dada*

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \text{sen}^2 x$$ *Se elevan al cuadrado ambos miembros*

$$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$$ *Identidad pitagórica*

$$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$$ *Simplificación*

$$2\cos x\,(\cos x + 1) = 0$$ *Factorización*

$$2\cos x = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos x + 1 = 0$$ *Se iguala cada factor a 0*

$$\cos x = 0 \quad \text{o bien} \quad \cos x = -1$$ *Determinación de cos x*

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \pi$$ *Determinación de x en el intervalo [0, 2π)*

Puesto que elevamos al cuadrado ambos lados, necesitamos comprobar si hay soluciones extrañas. De acuerdo con *Compruebe su respuesta* observamos que las soluciones de la ecuación dada son $\pi/2$ y π.

■

Compruebe su respuesta

$x = \frac{\pi}{2}$:

$$\cos\frac{\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \text{sen}\frac{\pi}{2}$$

$$0 + 1 = 1 \quad ✓$$

$x = \frac{3\pi}{2}$:

$$\cos\frac{3\pi}{2} + 1 \stackrel{?}{=} \text{sen}\frac{3\pi}{2}$$

$$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1 \quad ✗$$

$x = \pi$:

$$\cos\pi + 1 \stackrel{?}{=} \text{sen}\ \pi$$

$$-1 + 1 = 0 \quad ✓$$

Si ejecutamos una operación en una ecuación que podría introducir nuevas raíces, tal como elevar al cuadrado ambos miembros, entonces debemos verificar que las soluciones que se obtienen no son extrañas; es decir, es necesario comprobar que cumplen con la ecuación original, como en el ejemplo 7.

Ecuaciones con funciones trigonométricas de ángulos múltiples

Cuando se resuelven ecuaciones trigonométricas que contienen funciones de múltiplos de ángulos, primero se determina el múltiplo del ángulo y luego se divide para hallar el ángulo.

Ejemplo 8 Funciones trigonométricas de ángulos múltiples

Considere la ecuación $2 \text{ sen } 3x - 1 = 0$.

a) Calcule todas las soluciones de la ecuación.

b) Encuentre las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Empezamos por aislar a sen $3x$, y luego determinamos el ángulo múltiple $3x$.

$$2 \text{ sen } 3x - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2 \text{ sen } 3x = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\text{sen } 3x = \frac{1}{2} \qquad \text{División entre 2}$$

$$3x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \qquad \text{Determinación de } 3x \text{ en el intervalo } [0, 2\pi)$$

Para obtener todas las soluciones, adicionamos cualquier múltiplo entero de 2π a estas soluciones. Por consiguiente, las soluciones son de la forma

$$3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \qquad 3x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

Para determinar x, dividimos entre 3 para conocer las soluciones

$$x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, \qquad x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$$

donde k es cualquier entero.

b) Las soluciones del inciso a) que están en el intervalo $[0, 2\pi)$ corresponden a $k = 0$, 1 y 2. Para todos los otros valores de k, los valores correspondientes de x quedan fuera de este intervalo. Por lo tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$$

■

Ejemplo 9 Funciones trigonométricas de ángulos múltiples

Considere la ecuación $\sqrt{3} \tan \frac{x}{2} - 1 = 0$.

a) Calcular todas las soluciones de la ecuación.

b) Determinar las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$.

Solución

a) Empezamos por aislar $\tan(x/2)$.

$$\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} = 1 \qquad \text{Suma de 1}$$

$$\tan\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \text{División entre } \sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} \qquad \text{Determinación de } \frac{x}{2} \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como la tangente tiene periodo π, para obtener todas las soluciones adicionamos cualquier múltiplo entero de π a esta solución. Por lo tanto, las soluciones son de la forma.

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

Al multiplicar por 2, obtenemos las soluciones

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

donde k es cualquier entero.

b) Las soluciones del inciso a) que están en el intervalo $[0, 4\pi)$ corresponden a $k = 0$ y $k = 1$. Para todos los otros valores de k, los valores correspondientes de x quedan fuera de este intervalo. Por lo tanto, las soluciones en el intervalo $[0, 4\pi)$ son

$$x = \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$$

■

Aplicación de las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones trigonométricas

Hasta este momento, todas las ecuaciones que hemos resuelto tienen soluciones como $\pi/4$, $\pi/3$, $5\pi/6$ y así sucesivamente. Pudimos calcular las soluciones a partir de los valores especiales de las funciones trigonométricas que hemos memorizado. A continuación consideramos ecuaciones cuya solución requiere que usemos las funciones trigonométricas inversas.

Ejemplo 10 Aplicación de las funciones trigonométricas inversas

Resuelva la ecuación $\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$.

Solución Empezamos por factorizar el primer miembro.

Ecuación de tipo cuadrático

$$T^2 - T - 2 = 0$$

$$(T - 2)(T + 1) = 0$$

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(\tan x - 2)(\tan x + 1) = 0 \qquad \text{Factorización}$$

$$\tan x - 2 = 0 \quad \text{o bien} \quad \tan x + 1 = 0 \qquad \text{Se iguala cada factor a 0}$$

$$\tan x = 2 \quad \text{o bien} \quad \tan x = -1 \qquad \text{Determinación de } \tan x$$

$$x = \tan^{-1} 2 \quad \text{o bien} \quad x = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{Determinación de } x \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Como el periodo de la tangente es π, obtenemos todas las soluciones sumando múltiplos enteros de π a estas soluciones. Por lo tanto, todas las soluciones son

$$x = \tan^{-1} 2 + k\pi, \qquad x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

donde k es cualquier entero. ■

Si estamos usando funciones trigonométricas para resolver una ecuación, es necesario tener en cuenta que sen^{-1} y $\tan^{-1}$ proporcionan valores en los cuadrantes I y IV, y $\cos^{-1}$ proporciona los valores en los cuadrantes I y II. Para hallar otras soluciones, debemos examinar el cuadrante donde la función trigonométrica de la ecuación puede asumir el valor que necesitamos.

Ejemplo 11 Uso de las funciones trigonométricas inversas

a) Resolver la ecuación $3 \text{ sen } \theta - 2 = 0$.

b) Por medio de una calculadora determine el valor aproximado de las soluciones con cinco cifras decimales en el intervalo $[0, 2\pi)$.

Solución

a) Empezamos por aislar sen θ.

$$3 \text{ sen } \theta - 2 = 0 \quad \text{Ecuación dada}$$

$$3 \text{ sen } \theta = 2 \quad \text{Suma de 2}$$

$$\text{sen } \theta = \frac{2}{3} \quad \text{División entre 3}$$

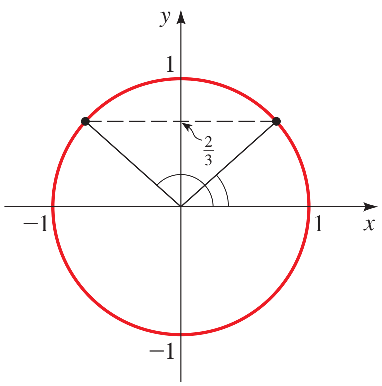


Figura 3

Según la figura 3 vemos que sen θ es igual a $\frac{2}{3}$ en los cuadrantes I y II. La solución en el cuadrante I es $\theta = \text{sen}^{-1} \frac{2}{3}$. La solución en el cuadrante II es $\theta = \pi - \text{sen}^{-1} \frac{2}{3}$. Puesto que estas son las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$, obtenemos todas las otras soluciones sumando múltiplos enteros de 2π a dichas soluciones. Por lo tanto, todas las soluciones de la ecuación son

$$\theta = \left(\text{sen}^{-1} \tfrac{2}{3}\right) + 2k\pi, \qquad \theta = \left(\pi - \text{sen}^{-1} \tfrac{2}{3}\right) + 2k\pi$$

donde k es un entero.

b) Mediante una calculadora puesta en modo radianes, observamos que $\text{sen}^{-1} \frac{2}{3} \approx 0.72973$ y $\pi - \text{sen}^{-1} \frac{2}{3} \approx 2.41186$, de modo que las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ son

$$\theta \approx 0.72973, \qquad \theta \approx 2.41186$$ ■

7.5 Ejercicios

1–40 ■ Calcule todas las soluciones de las ecuaciones.

1. $\cos x + 1 = 0$

2. $\text{sen } x + 1 = 0$

3. $2 \text{ sen } x - 1 = 0$

4. $\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$

5. $\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$

6. $\cot x + 1 = 0$

7. $4 \cos^2 x - 1 = 0$

8. $2 \cos^2 x - 1 = 0$

9. $\sec^2 x - 2 = 0$

10. $\csc^2 x - 4 = 0$

11. $3 \csc^2 x - 4 = 0$

12. $1 - \tan^2 x = 0$

13. $\cos x \,(2 \text{ sen } x + 1) = 0$

14. $\sec x \left(2 \cos x - \sqrt{2}\right) = 0$

15. $\left(\tan x + \sqrt{3}\right)(\cos x + 2) = 0$

16. $\left(2 \cos x + \sqrt{3}\right)(2 \text{ sen } x - 1) = 0$

17. $\cos x \text{ sen } x - 2 \cos x = 0$

18. $\tan x \text{ sen } x + \text{sen } x = 0$

19. $4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$

20. $2 \text{ sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$

21. $\text{sen}^2 x = 2 \text{ sen } x + 3$ **22.** $3 \tan^3 x = \tan x$

23. $\text{sen}^2 x = 4 - 2 \cos^2 x$ **24.** $2 \cos^2 x + \text{sen } x = 1$

25. $2 \text{ sen } 3x + 1 = 0$ **26.** $2 \cos 2x + 1 = 0$

27. $\sec 4x - 2 = 0$ **28.** $\sqrt{3} \tan 3x + 1 = 0$

29. $\sqrt{3} \text{ sen } 2x = \cos 2x$ **30.** $\cos 3x = \text{sen } 3x$

31. $\cos \dfrac{x}{2} - 1 = 0$ **32.** $2 \text{ sen } \dfrac{x}{3} + \sqrt{3} = 0$

33. $\tan \dfrac{x}{4} + \sqrt{3} = 0$ **34.** $\sec \dfrac{x}{2} = \cos \dfrac{x}{2}$

35. $\tan^5 x - 9 \tan x = 0$

36. $3 \tan^3 x - 3 \tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

37. $4 \text{ sen } x \cos x + 2 \text{ sen } x - 2 \cos x - 1 = 0$

38. $\text{sen } 2x = 2 \tan 2x$ **39.** $\cos^2 2x - \text{sen}^2 2x = 0$

40. $\sec x - \tan x = \cos x$

41–48 ■ Determine todas las soluciones de la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

41. $2 \cos 3x = 1$ **42.** $3 \csc^2 x = 4$

43. $2 \text{ sen } x \tan x - \tan x = 1 - 2 \text{ sen } x$

44. $\sec x \tan x - \cos x \cot x = \text{sen } x$

45. $\tan x - 3 \cot x = 0$ **46.** $2 \text{ sen}^2 x - \cos x = 1$

47. $\tan 3x + 1 = \sec 3x$ **48.** $3 \sec^2 x + 4 \cos^2 x = 7$

49–56 ■ **a)** Determine todas las soluciones de la ecuación. **b)** Mediante una calculadora resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$, y proporcione cinco cifras decimales.

49. $\cos x = 0.4$ **50.** $2 \tan x = 13$

51. $\sec x - 5 = 0$ **52.** $3 \text{ sen } x = 7 \cos x$

53. $5 \text{ sen}^2 x - 1 = 0$ **54.** $2 \text{ sen } 2x - \cos x = 0$

55. $3 \text{ sen}^2 x - 7 \text{ sen } x + 2 = 0$

56. $\tan^4 x - 13 \tan^2 x + 36 = 0$

57–60 ■ Grafique f y g en los mismos ejes y encuentre sus puntos de intersección.

57. $f(x) = 3 \cos x + 1, \quad g(x) = \cos x - 1$

58. $f(x) = \text{sen } 2x, \quad g(x) = 2 \text{ sen } 2x + 1$

59. $f(x) = \tan x, \quad g(x) = \sqrt{3}$

60. $f(x) = \text{sen } x - 1, \quad g(x) = \cos x$

61–64 ■ Aplique una fórmula de adición o de sustracción para simplificar la ecuación. Después determine todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

61. $\cos x \cos 3x - \text{sen } x \text{ sen } 3x = 0$

62. $\cos x \cos 2x + \text{sen } x \text{ sen } 2x = \frac{1}{2}$

63. $\text{sen } 2x \cos x + \cos 2x \text{ sen } x = \sqrt{3}/2$

64. $\text{sen } 3x \cos x - \cos 3x \text{ sen } x = 0$

65–68 ■ Aplique una fórmula para el ángulo doble o para el ángulo mitad para resolver la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

65. $\text{sen } 2x + \cos x = 0$ **66.** $\tan \dfrac{x}{2} - \text{sen } x = 0$

67. $\cos 2x + \cos x = 2$ **68.** $\tan x + \cot x = 4 \text{ sen } 2x$

69–72 ■ Resuelva la ecuación aplicando primero una fórmula suma-a-producto.

69. $\text{sen } x + \text{sen } 3x = 0$ **70.** $\cos 5x - \cos 7x = 0$

71. $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$ **72.** $\text{sen } 5x - \text{sen } 3x = \cos 4x$

73–78 ■ Mediante una calculadora para graficar o una computadora calcule las soluciones de la ecuación con dos cifras decimales.

73. $\text{sen } 2x = x$ **74.** $\cos x = \dfrac{x}{3}$

75. $2^{\text{sen } x} = x$ **76.** $\text{sen } x = x^3$

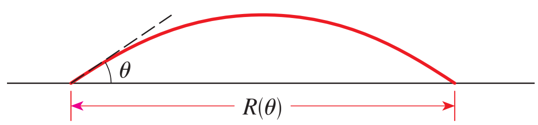
77. $\dfrac{\cos x}{1 + x^2} = x^2$ **78.** $\cos x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

Aplicaciones

79. Alcance de un proyectil Si un proyectil se dispara con velocidad v_0 y un ángulo θ, entonces su *alcance*, la distancia horizontal que recorre en pies está modelada por la función

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\theta}{32}$$

(Véase la página 818.). Si $v_0 = 2200$ pies/s, ¿qué ángulo en grados se debe elegir para que el proyectil dé en el blanco en el suelo a 5000 pies de distancia?



80. Vibraciones amortiguadas El desplazamiento de un resorte que está vibrando en movimiento armónico amortiguado se representa por medio de

$$y = 4e^{-3t} \text{ sen } 2\pi t$$

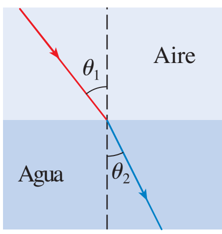
Calcule los tiempos en que el resorte se encuentra en su posición de equilibrio ($y = 0$).

81. Refracción de la luz Se ha observado desde tiempos antiguos que la luz se desvía o refracta cuando pasa de un medio a otro, por ejemplo, del aire al agua. Si v_1 es la velocidad

de la luz en un medio y v_2 es la velocidad en el otro medio, entonces de acuerdo con la **ley de Snell**,

$$\frac{\text{sen } \theta_1}{\text{sen } \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 es el *ángulo de incidencia* y θ_2 es el *ángulo de refracción* (véase la figura). El número v_1/v_2 se denomina *índice de refracción*. El índice de refracción de varias sustancias se proporciona en la tabla. Si un haz de luz atraviesa la superficie de un lago con un ángulo de incidencia de 70°, calcule al ángulo de refracción.



Sustancia	Refracción de aire a la sustancia
Agua	1.33
Alcohol	1.36
Vidrio	1.52
Diamante	2.41

82. Reflexión interna total Cuando la luz pasa desde un medio más denso a uno menos denso, por ejemplo, de vidrio al aire, el ángulo de refracción que predice la ley de Snell (véase el ejercicio 81) puede ser de 90° o más grande. En este caso, el rayo de luz se refleja en realidad en un medio más denso. Este fenómeno, llamado r*eflexión interna total*, es el principio que sustenta la fibra óptica.

Haga $\theta_2 = 90°$ en la ley de Snell y calcule θ_1 para determinar el ángulo de incidencia crítico en el cual la reflexión interna total empieza a manifestarse cuando la luz pasa de vidrio al aire. Observe que el índice de refracción de vidrio al aire es el recíproco del índice de aire a vidrio.

83. Horas de luz de día En Filadelfia, la cantidad de horas de luz de día en el día t, donde t es el número de días después del primero de enero, se modela con la función

$$L(t) = 12 + 2.83 \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right)$$

a) ¿Qué días del año tienen alrededor 10 h de luz de día?

b) ¿Cuántos días del año tienen más de 10 h de luz del día?

84. Fases de la Luna A medida que la Luna gira alrededor de la Tierra, la cara que da a la Tierra está parcialmente iluminada por el Sol. Las fases de la Luna manifiestan qué tanto de su superficie está iluminada por la luz del Sol. Una medición astronómica se representa por la fracción F del disco lunar que está iluminada. Cuando el ángulo entre el Sol, la Tierra y la Luna es $\theta(0 \leq \theta \leq 360°)$, entonces

$$F = \tfrac{1}{2}(1 - \cos \theta)$$

Determine los ángulos θ que corresponden a las fases siguientes.

a) $F = 0$ (Luna nueva)

b) $F = 0.25$ (cuarto creciente)

c) $F = 0.5$ (cuarto creciente o cuarto menguante)

d) $F = 1$ (Luna llena)

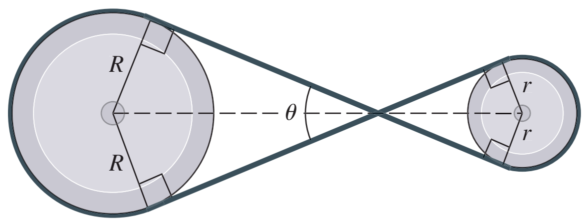
85. Bandas y poleas Una banda delgada de longitud L rodea dos poleas de radios R y r, como se muestra en la figura.

a) Demuestre que el ángulo θ (en radianes) donde la banda se cruza cumple con la ecuación

$$\theta + 2 \cot \frac{\theta}{2} = \frac{L}{R + r} - \pi$$

[*Sugerencia:* exprese L en términos de R, r y θ sumando las longitudes de las partes curvas y rectas de la banda.]

b) Suponga que $R = 2.42$ pies, $r = 1.21$ pies y $L = 27.78$ pies. Calcule θ resolviendo gráficamente las ecuaciones del inciso a). Exprese la respuesta tanto en radianes como en grados.



Descubrimiento • Debate

86. Ecuaciones e identidades ¿Cuál de los enunciados siguientes es verdadero?

A. Toda identidad es una ecuación.

B. Toda ecuación es una identidad.

Proporcione ejemplos que ilustren su respuesta. Escriba un breve párrafo para explicar la diferencia entre una ecuación y una identidad.

87. Una ecuación trigonométrica especial ¿Por qué es diferente la ecuación sen(cos x) = 0 de todas las otras ecuaciones que estudiamos en esta sección? Encuentre todas las soluciones de esta ecuación.

7 Repaso

Revisión de conceptos

1. **a)** Diga cuáles son las identidades recíprocas.
   b) Mencione las identidades pitagóricas.
   c) Diga cuáles son las identidades pares-impares.
   d) Diga cuáles son las identidades de cofunciones.
2. Explique la diferencia entre una ecuación y una identidad.
3. ¿Cómo demuestra una identidad trigonométrica?
4. **a)** Dé las fórmulas de la adición para seno, coseno y tangente.
   b) Diga cuáles son las fórmulas para la sustracción del seno, coseno y tangente.
5. **a)** Enuncie las fórmulas del ángulo doble para el caso del seno, coseno y tangente.
   b) Enuncie las fórmulas para reducir potencias.
   c) Diga cuáles son las fórmulas para mitad del ángulo.
6. **a)** Diga cuáles son las fórmulas producto-a-suma.
   b) Dé las fórmulas suma-a-producto.
7. **a)** Defina la función seno inversa sen^{-1}. ¿Cuáles son el dominio y el rango?
   b) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\text{sen}(\text{sen}^{-1}x) = x$?
   c) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\, x) = x$?
8. **a)** Defina la función inversa $\cos^{-1}$. ¿Cuáles son el dominio y el rango?
   b) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\cos(\cos^{-1}x) = x$?
   c) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\cos^{-1}(\cos x) = x$?
9. **a)** Defina la función tangente inversa $\tan^{-1}$. ¿Cuáles son su dominio y su rango?
   b) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\tan(\tan^{-1}x) = x$?
   c) ¿Para qué valores de x es verdadera la ecuación $\tan^{-1}(\tan x) = x$?
10. Explique de qué manera resolver una ecuación trigonométrica mediante factorización.

Ejercicios

1–24 ■ Verifique la identidad.

1. $\text{sen}\,\theta\,(\cot\theta + \tan\theta) = \sec\theta$
2. $(\sec\theta - 1)(\sec\theta + 1) = \tan^2\theta$
3. $\cos^2 x \csc x - \csc x = -\text{sen}\, x$
4. $\dfrac{1}{1 - \text{sen}^2 x} = 1 + \tan^2 x$
5. $\dfrac{\cos^2 x - \tan^2 x}{\text{sen}^2 x} = \cot^2 x - \sec^2 x$
6. $\dfrac{1 + \sec x}{\sec x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{1 - \cos x}$
7. $\dfrac{\cos^2 x}{1 - \text{sen}\, x} = \dfrac{\cos x}{\sec x - \tan x}$
8. $(1 - \tan x)(1 - \cot x) = 2 - \sec x \csc x$
9. $\text{sen}^2 x \cot^2 x + \cos^2 x \tan^2 x = 1$
10. $(\tan x + \cot x)^2 = \csc^2 x \sec^2 x$
11. $\dfrac{\text{sen}\, 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$
12. $\dfrac{\cos(x + y)}{\cos x\, \text{sen}\, y} = \cot y - \tan x$
13. $\tan\dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x$
14. $\dfrac{\text{sen}(x + y) + \text{sen}(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)} = \tan x$
15. $\text{sen}(x + y)\,\text{sen}(x - y) = \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 y$
16. $\csc x - \tan\dfrac{x}{2} = \cot x$
17. $1 + \tan x \tan\dfrac{x}{2} = \sec x$
18. $\dfrac{\text{sen}\, 3x + \cos 3x}{\cos x - \text{sen}\, x} = 1 + 2\,\text{sen}\, 2x$
19. $\left(\cos\dfrac{x}{2} - \text{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \text{sen}\, x$
20. $\dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{\text{sen}\, 3x + \text{sen}\, 7x} = \tan 2x$
21. $\dfrac{\text{sen}\, 2x}{\text{sen}\, x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \sec x$
22. $(\cos x + \cos y)^2 + (\text{sen}\, x - \text{sen}\, y)^2 = 2 + 2\cos(x + y)$
23. $\tan\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$
24. $\dfrac{\sec x - 1}{\text{sen}\, x \sec x} = \tan\dfrac{x}{2}$

25–28 ■ **a)** Grafique f y g. **b)** ¿Las gráficas sugieren que la ecuación $f(x) = g(x)$ es una identidad? Demuestre su respuesta.

25. $f(x) = 1 - \left(\cos\dfrac{x}{2} - \operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\right)^2, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

26. $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x, \quad g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}$

27. $f(x) = \tan x \tan\dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

28. $f(x) = 1 - 8\operatorname{sen}^2 x + 8\operatorname{sen}^4 x, \quad g(x) = \cos 4x$

29–30 ■ **a)** Grafique la función o funciones y plantee una conjetura y **b)** demuestre la conjetura.

29. $f(x) = 2\operatorname{sen}^2 3x + \cos 6x$

30. $f(x) = \operatorname{sen} x \cot\dfrac{x}{2}, \quad g(x) = \cos x$

31–46 ■ Resuelva la ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$.

31. $\cos x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x = 0$

32. $\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen}^2 x = 0$

33. $2\operatorname{sen}^2 x - 5\operatorname{sen} x + 2 = 0$

34. $\operatorname{sen} x - \cos x - \tan x = -1$

35. $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

36. $4\operatorname{sen}^2 x + 2\cos^2 x = 3$

37. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = 3$

38. $\operatorname{sen} x = \cos 2x$

39. $\tan^3 x + \tan^2 x - 3\tan x - 3 = 0$

40. $\cos 2x \csc^2 x = 2\cos 2x$

41. $\tan\frac{1}{2}x + 2\operatorname{sen} 2x = \csc x$

42. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$

43. $\tan x + \sec x = \sqrt{3}$

44. $2\cos x - 3\tan x = 0$

45. $\cos x = x^2 - 1$

46. $e^{\operatorname{sen} x} = x$

47. Si un proyectil se dispara con velocidad v_0 a un ángulo θ, entonces la altura máxima que alcanza en pies se modela mediante la función

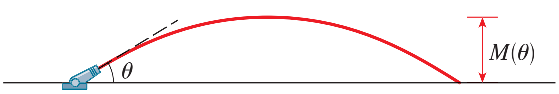
$$M(\theta) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{64}$$

Suponga que $v_0 = 400$ pies/s.

a) ¿A qué ángulo θ se debe disparar el proyectil para que la altura máxima que alcance sea de 2000 pies?

b) ¿Es posible que el proyectil alcance una altura de 3000 pies?

c) Calcule el ángulo θ para el cual el proyectil alcanza la mayor altura.



48. El desplazamiento de un amortiguador de un automóvil está representado por la función

$$f(t) = 2^{-0.2t} \operatorname{sen} 4\pi t$$

Calcular los momentos en que el amortiguador está en equilibrio, es decir, cuando $f(t) = 0$. [*Sugerencia*: $2^x > 0$ para todo número real x.]

49–58 ■ Calcular el valor exacto de la expresión.

49. $\cos 15°$

50. $\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{12}$

51. $\tan\dfrac{\pi}{8}$

52. $2\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\cos\dfrac{\pi}{12}$

53. $\operatorname{sen} 5° \cos 40° + \cos 5° \operatorname{sen} 40°$

54. $\dfrac{\tan 66° - \tan 6°}{1 + \tan 66° \tan 6°}$

55. $\cos^2\dfrac{\pi}{8} - \operatorname{sen}^2\dfrac{\pi}{8}$

56. $\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}$

57. $\cos 37.5° \cos 7.5°$

58. $\cos 67.5° + \cos 22.5°$

59–64 ■ Calcule el valor exacto de las expresiones dado que $\sec x = \frac{3}{2}$, $\csc y = 3$ y x y y están en el cuadrante I.

59. $\operatorname{sen}(x + y)$

60. $\cos(x - y)$

61. $\tan(x + y)$

62. $\operatorname{sen} 2x$

63. $\cos\dfrac{y}{2}$

64. $\tan\dfrac{y}{2}$

65–72 ■ Determine el valor exacto de las expresiones.

65. $\operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{3}/2)$

66. $\tan^{-1}(\sqrt{3}/3)$

67. $\cos(\tan^{-1}\sqrt{3})$

68. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}(\sqrt{3}/2))$

69. $\tan(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{5})$

70. $\operatorname{sen}(\cos^{-1}\frac{3}{8})$

71. $\cos(2\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3})$

72. $\cos(\operatorname{sen}^{-1}\frac{5}{13} - \cos^{-1}\frac{4}{5})$

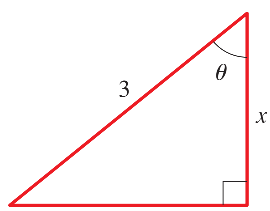
73–74 ■ Vuelva a escribir la expresión como una función algebraica de x.

73. $\operatorname{sen}(\tan^{-1} x)$

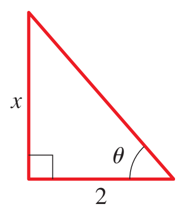
74. $\sec(\operatorname{sen}^{-1} x)$

75–76 ■ Exprese θ en términos de x.

75.



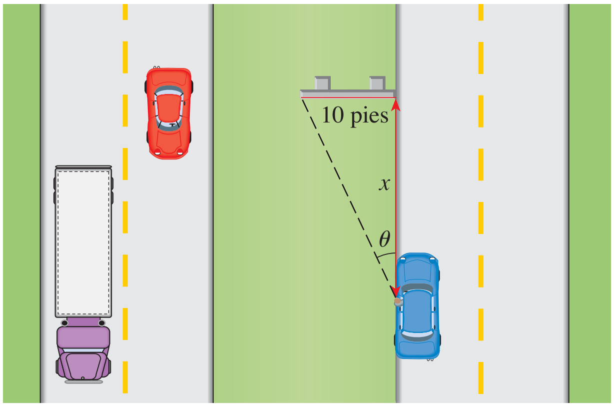
76.



77. Un señalamiento de 10 pies de ancho está junto a una carretera como se muestra en la figura. A medida que un conductor se aproxima al señalamiento, cambia el ángulo de visión θ.

a) Exprese el ángulo de visión θ en función de la distancia x entre el conductor y el señalamiento.

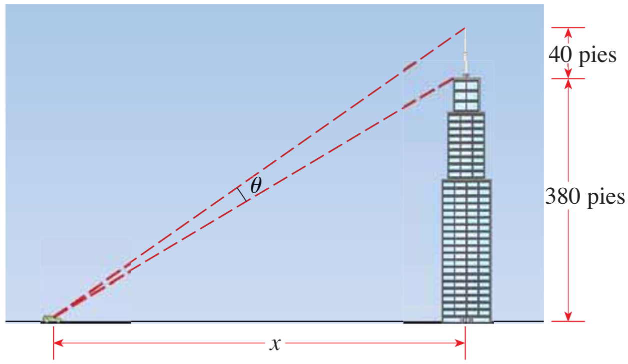
b) El señalamiento es legible cuando el ángulo de visión es 2° o más grande. ¿A qué distancia x el señalamiento ya se puede leer?



78. Un edificio de 380 pies de altura sostiene una torre de comunicaciones de 40 pies (véase la figura). A medida que un conductor se aproxima al edificio cambia el ángulo de visión θ de la torre.

a) Exprese el ángulo de visión θ en función de la distancia x entre el conductor y el edificio.

b) ¿A qué distancia del edificio es el ángulo de visión θ tan grande como es posible?



7 Evaluación

1. Verifique todas las identidades.

a) $\tan\theta\ \text{sen}\ \theta + \cos\theta = \sec\theta$

b) $\dfrac{\tan x}{1 - \cos x} = \csc x\,(1 + \sec x)$

c) $\dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x} = \text{sen}\ 2x$

2. Sea $x = 2\ \text{sen}\ \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$. Simplifique la expresión

$$\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

3. Calcule el valor exacto de las expresiones.

a) $\text{sen}\ 8° \cos 22° + \cos 8°\ \text{sen}\ 22°$ b) $\text{sen}\ 75°$ c) $\text{sen}\ \dfrac{\pi}{12}$

4. Calcule $\cos(\alpha + \beta)$ para los ángulos α y β de las figuras.

5. a) Escriba $\text{sen}\ 3x \cos 5x$ como una suma de funciones trigonométricas.

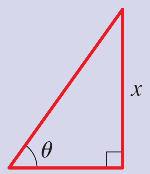
b) Escriba $\text{sen}\ 2x - \text{sen}\ 5x$ como un producto de funciones trigonométricas.

6. Si $\text{sen}\ \theta = -\frac{4}{5}$ y θ está en el tercer cuadrante, determine $\tan(\theta/2)$.

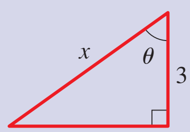
7. Grafique $y = \text{sen}\ x$ y $y = \text{sen}^{-1} x$ y especifique el dominio de cada función.

8. Exprese θ en cada figura en términos de x.

a)



b)



9. Resuelva cada ecuación trigonométrica en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$ b) $\text{sen}\ 2x - \cos x = 0$

10. Calcule todas las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$ con cinco cifras decimales:

$$5\cos 2x = 2$$

11. Determine el valor exacto de $\cos\left(\tan^{-1}\frac{9}{40}\right)$.

Enfoque en el modelado

Ondas progresivas y estacionarias

Ya aprendimos que la posición de una partícula en movimiento armónico simple se describe mediante una función de la forma $y = A \text{ sen } \omega t$ (véase la sección 5.5). Por ejemplo, si una cuerda se mueve hacia arriba y hacia abajo como en la figura 1, entonces el punto rojo en la cuerda se desplaza hacia arriba y hacia abajo en movimiento armónico simple. Claro, lo mismo es cierto para todos los puntos de la cuerda.

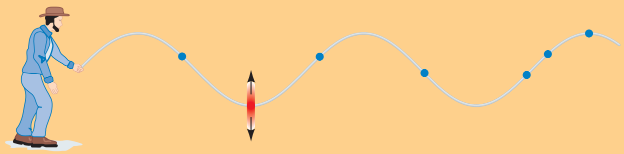


Figura 1

¿Qué función describe la forma de toda la cuerda? Si fijamos un instante en el tiempo $(t = 0)$ y tomamos una fotografía de la cuerda, obtenemos la forma de la figura 2, la cual está modelada por

$$y = A \text{ sen } kx$$

donde y es la altura de la cuerda por arriba del eje x en el punto x.

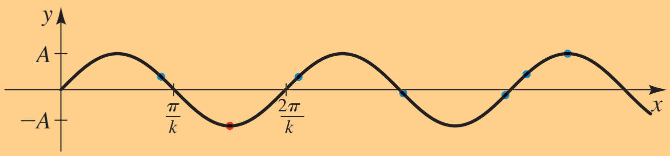


Figura 2
$y = A \text{ sen } kx$

Ondas progresivas

Si tomamos una fotografía de la cuerda en otros instantes, como en la figura 3, parece que las ondas de la cuerda viajan, es decir, se desplazan hacia la derecha.

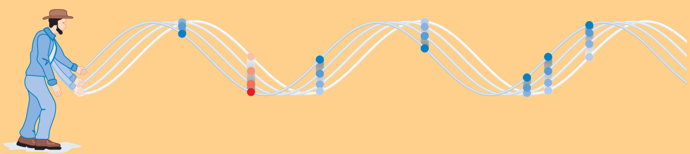


Figura 3

La **velocidad** de la onda es la rapidez a la cual se mueve hacia la derecha. Si la onda tiene una velocidad v, entonces se mueve a la derecha una distancia vt en el tiempo t. Entonces la gráfica de la onda desplazada en el tiempo t es

$$y(x, t) = A \text{ sen } k(x - vt)$$

Esta función representa la posición de cualquier punto x en la cuerda en cualquier momento. Utilizamos la notación $y(x, t)$ para indicar que la función depende de las *dos* variables x y t. En seguida se ilustra cómo esta función modela el movimiento de la cuerda.

- **Si fijamos x,** entonces $y(x, t)$ es una función sólo de t, lo cual da la posición del punto fijo x en el tiempo t.
- **Si fijamos t**, entonces $y(x, t)$ es una función sólo de x, cuya gráfica es la forma de la cuerda en el tiempo fijo t.

Ejemplo 1 Una onda progresiva

Una onda progresiva se describe por la función

$$y(x, t) = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right), \qquad x \geq 0$$

a) Determine la función que modela la posición del punto $x = \pi/6$ en cualquier tiempo t. Observe que el punto se mueve en movimiento armónico simple.

b) Grafique la forma de la onda cuando $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5$ y 2.0. ¿La onda parece desplazarse a la derecha?

c) Calcule la velocidad de la onda.

Solución

a) Al sustituir $x = \pi/6$ obtenemos

$$y\left(\frac{\pi}{6}, t\right) = 3 \operatorname{sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}t\right) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}t\right)$$

La función $y = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}t\right)$ describe el movimiento armónico simple con amplitud igual a 3 y periodo $2\pi/(\pi/2) = 4$.

b) Las gráficas se muestran en la figura 4. A medida que se incrementa t, la onda se mueve a la derecha.

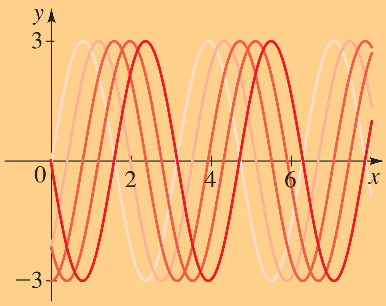


Figura 4
Onda progresiva

c) Expresamos la función dada en la forma estándar $y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt)$:

$$y(x, t) = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right) \qquad \text{Expresión dada}$$

$$= 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}t\right) \qquad \text{Se toma 2 como factor}$$

Al comparar con la forma estándar, vemos que la onda se desplaza con velocidad $v = \pi/4$. ■

Ondas estacionarias

Si dos ondas se desplazan a lo largo de la misma cuerda, entonces el movimiento de la cuerda está determinado por la suma de las dos ondas. Por ejemplo, si la cuerda está fija a la pared, entonces la onda rebota con la misma amplitud y velocidad, pero en la dirección opuesta. En este caso, una onda está descrita por $y = A \operatorname{sen} k(x - vt)$ y la onda reflejada por $y = A \operatorname{sen} k(x + vt)$. La onda resultante es

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt) + A \operatorname{sen} k(x + vt) \qquad \text{Suma de las dos ondas}$$

$$= 2A \operatorname{sen} kx \cos kvt \qquad \text{Fórmula suma-a-producto}$$

Los puntos donde kx es un múltiplo de 2π son especiales, porque en estos puntos $y = 0$ para cualquier tiempo t. En otras palabras, estos puntos nunca se mueven. Estos puntos reciben el nombre de **nodos**. En la figura 5 se ilustra la gráfica de la onda para varios valores de t. Vemos que la onda no se desplaza, sino que simplemente vibra hacia arriba y hacia abajo. Tal tipo de onda se denomina **onda estacionaria**.

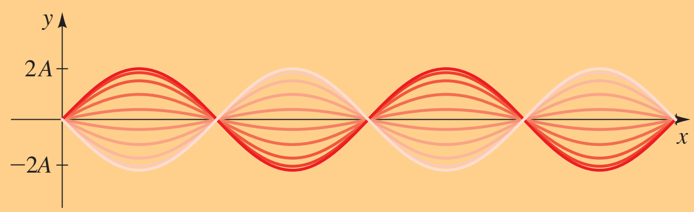


Figura 5
Onda estacionaria

Ejemplo 2 Una onda estacionaria

Las ondas progresivas se generan en cada extremo de un depósito de 30 pies de largo, de acuerdo con las ecuaciones

$$y = 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x - 3t\right) \qquad \text{y} \qquad y = 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x + 3t\right)$$

a) Determinar la ecuación de la onda combinada y determine los nodos.

b) Trace la gráfica de $t = 0, 0.17, 0.34, 0.51, 0.68, 0.85$ y 1.02. ¿Es una onda estacionaria?

Solución

a) La onda combinada se obtiene sumando las dos ecuaciones:

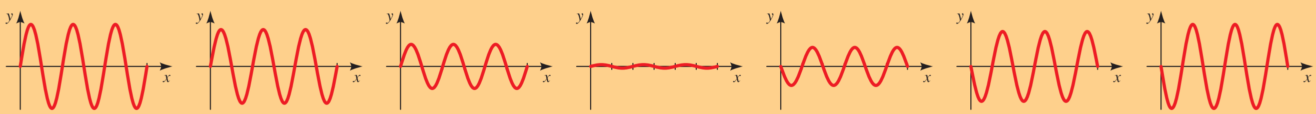
$$y = 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x - 3t\right) + 1.5 \text{ sen}\left(\frac{\pi}{5}x + 3t\right) \qquad \textit{Suma de las dos ondas}$$

$$= 3 \text{ sen} \frac{\pi}{5}x \cos 3t \qquad \textit{Fórmula suma-a-producto}$$

Los nodos se presentan en los valores de x para los cuales sen $\frac{\pi}{5}x = 0$, es decir, donde $\frac{\pi}{5}x = k\pi$ (k es un entero). Al determinar x obtenemos $x = 5k$. Entonces los nodos se presentan en

$$x = 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30$$

b) Las gráficas se ilustran en la figura 6. A partir de las gráficas vemos que es una onda estacionaria.



$t = 0$ $t = 0.17$ $t = 0.34$ $t = 0.51$ $t = 0.68$ $t = 0.85$ $t = 1.02$

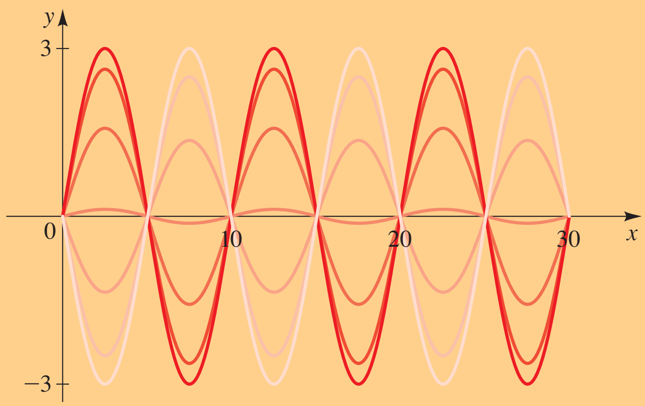
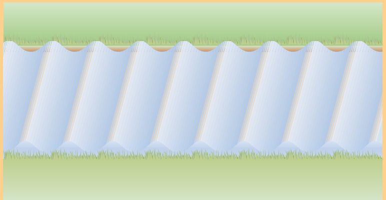


Figura 6

$y(x, t) = 3 \text{ sen} \frac{\pi}{5} x \cos 3t$

■

Problemas



1. **Ondas en un canal** Una onda en la superficie de un canal largo se describe mediante la función

$$y(x, t) = 5 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{2}t\right), \quad x \geq 0$$

a) Determine la función que modela la posición del punto $x = 0$ en cualquier tiempo t.

b) Trace la onda cuando $t = 0, 0.4, 0.8, 1.2$ y 1.6. ¿Es una onda progresiva?

c) Calcule la velocidad de la onda.

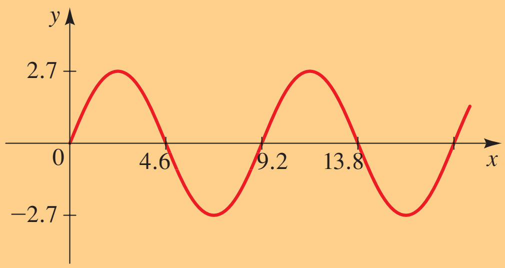
2. **Onda en una soga** Las ondas progresivas se generan en cada extremo de una soga firmemente estirada de 24 pies, cuyas ecuaciones son

$$y = 0.2 \operatorname{sen}(1.047x - 0.524t) \qquad \text{y} \qquad y = 0.2 \operatorname{sen}(1.047x + 0.524t)$$

a) Determine la ecuación de la onda combinada y los nodos.

b) Trace la gráfica para $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ y 6. ¿Es una onda estacionaria?

3. **Onda progresiva** Una onda progresiva está graficada en el instante $t = 0$. Si se desplaza hacia la derecha a una velocidad 6, encuentre una ecuación de la forma $y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - kvt)$ para esta onda.

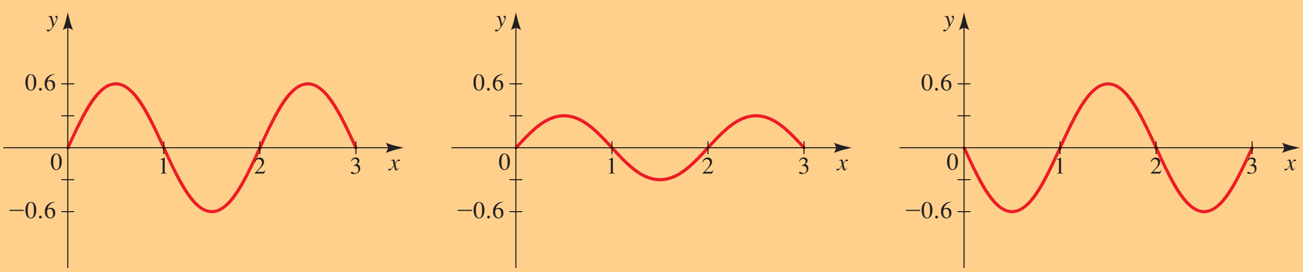


4. **Onda progresiva** Una onda progresiva tiene un periodo $2\pi/3$, amplitud igual a 5 y velocidad 0.5.

a) Calcule la ecuación de la onda.

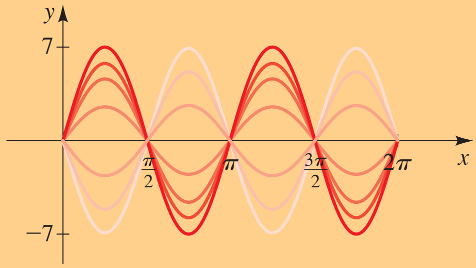
b) Trace la gráfica para $t = 0, 0.5, 1, 1.5$ y 2.

5. **Onda estacionaria** Una onda estacionaria de amplitud 0.6 se grafica a varios tiempos t como se muestra en la figura. Si la vibración tiene una frecuencia de 20 Hz, formule una ecuación de la forma $y(x, t) = A \operatorname{sen} \alpha x \cos \beta t$ que modela esta onda.



$t = 0$ s $\qquad$ $t = 0.010$ s $\qquad$ $t = 0.025$ s

6. Onda estacionaria Una onda estacionaria tiene una amplitud máxima igual a 7 y nodos en 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π, como se ilustra en la figura. Cada punto que no es un nodo sube y baja con periodo 4π. Plantee una función de la forma $y(x, t) = A$ sen αx cos βt que modela esta onda.



7. Cuerda vibratoria Cuando una cuerda de violín vibra, el sonido producido es el resultado de una combinación de ondas estacionarias que tienen nodos ubicados en forma uniforme. La figura ilustra algunas de las ondas estacionarias posibles. Supongamos que la cuerda tiene una longitud π.

a) En el caso de la t fija, la cuerda tiene la forma de una curva seno $y = A$ sen αx. Calcule el valor adecuado de α para cada una de las ondas estacionarias ilustradas.

b) ¿Observa algún patrón en los valores de α que haya encontrado en el inciso a)? ¿Cuáles serían los dos valores siguientes de α? Trace unas gráficas rápidas de las ondas estacionarias asociadas con estos nuevos valores de α.

c) Suponga que para el t fijo cada uno de los puntos en la cuerda que no es un nodo vibra con frecuencia 440 Hz. Calcule el valor de β para el cual una ecuación de la forma $y = A \cos \beta t$ modelaría este movimiento.

d) Combine sus respuestas para los incisos a) y c) para determinar funciones de la forma $y(x, t) = A$ sen αx cos βt que modele cada una de las ondas estacionarias de la figura. Suponga $A = 1$.

8. Ondas en un tubo Las ondas estacionarias en una cuerda de violín debe tener nodos en los extremos de la cuerda porque ésta se encuentra fija en dichos extremos. Pero esto no es necesariamente el caso con las ondas sonoras en un tubo, como en una flauta o en los tubos de un órgano. En la figura se muestran algunas ondas sonoras posibles que se presentan en un conducto.

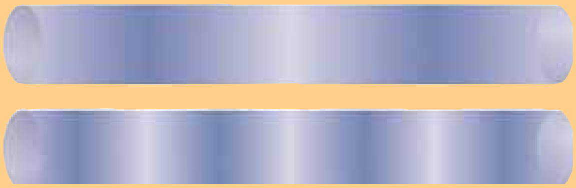
Suponga que una onda estacionaria en un tubo de 37.7 pies de largo está modelada por la función

$$y(x, t) = 0.3 \cos \tfrac{1}{2}x \cos 50\pi t$$

En este caso, $y(x, t)$ representa la variación de la presión normal del aire en el punto a x pies del extremo del conducto en el tiempo t segundos.

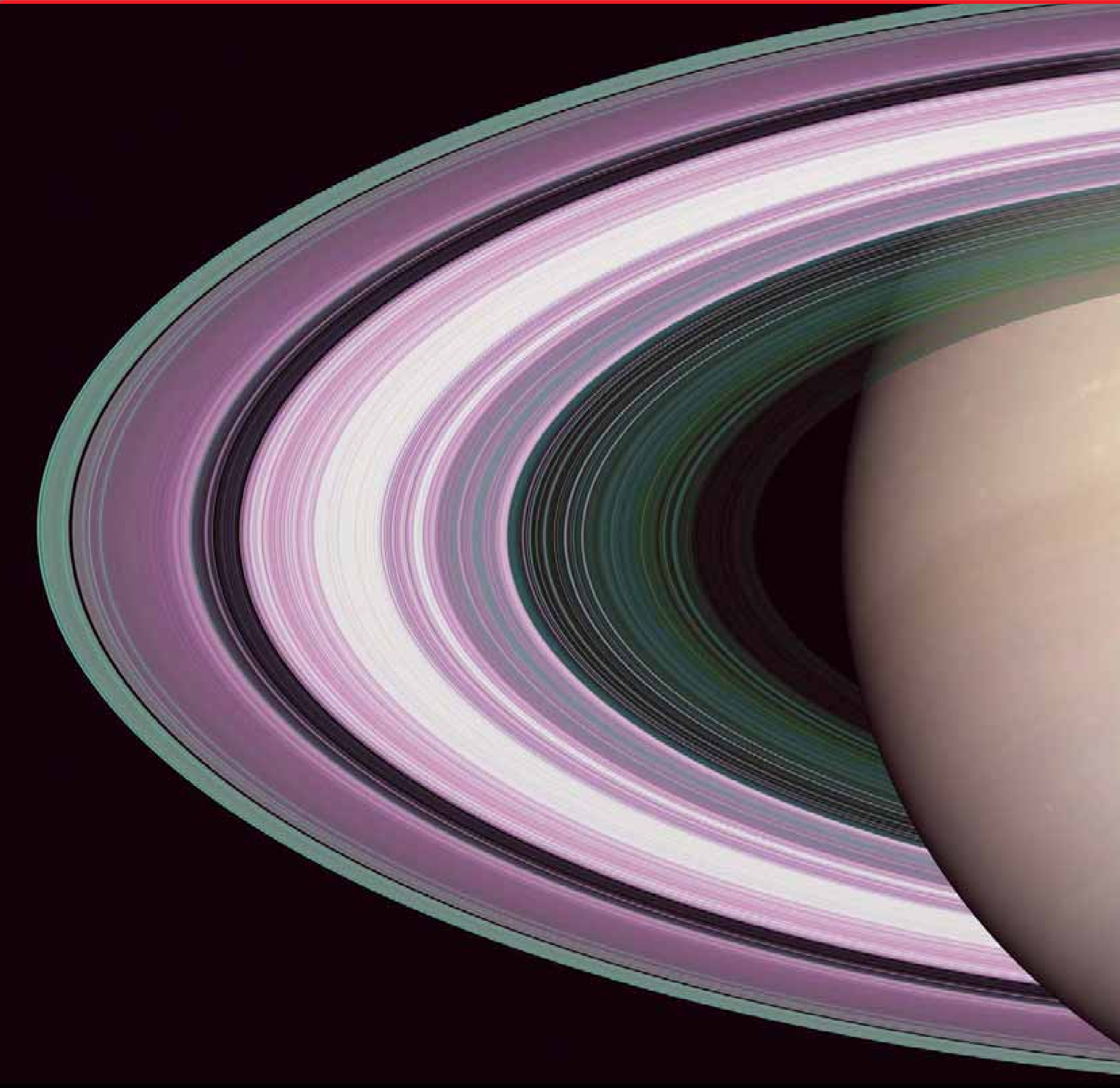
a) ¿En qué puntos x se sitúan los nodos? ¿Son nodos los extremos del conducto?

b) ¿En qué frecuencia vibra el aire en los puntos que no son nodos?



8

Coordenadas polares y vectores



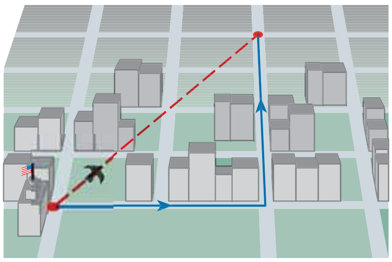
8.1 Coordenadas polares

8.2 Gráficas de ecuaciones polares

8.3 Forma polar de números complejos; teorema de DeMoivre

8.4 Vectores

8.5 Producto punto

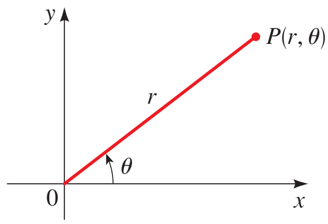


Courtesy of NASA

Esquema del capítulo

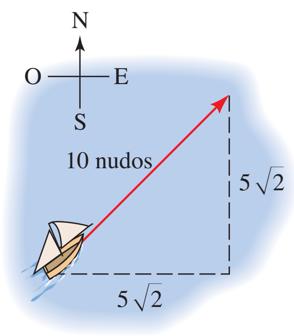
En este capítulo se estudian las coordenadas polares, una nueva forma de describir la ubicación de puntos en un plano.

Un sistema coordenado es un método para especificar la ubicación de un punto en el plano. Estamos familiarizados con coordenadas rectangulares (o cartesianas). En las coordenadas rectangulares la ubicación de un punto está dada por un par ordenado (x, y), que da la distancia del punto a dos ejes perpendiculares. Usar coordenadas rectangulares es como describir una ubicación en una ciudad diciendo que está en la esquina de la calle 2 y la cuarta avenida. Pero se podría describir también este mismo lugar diciendo que está una y media millas al noreste del City Hall. Por lo tanto, en vez de especificar el lugar con respecto a una cuadrícula de calles y avenidas, se especifica dando su distancia y dirección a partir de un punto de referencia fijo. Eso es lo que se hace en el sistema de coordenadas polares. En coordenadas polares la ubicación de un punto está dado por un par ordenado (r, θ) donde r es la distancia del origen (o polo) y θ es el ángulo desde el eje x positivo (véase la figura a continuación).



¿Por qué se estudian diferentes sistemas coordenados? Porque ciertas curvas se describen de manera más natural en un sistema coordenado que en otro. En coordenadas rectangulares se pueden dar ecuaciones simples para líneas, parábolas o curvas cúbicas, pero la ecuación de un círculo es bastante complicada (y no es una función). En coordenadas polares, se pueden dar ecuaciones simples para círculos, elipses, rosas y figuras de números 8: curvas que es difícil describir en coordenadas rectangulares. Así, por ejemplo, es más natural describir la trayectoria de un planeta alrededor del Sol en términos de distancia a partir de este astro y el ángulo de desplazamiento, en otras palabras, en coordenadas polares. También proporcionaremos representaciones en coordenadas polares de números complejos. Como se verá, es fácil multiplicar números complejos si se escriben en forma polar.

En este capítulo también se utilizan coordenadas para describir cantidades dirigidas o *vectores*. Cuando se habla de temperatura, masa o área, se necesita sólo un número. Por ejemplo, podemos expresar que la temperatura es de 70ºF. Pero cantidades como la velocidad o la fuerza son *cantidades dirigidas*, porque se relacionan con dirección así como con magnitud. Así, se dice que un bote navega a 10 nudos al noreste. Esto



se puede expresar también de manera gráfica al trazar una flecha de longitud 10 en la dirección de viaje. La velocidad se puede describir por completo mediante el desplazamiento de la flecha de la punta a la cabeza, que se expresa como el vector $\langle 5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}\rangle$ (véase la figura).

En *Enfoque en el modelado* (página 630) se verá cómo se emplean las coordenadas polares para trazar un mapa (plano) de un mundo (esférico). En el *Proyecto de descubrimiento* en la página 626 se explora cómo un análisis de las fuerzas vectoriales de viento y corriente se pueden usar para navegar un velero.

8.1 Coordenadas polares

En esta sección se definen las coordenadas polares y se aprende cómo se relacionan con las coordenadas rectangulares.

Definición de coordenadas polares

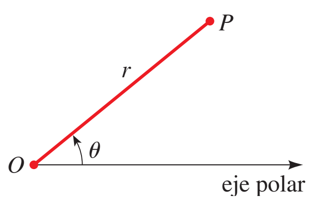


Figura 1

El **sistema de coordenadas polares** emplea distancias y direcciones para especificar la ubicación de un punto en el plano. Para preparar el sistema, se elige un punto fijo O en el plano llamado el **polo** (u **origen**) y se dibuja desde O un rayo (semirrecta) llamado el **eje polar** como en la figura 1. Entonces a cada punto P se le pueden asignar coordenadas polares $P(r, \theta)$ donde

$$r \text{ es la } \textit{distancia} \text{ de } O \text{ a } P$$

$$\theta \text{ es el } \textit{ángulo} \text{ entre el eje polar y el segmento } \overline{OP}$$

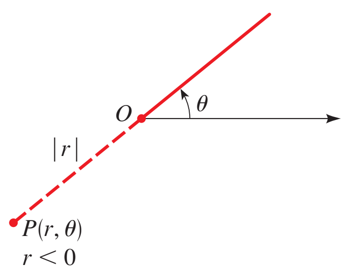


Figura 2

Se usa la convención de que θ es positivo si se mide en dirección contraria a las manecillas del reloj desde el eje polar o negativo si se mide en dirección de las manecillas del reloj. Si r es negativa, entonces $P(r, \theta)$ se define como el punto que se encuentra a $|r|$ unidades del polo en la dirección opuesta a la que da θ (véase la figura 2).

Ejemplo 1 Graficar puntos en coordenadas polares

Grafique los puntos cuyas coordenadas se dan.

a) $(1, 3\pi/4)$ b) $(3, -\pi/6)$ c) $(3, 3\pi)$ d) $(-4, \pi/4)$

Solución Los puntos se grafican en la figura 3. Observe que el punto en el inciso d) se localiza a 4 unidades del origen a lo largo del ángulo $5\pi/4$, porque el valor dado de r es negativo.

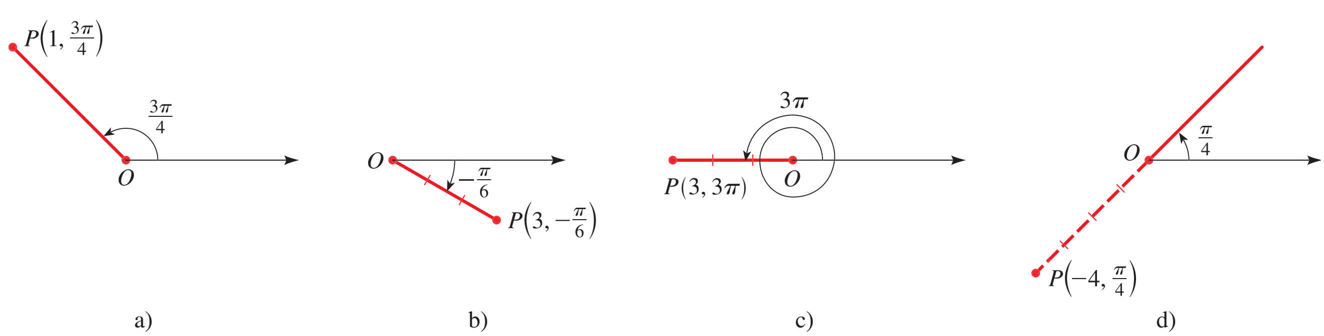


Figura 3

Hay que observar que las coordenadas (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan el mismo punto, como se muestra en la figura 4. Además, debido a que todos los ángulos $\theta + 2n\pi$ (donde n es cualquier entero) tienen el mismo lado terminal que el ángulo θ, cada punto en el plano tiene un número infinito de representaciones en coordenadas polares. De hecho, cualquier punto $P(r, \theta)$ se puede representar por

$$P(r, \theta + 2n\pi) \qquad \text{y} \qquad P(-r, \theta + (2n + 1)\pi)$$

para cualquier entero n.

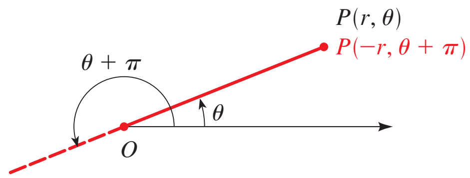


Figura 4

Ejemplo 2 Coordenadas polares diferentes para el mismo punto

a) Grafique el punto con coordenadas polares $P(2, \pi/3)$.

b) Encuentre otras dos representaciones de P en coordenadas polares con $r > 0$ y dos con $r < 0$.

Solución

a) La gráfica se muestra en la figura 5a).

b) Otras representaciones con $r > 0$ son

$$\left(2, \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \left(2, \frac{7\pi}{3}\right) \qquad \text{Sume } 2\pi \text{ a } \theta$$

$$\left(2, \frac{\pi}{3} - 2\pi\right) = \left(2, -\frac{5\pi}{3}\right) \qquad \text{Sume } -2\pi \text{ a } \theta$$

Otras representaciones con $r < 0$ son

$$\left(-2, \frac{\pi}{3} + \pi\right) = \left(-2, \frac{4\pi}{3}\right) \qquad \text{Sustituya } -r \text{ y sume } \pi \text{ a } \theta$$

$$\left(-2, \frac{\pi}{3} - \pi\right) = \left(-2, -\frac{2\pi}{3}\right) \qquad \text{Sustituya } r \text{ por } -r \text{ y sume } -\pi \text{ a } \theta$$

Las gráficas de la figura 5 explican por qué estas coordenadas representan el mismo punto.

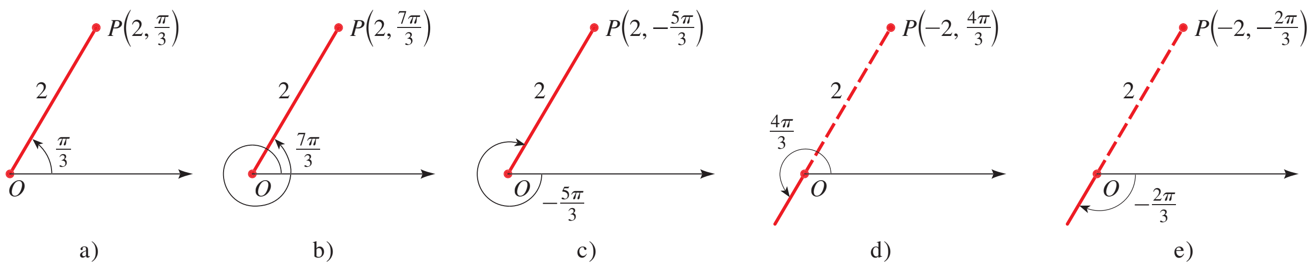


Figura 5 ■

Relación entre coordenadas polares y rectangulares

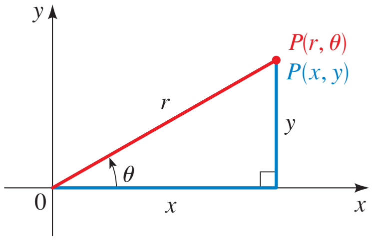


Figura 6

Con frecuencia surgen situaciones en las que es necesario considerar al mismo tiempo coordenadas polares y rectangulares. La conexión entre los dos sistemas se ilustra en la figura 6, donde el eje polar coincide con el eje x positivo. Las fórmulas en el siguiente cuadro se obtienen de la figura por medio de las definiciones de funciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. (Aunque se ha ilustrado el caso donde $r > 0$ y θ es agudo, las fórmulas se cumplen para cualquier ángulo θ y para cualquier valor de r.)

Relación entre coordenadas polares y rectangulares

1. Para cambiar de coordenadas polares a rectangulares, use las fórmulas

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta$$

2. Para cambiar de coordenadas rectangulares a polares, use las fórmulas

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

Ejemplo 3 Convertir coordenadas polares a coordenadas rectangulares

Encuentre coordenadas rectangulares para el punto que tiene coordenadas polares $(4, 2\pi/3)$.

Solución Puesto que $r = 4$ y $\theta = 2\pi/3$, se tiene

$$x = r\cos\theta = 4\cos\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta = 4\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3} = 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Así, el punto tiene coordenadas rectangulares $(-2, 2\sqrt{3})$. ■

Ejemplo 4 Convertir coordenadas rectangulares a coordenadas polares

Encuentre coordenadas polares para el punto que tiene coordenadas rectangulares $(2, -2)$.

Solución Con $x = 2$, $y = -2$, se obtiene

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2^2 + (-2)^2 = 8$$

por lo tanto $r = 2\sqrt{2}$ o $-2\sqrt{2}$. También

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-2}{2} = -1$$

así que $\theta = 3\pi/4$ o $-\pi/4$. Puesto que el punto $(2, -2)$ se encuentra en el cuadrante IV (véase la figura 7), se puede representar en coordenadas polares como $(2\sqrt{2}, -\pi/4)$ o $(-2\sqrt{2}, 3\pi/4)$. ■

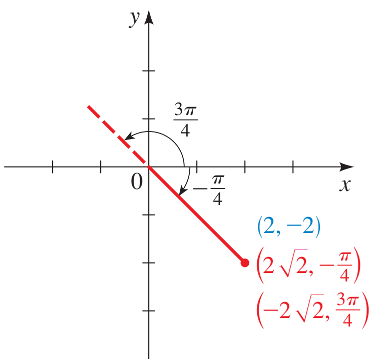


Figura 7

Observe que las ecuaciones que relacionan coordenadas polares y rectangulares no determinan de manera única a r o θ. Cuando se usan estas ecuaciones para hallar las coordenadas polares de un punto, se debe tener cuidado de que los valores elegidos para r y θ den un punto en el cuadrante correcto, como se vio en el ejemplo 4.

Ecuaciones polares

En los ejemplos 3 y 4 se convirtieron los puntos de un sistema de coordenadas al otro. Ahora se considera el mismo problema para ecuaciones.

Ejemplo 5 Convertir una ecuación de coordenadas rectangulares a polares

Exprese la ecuación $x^2 = 4y$ en coordenadas polares.

Solución Se usan las fórmulas $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$.

$$x^2 = 4y \qquad \text{Ecuación rectangular}$$

$$(r\cos\theta)^2 = 4(r\,\text{sen}\,\theta) \qquad \text{Sustituya } x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$r^2\cos^2\theta = 4r\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{Desarrolle}$$

$$r = 4\frac{\text{sen}\,\theta}{\cos^2\theta} \qquad \text{Divida por } r\cos^2\theta$$

$$r = 4\sec\theta\tan\theta \qquad \text{Simplifique}$$

■

Como se muestra en el ejemplo 5, convertir de coordenadas rectangulares a polares es directo: sólo remplace x por $r\cos\theta$ y y por $r\,\text{sen}\,\theta$, y luego simplifique. Pero convertir ecuaciones polares a la forma rectangular con frecuencia requiere más reflexión.

Ejemplo 6 Convertir ecuaciones de coordenadas polares a rectangulares

Exprese la ecuación polar en coordenadas rectangulares. Si es posible, determine la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular.

a) $r = 5\sec\theta$ b) $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ c) $r = 2 + 2\cos\theta$

Solución

a) Puesto que $\sec\theta = 1/\cos\theta$, se multiplican ambos lados por $\cos\theta$.

$$r = 5\sec\theta$$

$$r\cos\theta = 5 \qquad \text{Multiplique por } \cos\theta$$

$$x = 5 \qquad \text{Sustituya } x = r\cos\theta$$

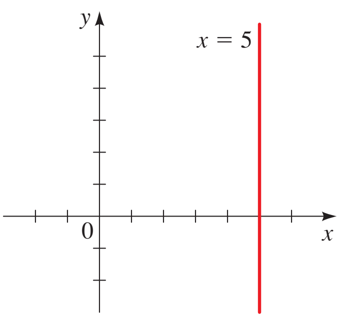


Figura 8

La gráfica de $x = 5$ es la línea vertical en la figura 8.

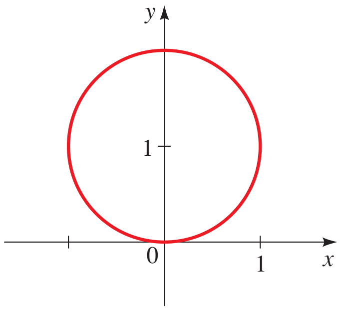


Figura 9

b) Se multiplican ambos lados de la ecuación por r, porque entonces se pueden usar las fórmulas $r^2 = x^2 + y^2$ y r sen $\theta = y$.

$$r^2 = 2r \operatorname{sen}\theta \qquad \text{Multiplique por } r$$
$$x^2 + y^2 = 2y \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r \operatorname{sen}\theta = y$$
$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \qquad \text{Reste } 2y$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \qquad \text{Complete el cuadrado en } y$$

Esta es la ecuación de un círculo de radio 1 centrado en el punto (0, 1). Se grafica en la figura 9.

c) Se multiplican primero ambos lados de la ecuación por r.

$$r^2 = 2r + 2r\cos\theta$$

Con $r^2 = x^2 + y^2$ y $x = r\cos\theta$, se pueden convertir dos de los términos de la ecuación en coordenadas rectangulares, pero eliminar la r restante requiere más trabajo:

$$x^2 + y^2 = 2r + 2x \qquad r^2 = x^2 + y^2 \text{ y } r\cos\theta = x$$
$$x^2 + y^2 - 2x = 2r \qquad \text{Reste } 2x$$
$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4r^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos miembros}$$
$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

En este caso, la ecuación rectangular es más complicada que la ecuación polar. Aunque no se puede determinar con facilidad la gráfica de la ecuación a partir de su forma rectangular, se verá en la sección siguiente cómo graficarla usando la ecuación polar. ■

8.1 Ejercicios

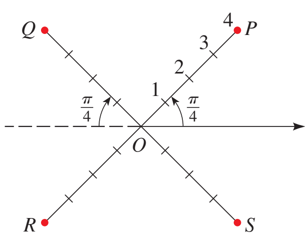
1–6 ■ Grafique el punto que tienen las coordenadas polares dadas.

1. $(4, \pi/4)$ **2.** $(1, 0)$ **3.** $(6, -7\pi/6)$
4. $(3, -2\pi/3)$ **5.** $(-2, 4\pi/3)$ **6.** $(-5, -17\pi/6)$

7–12 ■ Grafique el punto que tienen las coordenadas polares dadas. Luego de otras dos representaciones del punto en coordenadas polares, una con $r < 0$ y la otra con $r > 0$.

7. $(3, \pi/2)$ **8.** $(2, 3\pi/4)$ **9.** $(-1, 7\pi/6)$
10. $(-2, -\pi/3)$ **11.** $(-5, 0)$ **12.** $(3, 1)$

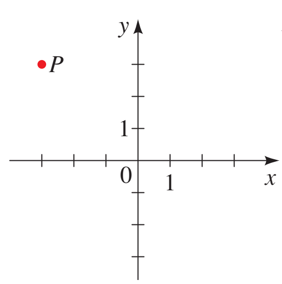
13–20 ■ Determine cuál punto de la figura, P, Q, R o S tiene las coordenadas polares dadas.



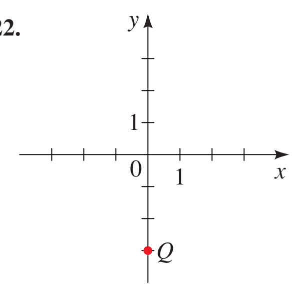
13. $(4, 3\pi/4)$ **14.** $(4, -3\pi/4)$
15. $(-4, -\pi/4)$ **16.** $(-4, 13\pi/4)$
17. $(4, -23\pi/4)$ **18.** $(-4, 23\pi/4)$
19. $(-4, 101\pi/4)$ **20.** $(4, 103\pi/4)$

21–22 ■ Se grafica un punto en forma rectangular. Encuentre las coordenadas polares para el punto, con $r > 0$ y $0 < \theta < 2\pi$.

21.

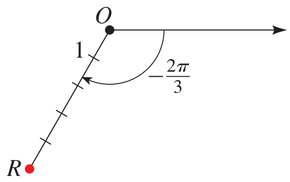


22.

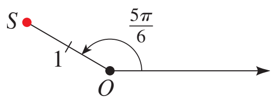


23–24 ■ Se grafica un punto en forma polar. Encuentre sus coordenadas rectangulares.

23.



24.



25–32 ■ Encuentre las coordenadas rectangulares para el punto cuyas coordenadas polares se dan.

25. $(4, \pi/6)$ **26.** $(6, 2\pi/3)$

27. $(\sqrt{2}, -\pi/4)$ **28.** $(-1, 5\pi/2)$

29. $(5, 5\pi)$ **30.** $(0, 13\pi)$

31. $(6\sqrt{2}, 11\pi/6)$ **32.** $(\sqrt{3}, -5\pi/3)$

33–40 ■ Convierta las coordenadas rectangulares a coordenadas polares con $r > 0$ y $0 \le \theta < 2\pi$.

33. $(-1, 1)$ **34.** $(3\sqrt{3}, -3)$

35. $(\sqrt{8}, \sqrt{8})$ **36.** $(-\sqrt{6}, -\sqrt{2})$

37. $(3, 4)$ **38.** $(1, -2)$

39. $(-6, 0)$ **40.** $(0, -\sqrt{3})$

41–46 ■ Convierta la ecuación a la forma polar.

41. $x = y$ **42.** $x^2 + y^2 = 9$

43. $y = x^2$ **44.** $y = 5$

45. $x = 4$ **46.** $x^2 - y^2 = 1$

47–60 ■ Convierta la ecuación polar a coordenadas rectangulares.

47. $r = 7$ **48.** $\theta = \pi$

49. $r \cos\theta = 6$ **50.** $r = 6\cos\theta$

51. $r^2 = \tan\theta$ **52.** $r^2 = \operatorname{sen} 2\theta$

53. $r = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta - \cos\theta}$ **54.** $r = \dfrac{1}{1 + \operatorname{sen}\theta}$

55. $r = 1 + \cos\theta$ **56.** $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

57. $r = 2\sec\theta$ **58.** $r = 2 - \cos\theta$

59. $\sec\theta = 2$ **60.** $\cos 2\theta = 1$

Descubrimiento • Debate

61. Fórmula de la distancia en coordenadas polares

a) Use la ley de los senos para probar que la distancia entre los puntos polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) es

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\theta_2 - \theta_1)}$$

b) Encuentre la distancia entre los puntos cuyas coordenadas polares son $(3, 3\pi/4)$ y $(1, 7\pi/6)$, por medio de la fórmula del inciso a)

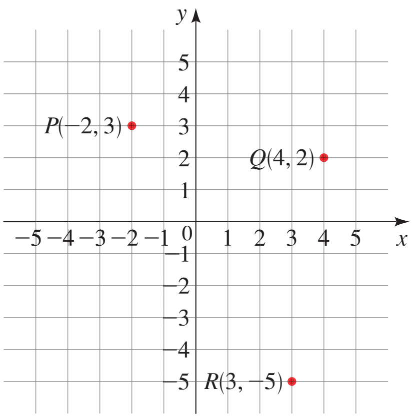
c) Ahora convierta los puntos del inciso b) a coordenadas rectangulares. Encuentre la distancia entre ellos con la fórmula usual de la distancia. ¿Obtiene la misma respuesta?

8.2 Gráficas de ecuaciones polares

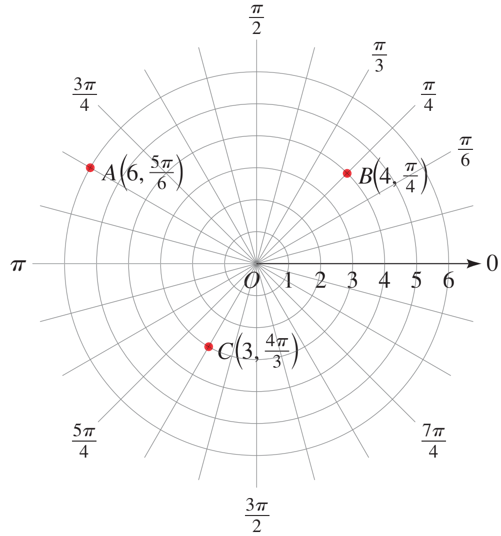
La **gráfica de una ecuación polar** $r = f(\theta)$ consta de los puntos P que tienen por lo menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación. Muchas curvas que surgen en matemáticas y sus aplicaciones se representan de manera más fácil y natural mediante ecuaciones polares en vez de ecuaciones rectangulares.

Una cuadrícula rectangular es útil para graficar puntos en coordenadas rectangulares (véase la figura 1a) en la página siguiente). Para graficar puntos en coordenadas polares, es conveniente usar una cuadrícula que consiste en círculos centrados en

el polo y los rayos que salen del polo, como en la figura 1b). Se usarán tales cuadrículas como ayuda para bosquejar gráficas polares.



a) Cuadrícula para coordenadas rectangulares



b) Cuadrícula para coordenadas polares

Figura 1

En los ejemplos 1 y 2 se puede observar que los círculos centrados en el origen y las rectas que pasan por el origen tienen ecuaciones particularmente simples en coordenadas polares.

Ejemplo 1 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación $r = 3$ y exprese la ecuación en coordenadas polares.

Solución La gráfica consta de los puntos cuya coordenada r es 3, es decir, los puntos que están a 3 unidades del origen. Así que la gráfica es un círculo de radio 3 centrado en el origen, como se muestra en la figura 2.

Al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$r^2 = 3^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 = 9 \qquad \text{Sustituya } r^2 = x^2 + y^2$$

Por lo tanto la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = 9$. ■

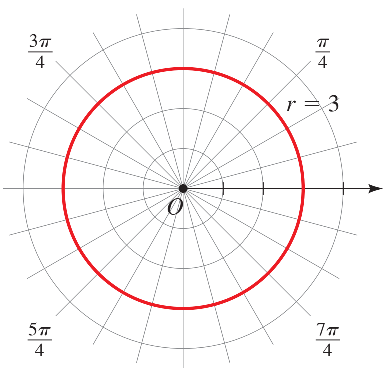


Figura 2

En general, la gráfica de la ecuación $r = a$ es un círculo de radio $|a|$ centrado en el origen. Al elevar al cuadrado ambos lados de esta ecuación, se puede observar que la ecuación equivalente en coordenadas rectangulares es $x^2 + y^2 = a^2$.

Ejemplo 2 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación $\theta = \pi/3$ y exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

Solución La gráfica consiste en los puntos cuya coordenada θ es $\pi/3$. Esta es la recta que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/3$ con el eje polar (véase

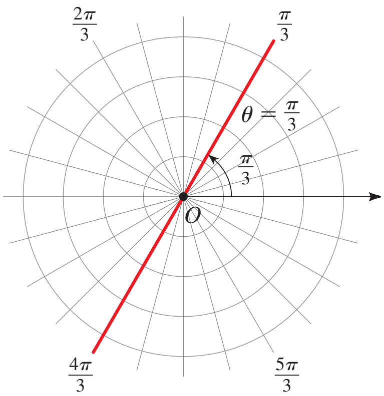


Figura 3

la figura 3). Observe que los puntos $(r, \pi/3)$ en la recta con $r > 0$ se encuentra en el cuadrante I, mientras que aquellos con $r < 0$ se localizan en el cuadrante III. Si el punto (x, y) está en esta recta, entonces

$$\frac{y}{x} = \tan\theta = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

Así, la ecuación rectangular de la recta de $y = \sqrt{3}\,x$. ■

Para bosquejar una curva polar cuya gráfica no es tan obvia como las de los ejemplos anteriores, se grafican puntos calculados para una cantidad suficiente de valores de θ y luego se unen en una curva continua. (Esto es lo que se hizo cuando se aprendió a graficar funciones en coordenadas rectangulares.)

Ejemplo 3 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación polar $r = 2 \operatorname{sen} \theta$.

Solución Se usa primero la ecuación para determinar las coordenadas polares de varios puntos en la curva. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$r = 2 \operatorname{sen} \theta$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

Se grafican estos puntos en la figura 4 y luego se unen para bosquejar la curva. La gráfica aparece como un círculo. Se han empleado valores de θ sólo entre 0 y π, puesto que se habrían obtenido los mismos puntos (esta vez expresado con coordenadas r negativas) si se permite que θ varíe de π a 2π.

La ecuación polar $r = 2 \operatorname{sen} \theta$ en coordenadas rectangulares es

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

(Véase la sección 8.1, ejemplo 6b). De la forma rectangular de la ecuación se puede observar que la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en (0, 1).)

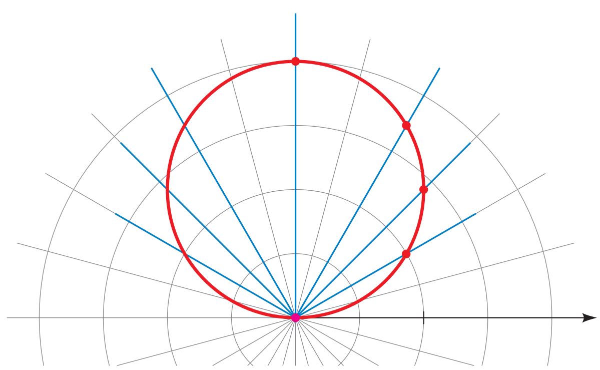


Figura 4
$r = 2 \operatorname{sen} \theta$ ■

En general, las gráficas de ecuaciones de la forma

$$r = 2a \operatorname{sen} \theta \qquad \text{y} \qquad r = 2a \cos \theta$$

son círculos con radio $|a|$ centrados en los puntos con coordenadas polares $(a, \pi/2)$ y $(a, 0)$, respectivamente.

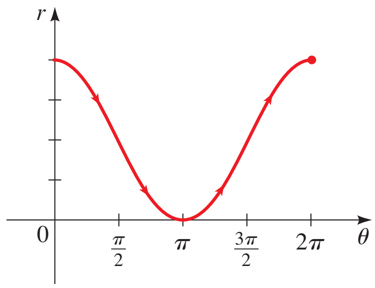
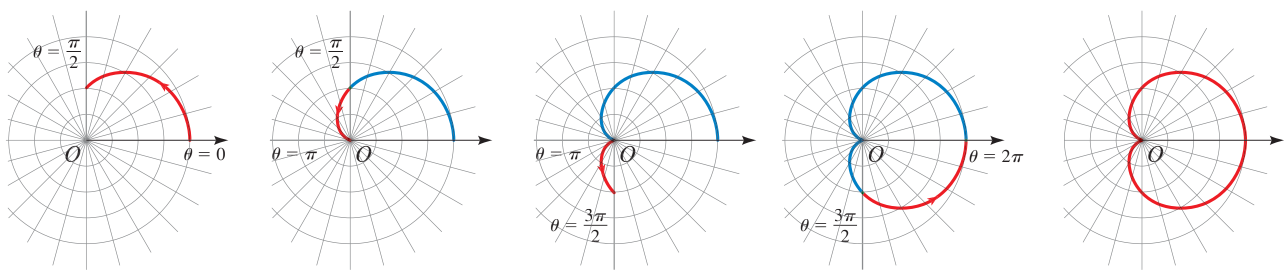


Figura 5
$r = 2 + 2\cos\theta$

Ejemplo 4 Trazar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$.

Solución En lugar de graficar puntos como en el ejemplo 3, primero se bosqueja la gráfica de $r = 2 + 2\cos\theta$ en coordenadas *rectangulares* en la figura 5. Se puede considerar a esta gráfica como una tabla de valores que permite leer de un vistazo los valores de r que corresponden a valores crecientes de θ. Por ejemplo, se puede observar que cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/2$, r (la distancia desde O) disminuye de 4 a 2, así que se bosqueja la parte correspondiente de la gráfica polar en la figura 6a). Cuando θ crece de $\pi/2$ a π, la figura 5 muestra que r disminuye de 2 a 0, de modo que se bosqueja la parte siguiente de la gráfica como en la figura 6b). Cuando θ crece de π a $3\pi/2$, r crece de 0 a 2, como se muestra en el inciso c). Por último, elevando θ de $3\pi/2$ a 2π, r crece de 2 a 4 como se muestra en el inciso d). Si se permite que θ se incremente más allá de 2π o disminuya más allá de 0, simplemente se volvería a trazar la trayectoria. Al combinar las porciones de la gráfica de los incisos a) a d) de la figura 6, se bosqueja la gráfica completa en el inciso e).



a) b) c) d) e)

Figura 6 Pasos para bosquejar $r = 2 + 2\cos\theta$ ■

La ecuación polar $r = 2 + 2\cos\theta$ en coordenadas rectangulares es

$$(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 4(x^2 + y^2)$$

(Véase la sección 8.1, ejemplo 6c)). La forma más simple de la ecuación polar muestra que es más natural describir cardioides por medio de coordenadas polares.

La curva de la figura 6 se llama **cardioide** porque tiene forma de corazón. En general, la gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$r = a(1 \pm \cos\theta) \qquad \text{o} \qquad r = a(1 \pm \operatorname{sen}\theta)$$

es una cardioide.

Ejemplo 5 Bosquejar la gráfica de una ecuación polar

Bosqueje la curva $r = \cos 2\theta$.

Solución Como en el ejemplo 4, primero se bosqueja la gráfica de $r = \cos 2\theta$ en coordenadas *rectangulares*, como se muestra en la figura 7. Cuando θ se incrementa de 0 a $\pi/4$, la figura 7 muestra que r disminuye de 1 a 0 y, por lo tanto, se traza la porción correspondiente de la curva polar en la figura 8 (indicada por ①). Cuando θ se incrementa de $\pi/4$ a $\pi/2$, el valor de r va de 0 a -1. Esto significa que la distancia desde el origen se incrementa de 0 a 1, pero en lugar de estar en el cuadrante I, esta porción de la curva polar (indicada por ②) yace en el lado opuesto del origen en el cuadrante III. El resto de la curva se dibuja de manera similar, con flechas y números

que indican el orden en el que se trazan las porciones. La curva resultante tiene cuatro pétalos y se llama **rosa de cuatro hojas.**

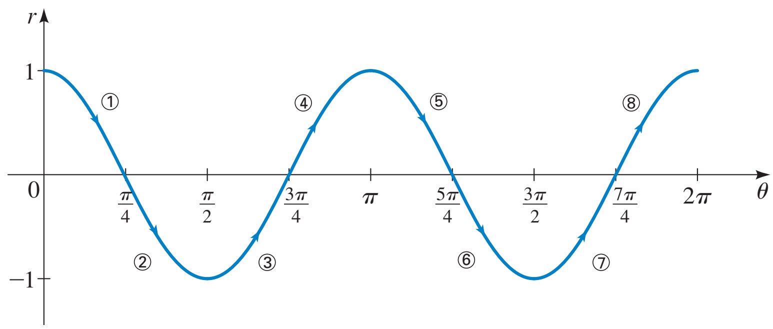


Figura 7
Gráfica de $r = \cos 2\theta$ bosquejada en coordenadas rectangulares

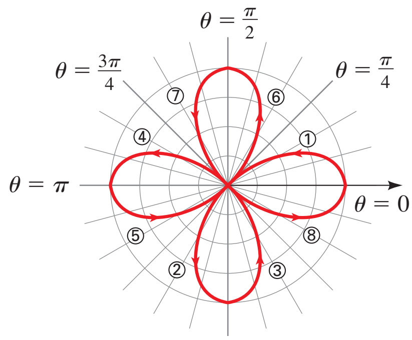


Figura 8
Rosa de cuatro hojas $r = \cos 2\theta$ bosquejada en coordenadas polares

En general, la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \cos n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \operatorname{sen} n\theta$$

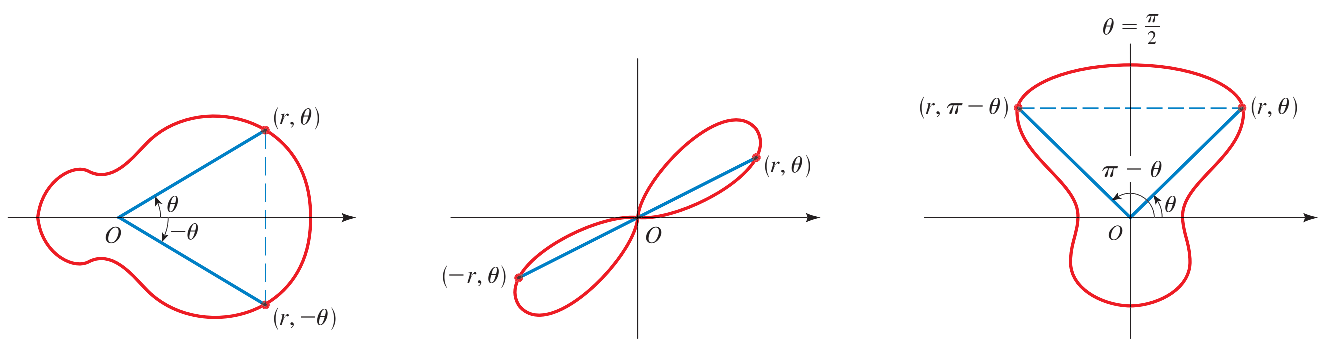
es una **rosa de *n* hojas** si n es impar o una rosa de $2n$ hojas si n es par (como en el ejemplo 5).

Simetría

Al graficar una ecuación polar, suele ser útil aprovechar la simetría. Se listan tres pruebas para simetría; en la figura 9 se muestra por qué funcionan estas pruebas.

Pruebas para simetría

1. Si una ecuación polar permanece sin cambio al sustituir θ por $-\theta$, entonces la gráfica es simétrica con respecto al eje polar (figura 9a)).
2. Si la ecuación no se modifica cuando se sustituye r por $-r$, entonces la gráfica es simétrica respecto al polo (figura 9b)).
3. Si la ecuación no cambia cuando se sustituye θ por $\pi - \theta$, la gráfica es simétrica respecto a la línea vertical $\theta = \pi/2$ (el eje y) (fig. 9c)).



a) Simetría respecto al eje polar b) Simetría respecto al polo c) Simetría respecto a la línea $\theta = \frac{\pi}{2}$

Figura 9

Las gráficas de las figuras 2, 6e) y 8 son simétricas respecto al eje polar. La gráfica de la figura 8 también es simétrica respecto al polo. En las figuras 4 y 8 se muestran gráficas que son simétricas respecto a $\theta = \pi/2$. Observe que la rosa de cuatro hojas de la figura 8 satisface las tres pruebas para simetría.

En coordenadas rectangulares, los ceros de la función $y = f(x)$ corresponden a las intersecciones de la gráfica. En coordenadas polares, los ceros de la función $r = f(\theta)$ son los ángulos θ en los que la curva cruza el polo. Los ceros ayudan a bosquejar la gráfica, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

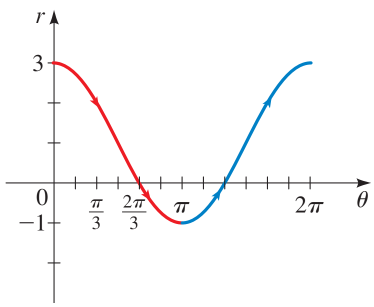


Figura 10

Ejemplo 6 Uso de la simetría para bosquejar una gráfica polar

Bosqueje la gráfica de la ecuación $r = 1 + 2\cos\theta$.

Solución Se usa lo siguiente como ayuda para bosquejar la gráfica.

- **Simetría** Puesto que la ecuación no se modifica cuando θ se remplaza por $-\theta$, la gráfica es simétrica respecto al eje polar.

- **Ceros** Para hallar los ceros, se resuelve

$$0 = 1 + 2\cos\theta$$
$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$$

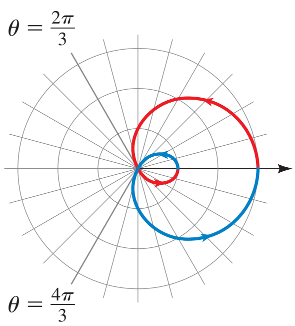


Figura 11
$r = 1 + 2\cos\theta$

- **Tabla de valores** Como en el ejemplo 4, se bosqueja la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ en coordenadas rectangulares que sirve como una tabla de valores (figura 10).

Ahora se bosqueja la gráfica polar de $r = 1 + 2\cos\theta$ de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, y luego se usa la simetría para completar la gráfica en la figura 11. ■

La curva de la figura 11 se llama **limaçon** por la palabra francesa de la Edad Media para caracol. En general, la gráfica de una ecuación de la forma

$$r = a \pm b\cos\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\,\text{sen}\,\theta$$

es un caracol. La forma del caracol depende del tamaño relativo de a y b (véase la tabla de la página 594).

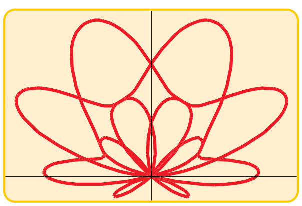


Figura 12
$r = \text{sen}\,\theta + \text{sen}^3(5\theta/2)$

Construcción de gráficas de ecuaciones polares con dispositivos de graficación

Aunque es útil poder bosquejar gráficas polares simples a mano, se necesita una calculadora para gráficas o una computadora cuando la gráfica es tan complicada como la de la figura 12. Por fortuna, la mayor parte de las calculadoras para gráficas son capaces de graficar ecuaciones polares de manera directa.

Ejemplo 7 Dibujar la gráfica de una ecuación polar

Grafique la ecuación $r = \cos(2\theta/3)$.

Solución Se necesita determinar el dominio para θ. Así que uno se pregunta: ¿cuántas rotaciones completas se requieren antes de que la gráfica comience a repetirse? La gráfica se repite cuando se obtiene el mismo valor de r en θ y $\theta + 2n\pi$. Así, es necesario hallar un entero n, de modo que

$$\cos \frac{2(\theta + 2n\pi)}{3} = \cos \frac{2\theta}{3}$$

Para que se cumpla esta igualdad, $4n\pi/3$ debe ser un múltiplo de 2π, y esto sucede primero cuando $n = 3$. Por lo tanto, se obtiene la gráfica completa si se eligen valores de θ entre $\theta = 0$ y $\theta = 0 + 2(3)\pi = 6\pi$. La gráfica se muestra en la figura 13.

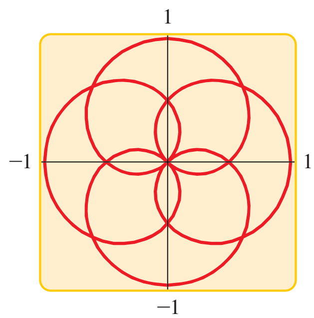


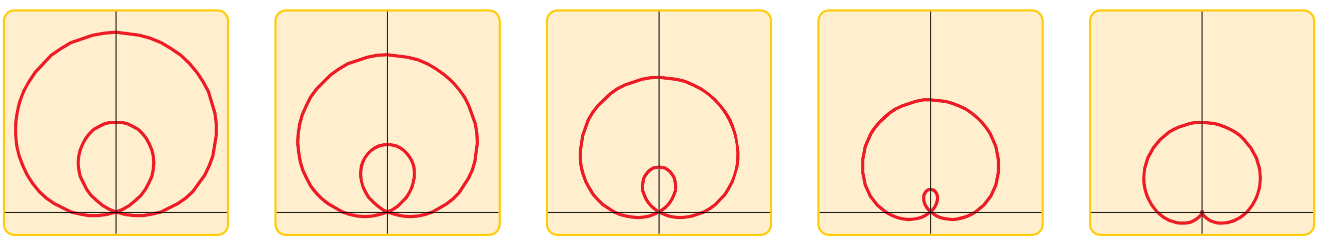
Figura 13
$r = \cos(2\theta/3)$

■

Ejemplo 8 Una familia de ecuaciones polares

Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ para $c = 3, 2.5, 2, 1.5, 1$. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando cambia c?

Solución En la figura 14 se muestran gráficas trazadas por computadora para los valores dados de c. Para $c > 1$, la gráfica tiene un bucle interno; el bucle se hace más pequeño a medida que c disminuye. Cuando $c = 1$, el bucle desaparece y la gráfica se convierte en una cardioide (véase el ejemplo 4).

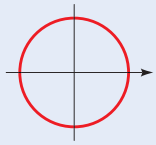
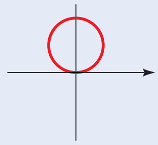
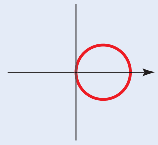
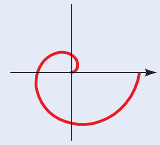
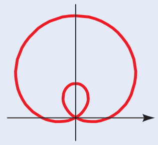
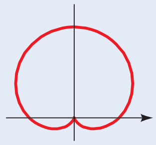
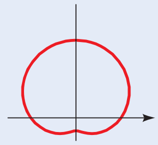
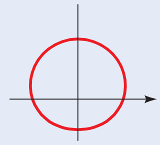
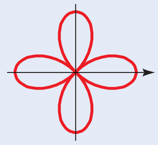
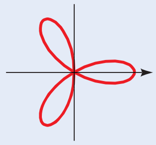
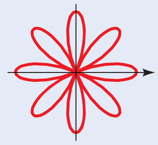
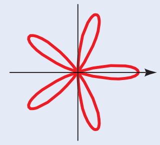
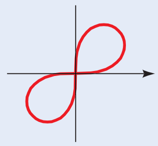
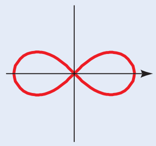


$c = 3.0$ $c = 2.5$ $c = 2.0$ $c = 1.5$ $c = 1.0$

Figura 14 Una familia de caracoles $r = 1 + c \operatorname{sen} \theta$ en el rectángulo de visión $[-2.5, 2.5]$ por $[-0.5, 4.5]$ ■

En el siguiente cuadro se da un resumen de algunas de las gráficas polares básicas empleadas en cálculo.

Algunas curvas polares comunes

Círculos y espiral	 $r = a$ círculo	 $r = a \operatorname{sen} \theta$ círculo	 $r = a \cos \theta$ círculo	 $r = a\theta$ espiral
Caracoles $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$ $r = a \pm b \cos \theta$ $(a > 0, b > 0)$ La orientación depende de la función trigonométrica (seno o coseno) y el signo de b.	 $a < b$ caracol con bucle interno	 $a = b$ cardioide	 $a > b$ caracol alveolado	 $a \geq 2b$ caracol convexo
Rosas $r = a \operatorname{sen} n\theta$ $r = a \cos n\theta$ de n hojas si n es impar de $2n$ hojas si n es par	 $r = a \cos 2\theta$ rosa de cuatro hojas	 $r = a \cos 3\theta$ rosa de tres hojas	 $r = a \cos 4\theta$ rosa de ocho hojas	 $r = a \cos 5\theta$ rosa de cinco hojas
Lemniscatas Curvas en forma de ocho	 $r^2 = a^2 \operatorname{sen} 2\theta$ lemniscata	 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ lemniscata		

8.2 Ejercicios

1–6 ■ Compare la ecuación polar con las gráficas marcadas I–VI. Use la tabla anterior como ayuda.

1. $r = 3 \cos \theta$

2. $r = 3$

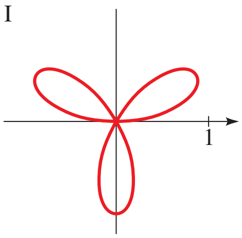
3. $r = 2 + 2 \operatorname{sen} \theta$

4. $r = 1 + 2 \cos \theta$

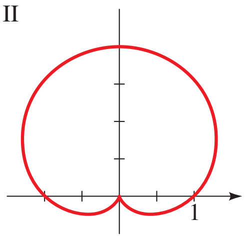
5. $r = \operatorname{sen} 3\theta$

6. $r = \operatorname{sen} 4\theta$

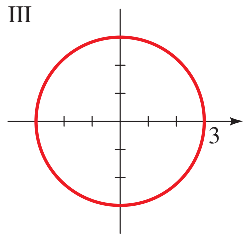
I



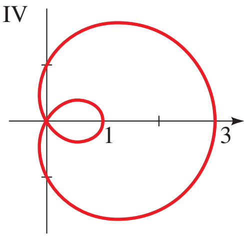
II



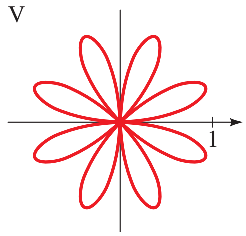
III



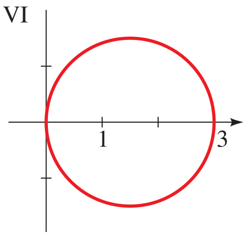
IV



V



VI



7–14 ■ Pruebe la simetría de la ecuación polar con respecto al eje polar, el polo y la línea $\theta = \pi/2$.

7. $r = 2 - \operatorname{sen}\theta$

8. $r = 4 + 8\cos\theta$

9. $r = 3\sec\theta$

10. $r = 5\cos\theta\ \csc\theta$

11. $r = \dfrac{4}{3 - 2\operatorname{sen}\theta}$

12. $r = \dfrac{5}{1 + 3\cos\theta}$

13. $r^2 = 4\cos 2\theta$

14. $r^2 = 9\operatorname{sen}\theta$

15–36 ■ Bosqueje la gráfica de la ecuación polar.

15. $r = 2$

16. $r = -1$

17. $\theta = -\pi/2$

18. $\theta = 5\pi/6$

19. $r = 6\operatorname{sen}\theta$

20. $r = \cos\theta$

21. $r = -2\cos\theta$

22. $r = 2\operatorname{sen}\theta + 2\cos\theta$

23. $r = 2 - 2\cos\theta$

24. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

25. $r = -3(1 + \operatorname{sen}\theta)$

26. $r = \cos\theta - 1$

27. $r = \theta,\quad \theta \geq 0$ (espiral)

28. $r\theta = 1,\quad \theta > 0$ (espiral recíproca)

29. $r = \operatorname{sen} 2\theta$ (rosa de cuatro hojas)

30. $r = 2\cos 3\theta$ (rosa de tres hojas)

31. $r^2 = \cos 2\theta$ (lemniscata)

32. $r^2 = 4\operatorname{sen} 2\theta$ (lemniscata)

33. $r = 2 + \operatorname{sen}\theta$ (caracol)

34. $r = 1 - 2\cos\theta$ (caracol)

35. $r = 2 + \sec\theta$ (concoide)

36. $r = \operatorname{sen}\theta\tan\theta$ (cisoide)

37–40 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar la ecuación polar. Elija el dominio de θ para asegurar que produce la gráfica completa.

37. $r = \cos(\theta/2)$

38. $r = \operatorname{sen}(8\theta/5)$

39. $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta/2)$ (nefroide)

40. $r = \sqrt{1 - 0.8\operatorname{sen}^2\theta}$ (hipopeda)

41. Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + \operatorname{sen} n\theta$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. ¿Cómo se relaciona el número de bucles con n?

42. Grafique la familia de ecuaciones polares $r = 1 + c\operatorname{sen} 2\theta$ para $c = 0.3, 0.6, 1, 1.5$ y 2. ¿Cómo cambia la gráfica cuando se incrementa c?

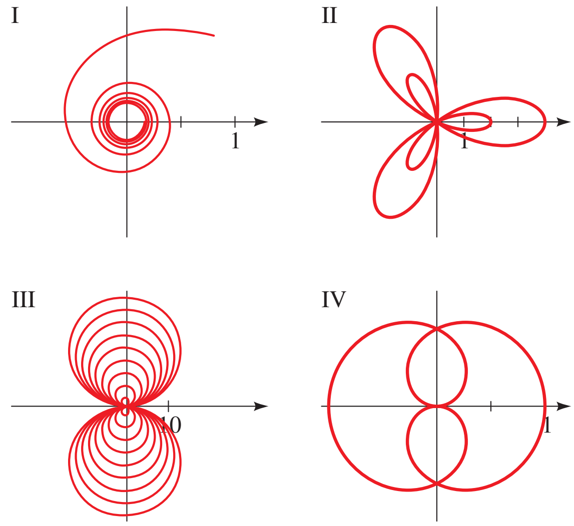
43–46 ■ Compare la ecuación polar con las gráficas marcadas I–IV. Dé razones para sus respuestas.

43. $r = \operatorname{sen}(\theta/2)$

44. $r = 1/\sqrt{\theta}$

45. $r = \theta\operatorname{sen}\theta$

46. $r = 1 + 3\cos(3\theta)$



47–50 ■ Bosqueje una gráfica de la ecuación rectangular. [*Sugerencia*: primero convierta la ecuación a coordenadas polares.]

47. $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$

48. $(x^2 + y^2)^3 = (x^2 - y^2)^2$

49. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$

50. $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$

51. Muestre que la gráfica de $r = a\cos\theta + b\operatorname{sen}\theta$ es un círculo, y encuentre su centro y radio.

52. **a)** Grafique la ecuación polar $r = \tan\theta\sec\theta$ en el rectángulo de visión $[-3, 3]$ por $[-1, 9]$.

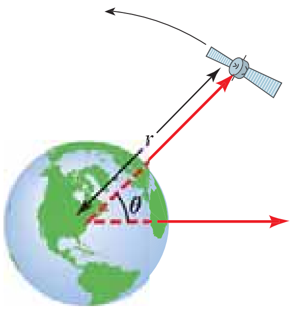
b) Observe que su gráfica del inciso a) se parece a una parábola (véase la sección 2.5). Confirme esto convirtiendo la ecuación a coordenadas rectangulares.

Aplicaciones

53. Órbita de un satélite Los científicos e ingenieros emplean con frecuencia coordenadas polares para modelar el movimiento de satélites en la órbita de la Tierra. Considérese un satélite cuya órbita se modela mediante la ecuación $r = 22500/(4 - \cos\theta)$, donde r es la distancia en millas entre el satélite y el centro de la Tierra y θ es el ángulo mostrado en la figura en la página siguiente.

a) En la misma pantalla de visión, grafique el círculo $r = 3960$ (para representar la Tierra, que se supone es una esfera de radio 3960 millas) y la ecuación polar de la órbita del satélite. Describa el movimiento del satélite cuando θ se incrementa de 0 a 2π.

b) ¿Para qué ángulo θ el satélite está más cerca de la Tierra? Encuentre la altura del satélite arriba de la superficie de la Tierra para este valor de θ.



54. Una órbita inestable La órbita descrita en el ejercicio 53 es estable porque el satélite recorre la misma trayectoria una y otra vez a medida que se incrementa θ. Suponga que un meteoro choca con el satélite y cambia su órbita a

$$r = \frac{22500\left(1 - \dfrac{\theta}{40}\right)}{4 - \cos\theta}$$

a) En la misma pantalla de visión, grafique el círculo $r = 3960$ y la nueva ecuación de órbita, con θ creciente de 0 a 3π. Describa el nuevo movimiento del satélite.

b) Use la característica TRACE de su calculadora para hallar el valor de θ en el momento en que el satélite choca contra la Tierra.

Descubrimiento • Debate

55. Una transformación de gráficas polares ¿Cómo están relacionadas las gráficas de $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$ y $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/3)$ con la gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$? En general, ¿cómo se relaciona la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ con la gráfica de $r = f(\theta)$?

56. Elegir un sistema de coordenadas conveniente Compare la ecuación polar del círculo $r = 2$ con su ecuación en coordenadas rectangulares. ¿En qué sistema coordenado es más simple la ecuación? Haga lo mismo para la ecuación de la rosa de cuatro hojas $r = \operatorname{sen} 2\theta$. ¿Cuál sistema coordenado elegiría para estudiar estas curvas?

57. Elegir un sistema de coordenadas conveniente Compare la ecuación rectangular de la recta $y = 2$ con su ecuación polar. ¿En qué sistema coordenado es más simple la ecuación? ¿Qué sistema de coordenadas elegiría para estudiar rectas?

8.3 Forma polar de números complejos; teorema de DeMoivre

En esta sección se representan números complejos en forma polar (o trigonométrica). Esto permite hallar las n raíces de números complejos. Para describir la forma polar de números complejos, primero se debe aprender a trabajar con números complejos en forma gráfica.

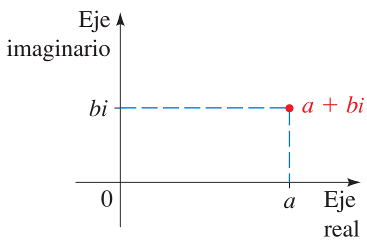


Figura 1

Graficación de números complejos

Para graficar números reales o conjuntos de números reales, se ha estado usando la recta numérica, que tiene sólo una dimensión. Sin embargo, los números complejos tienen dos componentes: una parte real y una parte imaginaria. Esto hace pensar que son necesarios dos ejes para graficar números complejos: uno para la parte real y otro para la parte imaginaria. A éstos se les denomina **eje real** y **eje imaginario**, respectivamente. El plano determinado por estos dos ejes se llama **plano complejo.** Para graficar el número complejo $a + bi$, se traza el par ordenado de números (a, b) en este plano, como indica la figura 1.

Ejemplo 1 Graficación de números complejos

Grafique los números complejos $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$ y $z_1 + z_2$.

Solución Se tiene $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 2i) = 5 + i$. La gráfica se muestra en la figura 2. ■

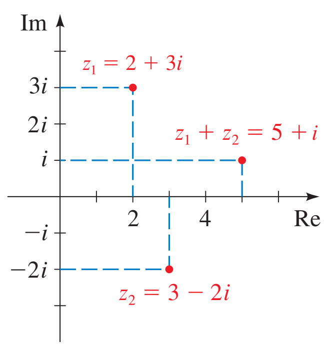


Figura 2

Ejemplo 2 Graficación de conjuntos de números complejos

Grafique cada conjunto de números complejos.

a) $S = \{a + bi \mid a \geq 0\}$ b) $T = \{a + bi \mid a < 1, b \geq 0\}$

Solución

a) S es el conjunto de números complejos cuya parte real es no negativa. La gráfica se muestra en la figura 3a).

b) T es el conjunto de números complejos para los cuales la parte real es menor que 1 y la parte imaginaria es no negativa. La gráfica se muestra en la figura 3b).

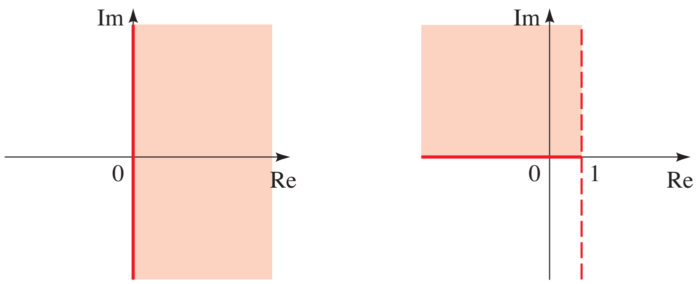


Figura 3 a) b) ■

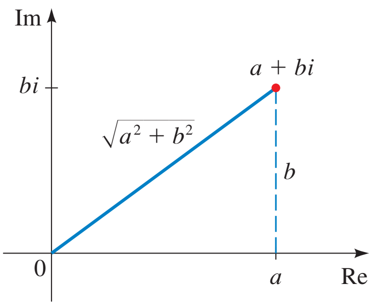


Figura 4

Recuerde que el valor absoluto de un número real se puede considerar como su distancia desde el origen en la recta de números reales (véase la sección 1.1). Se define el valor absoluto para números complejos de una manera similar. Por medio del teorema de Pitágoras se puede ver de la figura 4 que es la distancia entre $a + bi$ y el origen en el plano complejo es $\sqrt{a^2 + b^2}$. Esto conduce a la siguiente definición.

> El **módulo** (o **valor absoluto**) del número complejo $z = a + bi$ es
>
> $$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 3 Calcular el módulo

Encuentre los módulos de los números complejos $3 + 4i$ y $8 - 5i$.

Solución

$$|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$|8 - 5i| = \sqrt{8^2 + (-5)^2} = \sqrt{89}$$ ■

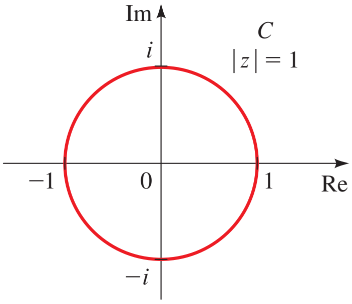


Figura 5

Ejemplo 4 Valor absoluto de números complejos

Grafique cada conjunto de números complejos.

a) $C = \{z \mid |z| = 1\}$ b) $D = \{z \mid |z| \leq 1\}$

Solución

a) C es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es 1. Así, C es un círculo de radio 1 con centro en el origen, como se muestra en la figura 5.

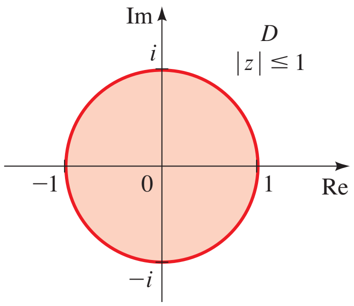


Figura 6

b) D es el conjunto de números complejos cuya distancia desde el origen es menor o igual a 1. Así, D es el disco que consta de los números complejos en y dentro del círculo C del inciso a), como se muestra en la figura 6. ■

Forma polar de números complejos

Sea $z = a + bi$ un número complejo, y en el plano complejo se traza el segmento de recta que une al origen con el punto $a + bi$ (véase la figura 7). La longitud de este segmento de recta es $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si θ es un ángulo en posición estándar cuyo lado terminal coincide con este segmento de recta, entonces por las definiciones de seno y coseno (véase la sección 6.2).

$$a = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = r\,\text{sen}\,\theta$$

por lo tanto $z = r\cos\theta + ir\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$. Se ha mostrado lo siguiente

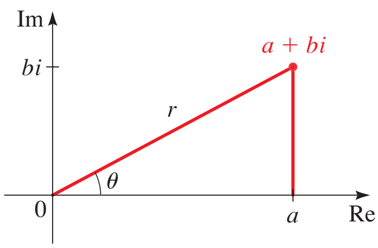


Figura 7

Forma polar de números complejos

Un número complejo $z = a + bi$ tiene la **forma polar** (o **forma trigonométrica**)

$$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

donde $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\tan\theta = b/a$. El número r es el **módulo** de z y θ es un **argumento** de z.

El argumento de z no es único, pero dos argumentos cualesquiera de z difieren por un múltiplo de 2π.

Ejemplo 5 Escribir números complejos en forma polar

Escriba cada número complejo en forma trigonométrica.

a) $1 + i$ b) $-1 + \sqrt{3}i$ c) $-4\sqrt{3} - 4i$ d) $3 + 4i$

Solución Estos números complejos se grafican en la figura 8, lo cual ayuda a hallar sus argumentos.

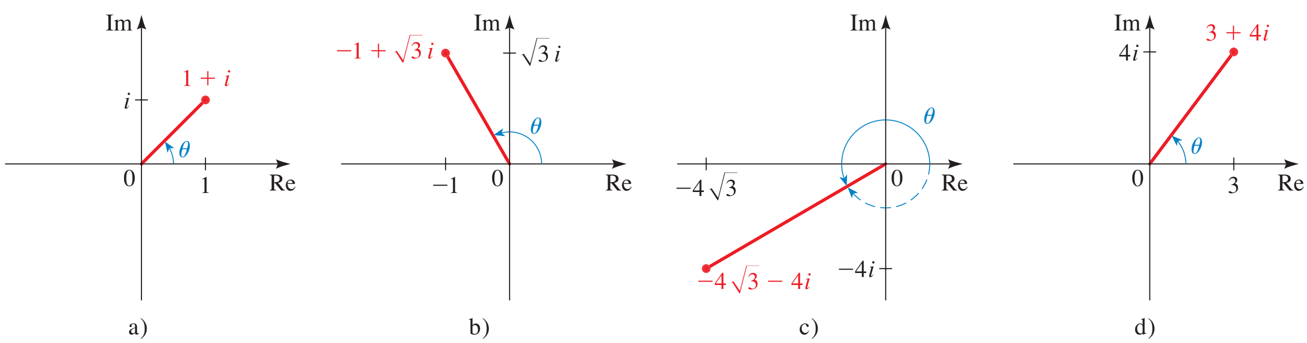


Figura 8

$\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$
$\theta = \frac{\pi}{4}$

a) Un argumento es $\theta = \pi/4$ y $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Por lo tanto

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$
$\theta = \frac{2\pi}{3}$

b) Un argumento es $\theta = 2\pi/3$ y $r = \sqrt{1+3} = 2$. Por lo tanto

$$-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\right)$$

$\tan\theta = \dfrac{-4}{-4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$
$\theta = \frac{7\pi}{6}$

c) Un argumento es $\theta = 7\pi/6$ (o se podría usar $\theta = -5\pi/6$), y $r = \sqrt{48+16} = 8$. Por lo tanto

$$-4\sqrt{3} - 4i = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right)$$

$\tan\theta = \frac{4}{3}$
$\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$

d) Un argumento es $\theta = \tan^{-1}\frac{4}{3}$ y $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Por lo tanto

$$3 + 4i = 5\left[\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right)\right]$$ ■

Las fórmulas de adición para seno y coseno que se estudiaron en la sección 7.2, simplifican en gran medida la multiplicación y división de números complejos en forma polar. El siguiente teorema muestra cómo.

Multiplicación y división de números complejos

Si los dos números complejos z_1 y z_2 tienen las formas polares

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1) \qquad \text{y} \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$$

entonces

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \qquad \text{Multiplicación}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)] \qquad (z_2 \neq 0) \qquad \text{División}$$

Este teorema dice:

Para multiplicar dos números complejos, multiplique los módulos y sume los argumentos.

Para dividir dos números complejos, divida los módulos y reste los argumentos.

■ **Demostración** Para probar la fórmula de la multiplicación, simplemente se multiplican los dos números complejos.

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2)] \\ &= r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

En el último paso se emplearon las fórmulas de suma para seno y coseno. ■

La demostración de la fórmula de división se deja como un ejercicio.

Matemáticas en el mundo moderno

Bill Ross/Corbis

Fractales

Muchas de las cosas que se modelan en este libro tienen formas regulares predecibles. Pero avances recientes en las matemáticas han hecho posible modelar formas en apariencia aleatorias, o incluso caóticas, como las de una nube, una flama oscilante, una montaña o una costa accidentada. Las herramientas básicas en este tipo de modelado son los fractales inventados por el matemático Benoit Mandelbrot. Un *fractal* es una forma geométrica construida a partir de una forma básica al modificar la escala y repetir la forma indefinidamente de acuerdo con una regla dada. Los fractales tienen detalle infinito; esto significa que mientras más se aproxime, más ve. También son *similares a sí mismos*; es decir, al ampliar una porción del fractal se ven los mismos detalles de la forma original. Debido a sus bellas formas, los directores de cine emplean fractales para crear paisajes ficticios y fondos exóticos.

Aunque un fractal es una forma compleja, se produce de acuerdo con reglas muy simples (véase la página 605). Esta propiedad de los fractales se explota en un proceso de almacenar fotografías en una computadora, conocido como *compresión de imágenes fractales*. En este proceso una fotografía se guarda como una forma básica simple y una regla; repetir la forma de acuerdo con la regla produce la fotografía original. Este es un método de almacenaje extremadamente eficaz; esa es la manera cómo miles de fotografías a color se pueden poner en un solo disco compacto.

Ejemplo 6 Multiplicación y división de números complejos

Sean

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right) \qquad \text{y} \qquad z_2 = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)$$

Encuentre a) z_1z_2 y b) z_1/z_2.

Solución

a) Por la fórmula de la multiplicación

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= (2)(5)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 10\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Para aproximar la respuesta se usa una calculadora en el modo de radianes y se obtiene

$$z_1z_2 \approx 10(-0.2588 + 0.9659i) = -2.588 + 9.659i$$

b) Por la fórmula de la división

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \\ &= \frac{2}{5}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Con una calculadora en el modo de radianes se obtiene la respuesta aproximada:

$$\frac{z_1}{z_2} \approx \tfrac{2}{5}(0.9659 - 0.2588i) = 0.3864 - 0.1035i$$ ■

Teorema de DeMoivre

El empleo repetido del uso de la fórmula de la multiplicación da la siguiente fórmula útil para elevar un número complejo a una potencia n para cualquier entero positivo n.

Teorema de DeMoivre

Si $z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$, entonces para cualquier entero n

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\,n\theta)$$

Este teorema dice: *para tomar la n-ésima potencia de un número complejo, se toma la n-ésima potencia del módulo y se multiplica el argumento por n.*

■ **Demostración** Por la fórmula de la multiplicación

$$\begin{aligned} z^2 = zz &= r^2[\cos(\theta+\theta) + i\,\text{sen}(\theta+\theta)] \\ &= r^2(\cos 2\theta + i\,\text{sen}\,2\theta) \end{aligned}$$

Ahora se multiplica z^2 por z para obtener

$$\begin{aligned} z^3 = z^2 z &= r^3[\cos(2\theta + \theta) + i \operatorname{sen}(2\theta + \theta)] \\ &= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta) \end{aligned}$$

Al repetir este argumento se puede observar para cualquier entero positivo n

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

Un argumento similar usando la fórmula de la división muestra que esto se cumple también para enteros negativos. ■

Ejemplo 7 Hallar una potencia por medio del teorema de DeMoivre

Encuentre $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10}$.

Solución Puesto que $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(1 + i)$, se deduce del ejemplo 5a) que

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

Así, por el teorema de DeMoivre,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{10\pi}{4}\right) \\ &= \frac{2^5}{2^{10}}\left(\cos\frac{5\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{32}i \end{aligned}$$ ■

Raíces *n*-ésimas de números complejos

La **raíz *n*-ésima** de un número complejo z es cualquier número complejo w tal que $w^n = z$. El teorema de DeMoivre proporciona un método para calcular las raíces n-ésimas de cualquier número complejo.

Raíces *n*-ésimas de números complejos

Si $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y n es un entero positivo, entonces z tiene las n raíces n-ésimas distintas

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

■ **Demostración** Para hallar las raíces n-ésimas de z, se necesita hallar un número complejo w tal que

$$w^n = z$$

Se escribirá z en forma polar:

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

Una raíz n-ésima de z es

$$w = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \operatorname{sen}\frac{\theta}{n}\right)$$

puesto que por el teorema de DeMoivre, $w^n = z$. Pero el argumento θ de z se puede reemplazar por $\theta + 2k\pi$ para cualquier entero k. Puesto que esta expresión da un valor diferente de w para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, se ha demostrado la fórmula del teorema. ■

Las observaciones siguientes ayudan a usar la fórmula precedente.

1. El módulo de cada raíz n-ésima es $r^{1/n}$.
2. El argumento de la primera raíz es θ/n.
3. Se suma de forma repetida $2\pi/n$ para obtener el argumento de cada raíz sucesiva.

Estas observaciones muestran que, cuando se grafican, las raíces n-ésimas de z están igualmente espaciadas en el círculo de radio $r^{1/n}$.

Ejemplo 8 Hallar las raíces de un número complejo

Encuentre las seis raíces sextas de $z = -64$, y grafique estas raíces en el plano complejo.

Solución En forma polar, $z = 64(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$. Al aplicar la fórmula para las raíces n-ésimas con $n = 6$, se obtiene

$$w_k = 64^{1/6}\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Al usar $64^{1/6} = 2$, se encuentra que las seis raíces sextas de -64 son

Se suma $2\pi/6 = \pi/3$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.

$$w_0 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$w_2 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$w_3 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$w_4 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$$

$$w_5 = 64^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$$

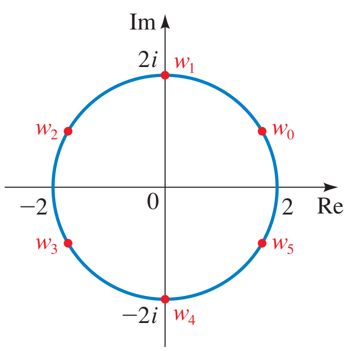


Figura 9
Las seis raíces sextas de $z = -64$

Todos estos puntos se encuentran en un círculo de radio 2, como se muestra en la figura 9. ■

Al hallar raíces de números complejos, a veces se escribe el argumento θ del número complejo en grados. En este caso, las raíces n-ésimas se obtienen de la fórmula

$$w_k = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 360°k}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

Ejemplo 9 Hallar las raíces cúbicas de un número complejo

Encuentre las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$ y grafíquelas en el plano complejo.

Solución Primero se escribe z en forma polar usando grados. Se tiene $r = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ y $\theta = 45^\circ$. Así,

$$z = 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

Al aplicar la fórmula para raíces n-ésimas (en grados) con $n = 3$, se encuentra que las raíces cúbicas de z son de la forma

$$(2\sqrt{2})^{1/3} = (2^{3/2})^{1/3} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$w_k = (2\sqrt{2})^{1/3}\left[\cos\left(\frac{45^\circ + 360^\circ k}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{45^\circ + 360^\circ k}{3}\right)\right]$$

donde $k = 0, 1, 2$. Así, las tres raíces cúbicas son

Se suma $360^\circ/3 = 120^\circ$ a cada argumento para obtener el argumento de la siguiente raíz.

$$w_0 = \sqrt{2}(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ) \approx 1.366 + 0.366i$$
$$w_1 = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = -1 + i$$
$$w_2 = \sqrt{2}(\cos 255^\circ + i \operatorname{sen} 255^\circ) \approx -0.366 - 1.366i$$

Las tres raíces cúbicas de z se grafican en la figura 10. Estas raíces están igualmente espaciadas en un círculo de radio $\sqrt{2}$. ■

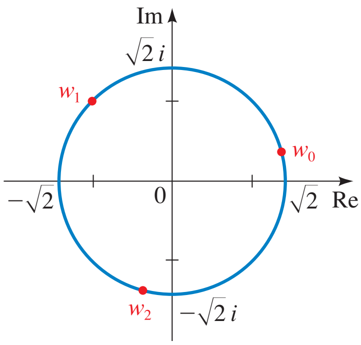


Figura 10
Las tres raíces cúbicas de $z = 2 + 2i$

Ejemplo 10 Resolver una ecuación usando la fórmula de raíz *n*-ésima

Resuelva la ecuación $z^6 + 64 = 0$.

Solución Esta ecuación se puede escribir como $z^6 = -64$. Entonces, las soluciones son las raíces sextas de –64, halladas en el ejemplo 8. ■

8.3 Ejercicios

1–8 ■ Grafique el número complejo y encuentre su módulo.

1. $4i$
2. $-3i$
3. -2
4. 6
5. $5 + 2i$
6. $7 - 3i$
7. $\sqrt{3} + i$
8. $-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}i$
9. $\frac{3 + 4i}{5}$
10. $\frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$

11–12 ■ Bosqueje el número complejo z y también bosqueje $2z$, $-z$ y $\frac{1}{2}z$ en el mismo plano complejo.

11. $z = 1 + i$
12. $z = -1 + i\sqrt{3}$

13–14 ■ Bosqueje el número complejo z y su conjugado complejo en el mismo plano complejo.

13. $z = 8 + 2i$
14. $z = -5 + 6i$

15–16 ■ Bosqueje z_1, z_2, $z_1 + z_2$ y z_1z_2 en el mismo plano complejo.

15. $z_1 = 2 - i, \quad z_2 = 2 + i$

16. $z_1 = -1 + i, \quad z_2 = 2 - 3i$

17–24 ■ Bosqueje el conjunto en el plano complejo.

17. $\{z = a + bi \mid a \le 0, b \ge 0\}$

18. $\{z = a + bi \mid a > 1, b > 1\}$

19. $\{z \mid |z| = 3\}$
20. $\{z \mid |z| \ge 1\}$

21. $\{z \mid |z| < 2\}$
22. $\{z \mid 2 \le |z| \le 5\}$

23. $\{z = a + bi \mid a + b < 2\}$

24. $\{z = a + bi \mid a \ge b\}$

25–48 ■ Escriba el número complejo en forma polar con argumento θ entre 0 y 2π.

25. $1 + i$ **26.** $1 + \sqrt{3}\,i$ **27.** $\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$

28. $1 - i$ **29.** $2\sqrt{3} - 2i$ **30.** $-1 + i$

31. $-3i$ **32.** $-3 - 3\sqrt{3}\,i$ **33.** $5 + 5i$

34. 4 **35.** $4\sqrt{3} - 4i$ **36.** $8i$

37. -20 **38.** $\sqrt{3} + i$ **39.** $3 + 4i$

40. $i(2 - 2i)$ **41.** $3i(1 + i)$ **42.** $2(1 - i)$

43. $4(\sqrt{3} + i)$ **44.** $-3 - 3i$ **45.** $2 + i$

46. $3 + \sqrt{3}\,i$ **47.** $\sqrt{2} + \sqrt{2}\,i$ **48.** $-\pi i$

49–56 ■ Encuentre el producto z_1z_2 y el cociente z_1/z_2. Exprese su respuesta en forma polar.

49. $z_1 = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi, \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

50. $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}, \quad z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$

51. $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right), \quad z_2 = 5\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}\right)$

52. $z_1 = 7\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{9\pi}{8}\right), \quad z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{8}\right)$

53. $z_1 = 4(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$,
$z_2 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

54. $z_1 = \sqrt{2}(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$,
$z_2 = 3\sqrt{2}(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

55. $z_1 = 4(\cos 200° + i \operatorname{sen} 200°)$,
$z_2 = 25(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$

56. $z_1 = \frac{4}{5}(\cos 25° + i \operatorname{sen} 25°)$,
$z_2 = \frac{1}{5}(\cos 155° + i \operatorname{sen} 155°)$

57–64 ■ Escriba z_1 y z_2 en forma polar, y luego encuentre el producto z_1z_2 y los cocientes z_1/z_2 y $1/z_1$.

57. $z_1 = \sqrt{3} + i, \quad z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$

58. $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}\,i, \quad z_2 = 1 - i$

59. $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i, \quad z_2 = -1 + i$

60. $z_1 = -\sqrt{2}\,i, \quad z_2 = -3 - 3\sqrt{3}\,i$

61. $z_1 = 5 + 5i, \quad z_2 = 4$ **62.** $z_1 = 4\sqrt{3} - 4i, \quad z_2 = 8i$

63. $z_1 = -20, \quad z_2 = \sqrt{3} + i$ **64.** $z_1 = 3 + 4i, \quad z_2 = 2 - 2i$

65–76 ■ Encuentre la potencia indicada por medio del teorema de DeMoivre.

65. $(1 + i)^{20}$ **66.** $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$

67. $(2\sqrt{3} + 2i)^5$ **68.** $(1 - i)^8$

69. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{12}$ **70.** $(\sqrt{3} - i)^{-10}$

71. $(2 - 2i)^8$ **72.** $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15}$

73. $(-1 - i)^7$ **74.** $(3 + \sqrt{3}\,i)^4$

75. $(2\sqrt{3} + 2i)^{-5}$ **76.** $(1 - i)^{-8}$

77–86 ■ Encuentre las raíces indicadas y grafique las raíces en el plano complejo.

77. Las raíces cuadradas de $4\sqrt{3} + 4i$

78. Las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} + 4i$

79. Las raíces cuartas de $-81i$ **80.** Las raíces quintas de 32

81. Las raíces octavas de 1 **82.** Las raíces cúbicas de $1 + i$

83. Las raíces cúbicas de i **84.** Las raíces quintas de i

85. Las raíces cuartas de -1

86. Las raíces quintas de $-16 - 16\sqrt{3}i$

87–92 ■ Resuelva la ecuación.

87. $z^4 + 1 = 0$ **88.** $z^8 - i = 0$

89. $z^3 - 4\sqrt{3} - 4i = 0$ **90.** $z^6 - 1 = 0$

91. $z^3 + 1 = -i$ **92.** $z^3 - 1 = 0$

93. **a)** Sea $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$ donde n es un entero positivo. Muestre que $1, w, w^2, w^3, \ldots, w^{n-1}$ son las n distintas raíces n-ésimas de 1.

b) Si $z \neq 0$ es cualquier número complejo y $s^n = z$, muestre que las n distintas raíces n-ésimas de z son

$$s, sw, sw^2, sw^3, \ldots, sw^{n-1}$$

Descubrimiento • Debate

94. Sumas de raíces de la unidad Encuentre los valores exactos de las tres raíces cúbicas de 1 (véase el ejercicio 93) y luego súmelas. Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál considera que sea la suma de las raíces n-ésimas de 1, para cualquier n?

95. Productos de las raíces de la unidad Encuentre el producto de las tres raíces cúbicas de 1 (véase el ejercicio 93). Haga lo mismo para las raíces cuarta, quinta, sexta y octava de 1. ¿Cuál cree que sea el producto de las raíces n-ésimas de 1, para cualquier n?

96. Coeficientes complejos y la fórmula cuadrática La fórmula cuadrática funciona si los coeficientes de la ecuación son reales o complejos. Resuelva estas ecuaciones usando la fórmula cuadrática y, si es necesario, el teorema de DeMoivre.

a) $z^2 + (1 + i)z + i = 0$

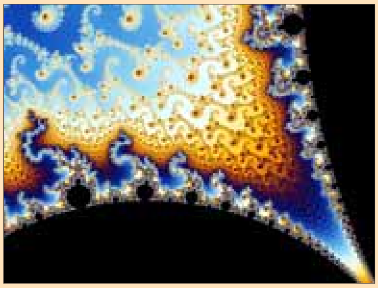
b) $z^2 - iz + 1 = 0$

c) $z^2 - (2 - i)z - \frac{1}{4}i = 0$

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

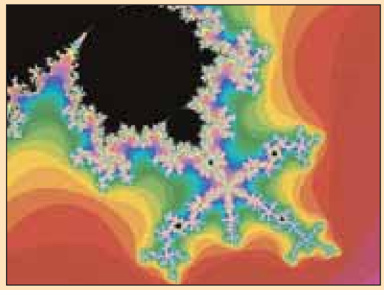
Fractales

Los fractales son objetos geométricos que exhiben más y más detalles a medida que se amplifican (véase *Matemáticas en el mundo moderno* en la página 600). Muchos fractales se pueden describir al iterar funciones de números complejos. El fractal más famoso se ilustra en las figuras 1 y 2. Se llama *conjunto de Mandelbrot*, en honor de Benoit Mandelbrot, el matemático que lo descubrió en la década de 1950.



Cortesía de David Dewey

Figura 1
Fractal Mandelbrot y detalle de fractal



Stephen Gerard/Photo Researchers, Inc.

Figura 2
Detalle del conjunto de Mandelbrot

Aquí está cómo se define el conjunto de Mandelbrot. Elija un número complejo c, defina la función cuadrática compleja

$$f(z) = z^2 + c$$

Empezando con $z_0 = 0$, se forman las iteraciones de f como sigue:

$$\begin{aligned}
z_1 &= f(0) = c \\
z_2 &= f(f(0)) = f(c) = c^2 + c \\
z_3 &= f(f(f(0))) = f(c^2 + c) = (c^2 + c)^2 + c \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Conforme se continúa calculando las iteraciones, una de dos cosas sucederán, dependiendo del valor de c. Cualquiera de las iteraciones $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots$ forman un conjunto acotado (es decir, el módulo de las iteraciones son menos que algún número fijo K), o de otro modo, con el tiempo se harán cada vez más grandes sin cota. Los cálculos de la tabla de la página 606 muestran que para $c = 0.1 + 0.2i$, las iteraciones finalmente se estabilizan alrededor de $0.05 + 0.22i$, mientras que para $c = 1 - i$, las iteraciones rápidamente se vuelven tan grandes que una calculadora no puede manejarlas.

Puede usar su calculadora para hallar las iteraciones, del mismo modo que en el Proyecto de descubrimiento de la página 233. Con la TI-83, coloque primero la calculadora en el modo `a+bi`. Luego oprima la tecla [Y=] e introduzca la función $Y_1 = X^2 + C$. Ahora si $c = 1 + i$, por ejemplo, introduzca los siguientes comandos:

```
1-i→C
0→X
Y1→X
```

Oprima la tecla [ENTER] repetidamente para obtener la lista de iteraciones. (Con este valor de c, se debe finalizar con los valores de la columna de la derecha de la tabla.)

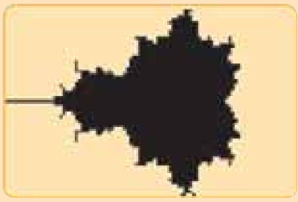


Figura 3

$f(z) = z^2 + 0.1 + 0.2i$	$f(z) = z^2 + 1 - i$
$z_1 = f(z_0) = 0.1 + 0.2i$	$z_1 = f(z_0) = 1 - i$
$z_2 = f(z_1) = 0.07 + 0.24i$	$z_2 = f(z_1) = 1 - 3i$
$z_3 = f(z_2) = 0.047 + 0.234i$	$z_3 = f(z_2) = -7 - 7i$
$z_4 = f(z_3) = 0.048 + 0.222i$	$z_4 = f(z_3) = 1 + 97i$
$z_5 = f(z_4) = 0.053 + 0.221i$	$z_5 = f(z_4) = -9407 + 193i$
$z_6 = f(z_5) = 0.054 + 0.223i$	$z_6 = f(z_5) = 88454401 - 3631103i$
$z_7 = f(z_6) = 0.053 + 0.224i$	$z_7 = f(z_6) = 7.8 \times 10^{15} - 6.4 \times 10^{14}i$

El **conjunto de Mandelbrot** consta de los números complejos c para los cuales las iteraciones de $f(z) = z^2 + c$ están acotadas. (De hecho, para esta función resulta que si las iteraciones están acotadas, los módulos de las iteraciones serán menores que $K = 2$.) Los números c que pertenecen al conjunto de Mandelbrot se pueden graficar en el plano complejo. El resultado es la parte negra de la figura. A los puntos que no están en conjunto de Mandelbrot se les asignan colores dependiendo de la rapidez con la que las iteraciones se vuelvan no acotadas.

El programa de la TI-83 siguiente traza una gráfica aproximada del conjunto de Mandelbrot. El programa toma un largo tiempo para terminar, aun cuando efectúa sólo 10 iteraciones para cada c. Para algunos valores de c, se tienen que hacer en realidad muchas más iteraciones para decir si las iteraciones no están acotadas. (Véase, por ejemplo, el problema 1f) a continuación.) Por esa razón el programa produce sólo un gráfica aproximada. Pero el resultado de la calculadora de la figura 3 es en realidad una buena aproximación.

```
PROGRAM:MANDLBRT
:ClrDraw
:AxesOff
:(Xmax-Xmin)/94→H
:(Ymax-Ymin)/62→V
:For(I,0,93)
:For(J,0,61)
:Xmin+I*H→X
:Ymin+J*V→Y
:X+Yi→C
:0→Z
:For(N,1,10)
:If abs(Z)≤2
:Z²+C→Z
:End
:If abs(Z)≤2
:Pt-On(real(C),imag(C))
:DispGraph
:End
:End
:StorePic 1
```

Use el rectángulo de visión $[-2, 1]$ por $[-1, 1]$ y asegúrese de que la calculadora está en el modo "`a+bi`"

`H` es la amplitud horizontal de un pixel

`V` es la altura vertical de un pixel

Estos dos bucles "`For`" hallan el número complejo relacionado con cada pixel en la pantalla

Este bucle "`For`" calcula 10 iteraciones, pero la iteración se detiene si `Z` tiene un módulo más grande que 2

Si las iteraciones tienen módulo menor que o igual a 2, se traza el punto `C`

Esto guarda la imagen final bajo "`1`" para que se pueda recuperar después

1. Use su calculadora como se describe en el margen de la página 606 para decidir si el número complejo c está en el conjunto de Mandelbrot. (Para el inciso f), calcule por lo menos 60 iteraciones.)

a) $c = 1$ b) $c = -1$

c) $c = -0.7 + 0.15i$ d) $c = 0.5 + 0.5i$

e) $c = i$ f) $c = -1.0404 + 0.2509i$

2. Use el programa `MANDLBRT` con un rectángulo de visión más pequeño para aumentar una porción del conjunto de Mandelbrot cerca de su borde. (Guarde la imagen final en un lugar diferente si desea mantener completa la imagen de Mandelbrot en "1".) ¿Ve más detalle?

3. a) Escriba un programa de calculadora que tome como una entrada un número complejo c, itere la función $f(z) = z^2 + c$ unas cien veces y luego dé el siguiente resultado:

- "`NO ACOTADA EN` N", si z_N es la primera iteración cuyo módulo es mayor que 2
- "`ACOTADA`" si cada iteración de z_1 a z_{100} tiene módulo menor o igual a 2

En el primer caso, el número c no está en el conjunto de Mandelbrot y el índice N indica la rapidez con la que la iteración se vuelve no acotada. En el segundo caso, es probable que c esté en el conjunto de Mandelbrot.

b) Use su programa para probar cada uno de los números del problema 1.

c) Elija otros números complejos y use su programa para probarlos.

8.4 Vectores

En aplicaciones de matemáticas, ciertas cantidades se determinan por completo por su magnitud; por ejemplo, longitud, masa, área, temperatura y energía. Se habla de una longitud de 5 m o una masa de 3 kg; sólo es necesario un número para describir cada una de estas cantidades. Tal cantidad se llama **escalar**.

Por otro lado, para describir el desplazamiento de un objeto, se requieren dos números: la *magnitud* y la *dirección* del desplazamiento. Para describir la velocidad de un objeto en movimiento, se debe especificar tanto la *velocidad* como la *dirección* del recorrido. Cantidades como desplazamiento, velocidad, aceleración y fuerza que se relacionan con magnitud así como dirección se llaman *cantidades dirigidas*. Una forma de representar tales cantidades matemáticamente es a través del uso de *vectores*.

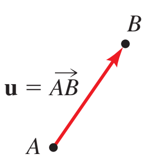


Figura 1

Descripción geométrica de vectores

Un **vector** en el plano es un segmento de recta con una dirección asignada. Se bosqueja un vector como se muestra en la figura 1 con una flecha para especificar la dirección. Este vector se denota por $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el **punto inicial** y B es el **punto**

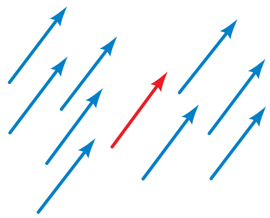


Figura 2

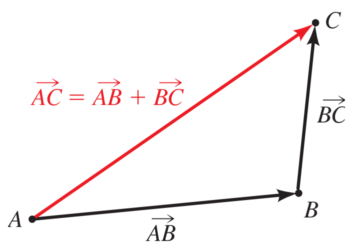


Figura 3

terminal del vector $\overrightarrow{AB}$. La longitud del segmento de recta AB se conoce como la **magnitud** o **longitud** del vector y se denota mediante $|\overrightarrow{AB}|$. Se usan letras en negritas para denotar vectores. Así, se escribe $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$.

Se considera que dos vectores son **iguales** si tienen igual magnitud y la misma dirección. Por lo tanto, los vectores de la figura 2 son iguales. Esta definición de igualdad tiene sentido si se imagina que un vector representa un desplazamiento. Dos desplazamientos de este tipo son los mismos si tienen magnitudes iguales y la misma dirección. Así, los vectores de la figura 2 se pueden imaginar como el *mismo* desplazamiento aplicado a objetos en lugares distintos del plano.

Si el desplazamiento $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ va seguido del desplazamiento $\mathbf{v} = \overrightarrow{BC}$, entonces el desplazamiento resultante es $\overrightarrow{AC}$ como se muestra en la figura 3. En otras palabras, el desplazamiento simple representado por el vector $\overrightarrow{AC}$ tiene el mismo efecto que los otros dos desplazamientos juntos. Se llama al vector $\overrightarrow{AC}$ la **suma** de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ y se escribe $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. (El **vector cero**, denotado por $\mathbf{0}$, no representa ningún desplazamiento.) Así, para hallar la suma de dos vectores cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, se bosquejan vectores iguales a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ con el punto inicial de uno en el punto terminal del otro (véase la figura 4a)). Si se dibujan $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ empezando en el mismo punto, entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es el vector que es la diagonal del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, como se ilustra en la figura 4b).

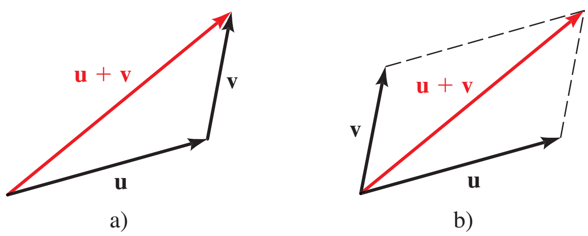


Figura 4
Suma de vectores

Si a es un número real y $\mathbf{v}$ es un vector, se define un nuevo vector $a\mathbf{v}$ como sigue: el vector $a\mathbf{v}$ tiene magnitud $|a||\mathbf{v}|$ y tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$ si $a > 0$ o la dirección opuesta si $a < 0$. Si $a = 0$, entonces $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$, el vector es cero. Este proceso se llama **multiplicación de un vector por un escalar**. Multiplicar un vector por un escalar tiene el mismo efecto de alargar o acortar el vector. En la figura 5 se muestran gráficas del vector $a\mathbf{v}$ para diferentes valores de a. Se escribe el vector $(-1)\mathbf{v}$ como $-\mathbf{v}$. Así, $-\mathbf{v}$ es el vector con la misma longitud que $\mathbf{v}$ pero con la dirección opuesta.

La **diferencia** de dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se define por $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$. La figura 6 muestra que el vector $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es la otra diagonal del paralelogramo formado por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

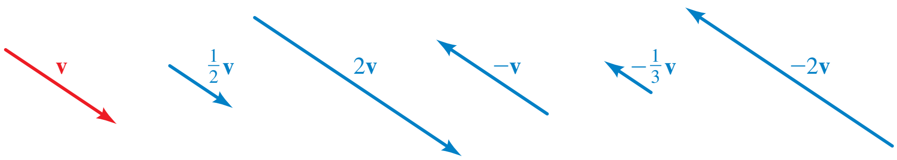


Figura 5
Multiplicación de un vector por un escalar

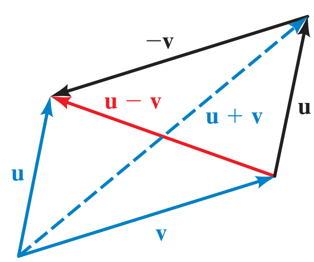


Figura 6
Resta de vector

Vectores en el plano coordenado

Hasta aquí se han estudiado los vectores de manera geométrica. Al colocar un vector en el plano de coordenadas, es posible describirlo de manera analítica (es decir, por medio de componentes). En la figura 7a), para ir del punto inicial del vector **v** al punto terminal, se va a unidades a la derecha y b unidades hacia arriba. Se representa a **v** como un par ordenado de números reales.

Observe la distinción entre el *vector* $\langle a, b\rangle$ y el *punto* (a, b).

$$\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$$

donde a es la **componente horizontal** de **v** y b es la **componente vertical** de **v**. Recuerde que un vector representa una magnitud y una dirección, no una flecha particular en el plano. Así, el vector $\langle a, b\rangle$ tiene muchas representaciones distintas, lo cual depende de su punto inicial (véase la figura 7b)).

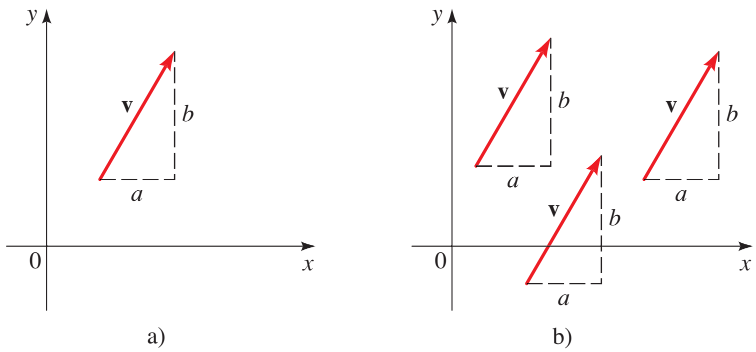


Figura 7

Si se usa la figura 8, la relación entre una representación geométrica de un vector y la analítica se puede expresar como sigue.

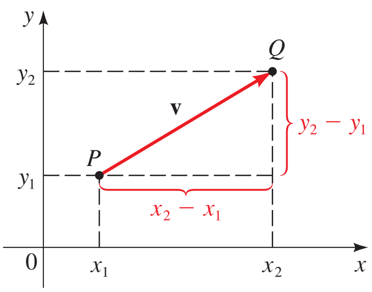


Figura 8

Forma de componentes de un vector

Si un vector **v** se representa en el plano con punto inicial $P(x_1, y_1)$ y punto terminal $Q(x_2, y_2)$, entonces

$$\mathbf{v} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1\rangle$$

Ejemplo 1 Descripción de vectores en forma de componentes

a) Encuentre la forma de componentes del vector **u** con punto inicial $(-2, 5)$ y punto terminal $(3, 7)$.

b) Si el vector $\mathbf{v} = \langle 3, 7\rangle$ se bosqueja con punto inicial $(2, 4)$, ¿cuál es su punto terminal?

c) Bosqueje representaciones del vector $\mathbf{w} = \langle 2, 3\rangle$ con puntos iniciales en $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, -1)$ y $(1, 4)$.

Solución

a) El vector deseado es

$$\mathbf{u} = \langle 3 - (-2), 7 - 5\rangle = \langle 5, 2\rangle$$

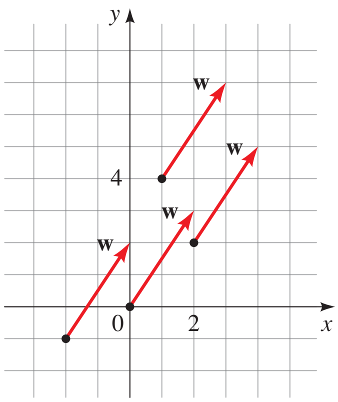


Figura 9

b) Sea (x, y) el punto terminal de $\mathbf{v}$. Entonces,

$$\langle x - 2, y - 4 \rangle = \langle 3, 7 \rangle$$

Por lo tanto $x - 2 = 3$ y $y - 4 = 7$ o $x = 5$ y $y = 11$. El punto terminal es $(5, 11)$

c) Las representaciones del vector $\mathbf{w}$ se bosquejan en la figura 9. ■

Ahora se dan las definiciones analíticas de las distintas operaciones en vectores que se han descrito en forma geométrica. Se comienza con la igualdad de vectores. Se dice que dos vectores son iguales si tienen igual magnitud y la misma dirección. Para los vectores $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, esto significa que $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$. En otras palabras, dos vectores son **iguales** si y sólo si sus componentes correspondientes son iguales. Así, las flechas de la figura 7b) representan el mismo vector, como las flechas de la figura 9.

Al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura 10, se obtiene la siguiente fórmula para la magnitud de un vector.

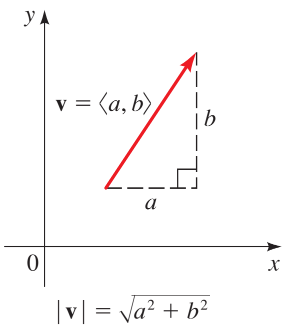


Figura 10

Magnitud de un vector

La **magnitud** o **longitud** de un vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ es

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo 2 Magnitudes de vectores

Encuentre la magnitud de cada vector.

a) $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ b) $\mathbf{v} = \langle 5, 0 \rangle$ c) $\mathbf{w} = \langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \rangle$

Solución

a) $|\mathbf{u}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

b) $|\mathbf{v}| = \sqrt{5^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $|\mathbf{w}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$ ■

Las siguientes definiciones de suma, resta y multiplicación por un escalar de vectores corresponden a las descripciones geométricas antes dadas. En la figura 11 se muestra cómo la definición analítica de suma corresponde a la geométrica.

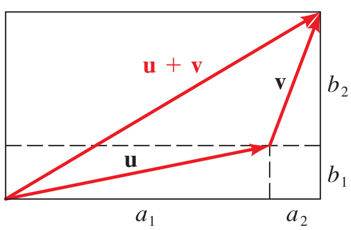


Figura 11

Operaciones algebraicas en vectores

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$, entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \langle a_1 + a_2, b_1 + b_2 \rangle$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \langle a_1 - a_2, b_1 - b_2 \rangle$$

$$c\mathbf{u} = \langle ca_1, cb_1 \rangle, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo 3 Operaciones con vectores

Si $\mathbf{u} = \langle 2, -3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$, encuentre $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$ y $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$.

Solución Por las definiciones de operaciones con vectores, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= \langle 2, -3 \rangle + \langle -1, 2 \rangle = \langle 1, -1 \rangle \\
\mathbf{u} - \mathbf{v} &= \langle 2, -3 \rangle - \langle -1, 2 \rangle = \langle 3, -5 \rangle \\
2\mathbf{u} &= 2\langle 2, -3 \rangle = \langle 4, -6 \rangle \\
-3\mathbf{v} &= -3\langle -1, 2 \rangle = \langle 3, -6 \rangle \\
2\mathbf{u} + 3\mathbf{v} &= 2\langle 2, -3 \rangle + 3\langle -1, 2 \rangle = \langle 4, -6 \rangle + \langle -3, 6 \rangle = \langle 1, 0 \rangle
\end{aligned}$$

■

Las siguientes propiedades para operaciones vectoriales se pueden probar con facilidad a partir de las definiciones. El **vector cero** es el vector $\mathbf{0} = \langle 0, 0 \rangle$. Desempeña el mismo papel para la suma de vectores que el número 0 para la suma de números reales.

Propiedades de vectores

Suma de vectores	Multiplicación por un escalar
$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$	$c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$	$(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$	$(cd)\mathbf{u} = c(d\mathbf{u}) = d(c\mathbf{u})$
$\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$	$1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
Longitud de un vector	$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
$\lvert c\mathbf{u} \rvert = \lvert c \rvert \lvert \mathbf{u} \rvert$	$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$

Un vector de longitud 1 se llama **vector unitario**. Por ejemplo, en el ejemplo 2c), el vector $\mathbf{w} = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$ es un vector unitario. Dos vectores unitarios útiles son **i** y **j**, definidos por

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle \qquad \mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$$

Estos vectores son especiales porque cualquier vector se puede expresar en términos de ellos.

Vectores en términos de i y j

El vector $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$ se puede expresar en términos de **i** y **j** por

$$\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$$

Ejemplo 4 Vectores en términos de i y j

a) Escriba el vector $\mathbf{u} = \langle 5, -8 \rangle$ en términos de **i** y **j**.

b) Si $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, escriba $2\mathbf{u} + 5\mathbf{v}$ en términos de **i** y **j**.

Solución

a) $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} + (-8)\mathbf{j} = 5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$

b) Las propiedades de suma y multiplicación por un escalar de vectores muestran que se pueden operar los vectores de la misma forma que las expresiones algebraicas. Así

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u} + 5\mathbf{v} &= 2(3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) + 5(-\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \\ &= (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + (-5\mathbf{i} + 30\mathbf{j}) \\ &= \mathbf{i} + 34\mathbf{j} \end{aligned}$$

■

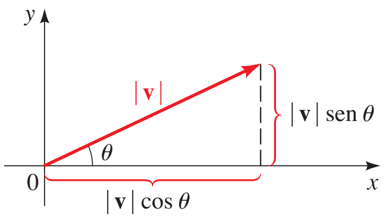


Figura 12

Sea **v** un vector en el plano con su punto inicial en el origen. La **dirección** de **v** es θ, el ángulo positivo más pequeño en posición estándar formado por el eje positivo x y **v** (véase la figura 12). Si se conoce la magnitud y dirección de un vector, entonces la figura 12 muestra que se pueden hallar las componentes horizontal y vertical del vector.

Componentes horizontal y vertical de un vector

Sea **v** un vector con magnitud $|\mathbf{v}|$ y dirección θ.
Entonces $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, donde

$$a = |\mathbf{v}| \cos\theta \qquad \text{y} \qquad b = |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto, se puede expresar a **v** como

$$\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \cos\theta\, \mathbf{i} + |\mathbf{v}| \operatorname{sen}\theta\, \mathbf{j}$$

Ejemplo 5 Componentes y dirección de un vector

a) Un vector **v** tiene longitud 8 y dirección $\pi/3$. Encuentre las componentes horizontal y vertical y escriba a **v** en términos de **i** y **j**.

b) Encuentre la dirección del vector $\mathbf{u} = -\sqrt{3}\,\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Solución

a) Se tiene $\mathbf{v} = \langle a, b \rangle$, donde las componentes están dados por

$$a = 8\cos\frac{\pi}{3} = 4 \qquad \text{y} \qquad b = 8\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

Por consiguiente, $\mathbf{v} = \langle 4, 4\sqrt{3} \rangle = 4\mathbf{i} + 4\sqrt{3}\,\mathbf{j}$.

b) De la figura 13 se puede observar que la dirección θ tiene la propiedad de que

$$\tan\theta = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

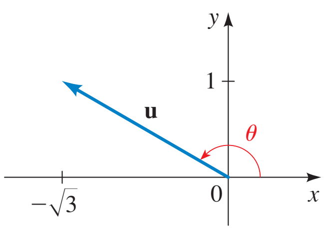


Figura 13

Así, el ángulo de referencia para θ es $\pi/6$. Puesto que el punto terminal del vector **u** está en el cuadrante II, se deduce que $\theta = 5\pi/6$. ■

Uso de vectores para modelar la velocidad y la fuerza

El uso de rumbos (como N 30° E) para describir direcciones se explicó en la página 511 en la sección 6.5.

La **velocidad** de un objeto móvil se modela mediante un vector cuya dirección es la dirección de movimiento cuya magnitud es la velocidad. En la figura 14 se muestran algunos vectores **u**, que representan la velocidad del viento que fluye en la dirección N 30° E, y un vector **v**, que representa la velocidad de un avión que vuela por este viento en el punto P. Es evidente a partir de la experiencia que el viento afecta tanto

la velocidad como la dirección de un avión. La figura 15 indica que la velocidad verdadera del avión (respecto al suelo) está dada por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

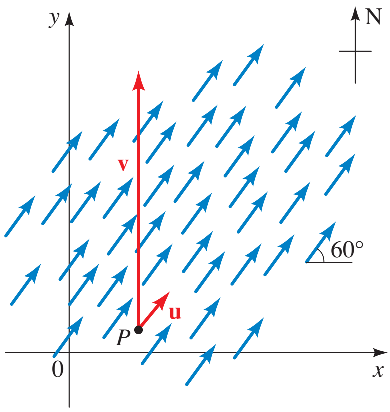


Figura 14

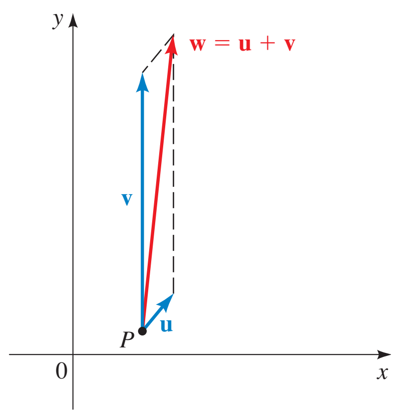


Figura 15

Ejemplo 6 Velocidad y dirección verdaderas de un avión

Un avión se dirige al norte a 300 millas/h. Experimenta un viento cruzado de 40 millas/h que fluye en la dirección N 30° E, como se ilustra en la figura 14.

a) Exprese la velocidad $\mathbf{v}$ del avión respecto al aire, y la velocidad $\mathbf{u}$ del viento, en forma de componente.

b) Encuentre la velocidad verdadera del avión como un vector.

c) Determine la velocidad y la dirección verdaderas del avión.

Solución

a) La velocidad del avión con respecto al aire es $\mathbf{v} = 0\mathbf{i} + 300\mathbf{j} = 300\mathbf{j}$.

Por las fórmulas de las componentes de un vector, se encuentra que la velocidad del viento es

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (40 \cos 60°)\mathbf{i} + (40 \operatorname{sen} 60°)\mathbf{j} \\ &= 20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j} \\ &\approx 20\mathbf{i} + 34.64\mathbf{j} \end{aligned}$$

b) La velocidad verdadera del avión está dada por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= (20\mathbf{i} + 20\sqrt{3}\mathbf{j}) + (300\mathbf{j}) \\ &= 20\mathbf{i} + (20\sqrt{3} + 300)\mathbf{j} \\ &\approx 20\mathbf{i} + 334.64\mathbf{j} \end{aligned}$$

c) La velocidad verdadera del avión está dada por la magnitud de $\mathbf{w}$.

$$|\mathbf{w}| \approx \sqrt{(20)^2 + (334.64)^2} \approx 335.2 \text{ millas/h}$$

La dirección del avión es la dirección θ del vector $\mathbf{w}$. El ángulo θ tiene la propiedad de que $\tan \theta \approx 334.64/20 = 16.732$ y, por lo tanto, $\theta \approx 86.6°$. Así, el avión va en la dirección N 3.4° E. ■

Ejemplo 7 Calcular una ruta

Una mujer bota una lancha desde la orilla de un río recto y quiere desembarcar en el punto directamente en la orilla opuesta. Si la velocidad de la lancha (con respecto al agua) es de 10 millas/h y el río fluye al este a la velocidad de 5 millas/h, ¿en qué dirección debe dirigir la lancha a fin de llegar al punto deseado?

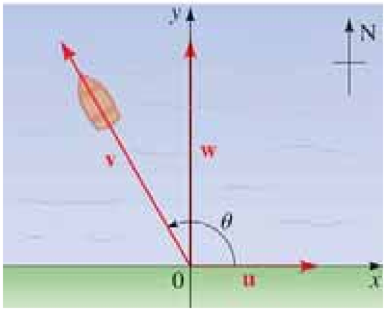


Figura 16

Solución Se elige un sistema coordenado con el origen en el punto inicial de la lancha como se muestra en la figura 16. Sean **u** y **v** las velocidades del río y la lancha, respectivamente. Es claro que $\mathbf{u} = 5\mathbf{i}$ y, puesto que la velocidad de la lancha es de 10 millas/h, se tiene $|\mathbf{v}| = 10$, por lo tanto

$$\mathbf{v} = (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}$$

donde el ángulo θ es como se muestra en la figura 16. El curso verdadero de la lancha está dado por el vector $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} &= 5\mathbf{i} + (10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}\\ &= (5 + 10\cos\theta)\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Puesto que la mujer quiere tocar tierra en un punto directamente opuesto al río, su dirección debe tener un componente horizontal 0. En otras palabras, se debe elegir θ de tal manera que

$$\begin{aligned}5 + 10\cos\theta &= 0\\ \cos\theta &= -\tfrac{1}{2}\\ \theta &= 120^\circ\end{aligned}$$

Por consiguiente, ella debe dirigir la lancha en la dirección $\theta = 120^\circ$ (o N 30° W). ■

La **fuerza** también está representada por un vector. De manera intuitiva, se puede considerar que la fuerza describe la acción de empujar o jalar un objeto, por ejemplo, un empuje horizontal de un libro por una mesa o la atracción hacia abajo de la gravedad terrestre sobre una pelota. La fuerza se mide en libras (o en newtons, en el sistema métrico). Por ejemplo, un hombre que pesa 200 libras ejerce una fuerza de 200 lb hacia abajo sobre el suelo. Si varias fuerzas actúan sobre un objeto, la **fuerza resultante** que experimenta el objeto es la suma vectorial de estas fuerzas.

Ejemplo 8 Fuerza resultante

Dos fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ con magnitudes 10 y 20 lb, respectivamente, actúan sobre un objeto en un punto P como se ilustra en la figura 17. Encuentre la fuerza resultante que actúa en P.

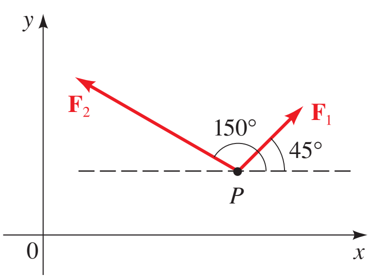


Figura 17

Solución Se escribe $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ en la forma de componentes:

$$\mathbf{F}_1 = (10\cos 45^\circ)\mathbf{i} + (10\,\text{sen}\,45^\circ)\mathbf{j} = 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 10\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} = 5\sqrt{2}\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 &= (20\cos 150^\circ)\mathbf{i} + (20\,\text{sen}\,150^\circ)\mathbf{j} = -20\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + 20\left(\frac{1}{2}\right)\mathbf{j}\\ &= -10\sqrt{3}\mathbf{i} + 10\mathbf{j}\end{aligned}$$

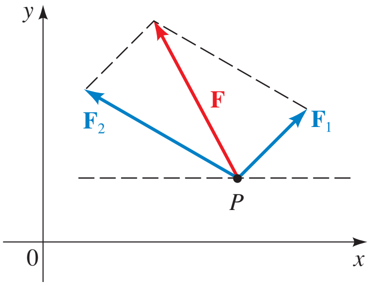


Figura 18

Por lo tanto la fuerza resultante **F** es

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\\ &= (5\sqrt{2}\mathbf{i} + 5\sqrt{2}\mathbf{j}) + (-10\sqrt{3}\mathbf{i} + 10\mathbf{j})\\ &= (5\sqrt{2} - 10\sqrt{3})\mathbf{i} + (5\sqrt{2} + 10)\mathbf{j}\\ &\approx -10\mathbf{i} + 17\mathbf{j}\end{aligned}$$

La fuerza resultante **F** se muestra en la figura 18. ■

8.4 Ejercicios

1–6 ■ Bosqueje el vector indicado. (Los vectores **u** y **v** se muestran en la figura.)

1. $2\mathbf{u}$

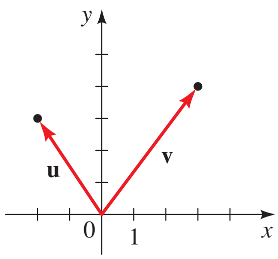
2. $-\mathbf{v}$

3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

4. $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

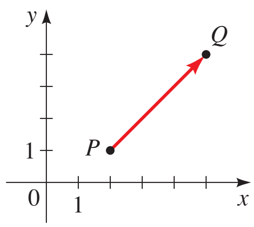
5. $\mathbf{v} - 2\mathbf{u}$

6. $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$

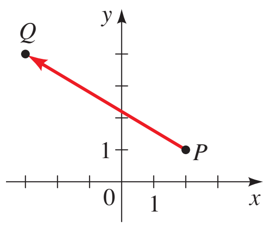


7–16 ■ Exprese el vector con punto inicial P y punto terminal Q en la forma de componentes.

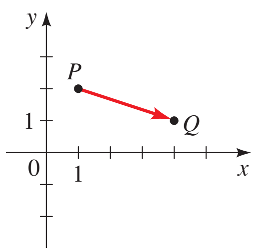
7.



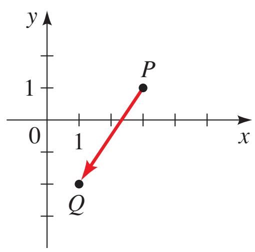
8.



9.



10.



11. $P(3, 2)$, $Q(8, 9)$ **12.** $P(1, 1)$, $Q(9, 9)$

13. $P(5, 3)$, $Q(1, 0)$ **14.** $P(-1, 3)$, $Q(-6, -1)$

15. $P(-1, -1)$, $Q(-1, 1)$

16. $P(-8, -6)$, $Q(-1, -1)$

17–22 ■ Encuentre $2\mathbf{u}$, $-3\mathbf{v}$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y $3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}$ para los vectores **u** y **v**.

17. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 3, 1\rangle$

18. $\mathbf{u} = \langle -2, 5\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 2, -8\rangle$

19. $\mathbf{u} = \langle 0, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, 0\rangle$

20. $\mathbf{u} = \mathbf{i}$, $\mathbf{v} = -2\mathbf{j}$

21. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ **22.** $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

23–26 ■ Encuentre $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, $|2\mathbf{u}|$, $|\frac{1}{2}\mathbf{v}|$, $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$, $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$ y $|\mathbf{u}| - |\mathbf{v}|$.

23. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

24. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

25. $\mathbf{u} = \langle 10, -1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -2\rangle$

26. $\mathbf{u} = \langle -6, 6\rangle$, $\mathbf{v} = \langle -2, -1\rangle$

27–32 ■ Encuentre las componentes horizontal y vertical del vector con longitud y dirección dadas, y escriba el vector en términos de los vectores **i** y **j**.

27. $|\mathbf{v}| = 40$, $\theta = 30°$ **28.** $|\mathbf{v}| = 50$, $\theta = 120°$

29. $|\mathbf{v}| = 1$, $\theta = 225°$ **30.** $|\mathbf{v}| = 800$, $\theta = 125°$

31. $|\mathbf{v}| = 4$, $\theta = 10°$ **32.** $|\mathbf{v}| = \sqrt{3}$, $\theta = 300°$

33–38 ■ Encuentre la magnitud y dirección (en grados) del vector.

33. $\mathbf{v} = \langle 3, 4\rangle$ **34.** $\mathbf{v} = \left\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right\rangle$

35. $\mathbf{v} = \langle -12, 5\rangle$ **36.** $\mathbf{v} = \langle 40, 9\rangle$

37. $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ **38.** $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

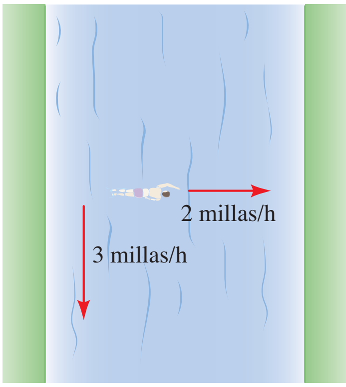
Aplicaciones

39. Componentes de una fuerza Un hombre empuja una podadora con una fuerza de 30 lb ejercida a un ángulo de

30° respecto del suelo. Encuentre las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

40. Componentes de una velocidad Un avión de propulsión vuela en dirección N 20° E con una velocidad de 500 millas/h. Encuentre las componentes norte y este de la velocidad.

41. Velocidad Un río fluye al sur a 3 millas/h. Un nadador que intenta cruzar el río se dirige al este nadando a 2 millas/h respecto al agua. Encuentre la velocidad verdadera del nadador como un vector.



42. Velocidad Un salmón migratorio se dirige en la dirección N 45° E, nadando a 5 millas/h respecto al agua. Las corrientes que prevalecen en el océano fluyen al este a 3 millas/h. Encuentre la velocidad verdadera del pez como un vector.

43. Velocidad verdadera de un avión Un piloto dirige su avión al este. El avión tiene una velocidad de 425 millas/h respecto al aire. El viento sopla al norte con una velocidad de 40 millas/h.

a) Exprese la velocidad del viento como un vector en la forma de componentes.

b) Exprese la velocidad del avión respecto al aire como un vector en la forma de componentes.

c) Encuentre la velocidad verdadera del avión como un vector.

d) Determine la velocidad y dirección verdaderas del avión.

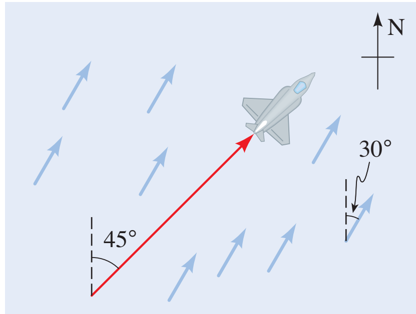
44. Velocidad verdadera de un avión Un avión que vuela por un viento que fluye a una velocidad de 55 millas/h en la dirección N 30° E (véase la figura). El avión tiene una velocidad de 765 millas/h respecto al aire, y el piloto dirige al avión en la dirección N 45° E.

a) Exprese la velocidad del viento como un vector en la forma de componentes.

b) Exprese la velocidad del avión respecto al aire como un vector en la forma de componentes.

c) Encuentre la velocidad del avión como un vector.

d) Determine la verdadera velocidad y la dirección del avión.



45. Velocidad verdadera de un avión Encuentre la velocidad y la dirección verdaderas del avión del ejercicio 44 si el piloto dirige el avión en la dirección N 30° W.

46. Velocidad verdadera de un avión ¿En qué dirección debe dirigir el avión el piloto del ejercicio 44 para que el curso verdadero sea al norte?

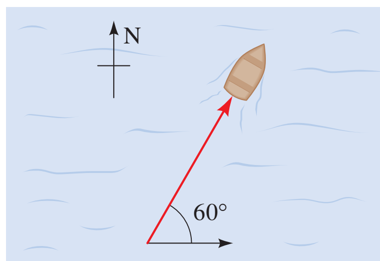
47. Velocidad de un bote Un río recto fluye al este a una velocidad de 10 millas/h. Un navegador comienza en la orilla sur del río y se dirige en la dirección 60° desde la orilla (véase la figura). El bote tiene una velocidad de 20 millas/h respecto al agua.

a) Exprese la velocidad del río como un vector en la forma de componentes.

b) Exprese la velocidad del bote respecto al agua como un vector en la forma de componentes.

c) Encuentre la velocidad verdadera del bote.

d) Determine la velocidad y dirección verdaderas del bote.



48. Velocidad de un bote El navegador del ejercicio 47 quiere llegar a un punto en la orilla norte del río directamente opuesto al punto de partida. ¿En qué dirección debe dirigir el bote?

49. Velocidad de un bote Un bote va en dirección N 72° E. La velocidad del bote respecto al agua es de 24 millas/h. El agua fluye directamente hacia el sur. Se observa que la dirección verdadera del bote es hacia el este.

a) Exprese la velocidad del bote respecto al agua como un vector en la forma de componentes.

b) Encuentre la velocidad del agua y la velocidad verdadera del bote.

50. Velocidad Una mujer camina al oeste sobre la cubierta de un trasatlántico a 2 millas/h. El trasatlántico se mueve al norte a una velocidad de 25 millas/h. Determine la velocidad y dirección de la mujer respecto a la superficie del agua.

51–56 ■ Equilibrio de fuerzas Las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ que actúan en el mismo punto están en equilibrio si la fuerza resultante es cero, es decir, $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \cdots + \mathbf{F}_n = 0$. Encuentre **a)** las fuerzas resultantes que actúan en P y **b)** la fuerza adicional requerida (si existe) para que las fuerzas estén en equilibrio.

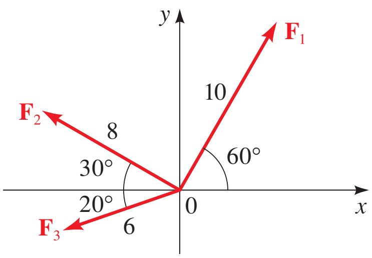
51. $\mathbf{F}_1 = \langle 2, 5 \rangle, \quad \mathbf{F}_2 = \langle 3, -8 \rangle$

52. $\mathbf{F}_1 = \langle 3, -7 \rangle, \quad \mathbf{F}_2 = \langle 4, -2 \rangle, \quad \mathbf{F}_3 = \langle -7, 9 \rangle$

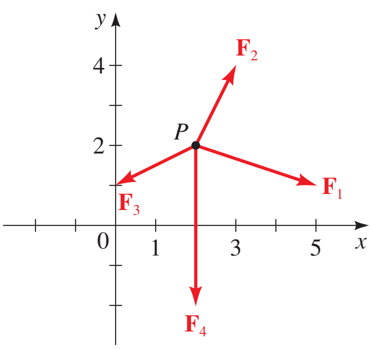
53. $\mathbf{F}_1 = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_2 = 3\mathbf{i} - 7\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_3 = -8\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_4 = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

54. $\mathbf{F}_1 = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

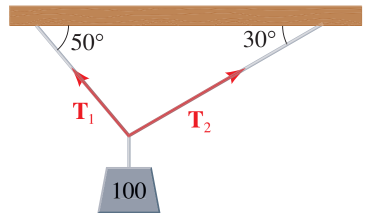
55.



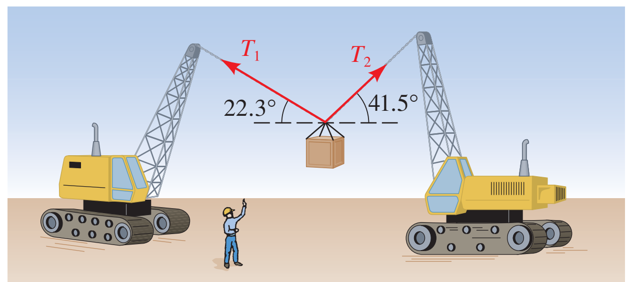
56.



57. Equilibrio de tensiones Un peso de 100 lb cuelga de una cuerda como se muestra en la figura. Encuentre las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ en la cuerda.

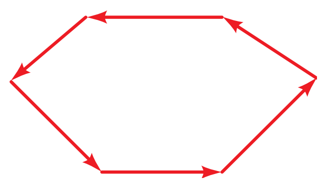


58. Equilibrio de tensiones Las grúas de la figura están levantando un objeto que pesa 18 278 lb. Calcule las tensiones $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$.



Descubrimiento • Debate

59. Vectores que forman un polígono Suponga que n vectores se pueden colocar cabeza con cola en el plano de modo que formen un polígono. (La figura muestra el caso de un hexágono.) Explique por qué la suma de estos vectores es **0**.



8.5 Producto punto

En esta sección se define una operación en los vectores conocida como producto punto. Este concepto es especialmente útil en cálculo y en aplicaciones de vectores en física e ingeniería.

Producto punto de dos vectores

Se comienza por definir el producto punto de dos vectores.

Definición del producto punto

Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2 \rangle$ son vectores, entonces su **producto punto**, denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, se define como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

Así que para hallar el producto punto de **u** y **v** se multiplican las componentes correspondientes y se suman. El producto punto *no* es un vector; es un número real o escalar.

Ejemplo 1 Cálculo de productos punto

a) Si $\mathbf{u} = \langle 3, -2 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, 5 \rangle$ entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3)(4) + (-2)(5) = 2$$

b) Si $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (2)(5) + (1)(-6) = 4$$

■

Las demostraciones de las siguientes propiedades del producto punto se deducen con facilidad de la definición.

Propiedades del producto punto

1. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
2. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
4. $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$

■ **Demostración** Se prueba sólo la última propiedad. Las demostraciones de las otras se dejan como ejercicios. Sea $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \langle a, b \rangle \cdot \langle a, b \rangle = a^2 + b^2 = |\mathbf{u}|^2$$

■

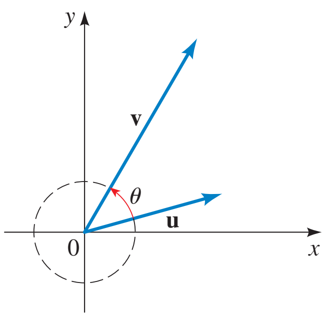


Figura 1

Sean **u** y **v** vectores trácelos con puntos iniciales en el origen. Se define al **ángulo** θ **entre u y v** como el más pequeño de los ángulos formado por estas representaciones de **u** y **v** (véase la figura 1). Así, $0 \le \theta \le \pi$. El siguiente teorema relaciona el ángulo entre dos vectores con su producto punto.

Teorema del producto punto

Si θ es el ángulo entre dos vectores no cero **u** y **v**, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$$

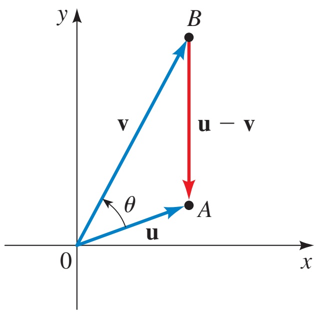


Figura 2

■ **Demostración** La demostración es una bonita aplicación de la ley de los cosenos. Al aplicar la ley de los cosenos al triángulo *AOB* en la figura 2, se obtiene

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta$$

Usando las propiedades del producto punto, se escribe el lado izquierdo como sigue:

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 &= (\mathbf{u} - \mathbf{v})\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} - \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \\ &= |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 \end{aligned}$$

Al igualar los lados derechos de las ecuaciones mostradas, se obtiene

$$\begin{aligned} |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + |\mathbf{v}|^2 &= |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \\ -2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) &= -2|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta \end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema. ■

El teorema del producto punto es útil porque permite hallar el ángulo entre dos vectores si se conocen las componentes de los vectores. El ángulo se obtiene simplemente al despejar a θ de la ecuación del teorema del producto punto. Este resultado importante se expresa de manera explícita.

Ángulo entre dos vectores

Si θ es el ángulo entre dos vectores no cero **u** y **v**, entonces

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}$$

Ejemplo 2 Hallar el ángulo entre dos vectores

Determine el ángulo entre los vectores $\mathbf{u} = \langle 2, 5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 4, -3\rangle$.

Solución Por la fórmula del ángulo entre dos vectores, se tiene

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = \frac{(2)(4) + (5)(-3)}{\sqrt{4 + 25}\sqrt{16 + 9}} = \frac{-7}{5\sqrt{29}}$$

Así, el ángulo entre **u** y **v** es

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-7}{5\sqrt{29}}\right) \approx 105.1°$$ ■

Dos vectores no cero **u** y **v** se llaman **perpendiculares,** u **ortogonales**, si el ángulo entre ellos es $\pi/2$. En el siguiente teorema se muestra que es posible determinar si dos vectores son perpendiculares al hallar su producto punto.

Vectores ortogonales

Dos vectores no cero **u** y **v** son perpendiculares si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$.

Demostración Si **u** y **v** son perpendiculares, entonces el ángulo entre ellos es $\pi/2$ y, por lo tanto,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Por el contrario, si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$, entonces

$$|\mathbf{u}||\mathbf{v}|\cos\theta = 0$$

Puesto que **u** y **v** son vectores no nulos, se concluye que $\cos\theta = 0$ y, por lo tanto, $\theta = \pi/2$. De modo que **u** y **v** son ortogonales. ■

Ejemplo 3 Comprobación de la perpendicularidad de vectores

Determine si los vectores en cada par son perpendiculares.

a) $\mathbf{u} = \langle 3, 5\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle 2, -8\rangle$ b) $\mathbf{u} = \langle 2, 1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2\rangle$

Solución

a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (3)(2) + (5)(-8) = -34 \neq 0$, por lo tanto **u** y **v** no son perpendiculares.

b) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (2)(-1) + (1)(2) = 0$, de modo que **u** y **v** son perpendiculares. ■

Componente de u a lo largo de v

La **componente de u a lo largo de v** (o la **componente de u en la dirección de v**) se define como

$$|\mathbf{u}|\cos\theta$$

Observe que la componente de **u** a lo largo de **v** es un escalar, no un vector.

donde θ es el ángulo entre **u** y **v**. En la figura 3 se da la interpretación geométrica de este concepto. De manera intuitiva, la componente de **u** a lo largo de **v** es la magnitud de la porción de **u** que apunta en la dirección de **v**. Observe que la componente de **u** a lo largo de **v** es negativa si $\pi/2 < \theta \leq \pi$.

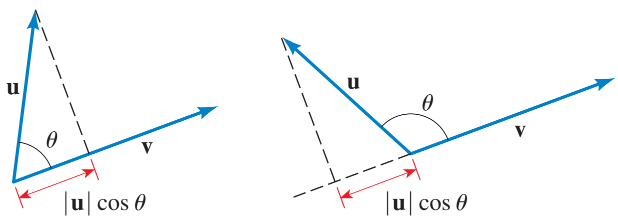


Figura 3

Cuando se analizan fuerzas en física e ingeniería, suele ser útil expresar un vector como una suma de dos vectores que yacen en direcciones perpendiculares. Por ejemplo, suponga que un automóvil está estacionado en una entrada inclinada como en la figura 4. El peso del automóvil es un vector **w** que apunta directamente hacia arriba. Se puede escribir

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$$

donde **u** es paralelo a la entrada y **v** es perpendicular a la entrada. El vector **u** es la fuerza que tiende a hacer rodar al automóvil hacia abajo de la entrada y **v** es la fuerza experimentada por la superficie de la entrada. Las magnitudes de estas fuerzas son las componentes de **w** a lo largo de **u** y **v**, respectivamente.

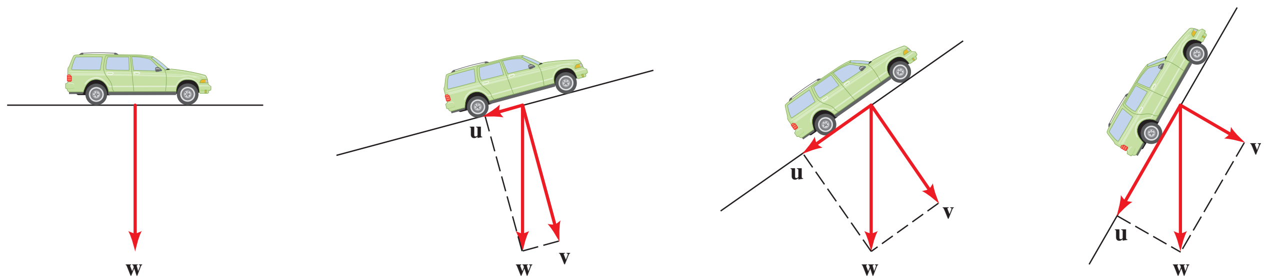


Figura 4

Ejemplo 4 Resolver una fuerza en componentes

Un automóvil que pesa 3000 lb se estaciona en una entrada que tiene una inclinación de 15° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura 5.

a) Encuentre la magnitud de la fuerza requerida para evitar que el automóvil se vaya hacia atrás.

b) Encuentre la magnitud de la fuerza que experimenta la entrada debido al peso del automóvil.

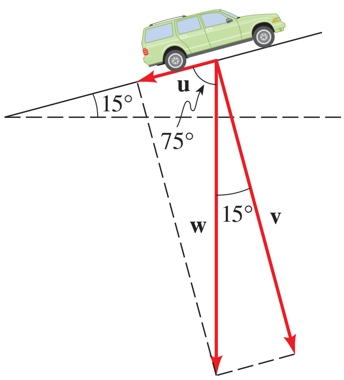


Figura 5

Solución El automóvil ejerce una fuerza **w** de 3000 lb directamente hacia abajo. Se resuelve **w** en la suma de dos vectores **u** y **v**, uno paralelo a la superficie de la entrada y el otro perpendicular a ésta, como se ilustra en la figura 5.

a) La magnitud de la parte de la fuerza **w** que causa que el automóvil ruede hacia abajo de la entrada es

$$|\mathbf{u}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{u} = 3000 \cos 75° \approx 776$$

Por consiguiente, la fuerza necesaria para evitar que el automóvil se vaya hacia atrás es de alrededor de 776 lb.

b) La magnitud de la fuerza que ejerce el automóvil en la entrada es

$$|\mathbf{v}| = \text{componente de } \mathbf{w} \text{ a lo largo de } \mathbf{v} = 3000 \cos 15° \approx 2898$$

La fuerza que experimenta la entrada es de casi 2898 lb. ■

La componente de **u** a lo largo de **v** se puede calcular por medio de producto punto:

$$|\mathbf{u}| \cos \theta = \frac{|\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos \theta}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Se ha mostrado lo siguiente.

Cálculo de componentes

La componente de **u** a lo largo de **v** es $\dfrac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$.

Ejemplo 5 Hallar las componentes

Sean $\mathbf{u} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -2, 1 \rangle$. Encuentre la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

Solución Se tiene

$$\text{componente de } \mathbf{u} \text{ a lo largo de } \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{(1)(-2) + (4)(1)}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \blacksquare$$

Proyección de u sobre v

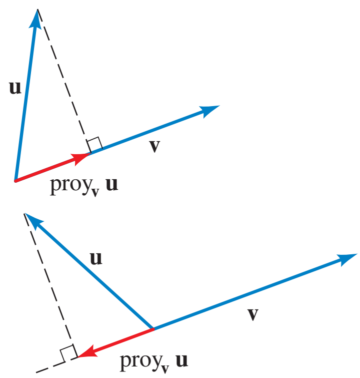


Figura 6

En la figura 6 se muestran representaciones de los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$. La proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$, denotada por $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, es el vector cuya *dirección* es la misma que la de $\mathbf{v}$ y cuya *longitud* es la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$. Para hallar una expresión para $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$, primero se encuentra un vector unitario en la dirección de $\mathbf{v}$ y luego se multiplica por la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} &= (\text{componente de } \mathbf{u} \text{ a lo largo de } \mathbf{v})(\text{vector unitario en la dirección de } \mathbf{v}) \\ &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right) \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}\end{aligned}$$

Con frecuencia se requiere **resolver** un vector $\mathbf{u}$ en la suma de dos vectores, uno paralelo a $\mathbf{v}$ y el otro ortogonal a $\mathbf{v}$. Es decir, se desea escribir $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$. En este caso, $\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ (véase el ejercicio 37).

Cálculo de proyecciones

La **proyección de u sobre v** es el vector $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ dado por

$$\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v}$$

Si el vector $\mathbf{u}$ se **resuelve** en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$, entonces

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$$

Ejemplo 6 Resolver un vector en vectores ortogonales

Sean $\mathbf{u} = \langle -2, 9 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -1, 2 \rangle$.

a) Encuentre $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

b) Resuelva $\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

Solución

a) Por la fórmula para la proyección de un vector sobre otro se tiene

$$\begin{aligned}\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u} &= \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\right)\mathbf{v} && \text{Fórmula para proyección} \\ &= \left(\frac{\langle -2, 9 \rangle \cdot \langle -1, 2 \rangle}{(-1)^2 + 2^2}\right)\langle -1, 2 \rangle && \text{Definición de } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v} \\ &= 4\langle -1, 2 \rangle = \langle -4, 8 \rangle\end{aligned}$$

b) Por la fórmula del cuadro precedente se tiene $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, donde

$$\mathbf{u}_1 = \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -4, 8 \rangle \qquad \text{Del inciso a)}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{u} = \langle -2, 9 \rangle - \langle -4, 8 \rangle = \langle 2, 1 \rangle$$

■

Trabajo

Un uso del producto punto ocurre en el cálculo del trabajo. En el uso diario, el término *trabajo* significa la cantidad total de esfuerzo requerido para llevar a cabo una tarea. En física, *trabajo* tiene un significado técnico que cumple con este significado intuitivo. Si una fuerza constante de magnitud F mueve un objeto por una distancia d a lo largo de una recta, entonces el **trabajo** hecho es

$$W = Fd \qquad \text{o} \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Si F se mide en libras y d en pies, entonces la unidad de trabajo es un pie-libra (pie-lb). Por ejemplo, ¿cuánto trabajo se hace al levantar un peso de 20 lb a 6 pies sobre el suelo? Puesto que se requiere una fuerza de 20 lb para levantar este peso y puesto que el peso se mueve por una distancia de 6 pies, la cantidad de trabajo hecho es

$$W = Fd = (20)(6) = 120 \text{ pies-libra}$$

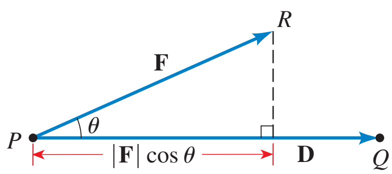


Figura 7

Esta fórmula se aplica sólo cuando la fuerza está dirigida a lo largo de la dirección del movimiento. En el caso general, si la fuerza $\mathbf{F}$ mueve un objeto de P a Q, como en la figura 7, entonces sólo la componente de la fuerza en la dirección de $\mathbf{D} = \overrightarrow{PQ}$ afecta al objeto. Así, la magnitud efectiva de la fuerza sobre el objeto es

$$\text{componente de } \mathbf{F} \text{ a lo largo de } \mathbf{D} = |\mathbf{F}| \cos\theta$$

Por lo tanto, el trabajo hecho es

$$W = \text{fuerza} \times \text{distancia} = (|\mathbf{F}|\cos\theta)|\mathbf{D}| = |\mathbf{F}||\mathbf{D}|\cos\theta = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

Se ha deducido la siguiente fórmula para calcular el trabajo.

Trabajo

El **trabajo** W hecho por una fuerza $\mathbf{F}$ en movimiento a lo largo de un vector $\mathbf{D}$ es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

Ejemplo 7 Calcular el trabajo

Una fuerza está dada por el vector $\mathbf{F} = \langle 2, 3 \rangle$ y mueve un objeto del punto $(1, 3)$ al punto $(5, 9)$. Encuentre el trabajo realizado.

Solución El vector de desplazamiento es

$$\mathbf{D} = \langle 5 - 1, 9 - 3 \rangle = \langle 4, 6 \rangle$$

De modo que el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D} = \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 4, 6 \rangle = 26$$

Si la unidad de fuerza es libras y la distancia se mide en pies, entonces el trabajo realizado es 26 ft-lb (pies-lb). ■

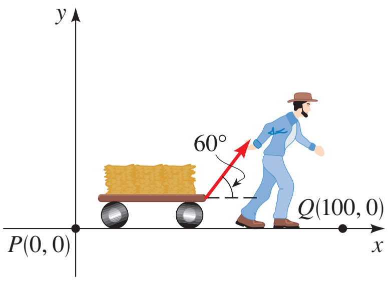


Figura 8

Ejemplo 8 Calcular el trabajo

Una persona jala un carro horizontalmente ejerciendo una fuerza de 20 lb en la manija. Si la manija forma un ángulo de 60° con la horizontal, encuentre el trabajo hecho al mover el carro 100 pies.

Solución Se elige un sistema coordenado con el origen en la posición inicial del carro (véase la figura 8). Es decir, el carro se mueve del punto $P(0, 0)$ al punto $Q(100, 0)$. El vector que representa este desplazamiento es

$$\mathbf{D} = 100\mathbf{i}$$

La fuerza sobre la manija se puede escribir en términos de las componentes (véase la sección 8.4 como

$$\mathbf{F} = (20 \cos 60°)\mathbf{i} + (20 \text{ sen } 60°)\mathbf{j} = 10\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\mathbf{j}$$

De modo que el trabajo hecho es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D} = (10\mathbf{i} + 10\sqrt{3}\mathbf{j}) \cdot (100\mathbf{i}) = 1000 \text{ pies-lb}$$ ■

8.5 Ejercicios

1–8 ■ Encuentre **a)** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ y **b)** el ángulo entre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ hasta el grado más próximo.

1. $\mathbf{u} = \langle 2, 0\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$
2. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \mathbf{j}$
3. $\mathbf{u} = \langle 2, 7\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 1\rangle$
4. $\mathbf{u} = \langle -6, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -1\rangle$
5. $\mathbf{u} = \langle 3, -2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 2\rangle$
6. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
7. $\mathbf{u} = -5\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} - \sqrt{3}\mathbf{j}$
8. $\mathbf{u} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

9–14 ■ Determine si los vectores dados son ortogonales.

9. $\mathbf{u} = \langle 6, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 3\rangle$
10. $\mathbf{u} = \langle 0, -5\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 4, 0\rangle$
11. $\mathbf{u} = \langle -2, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 4, 2\rangle$
12. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -7\mathbf{j}$
13. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = -12\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
14. $\mathbf{u} = 4\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

15–18 ■ Encuentre la cantidad indicada, suponiendo que $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{w} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

15. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
16. $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
17. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
18. $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})$

19–22 ■ Encuentre la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

19. $\mathbf{u} = \langle 4, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, -4\rangle$
20. $\mathbf{u} = \langle -3, 5\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\rangle$
21. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i} - 24\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{j}$
22. $\mathbf{u} = 7\mathbf{i}, \quad \mathbf{v} = 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$

23–28 ■ **a)** Calcule $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$. **b)** Resuelva $\mathbf{u}$ en $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es ortogonal a $\mathbf{v}$.

23. $\mathbf{u} = \langle -2, 4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, 1\rangle$
24. $\mathbf{u} = \langle 7, -4\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, 1\rangle$
25. $\mathbf{u} = \langle 1, 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 1, -3\rangle$
26. $\mathbf{u} = \langle 11, 3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, -2\rangle$
27. $\mathbf{u} = \langle 2, 9\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -3, 4\rangle$
28. $\mathbf{u} = \langle 1, 1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$

29–32 ■ Encuentre el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto de P a Q.

29. $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 5\mathbf{j}; \quad P(0, 0), Q(3, 8)$
30. $\mathbf{F} = 400\mathbf{i} + 50\mathbf{j}; \quad P(-1, 1), Q(200, 1)$
31. $\mathbf{F} = 10\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \quad P(2, 3), Q(6, -2)$
32. $\mathbf{F} = -4\mathbf{i} + 20\mathbf{j}; \quad P(0, 10), Q(5, 25)$

33–36 ■ Sean **u**, **v** y **w** vectores y a un escalar. Pruebe la propiedad dada.

33. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

34. $(a\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (a\mathbf{v})$

35. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

36. $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = |\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$

37. Muestre que los vectores $\text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} - \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$ son ortogonales.

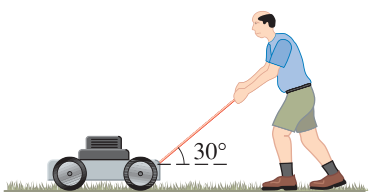
38. Evalúe $\mathbf{v} \cdot \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

Aplicaciones

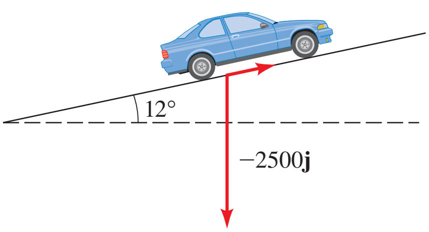
39. Trabajo La fuerza $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} - 7\mathbf{j}$ mueve un objeto 4 pies a lo largo del eje x en la dirección positiva. Encuentre el trabajo hecho si la unidad de fuerza es la libra.

40. Trabajo Una fuerza constante $\mathbf{F} = \langle 2, 8 \rangle$ mueve un objeto a lo largo de una recta desde el punto $(2, 5)$ hasta el punto $(11, 13)$. Encuentre el trabajo hecho si la distancia se mide en pies y la fuerza se mide en libras.

41. Trabajo Una cortadora de césped es empujada una distancia de 200 pies a lo largo de una trayectoria horizontal por una fuerza constante de 50 lb. La manija de la podadora se mantiene a un ángulo de 30° desde la horizontal (véase la figura). Encuentre el trabajo hecho



42. Trabajo Cierto automóvil es conducido 500 pies sobre una carretera que está inclinada 12° respecto de la horizontal, como se muestra en la figura. El automóvil pesa 2500 lb. Así, la gravedad actúa hacia abajo sobre el automóvil con una fuerza constante $\mathbf{F} = -2500\mathbf{j}$. Encuentre el trabajo que realiza el automóvil para vencer la gravedad.



43. Fuerza Un automóvil está sobre una entrada que está inclinada 25° respecto a la horizontal. Si el automóvil pesa 2755 lb, encuentre la fuerza requerida para evitar que ruede hacia atrás.

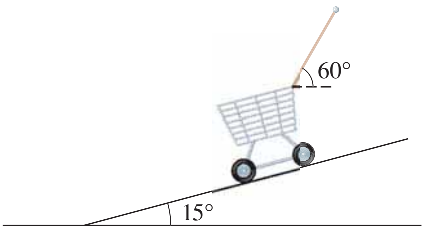
44. Force Un automóvil está sobre una entrada que está inclinada 10° respecto a la horizontal. Se requiere una fuerza de 490 lb para evitar que el automóvil ruede hacia atrás.

a) Determine el peso del automóvil.

b) Calcule la fuerza que ejerce el automóvil contra la entrada.

45. Fuerza Un paquete que pesa 200 lb se coloca sobre un plano inclinado. Si una fuerza de 80 lb es suficiente para evitar que se deslice el paquete, determine el ángulo de inclinación del plano. (Ignore los efectos de la fricción.)

46. Fuerza Un carro que pesa 40 lb se coloca sobre una rampa inclinada 15° respecto a la horizontal. El carro está sostenido por una cuerda la cual tiene un ángulo de 60° respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Encuentre la fuerza que debe ejercer la cuerda sobre el carro para evitar que ruede por la rampa.



Descubrimiento • Debate

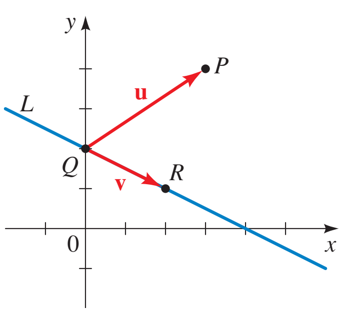
47. Distancia desde un punto a una recta Sea L la recta $2x + 4y = 8$ y sea P el punto $(3, 4)$.

a) Muestre que los puntos $Q(0, 2)$ y $R(2, 1)$ se ubican sobre L.

b) Sean $\mathbf{u} = \overrightarrow{QP}$ y $\mathbf{v} = \overrightarrow{QR}$, como se muestra en la figura. Encuentre $\mathbf{w} = \text{proy}_{\mathbf{v}}\, \mathbf{u}$.

c) Bosqueje una gráfica que explique por qué $|\mathbf{u} - \mathbf{w}|$ es la distancia de P a L. Determine la distancia.

d) Escriba un párrafo corto que describa los pasos necesarios para hallar la distancia de un punto a una recta.



PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

J. L. Amos/SuperStock

Navegar contra el viento

Los navegantes dependen del viento para propulsar sus embarcaciones. ¿Pero qué pasa si el viento sopla en una dirección opuesta a la que quieren ir? Aunque obviamente es imposible navegar directamente en contra del viento, *es* posible navegar en cierto ángulo *hacia* el viento. Entonces *cambiando de dirección*, es decir, al ir zigzagueando en lados alternos de la dirección del viento, un navegante puede avanzar contra el viento (véase la figura 1).

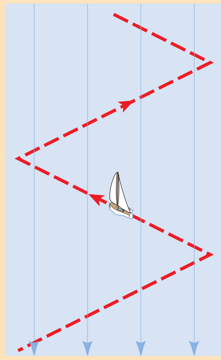


Figura 1
Cambio de dirección

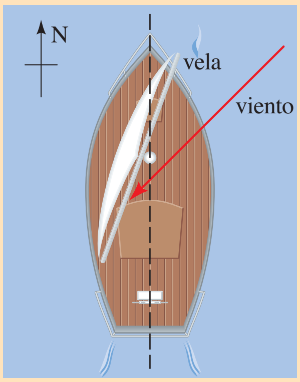


Figura 2

¿Cómo se debe alinear la vela para propulsar la embarcación en la dirección deseada hacia el viento? Esta pregunta se puede contestar modelando el viento como un vector y estudiando sus componentes a lo largo de la quilla y la vela.

Por ejemplo, suponga que un velero que se dirige al norte tiene su vela inclinada en la dirección N 20° E. El viento sopla hacia la vela en la dirección S 45° W con una fuerza de magnitud F (véase la figura 2).

1. Muestre que la fuerza eficaz del viento sobre la vela es F sen 25º. Esto se puede hacer al hallar las componentes del viento paralelas a la vela y perpendiculares a ella. La componente paralela a la vela se desliza y no propulsa a la embarcación. Sólo la componente perpendicular empuja contra la vela.

2. Si la quilla de la embarcación está alineada al norte, ¿qué fracción de la fuerza F propulsa a la embarcación? Sólo la componente de la fuerza hallada en el problema 1 paralela a la quilla propulsa a la embarcación.

(En la realidad, otros factores, incluyendo las propiedades aerodinámicas de la embarcación, tienen influencia en la rapidez de la embarcación.)

3. Si un bote con dirección norte tiene su vela inclinada en la dirección N α° E, y el viento sopla con fuerza F en la dirección S β° W donde $0 < \alpha < \beta < 180$, encuentre una fórmula para la magnitud de la fuerza que en realidad impulsa a la embarcación.

8 Repaso

Revisión de conceptos

1. Describa cómo las coordenadas polares representan la posición de un punto en el plano

2. a) ¿Qué ecuaciones utiliza para cambiar de coordenadas rectangulares a polares?
   b) ¿Qué ecuaciones utiliza para cambiar de coordenadas rectangulares a polares?

3. ¿Cómo traza la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$?

4. ¿Qué tipo de curva tiene una ecuación polar de la forma dada?
   a) $r = a\cos\theta$ o $r = a \operatorname{sen}\theta$
   b) $r = a(1 \pm \cos\theta)$ o $r = a(1 \pm \operatorname{sen}\theta)$
   c) $r = a \pm b\cos\theta$ o $r = a \pm b\operatorname{sen}\theta$
   d) $r = a\cos n\theta$ o $r = a\operatorname{sen} n\theta$

5. ¿Cómo grafica un número complejo z? ¿Cuál es la forma polar de un número complejo z? ¿Cuál es el módulo de z? ¿Cuál es el argumento de z?

6. a) ¿Cómo multiplica dos números complejos si están dados en forma polar?
   b) ¿Cómo divide dos números de este tipo?

7. a) Exprese el teorema de DeMoivre.
   b) ¿Cómo encuentra las raíces n-ésimas de un número complejo?

8. a) ¿Cuál es la diferencia entre un escalar y un vector?
   b) Dibuje un diagrama para mostrar cómo sumar dos vectores.
   c) Dibuje un diagrama para mostrar cómo restar dos vectores.
   d) Dibuje un diagrama para mostrar cómo multiplicar un vector por los escalares $2, \frac{1}{2}, -2$ y $-\frac{1}{2}$.

9. Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$, $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$ y c es un escalar, escriba expresiones para $\mathbf{u}+\mathbf{v}$, $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, $c\mathbf{u}$ y $|\mathbf{u}|$.

10. a) Si $\mathbf{v} = \langle a, b\rangle$, escriba $\mathbf{v}$ en términos de $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$.
    b) Escriba las componentes de $\mathbf{v}$ en términos de la magnitud y dirección de $\mathbf{v}$.

11. Si $\mathbf{u} = \langle a_1, b_1\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a_2, b_2\rangle$, ¿cuál es el producto punto de $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$?

12. a) ¿Cómo usa el producto punto para hallar el ángulo entre dos vectores?
    b) ¿Cómo usa el producto punto para determinar si dos vectores son perpendiculares?

13. ¿Cuál es la componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$ y cómo la calcula?

14. ¿Cuál es la proyección de $\mathbf{u}$ sobre $\mathbf{v}$ y cómo la calcula?

15. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza $\mathbf{F}$ al mover un objeto a lo largo de un desplazamiento $\mathbf{D}$?

Ejercicios

1–6 ■ Se da un punto $P(r, \theta)$ en coordenadas polares. **a)** Grafique el punto P. **b)** Encuentre coordenadas rectangulares para P.

1. $\left(12, \frac{\pi}{6}\right)$
2. $\left(8, -\frac{3\pi}{4}\right)$
3. $\left(-3, \frac{7\pi}{4}\right)$
4. $\left(-\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$
5. $\left(4\sqrt{3}, -\frac{5\pi}{3}\right)$
6. $\left(-6\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$

7–12 ■ Se da un punto $P(x, y)$ en coordenadas rectangulares.
a) Grafique el punto P.
b) Hallar las coordenadas polares para P con $r \geq 0$.
c) Encuentre las coordenadas polares para P con $r \leq 0$.

7. $(8, 8)$
8. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6})$
9. $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2})$
10. $(3\sqrt{3}, 3)$
11. $(-3, \sqrt{3})$
12. $(4, -4)$

13–16 ■ **a)** Convierta la ecuación a coordenadas polares y simplifique. **b)** Grafique la ecuación. [*Sugerencia*: use la forma de la ecuación que encuentre más fácil graficar.]

13. $x + y = 4$
14. $xy = 1$
15. $x^2 + y^2 = 4x + 4y$
16. $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$

17–24 ■ **a)** Bosqueje la gráfica de la ecuación polar. **b)** Exprese la ecuación en coordenadas rectangulares.

17. $r = 3 + 3\cos\theta$
18. $r = 3\operatorname{sen}\theta$
19. $r = 2\operatorname{sen}2\theta$
20. $r = 4\cos 3\theta$
21. $r^2 = \sec 2\theta$
22. $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$
23. $r = \operatorname{sen}\theta + \cos\theta$
24. $r = \dfrac{4}{2 + \cos\theta}$

25–28 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la ecuación polar. Elija el dominio de θ para asegurarse de que produce la gráfica completa.

25. $r = \cos(\theta/3)$

26. $r = \operatorname{sen}(9\theta/4)$

27. $r = 1 + 4\cos(\theta/3)$

28. $r = \theta \operatorname{sen} \theta, \quad -6\pi \le \theta \le 6\pi$

29–34 ■ Se da un número complejo.

a) Grafique el número complejo en el plano complejo.

b) Encuentre el módulo y el argumento.

c) Escriba el número en forma polar.

29. $4 + 4i$

30. $-10i$

31. $5 + 3i$

32. $1 + \sqrt{3}i$

33. $-1 + i$

34. -20

35–38 ■ Use el teorema de DeMoivre para hallar la potencia indicada.

35. $(1 - \sqrt{3}i)^4$

36. $(1 + i)^8$

37. $(\sqrt{3} + i)^{-4}$

38. $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{20}$

39–42 ■ Encuentre las raíces indicadas.

39. Las raíces cuadradas de $-16i$

40. Las raíces cúbicas de $4 + 4\sqrt{3}i$

41. Las raíces sextas de 1

42. Las raíces octavas de i

43–44 ■ Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, $2\mathbf{u}$ y $3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

43. $\mathbf{u} = \langle -2, 3\rangle$, $\mathbf{v} = \langle 8, 1\rangle$

44. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

45. Encuentre el vector $\mathbf{u}$ con punto inicial $P(0, 3)$ y punto terminal $Q(3, -1)$.

46. Encuentre el vector $\mathbf{u}$ que tiene longitud $|\mathbf{u}| = 20$ y dirección $\theta = 60º$.

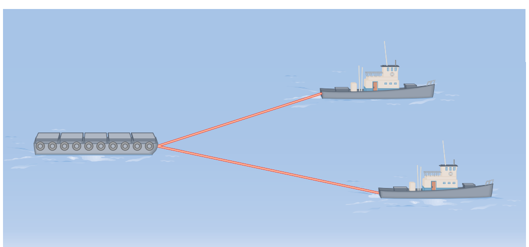
47. Si el vector $5\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ se coloca en el plano con su punto inicial $P(5, 6)$, encuentre su punto terminal.

48. Encuentre la dirección del vector $2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$.

49. Dos remolcadores están jalando una barcaza. Uno jala con una fuerza de 2.0×10^4 lb en la dirección N 50° E y el otro con una fuerza de 3.4×10^4 lb en la dirección S 75° E.

a) Encuentre la fuerza resultante sobre la barcaza como un vector.

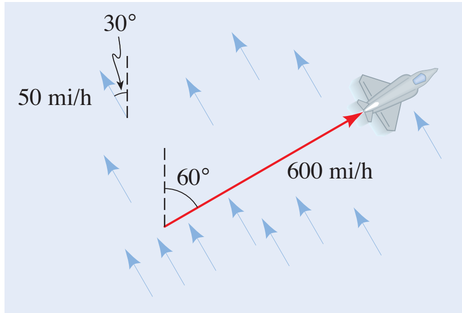
b) Determine la magnitud y dirección de la fuerza resultante.



50. Un avión va con rumbo al N 60° E a una velocidad de 600 millas/h respecto al aire. Un viento comienza a soplar en la dirección N 30° W a 50 millas/h.

a) Encuentre la velocidad del avión como un vector.

b) Encuentre la velocidad verdadera y la dirección del avión.



51–54 ■ Encuentre $|\mathbf{u}|$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

51. $\mathbf{u} = \langle 4, -3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 9, -8\rangle$

52. $\mathbf{u} = \langle 5, 12\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 10, -4\rangle$

53. $\mathbf{u} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

54. $\mathbf{u} = 10\mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

55–58 ■ ¿Son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ ortogonales? En caso contrario, encuentre el ángulo entre ellos.

55. $\mathbf{u} = \langle -4, 2\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 3, 6\rangle$

56. $\mathbf{u} = \langle 5, 3\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle -2, 6\rangle$

57. $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

58. $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

59–60 ■ Se dan los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$.

a) Encuentre el componente de $\mathbf{u}$ a lo largo de $\mathbf{v}$.

b) Encuentre $\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

c) Resuelva $\mathbf{u}$ en dos vectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, donde $\mathbf{u}_1$ es paralelo a $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}_2$ es perpendicular a $\mathbf{v}$.

59. $\mathbf{u} = \langle 3, 1\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 6, -1\rangle$

60. $\mathbf{u} = \langle -8, 6\rangle, \quad \mathbf{v} = \langle 20, 20\rangle$

61. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ al mover un objeto del punto $(1, 1)$ al punto $(7, -1)$.

62. Una fuerza $\mathbf{F}$ con magnitud de 240 lb mueve un objeto en la dirección del vector $\mathbf{D}$ una distancia de 20 pies. Si el trabajo hecho es 3800 pies-libra, encuentre el ángulo entre $\mathbf{F}$ y $\mathbf{D}$.

8 Evaluación

1. a) Convierta el punto cuyas coordenadas polares son $(8, 5\pi/4)$ a coordenadas rectangulares.

b) Encuentre dos representaciones en coordenadas polares para el punto en coordenadas rectangulares $(-6, 2\sqrt{3})$, una con $r > 0$ y otra con $r < 0$, y ambas con $0 \le \theta < 2\pi$.

2. a) Grafique la ecuación polar $r = 8 \cos \theta$. ¿Qué tipo de curva es ésta?

b) Convierta la ecuación a coordenadas rectangulares.

3. Sea $z = 1 + \sqrt{3}i$.

a) Grafique z en el plano complejo.

b) Escriba z en forma polar.

c) Encuentre el número complejo z^9.

4. Sea $z_1 = 4\left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{12}\right)$ y $z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{12}\right)$.

Encuentre $z_1 z_2$ y $\frac{z_1}{z_2}$.

5. Encuentre las raíces cúbicas de $27i$ y bosquéjelas en el plano complejo.

6. Sea **u** el vector con punto inicial $P(3, -1)$ y punto terminal $Q(-3, 9)$.

a) Exprese **u** en términos de **i** y **j**.

b) Encuentre la longitud de **u**.

7. Sea $\mathbf{u} = \langle 1, 3 \rangle$ y $\mathbf{v} = \langle -6, 2 \rangle$.

a) Encuentre $\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.

b) Encuentre $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

c) Encuentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

d) ¿**u** y **v** son perpendiculares?

8. Sea $\mathbf{u} = \langle -4\sqrt{3}, 4 \rangle$.

a) Grafique **u** con punto inicial $(0, 0)$.

b) Encuentre la longitud y dirección de **u**.

9. Un río fluye al este a 8 millas/h. Una persona dirige su lancha de motor en una dirección N 30° E en el río. La velocidad de la lancha con respecto al agua es de 12 millas/h.

a) Exprese la velocidad verdadera del motor como un vector.

b) Encuentre la velocidad y dirección verdaderas de la lancha.

10. Sea $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$.

a) Encuentre el ángulo entre **u** y **v**.

b) Encuentre la componente de **u** a lo largo de **v**.

c) Encuentre $\operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{u}$.

11. Encuentre el trabajo hecho por la fuerza $\mathbf{F} = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$ al mover un objeto del punto $(2, 2)$ al punto $(7, -13)$.

Enfoque en el modelado

Mapeo del mundo

El método usado para medir y elaborar un mapa (página 522) funciona bien para áreas pequeñas. Pero trazar el mapa del mundo entero introduciría una nueva dificultad: ¿cómo se representa el mundo *esférico* mediante un mapa *plano*? Se han desarrollado varios métodos ingeniosos.

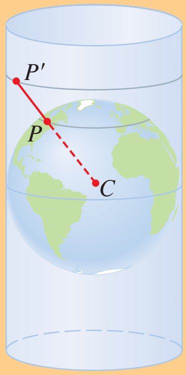
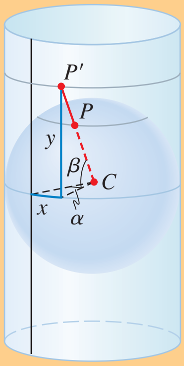


Figura 1
El punto P sobre la Tierra se proyecta sobre el punto P' sobre el cilindro mediante un rayo desde el centro de la Tierra C.

Proyección cilíndrica

Un método es la **proyección cilíndrica.** En este método se imagina un cilindro que envuelve a la Tierra en el ecuador como en la figura 1. Cada punto sobre la tierra se proyecta sobre el cilindro mediante un rayo que emana del centro de la Tierra. El cilindro extendido es el mapa plano deseado del mundo. El proceso se ilustra en la figura 2.



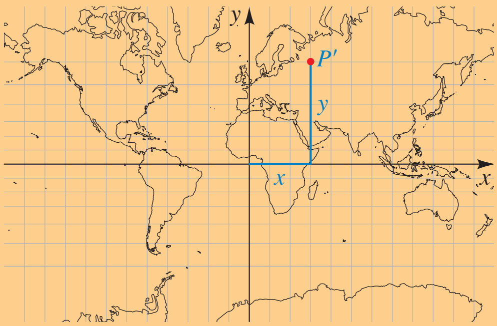


Figura 2

a) Proyección cilíndrica b) Mapa de proyección cilíndrica

Por supuesto, en realidad no se puede envolver una gran pieza de papel alrededor del mundo, de modo que este proceso completo se debe hacer matemáticamente, y la herramienta que se necesita es trigonometría. En el cilindro extendido se toma el eje x para que corresponda con el ecuador y el eje y con el meridiano de Greenwich, Inglaterra (longitud 0º). Sea R el radio de la Tierra y P el punto sobre la Tierra en longitud $\alpha°$ E y latitud $\beta°$ N. El punto P se proyecta hasta el punto $P'(x, y)$ sobre el cilindro (visto como parte del plano coordenado) donde

$$x = \left(\frac{\pi}{180}\right)\alpha R \qquad \text{Fórmula para la longitud de un arco circular}$$

$$y = R \tan \beta \qquad \text{Definición de tangente}$$

Véase la figura 2a). Estas fórmulas se pueden usar entonces para trazar el mapa. (Observe que la longitud oeste y la latitud sur corresponden a valores negativos de α y β, respectivamente.) Por supuesto, usar R como el radio de la Tierra produciría un mapa enorme, así que se remplaza R por un valor más pequeño para obtener un mapa a una escala apropiada como en la figura 2b).

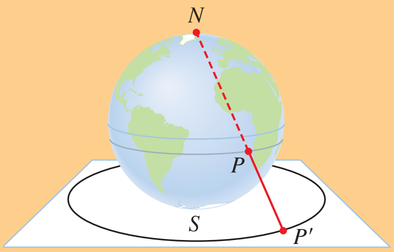


Figura 3

El punto P sobre la superficie de la Tierra se proyecta sobre el punto P' sobre el plano mediante un rayo desde el polo norte.

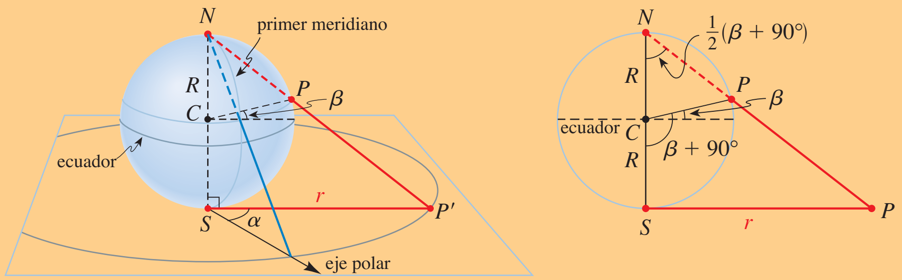
Proyección estereográfica

En la **proyección estereográfica** se imagina a la Tierra colocada en el plano coordenado con el polo sur en el origen. Los puntos sobre la Tierra están proyectados sobre el plano mediante rayos que emanan del polo norte (véase la figura 3). La Tierra se coloca de modo que el primer meridiano (longitud 0º) corresponda al eje polar. Como se muestra en la figura 4a), un punto P sobre la Tierra en la longitud $\alpha°$ E y latitud $\beta°$ N se proyecta sobre el punto $P'(r, \theta)$ cuyas coordenadas polares son

$$r = 2R \tan\left(\frac{\beta}{2} + 45°\right)$$

$$\theta = \alpha$$

En la figura 4b) se muestra cómo se obtiene la primera de estas fórmulas



a) Proyección estereográfica

b) Sección transversal de la proyección estereográfica

Figura 4

En la figura 5 se muestra un mapa estereográfico del hemisferio sur.

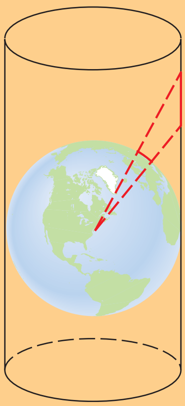
Figura 5

Proyección estereográfica del hemisferio sur

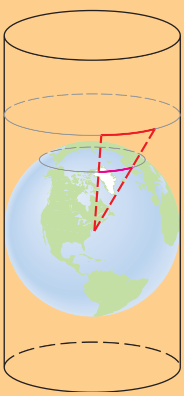
Problemas

1. **Proyección cilíndrica** Un cartógrafo desea elaborar un mapa de la Tierra por medio de una proyección cilíndrica. El ancho del mapa será de 36 pulgadas. Así, el ecuador se traza sobre un segmento de recta horizontal de 36 pulgadas. El radio de la Tierra es de 3960 millas.
   a) ¿Qué valor de R se debe usar en las fórmulas de proyección cilíndricas?
   b) ¿Cuántas millas representa una pulgada en el mapa en el ecuador?
2. **Proyección cilíndrica** Para trazar el mapa de todo el mundo por medio de una proyección cilíndrica, el cilindro se debe extender infinitamente lejos en dirección vertical. Por lo tanto, un mapa cilíndrico práctico no se puede extender hasta los polos. El cartógrafo del problema 1 decide que su mapa debe mostrar la Tierra entre las latitudes 70° N y 70° S. ¿Qué altura debe tener su mapa?
3. **Proyección cilíndrica** El cartógrafo del problema 1 coloca el eje y (longitud 0º) en el centro del mapa como se muestra en la figura 2b). Encuentre las coordenadas x y y de las siguientes ciudades en el mapa.
   a) Seattle, Washington; 47.6° N, 122.3° W
   b) Moscú, Rusia; 55.8° N, 37.6° E
   c) Sydney, Australia; 33.9° S, 151.2° E
   d) Río de Janeiro, Brasil; 22.9° S, 43.1° W
4. **Proyección estereográfica** Un cartógrafo hace una proyección estereográfica del hemisferio sur, del polo sur al ecuador. El mapa tendrá un radio de 20 pulg.
   a) ¿Qué valor de R se debe usar en las fórmulas de proyección estereográfica?
   b) Encuentre las coordenadas polares de Sydney, Australia (33.9° S, 151.2° E) en su mapa.

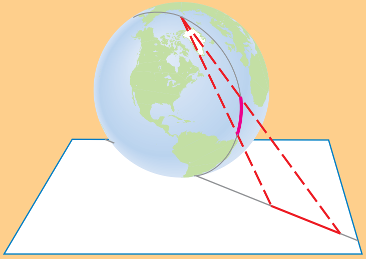
5–6 ■ La proyección cilíndrica alarga las distancias entre puntos que no están en el ecuador, mientras más apartadas estén del ecuador, más se alargan las distancias. En estos problemas se encuentran los factores mediante los cuales se distorsionan las distancias en la proyección cilíndrica en varios lugares.



5. **Distancias proyectadas** Encuentre la relación entre la distancia proyectada sobre el cilindro y la distancia real en la esfera entre las latitudes dadas a lo largo de un meridiano (véase la figura a la izquierda).
   a) Entre la latitud 20° y 21° N
   b) Entre la latitud 40° y 41° N
   c) Entre la latitud 80° y 81° N
6. **Distancias proyectadas** Encuentre la relación entre la distancia proyectada en el cilindro y la distancia en la esfera a lo largo de la paralela de latitud dada entre dos puntos que están apartados 1° de longitud (véase la figura siguiente).
   a) Latitud 20° N
   b) Latitud 40° N
   c) Latitud 80° N



7–8 ■ La proyección estereográfica también alarga las distancias, mientras más lejos estén del polo sur, más se alargan las distancias. En estos problemas se encuentran los factores por los que las distancias están distorsionadas en la proyección estereográfica en varios lugares.



7. Distancias proyectadas Encuentre la relación entre la distancia proyectada sobre el plano y la distancia real en la esfera entre las latitudes dadas a lo largo de un meridiano (véase la figura a la izquierda).

a) Entre la latitud 20° y 21° S

b) Entre la latitud 40° y 41° S

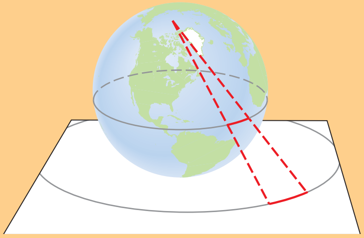
c) Entre la latitud 80° y 81° S

8. Distancias proyectadas Encuentre la relación entre la distancia proyectada sobre el plano y la distancia sobre la esfera a lo largo de la paralela de latitud dada entre dos puntos que están apartados 1° de latitud (véase la figura).

a) Latitud 20° S

b) Latitud 40° S

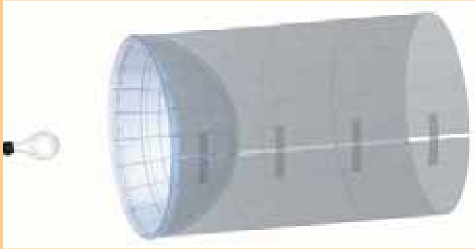
c) Latitud 80° S



9. Líneas de latitud y longitud En este proyecto se ve cómo la proyección transfiere líneas de latitud y longitud desde una esfera a una superficie plana. Se necesitará un tazón de vidrio redondo, papel de calcar y una fuente de luz (un bombillo pequeño transparente). Use un marcador negro para trazar líneas igualmente espaciadas de latitud y longitud en el exterior del tazón.

a) Para modelar la proyección estereográfica, coloque el tazón sobre una hoja de papel de calcar y use la fuente de luz como se muestra en la figura a la izquierda.

b) Para modelar la proyección cilíndrica, envuelva el papel de calcar alrededor del tazón y use la fuente de luz como se muestra en la figura siguiente.

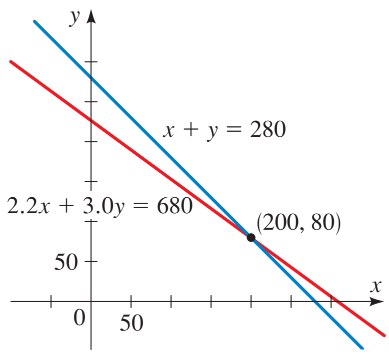


10. Otras proyecciones Hay muchas otras proyecciones de mapas, como la proyección cónica de Albers, la azimutal, la cilíndrica de igual área de Behrmann, las proyecciones isográficas y ortográficas de Gall, la proyección gnómica, la proyección equivalente de Lambert, la de Mercator, la de Mollweide, la rectangular y la sinusoidal. Investigue una de estas proyecciones en su biblioteca o en la Internet y escriba un informe que explique cómo se construye el mapa y que describa sus ventajas y desventajas.

9 Sistemas de ecuaciones y desigualdades

Esquema del capítulo

Muchas de las situaciones del mundo real tienen demasiadas variables como para ser modeladas por una *sola* ecuación. Por ejemplo, el clima depende de muchas variables, como la temperatura, velocidad del viento, presión del aire, humedad, y así sucesivamente. Para modelar el clima, y predecirlo, los científicos usan muchas ecuaciones, y cada una de ellas contiene varias variables. Estos sistemas de ecuaciones *trabajan juntos* para describir el clima. Los sistemas de ecuaciones con cientos o hasta miles de variables se usan también ampliamente en las industrias de los viajes aéreos y las telecomunicaciones para establecer horarios consistentes y para determinar rutas eficaces para las llamadas telefónicas. Para entender cómo surgen estos sistemas, consideremos el siguiente ejemplo sencillo.



Podemos resolver este sistema en forma gráfica. El punto (200, 80) queda en la gráfica de cada una de las ecuaciones, de modo que satisface ambas ecuaciones.

Una gasolinería vende gasolina regular a 2.20 dólares cada galón y gasolina premium a 3.00 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron? Si hacemos que x y y sean las cantidades vendidas de galones de gasolina regular y de gasolina premium, respectivamente, obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 280 & \text{Ecuación de los galones} \\ 2.20x + 3.00y = 680 & \text{Ecuación de los dólares} \end{cases}$$

Estas ecuaciones *trabajan juntas* para que podamos calcular x y y; ninguna ecuación sola puede señalar el valor de x o de y. Los valores $x = 200$ y $y = 80$ cumplen *ambas* ecuaciones, de modo que son una solución del sistema. Por consiguiente, la gasolinería vendió 200 galones de gasolina regular y 80 galones de gasolina premium.

También podemos representar un sistema lineal mediante un acomodo rectangular de números que se llama matriz. La *matriz aumentada* del sistema anterior es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 280 \\ 2.20 & 3.00 & 680 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{Ecuación de los galones} \\ \leftarrow \text{Ecuación de los dólares} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix}$$

La matriz aumentada contiene la misma información que el sistema, pero de manera más simple. Una de las ideas importantes en este capítulo es pensar en una matriz como un objeto simple, de modo que lo denotamos por medio de una sola letra como A, B, C, etcétera. Podemos sumar, restar y multiplicar matrices, igual que con los números ordinarios. Pondremos atención especial a la multiplicación de matrices, la

cual se define de una manera que, a veces, parece complicada al principio, pero que permite escribir un sistema lineal como una simple *ecuación matricial*

$$AX = B$$

donde X es una matriz desconocida. Como verá, resolver esta ecuación matricial para determinar la matriz X es similar a resolver una ecuación algebraica $ax = b$ para determinar la cantidad x.

En este capítulo consideramos muchas aplicaciones de matrices, sin olvidar la aplicación al crecimiento de la población (*¿Sobrevivirán las especies*?, página 688) y las imágenes por medio de computadoras (*Imágenes mediante computadora I*, página 700).

9.1 Sistemas de ecuaciones

En esta sección estudiamos la manera de resolver sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Aprendemos tres métodos distintos para resolver dichos sistemas: por sustitución, por eliminación y por métodos gráficos.

Sistemas de ecuaciones y sus soluciones

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones que contiene las mismas variables. Una **solución** de un sistema es una asignación de valores de las variables que hacen que *cada una* de las ecuaciones del sistema se cumpla. **Resolver** un sistema quiere decir encontrar todas las soluciones del sistema.

En seguida se da un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones con dos variables.

$$\begin{cases} 2x - y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ x + 4y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Podemos comprobar que $x = 3$ y $y = 1$ es una solución de este sistema.

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$2x - y = 5$	$x + 4y = 7$
$2(3) - 1 = 5$ ✓	$3 + 4(1) = 7$ ✓

La solución se puede expresar también como el par ordenado (3, 1).

Hay que observar que las gráficas de las ecuaciones 1 y 2 son rectas (véase la figura 1). Puesto que la solución (3, 1) cumple cada una de las ecuaciones, el punto (3, 1) está en cada una de las rectas. Entonces, este es el punto de intersección de las dos rectas.

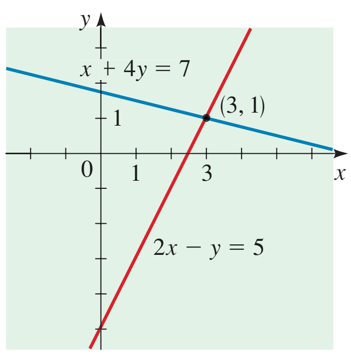


Figura 1

Método de sustitución

En el método de sustitución empezamos con una ecuación del sistema y despejamos una variable, que queda en términos de la otra variable. En el recuadro siguiente se describe el procedimiento.

Método de sustitución

1. **Despejar una variable.** Escoger una ecuación y despejar una de las variables.
2. **Sustituir.** Sustituya la expresión que determinó en el paso 1 en la otra ecuación para obtener una ecuación con una variable, luego resuélvala para obtener el valor de esa variable.
3. **Sustituir en la ecuación de la variable despejada.** Sustituya el valor que encontró en el paso 2 en la expresión que encontró en el paso 1 para determinar la variable faltante.

Ejemplo 1 Método de sustitución

Calcule todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 3x + 4y = 14 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Se despeja y de la primera ecuación.

Despejar una variable

$$y = 1 - 2x \qquad \text{Despejar } y \text{ en la ecuación 1}$$

En seguida se sustituye el valor de y en la segunda ecuación y se determina x:

Sustituir

$$\begin{aligned} 3x + 4(1 - 2x) &= 14 && \text{Sustitución de } y = 1 - 2x \text{ en la ecuación 2} \\ 3x + 4 - 8x &= 14 && \text{Desarrollo} \\ -5x + 4 &= 14 && \text{Simplificación} \\ -5x &= 10 && \text{Resta de 4} \\ x &= -2 && \text{Determinación de } x \end{aligned}$$

Luego se sustituye $x = -2$ en la ecuación de $y = 1 - 2x$:

Sustituir en la variable despejada

$$y = 1 - 2(-2) = 5 \qquad \text{Sustitución}$$

Por lo tanto, $x = -2$ y $y = 5$, de modo que la solución es el par ordenado $(-2, 5)$. En la figura 2 se puede observar que las gráficas de las dos ecuaciones se cortan en el punto $(-2, 5)$.

Compruebe su respuesta

$x = -2, y = 5$:

$$\begin{cases} 2(-2) + 5 = 1 \\ 3(-2) + 4(5) = 14 \end{cases} \checkmark$$

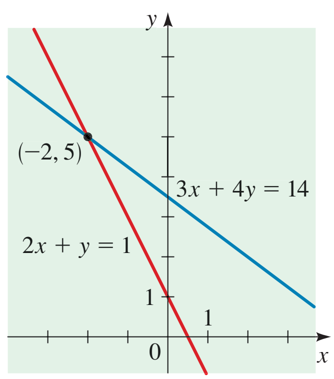


Figura 2

■

Ejemplo 2 Método de sustitución

Calcule todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 & \text{Ecuación 1} \\ 3x - y = 10 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Iniciamos despejando y de la segunda ecuación.

Despejar una variable

$$y = 3x - 10 \qquad \text{Despeje } y \text{ de la ecuación 2}$$

Luego se sustituye el valor de y en la primera ecuación y se determina el valor de x:

Sustitución

$$\begin{aligned} x^2 + (3x - 10)^2 &= 100 && \text{Sustitución de } y = 3x - 10 \text{ en la ecuación 1} \\ x^2 + (9x^2 - 60x + 100) &= 100 && \text{Desarrollo} \\ 10x^2 - 60x &= 0 && \text{Simplificación} \\ 10x(x - 6) &= 0 && \text{Factorización} \\ x = 0 \quad \text{o bien} \quad x &= 6 && \text{Determinación de } x \end{aligned}$$

Ahora se sustituyen estos valores de x en la ecuación $y = 3x - 10$.

Sustitución en la variable despejada

$$\begin{aligned} &\text{Para} \quad x = 0: \quad y = 3(0) - 10 = -10 && \text{Sustitución} \\ &\text{Para} \quad x = 6: \quad y = 3(6) - 10 = 8 && \text{Sustitución} \end{aligned}$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia, y la gráfica de la segunda ecuación es una recta; en la figura 3 se ilustra que las gráficas se cortan en los dos puntos $(0, -10)$ y $(6, 8)$.

Compruebe su respuesta

$x = 0, y = -10$:

$$\begin{cases} (0)^2 + (-10)^2 = 100 \\ 3(0) - (-10) = 10 \end{cases} \quad ✓$$

$x = 6, y = 8$:

$$\begin{cases} (6)^2 + (8)^2 = 36 + 64 = 100 \\ 3(6) - (8) = 18 - 8 = 10 \end{cases} \quad ✓$$

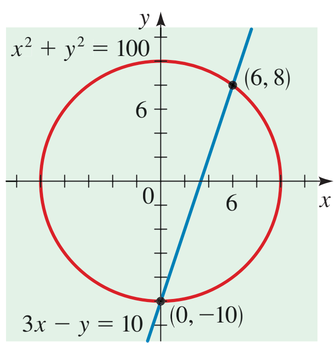


Figura 3

■

Método de eliminación

Para resolver un sistema por medio del método de eliminación, se trata de combinar las ecuaciones usando sumas o diferencias para eliminar una de las variables.

Método de eliminación

1. **Ajustar los coeficientes.** Se multiplica una o más de las ecuaciones por cantidades adecuadas de modo que el coeficiente de una variable de una ecuación sea el negativo de su coeficiente en la otra ecuación.
2. **Sumar las ecuaciones.** Se suman las dos ecuaciones para eliminar una variable, luego se resuelve para determinar el valor de la variable restante.
3. **Sustituir.** Se sustituye el valor que determinó en el paso 2 en una de las ecuaciones originales, y se resuelve para determinar el valor de la variable restante.

Ejemplo 3 Método de eliminación

Encuentre todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 & \text{Ecuación 1} \\ x - 2y = 2 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Puesto que los coeficientes de los términos con y son negativos, se pueden sumar las ecuaciones para eliminar y.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - 2y = 2 \end{cases} & & \text{Sistema} \\ \hline 4x \quad = 16 & & \text{Suma} \\ x = 4 & & \text{Determinación de } x \end{array}$$

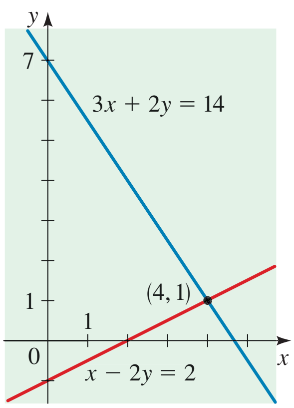


Figura 4

Ahora se sustituye $x = 4$ en una de las ecuaciones originales y se determina y. Escojamos la segunda ecuación porque se ve más sencilla.

$$\begin{array}{rll} x - 2y = 2 & & \text{Ecuación 2} \\ 4 - 2y = 2 & & \text{Sustitución de } x = 4 \text{ en la ecuación 2} \\ -2y = -2 & & \text{Resta de 4} \\ y = 1 & & \text{Determinación de } y \end{array}$$

La solución es (4, 1). En la figura 4 se muestra que las gráficas de las ecuaciones que forman el sistema se cortan en el punto (4, 1). ■

Ejemplo 4 Método de eliminación

Hallar todas las soluciones del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y = 26 & \text{Ecuación 1} \\ 5x^2 + 7y = 3 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Elegimos eliminar el término de x, así que multiplicamos la primera ecuación por 5 y la segunda ecuación por -3. Entonces sumamos las dos ecuaciones y determinamos el valor de y.

$$\begin{array}{rll} \begin{cases} 15x^2 + 10y = 130 \\ -15x^2 - 21y = -9 \end{cases} & & \begin{array}{l} \text{5 por ecuación 1} \\ (-3) \text{ por ecuación 2} \end{array} \\ \hline -11y = 121 & & \text{Suma} \\ y = -11 & & \text{Determinación de } y \end{array}$$

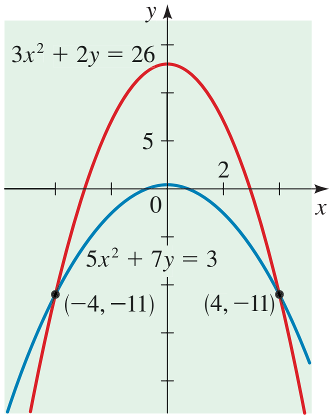


Figura 5

Las gráficas de las funciones cuadráticas $y = ax^2 + bx + c$ se llaman *parábolas*; véase la sección 2.5.

Ahora se sustituye $y = -11$ en una de las ecuaciones originales, por ejemplo, $3x^2 + 2y = 26$, y se determina x:

$$3x^2 + 2(-11) = 26 \qquad \text{Sustitución de } y = -11 \text{ en la ecuación 1}$$

$$3x^2 = 48 \qquad \text{Suma de 22}$$

$$x^2 = 16 \qquad \text{División entre 3}$$

$$x = -4 \quad \text{o bien} \quad x = 4 \qquad \text{Determinación de } x$$

Entonces tenemos dos soluciones: $(-4, -11)$ y $(4, -11)$.

Las gráficas de ambas ecuaciones son parábolas. En la figura 5 se muestra que las gráficas se cortan en los dos puntos $(-4, -11)$ y $(4, -11)$. ■

Compruebe su respuesta

$x = -4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(-4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(-4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \quad ✓$$

$x = 4, y = -11$:

$$\begin{cases} 3(4)^2 + 2(-11) = 26 \\ 5(4)^2 + 7(-11) = 3 \end{cases} \quad ✓$$

Método gráfico

En el **método gráfico** se usa una calculadora para graficar o una computadora para resolver el sistema de ecuaciones. Observe que con muchas de las calculadoras para graficar, cualquier ecuación se debe expresar primero en términos de una o más funciones de la forma $y = f(x)$ antes de que podamos usar la calculadora para graficarla. No todas las ecuaciones se pueden expresar fácilmente en esta forma, de modo que no todos los sistemas se pueden resolver mediante este método.

Método gráfico

1. **Grafique cada ecuación.** Exprese cada ecuación en la forma en que la acepte la calculadora, despejando y para que quede todo en términos de x. Grafique las ecuaciones en la misma pantalla.
2. **Calcule los puntos de intersección.** Las soluciones son las coordenadas x y y de los puntos de intersección.

A veces es más conveniente despejar x de las ecuaciones. En ese caso, en el paso 1 grafique x en función de y.

Ejemplo 5 Método gráfico

Determine todas las soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x^2 - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

Solución Despeje y en términos de x para obtener el sistema equivalente

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

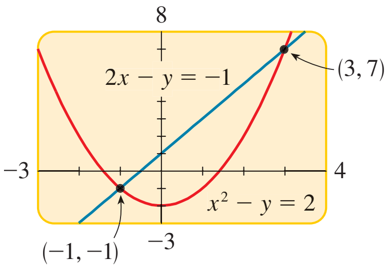


Figura 6

En la figura 6 se ilustra que las gráficas de estas ecuaciones se cortan en los dos puntos. Si nos acercamos, vemos que las soluciones son

$$(-1, -1) \qquad \text{y} \qquad (3, 7)$$

■

Compruebe su respuesta

$x = -1, y = -1$:

$$\begin{cases} (-1)^2 - (-1) = 2 \\ 2(-1) - (-1) = -1 \end{cases} \checkmark$$

$x = 3, y = 7$:

$$\begin{cases} 3^2 - 7 = 2 \\ 2(3) - 7 = -1 \end{cases} \checkmark$$

Ejemplo 6 Resolución de un sistema de ecuaciones por el método gráfico

Calcule todas las soluciones del sistema con una cifra decimal.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 & \text{Ecuación 1} \\ y = 2x^2 - 5x & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución La gráfica de la primera ecuación es una circunferencia y la segunda es una parábola. Para graficar la circunferencia en una calculadora es necesario despejar y (véase la sección 2.3).

$$x^2 + y^2 = 12$$

$$y^2 = 12 - x^2 \qquad \textit{Aislamiento de } y^2 \textit{ en el primer miembro}$$

$$y = \pm\sqrt{12 - x^2} \qquad \textit{Cálculo de raíces cuadradas}$$

Para graficar la circunferencia, es necesario graficar ambas funciones:

$$y = \sqrt{12 - x^2} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{12 - x^2}$$

En la figura 7 la gráfica de la circunferencia se muestra en rojo y la parábola en azul. Las gráficas se cortan en los cuadrantes I y II. Efectuamos un acercamiento o aplicamos el comando `Intersect`, y observamos que los puntos de intersección son $(-0.559, 3.419)$ y $(2.847, 1.974)$. Asimismo, parece que hay otro punto de intersección en el cuadrante IV. No obstante, cuando efectuamos un acercamiento, observamos que las curvas se acercan mucho entre sí, pero no se cortan (véase la figura 8). Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones, que son las siguientes con una cifra decimal

$$(-0.6, 3.4) \qquad \text{y} \qquad (2.8, 2.0)$$

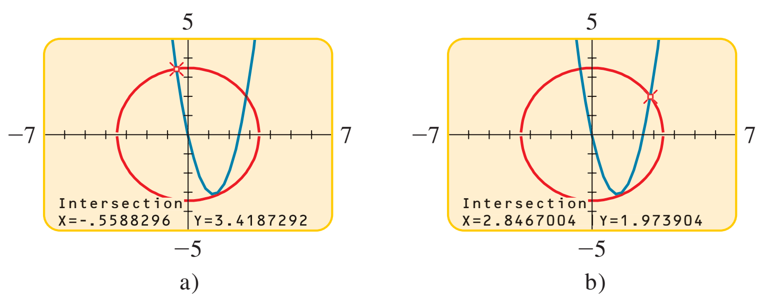


Figura 7
$x^2 + y^2 = 12, y = 2x^2 - 5x$

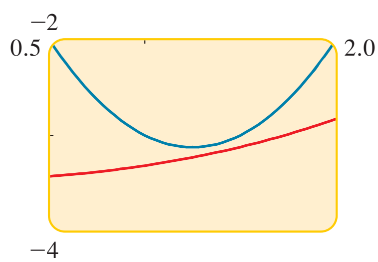


Figura 8
Acercamiento

■

9.1 Ejercicios

1–8 ■ Aplique el método de sustitución para determinar todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

1. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2 + y = 9 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + y^2 = 0 \\ 2x + 5y^2 = 75 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 - y = 1 \\ 2x^2 + 3y = 17 \end{cases}$

9–16 ■ Aplique el método de eliminación para calcular todas las soluciones del sistema de ecuaciones

9. $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x - 3y = 11 \\ 8x + 4y = 12 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^2 - 2y = 1 \\ x^2 + 5y = 29 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x^2 + 4y = 17 \\ 2x^2 + 5y = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x^2 - y^2 = 11 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$

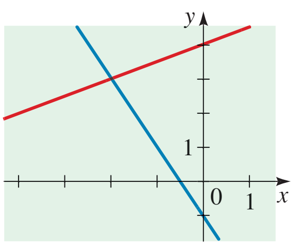
14. $\begin{cases} 2x^2 + 4y = 13 \\ x^2 - y^2 = \frac{7}{2} \end{cases}$

15. $\begin{cases} x - y^2 + 3 = 0 \\ 2x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

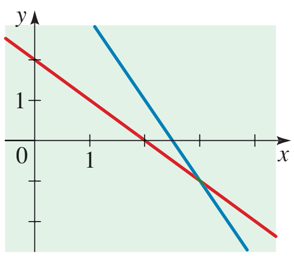
16. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2x^2 - y^2 = x + 3 \end{cases}$

17–22 ■ Se proporcionan dos ecuaciones y sus gráficas. Determine los puntos donde se cortan las gráficas resolviendo el sistema.

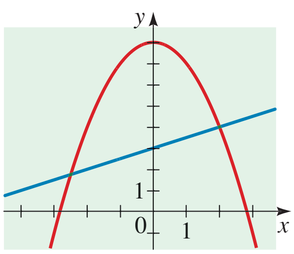
17. $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$



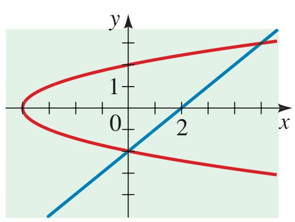
18. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$



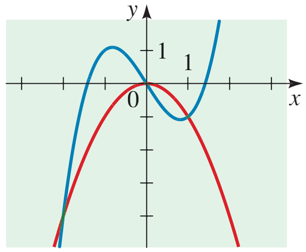
19. $\begin{cases} x^2 + y = 8 \\ x - 2y = -6 \end{cases}$



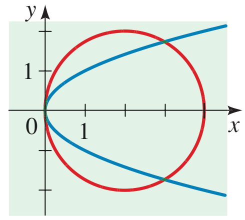
20. $\begin{cases} x - y^2 = -4 \\ x - y = 2 \end{cases}$



21. $\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x^3 - 2x - y = 0 \end{cases}$



22. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x = y^2 \end{cases}$



23–36 ■ Encuentre todas las soluciones del sistema de ecuaciones.

23. $\begin{cases} y + x^2 = 4x \\ y + 4x = 16 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x - y^2 = 0 \\ y - x^2 = 0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ y^2 - x^2 = 2x + 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - y = 4 \\ xy = 12 \end{cases}$

28. $\begin{cases} xy = 24 \\ 2x^2 - y^2 + 4 = 0 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2y = 16 \\ x^2 + 4y + 16 = 0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 0 \\ y^2 - 4x^2 = 12 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 2 \\ 2x^2 - 3y = 15 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 2x^2 - 8y^3 = 19 \\ 4x^2 + 16y^3 = 34 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^4 - y^3 = 17 \\ 3x^4 + 5y^3 = 53 \end{cases}$

35. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{3}{y} = 1 \\ -\dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{y} = 1 \end{cases}$

36. $\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{y^4} = \dfrac{7}{2} \\ \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{y^4} = 0 \end{cases}$

37–46 ■ Aplique el método gráfico para hallar las soluciones del sistema de ecuaciones con dos cifras decimales.

37. $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

38. $\begin{cases} y = -2x + 12 \\ y = x + 3 \end{cases}$

39. $\begin{cases} y = x^2 + 8x \\ y = 2x + 16 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x^2 - 2x + y^2 = 13 \end{cases}$

43. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1 \\ y = -x^2 + 6x - 2 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = x^2 - 2x - 8 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x^4 + 16y^4 = 32 \\ x^2 + 2x + y = 0 \end{cases}$

46. $\begin{cases} y = e^x + e^{-x} \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$

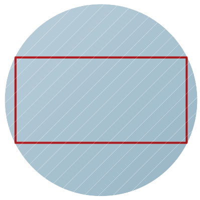
Aplicaciones

47. Dimensiones de un rectángulo Un rectángulo tiene un área de 180 cm^2 y un perímetro de 54 cm. ¿Cuáles son sus dimensiones?

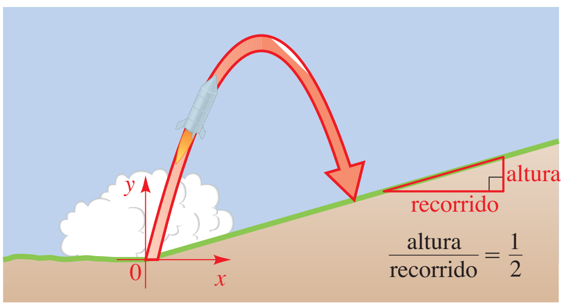
48. Catetos de un triángulo rectángulo El área de un triángulo rectángulo mide 84 pies cuadrados y su hipotenusa mide 25 pies de longitud. ¿Cuánto miden los catetos?

49. Dimensiones de un rectángulo El perímetro de un rectángulo es de 70 y su diagonal mide 25. Calcule el largo y el ancho.

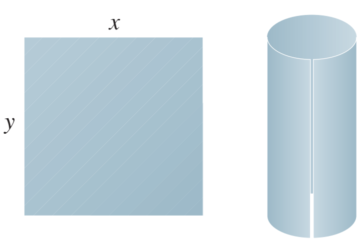
50. Dimensiones de un rectángulo Una pieza circular de lámina de metal tiene un diámetro de 20 pulg. Se van a cortar las orillas de tal manera que se forme un rectángulo de 160 in^2 de área (véase la figura). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?



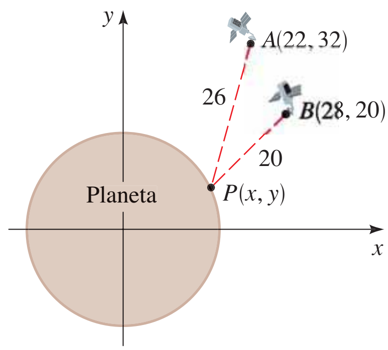
51. Alcance de un cohete La inclinación de una cierta colina es tal que su pendiente es $\frac{1}{2}$, como se muestra en la figura. Introducimos un sistema coordenado de tal manera que el origen está en la base la colina. Las escalas en los ejes están en metros. Se dispara un cohete desde la base de la colina de tal modo que su trayectoria es la parábola $y = -x^2 + 401x$. ¿En qué punto el cohete golpea la ladera? ¿Qué tan lejos está este punto de la base de la colina? Dé el resultado al cm más cercano.



52. Construcción de una chimenea Una pieza rectangular de lámina de metal de 1200 in^2 de superficie se va a doblar para formar un tubo de salida cilíndrico cuyo volumen sea de 600 in^3. ¿Cuáles son las dimensiones de la lámina de metal?



53. Sistema de localización global Mediante este sistema se determina la ubicación de un objeto a partir de su distancia a satélites en órbita alrededor de la Tierra. En la situación simplificada bidimensional que se ilustra en la figura, determine las coordenadas de P si éste está a 26 unidades del satélite A y a 20 unidades del satélite B.



Descubrimiento • Debate

54. Intersección de una parábola y una recta En una hoja de papel milimétrico o mediante una calculadora para graficar trace la parábola $y = x^2$. Luego dibuje las gráficas de la ecuación lineal $y = x + k$ en el mismo plano coordenado para varios valores de k. Trate de elegir valores de k de modo que la recta y la parábola se corten en dos puntos para alguno de sus valores de k y no para otros. ¿Para qué valor de k hay exactamente un punto de intersección? Utilice los resultados de su experimento para plantear una conjetura con respecto a los valores de k para los cuales el sistema siguiente tiene dos soluciones, una solución y ninguna solución. Demuestre su conjetura.

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + k \end{cases}$$

55. Algunos sistemas engañosos Siga las sugerencias y resuelva los sistemas

a) $\begin{cases} \log x + \log y = \frac{3}{2} \\ 2\log x - \log y = 0 \end{cases}$ [*Sugerencia*: sume las ecuaciones.]

b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 10 \\ 4^x + 4^y = 68 \end{cases}$ [*Sugerencia*: observe que $4^x = 2^{2x} = (2^x)^2$.]

c) $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^3 - y^3 = 387 \end{cases}$ [*Sugerencia*: factorice el primer miembro de la segunda ecuación.]

d) $\begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ xy + y^2 = 3 \end{cases}$ [*Sugerencia*: sume las ecuaciones y factorice el resultado.]

9.2 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Recuerde que una ecuación de la forma $Ax + By = C$ se llama lineal porque su gráfica es una recta (véase la sección 1.10). Esta sección trata sobre sistemas de dos ecuaciones lineales con dos variables.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Un **sistema de dos ecuaciones con dos variables** es de la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Podemos aplicar el método de sustitución o el de eliminación para resolver tales sistemas algebraicos, pero como el método de eliminación es más fácil para los sistemas lineales, aplicamos el método de eliminación y no el de sustitución en los ejemplos.

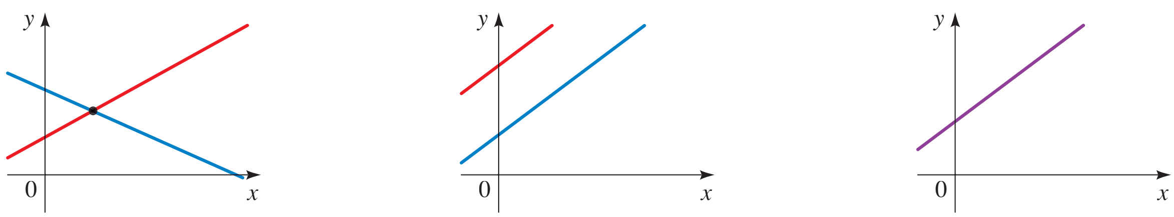
La gráfica de un sistema lineal con dos variables es un par de rectas, de modo que para resolver el sistema por el método gráfico es necesario determinar el punto o los puntos de intersección de las rectas. Dos rectas se pueden cortar en un solo punto, pueden ser paralelas o pueden coincidir, como se indica en la figura 1. Así que hay tres resultados posibles cuando se resuelven dichos sistemas.

Número de soluciones de un sistema lineal con dos variables

Por lo que se refiere a un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero. (Véase la figura 1.)

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente**. Un sistema que tiene una cantidad infinita de soluciones se llama **dependiente**.



a) Sistema lineal con una solución. Las rectas se cortan en un solo punto.

b) Sistema lineal sin solución. Las rectas son paralelas, por lo que no se cortan.

c) El sistema lineal tiene una cantidad infinita de soluciones; las ecuaciones corresponden a la misma recta.

Figura 1

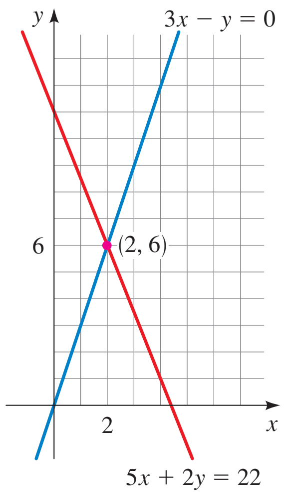


Figura 2

Comprueba su respuesta

$x = 2, y = 6$:

$$\begin{cases} 3(2) - (6) = 0 \\ 5(2) + 2(6) = 22 \end{cases} \checkmark$$

Ejemplo 1 Un sistema lineal con una solución

Resuelva el sistema y grafique las rectas.

$$\begin{cases} 3x - y = 0 & \text{Ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Eliminamos y a partir de las ecuaciones y despejamos x.

$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 & 2 \times \text{ecuación 1} \\ 5x + 2y = 22 & \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 11x &= 22 && \text{Suma} \\ x &= 2 && \text{Despeje de } x \end{aligned}$$

En seguida sustituimos en la primera ecuación y determinamos y:

$$\begin{aligned} 6(2) - 2y &= 0 && \text{Sustitución } x = 2 \\ -2y &= -12 && \text{Resta de } 6 \times 2 = 12 \\ y &= 6 && \text{Determinación de } y \end{aligned}$$

La solución del sistema es el par ordenado (2, 6), es decir,

$$x = 2, \qquad y = 6$$

La gráfica de la figura 2 muestra que las rectas del sistema se cortan en el punto (2, 6). ■

Ejemplo 2 Un sistema lineal sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} 8x - 2y = 5 & \text{Ecuación 1} \\ -12x + 3y = 7 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Esta vez tratamos de determinar una combinación adecuada de las dos ecuaciones para eliminar la variable y. Al multiplicar la primera ecuación por 3 y la segunda por 2 tenemos

$$\begin{cases} 24x - 6y = 15 & 3 \times \text{ecuación 1} \\ -24x + 6y = 14 & 2 \times \text{ecuación 2} \end{cases}$$

$$0 = 29 \qquad \text{Suma}$$

En este caso, al sumar las dos ecuaciones se eliminan tanto x *como* y, y terminamos con $0 = 29$, lo cual obviamente es falso. No importa qué valores asignemos a x y a y, no podemos hacer que este enunciado sea verdadero, de modo que el sistema no tiene solución. En la figura 3 se ilustra que las rectas del sistema son paralelas y no se cortan. El sistema es inconsistente. ■

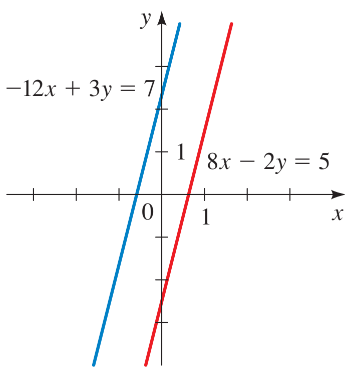


Figura 3

Ejemplo 3 Un sistema lineal con cantidad infinita de soluciones

Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 3x - 6y = 12 & \text{Ecuación 1} \\ 4x - 8y = 16 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Solución Multiplicamos la primera ecuación por 4 y la segunda por 3 para preparar la resta de las ecuaciones a fin de eliminar x. Las nuevas ecuaciones son

$$\begin{cases} 12x - 24y = 48 & \text{4 × ecuación 1} \\ 12x - 24y = 48 & \text{3 × ecuación 2} \end{cases}$$

Se puede observar que las dos ecuaciones en el sistema original son simplemente modos distintos de expresar la ecuación de una sola recta. Las coordenadas de cualquier punto en esta recta son una solución del sistema. Al escribir la ecuación en la forma de ecuación de la recta dada su pendiente y su ordenada en el origen, tenemos $y = \frac{1}{2}x - 2$. Entonces, si t representa cualquier número real, se puede escribir la solución como

$$x = t$$
$$y = \tfrac{1}{2}t - 2$$

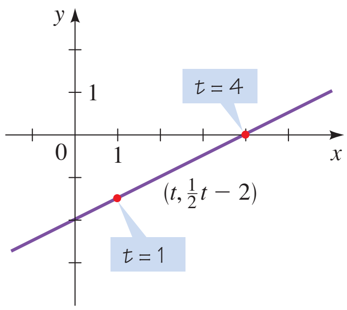


Figura 4

Asimismo, se puede escribir la solución en la forma de par ordenado como

$$\left(t, \tfrac{1}{2}t - 2\right)$$

donde t es cualquier número real. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones (véase la figura 4). ■

En el ejemplo 3, para llegar a soluciones específicas tenemos que asignar valores a t. Por ejemplo, si $t = 1$, se obtiene la solución $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$. Si $t = 4$, se obtiene la solución (4, 0). Para cada valor de t tenemos una solución diferente. (Véase la figura 4.)

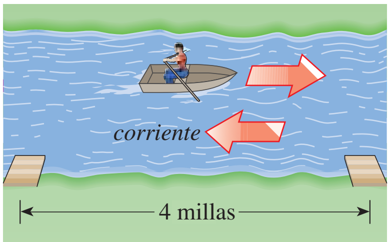
Modelado con sistemas lineales

Con frecuencia, cuando se utilizan ecuaciones para resolver problemas relacionados con la ciencia o con otros campos, se obtienen sistemas como los que hemos estudiado. Cuando se modela con sistemas de ecuaciones, se usan los criterios siguientes, similares a los de la sección 1.6.

Criterios para modelar con sistemas de ecuaciones

1. **Identificar las variables.** Identifique las cantidades que el problema pide determinar. Por lo regular, se determinan mediante una lectura cuidadosa de las preguntas planteadas al final del problema. Introduzca la notación para las variables: nómbrelas x y y u otras letras.
2. **Expresar todas las cantidades desconocidas en función de las variables.** Lea el problema una vez más y exprese todas las cantidades mencionadas en el problema en función de las variables que definió en el paso 1.
3. **Plantear un sistema de ecuaciones.** Encuentre los hechos decisivos en el problema que dan las relaciones entre las expresiones que determinó en el paso 2. Plantee un sistema de ecuaciones, o modelo, que exprese estas relaciones.
4. **Resolver el sistema e interpretar los resultados.** Resuelva el sistema que encontró en el paso 3, compruebe sus soluciones y dé la respuesta final en la forma de una oración que responda a la pregunta planteada en el problema.

Los dos ejemplos siguientes ilustran cómo modelar sistemas de ecuaciones.



Ejemplo 4 Problema distancia-velocidad-tiempo

Una mujer se dirige corriente arriba en un bote de remos a partir de un punto en el río hasta otro lugar situado a 4 millas; el recorrido tarda una hora y media. El viaje de regreso, en dirección de la corriente, dura sólo 45 min. ¿Qué tan rápido rema esta mujer en relación con el agua y a qué velocidad fluye la corriente?

Solución La pregunta es calcular la velocidad de remo y la velocidad de la corriente, de modo que hacemos

Identifique las variables

$$x = \text{velocidad al remar (millas/h)}$$

$$y = \text{velocidad de la corriente (millas/h)}$$

La velocidad de la mujer cuando rema contra la corriente es su velocidad de remo menos la velocidad de la corriente; su velocidad corriente abajo es su velocidad de remo más la velocidad de la corriente. Ahora traducimos esta información al lenguaje del álgebra.

Exprese las cantidades desconocidas en función de la variable

En lenguaje común	En lenguaje algebraico
Velocidad de remo	x
Velocidad de la corriente	y
Velocidad corriente arriba	$x - y$
Velocidad corriente abajo	$x + y$

La distancia corriente arriba y corriente abajo es 4 millas, de modo que al aplicar el hecho de que velocidad × tiempo = distancia para ambas partes del viaje, obtenemos

velocidad corriente arriba × tiempo corriente arriba = distancia recorrida

velocidad corriente abajo × tiempo corriente abajo = distancia recorrida

Plantee un sistema de ecuaciones

En la notación algebraica esto se traduce en las siguientes ecuaciones.

$$(x - y)\tfrac{3}{2} = 4 \qquad \text{Ecuación 1}$$

$$(x + y)\tfrac{3}{4} = 4 \qquad \text{Ecuación 2}$$

Resuelva el sistema

(Los tiempos han sido convertidos en horas, ya que estamos expresando las velocidades en millas por *hora*.) Multiplicamos las ecuaciones por 2 y por 4, respectivamente, para eliminar los denominadores.

$$\begin{cases} 3x - 3y = 8 & 2 \times \text{ecuación 1} \\ 3x + 3y = 16 & 4 \times \text{ecuación 2} \end{cases}$$

$$6x = 24 \qquad \text{Suma}$$

$$x = 4 \qquad \text{Determinación de } x$$

Al sustituir este valor de x en la primera ecuación (también se puede hacerlo en la segunda) y despejar x tenemos

$$3(4) - 3y = 8 \qquad \text{Sustitución de } x = 4$$

$$-3y = 8 - 12 \qquad \text{Resta de 12}$$

$$y = \tfrac{4}{3} \qquad \text{Determinación de } y$$

La mujer rema a 4 millas/h y la corriente fluye a $1\frac{1}{3}$ millas/h. ■

Compruebe su respuesta

Velocidad corriente arriba es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ millas}}{1\frac{1}{2}\text{ h}} = 2\tfrac{2}{3} \text{ millas/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo − flujo de la corriente

$= 4$ millas/h $- \frac{4}{3}$ millas/h $= 2\frac{2}{3}$ millas/h

Velocidad corriente abajo es

$$\frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}} = \frac{4 \text{ millas}}{\frac{3}{4}\text{ h}} = 5\tfrac{1}{3} \text{ millas/h}$$

y esto debe ser igual a

velocidad de remo + flujo de la corriente

$= 4$ millas/h $+ \frac{4}{3}$ millas/h $= 5\frac{1}{3}$ millas/h ✓

Ejemplo 5 Un problema de mezclas

Un vinatero fortifica vino que contiene 10% de alcohol añadiendo una solución de alcohol al 70%. La mezcla resultante contiene ahora 16% de alcohol, con la que llena 1000 botellas de un litro. ¿Cuántos litros (L) del vino y de la solución de alcohol utiliza?

Solución Puesto que se piden las cantidades de vino y de alcohol, hacemos

Identifique las variables

$$x = \text{cantidad de vino utilizada (L)}$$

$$y = \text{cantidad de solución de alcohol usada (L)}$$

De acuerdo con el hecho de que el vino contiene 10% de alcohol y la solución 70% de alcohol, se tiene lo siguiente:

Exprese todas las cantidades desconocidas en función de la variable

En lenguaje común	En lenguaje algebraico
Cantidad de vino usado (L)	x
Cantidad de solución de alcohol usada (L)	y
Cantidad de alcohol en el vino (L)	$0.10x$
Cantidad de alcohol en solución (L)	$0.70y$

El volumen de la mezcla debe ser el total de los dos volúmenes que el vinatero está combinando, por lo que

$$x + y = 1000$$

Asimismo, la cantidad de alcohol en la mezcla debe ser el total del alcohol con el que contribuye el vino y la solución de alcohol, es decir,

$$0.10x + 0.70y = (0.16)1000$$

$$0.10x + 0.70y = 160 \qquad \text{Simplificación}$$

$$x + 7y = 1600 \qquad \text{Multiplicación por 2 para eliminar decimales}$$

Por lo tanto, tenemos el sistema

Plantee un sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1000 & \text{Ecuación 1} \\ x + 7y = 1600 & \text{Ecuación 2} \end{cases}$$

Cuando se efectúa la diferencia entre la primera ecuación y la segunda se elimina la variable x, y tenemos entonces

Resuelva el sistema

$$6y = 600 \qquad \text{Resta de la ecuación 1 de la ecuación 2}$$

$$y = 100 \qquad \text{Determinación de } y$$

Luego se sustituye $y = 100$ en la primera ecuación y despejamos x:

$$x + 100 = 1000 \qquad \text{Sustitución de } y = 100$$

$$x = 900 \qquad \text{Determinación de } x$$

El vinatero utiliza 900 L de vino y 100 L de solución de alcohol. ■

9.2 Ejercicios

1–6 ■ Grafique a mano o con ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora cada uno de los sistemas. Mediante la gráfica determine si el sistema tiene una solución, no tiene solución o tiene una cantidad infinita de soluciones. Si hay exactamente una solución, use la gráfica para determinarla.

1. $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ -x + \frac{3}{2}y = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ -3x - 9y = 18 \end{cases}$

5. $\begin{cases} -x + \frac{1}{2}y = -5 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 12x + 15y = -18 \\ 2x + \frac{5}{2}y = -3 \end{cases}$

7–34 ■ Resuelva el sistema o demuestre que no tiene solución. Si el sistema tiene una cantidad infinita de soluciones, exprésela en la forma de par ordenado como en el ejemplo 3.

7. $\begin{cases} x + y = 4 \\ -x + y = 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4x + 3y = 9 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 8 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$

13. $\begin{cases} -x + y = 2 \\ 4x - 3y = -3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x - 3y = 28 \\ 9x - y = -6 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 5x - y = 2 \end{cases}$

16. $\begin{cases} -4x + 12y = 0 \\ 12x + 4y = 160 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 2 \\ \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}y = 8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 0.2x - 0.2y = -1.8 \\ -0.3x + 0.5y = 3.3 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -6x + 4y = 16 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 4x + 2y = 16 \\ x - 5y = 70 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x + 4y = 8 \\ 3x + 12y = 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} -3x + 5y = 2 \\ 9x - 15y = 6 \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x - 6y = 10 \\ -3x + 9y = -15 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x - 3y = -8 \\ 14x - 21y = 3 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 6x + 4y = 12 \\ 9x + 6y = 18 \end{cases}$

26. $\begin{cases} 25x - 75y = 100 \\ -10x + 30y = -40 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 8s - 3t = -3 \\ 5s - 2t = -1 \end{cases}$

28. $\begin{cases} u - 30v = -5 \\ -3u + 80v = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y = 3 \\ \frac{5}{3}x + 2y = 10 \end{cases}$

30. $\begin{cases} \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}y = \frac{1}{2} \\ 2x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

31. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 14 \\ 12x - 5y = 10 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 26x - 10y = -4 \\ -0.6x + 1.2y = 3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ -8x + 6y = 10 \end{cases}$

34. $\begin{cases} -\frac{1}{10}x + \frac{1}{2}y = 4 \\ 2x - 10y = -80 \end{cases}$

35–38 ■ Utilice una calculadora o una computadora para graficar ambas rectas en el mismo rectángulo de visión. (Tenga en cuenta que es necesario expresar y en función de x antes de graficar, si utiliza una calculadora para graficar.) Resuelva el sistema con dos cifras decimales o efectúe un acercamiento y utilice `TRACE` o `Intersect`.

35. $\begin{cases} 0.21x + 3.17y = 9.51 \\ 2.35x - 1.17y = 5.89 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 18.72x - 14.91y = 12.33 \\ 6.21x - 12.92y = 17.82 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2371x - 6552y = 13\,591 \\ 9815x + 992y = 618\,555 \end{cases}$

38. $\begin{cases} -435x + 912y = 0 \\ 132x + 455y = 994 \end{cases}$

39–42 ■ Determine x y y en función de a y b.

39. $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + ay = 1 \end{cases} \quad (a \neq 1)$

40. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \quad (a \neq b)$

41. $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases} \quad (a^2 - b^2 \neq 0)$

42. $\begin{cases} ax + by = 0 \\ a^2x + b^2y = 1 \end{cases} \quad (a \neq 0, b \neq 0, a \neq b)$

Aplicaciones

43. Problema de números Determine dos números cuya suma sea 34 y cuya diferencia sea 10.

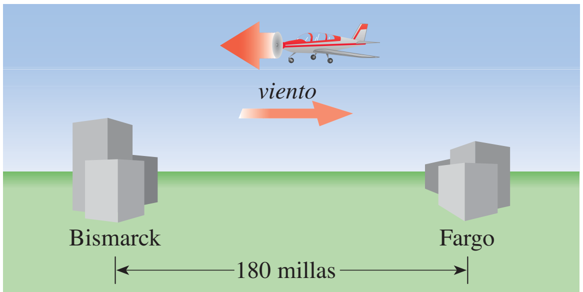
44. Problema de números La suma de dos números es el doble de su diferencia. El número más grande es 6 más grande que el doble del menor. Calcule los números.

45. Valor de las monedas Un hombre tiene 14 monedas en su bolsa, todas son de 10 centavos y de 25 centavos. Si el valor total de su cambio es 2.75 dólares, ¿cuántas monedas de 10 centavos y cuántas de 25 centavos tiene?

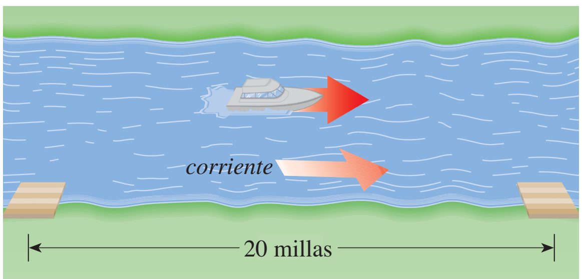
46. Tarifas de entrada La entrada a un parque de diversiones es de 1.50 dólares para niños y de 4 dólares para los adultos. Un cierto día acudieron al parque 2200 personas y lo que se

reunió por las tarifas de la entrada fue 5050 dólares. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron?

47. Velocidad de un aeroplano Un hombre vuela en un pequeño aeroplano desde Fargo hasta Bismarck, en Dakota del Norte, que representa una distancia de 180 millas. Como vuela con viento en contra, el viaje dura 2 horas. De regreso, el viento sigue soplando a la misma velocidad, de modo que el viaje de retorno dura sólo 1 h 12 min. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano con el viento en calma y cuál es la velocidad del viento?



48. Velocidad de un bote Un bote que va por un río viaja durante una hora aguas abajo entre dos puntos, que están separados 20 millas. El viaje de regreso, contra la corriente, dura 2 h 30 min. ¿Cuál es la velocidad de la embarcación y cuál es la velocidad de la corriente en el río?



49. Ejercicio de *aeróbicos* Una mujer se mantiene en forma viajando en bicicleta y corriendo todos los días. El lunes dedicó media hora a cada actividad, y recorrió un total de $12\frac{1}{2}$ millas. El martes, corrió durante 12 min y anduvo en bicicleta 45 min, y recorrió un total de 16 millas. Si suponemos que sus velocidades al correr y al andar en bicicleta no cambian día con día, calcule dichas velocidades.

50. Problema de mezclas Un biólogo tiene dos soluciones de salmuera. Una contiene 5% de sal y la otra, 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe mezclar para obtener 1 L de una solución que contenga 14% de sal.

51. Nutrición Una investigadora ejecuta un experimento para probar una hipótesis que relaciona los nutrientes niacina y retinol. Todos los días alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta precisa de 32 unidades de niacina y 22 000 unidades de retinol. Utiliza dos tipos de alimentos comerciales. El alimento A contiene 0.12 unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo. El alimento B contiene 0.20 unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento debe administrar a su grupo de ratas todos los días?

52. Mezcla de café Un cliente de una cafetería compra una mezcla de dos tipos de café: uno proveniente de Kenia que cuesta 3.50 dólares cada libra y uno de Sri Lanka, que cuesta 5.60 dólares la libra. Compra tres libras de la mezcla, que le cuesta 11.55 dólares. ¿Cuántas libras de cada clase de café van en la mezcla?

53. Problema de mezclas Un químico tiene dos grandes recipientes de solución de ácido sulfúrico, con diferentes concentraciones de ácido en cada contenedor. Al mezclar 300 mL de la primera solución y 600 mL de la segunda obtiene una mezcla que es ácido al 15%, en tanto que 100 mL de la primera mezclada con 500 mL de la segunda da una mezcla de ácido al $12\frac{1}{2}\%$. ¿Cuáles son las concentraciones de ácido sulfúrico en los recipientes originales?

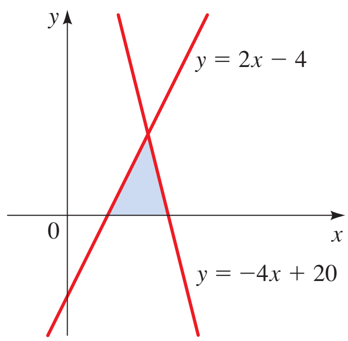
54. Inversiones Una mujer invierte un total de 20 000 dólares en dos cuentas, una da 5% y la otra 8% de interés simple al año. Su interés anual es 1180 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

55. Inversiones Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas. En una recibe 6% y en la otra 10% de interés simple por año. Pone el doble en la cuenta de menor rendimiento por ser la de menor riesgo. Su interés anual es 3520 dólares. ¿Cuánto invirtió a cada tasa?

56. Distancia, velocidad y tiempo John y Mary salen de su casa al mismo tiempo, pero toman direcciones opuestas. John guía su automóvil a 40 millas/hora. El recorrido de Mary toma 15 min más que el de John. ¿Cuánto tiempo maneja cada uno de ellos su automóvil?

57. Problema de números La suma de los números de un número de dos dígitos es 7. Cuando los dígitos se invierten, el número aumenta en 27. Determinar el número

58. Área de un triángulo Calcule el área de un triángulo que se encuentra en el primer cuadrante y cuya base queda sobre el eje de las x; además, está limitado por las rectas $y = 2x - 4$ y $y = -4x + 20$.



Descubrimiento • Debate

59. La recta de mínimos cuadrados La recta de *mínimos cuadrados* o *recta de regresión* es la recta que mejor se ajusta a un conjunto de puntos en el plano. Ya estudiamos esta recta en *Enfoque en el modelado* (véase la página 240). Por medio del cálculo infinitesimal se puede demostrar que la recta que mejor se ajusta a los n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ es la recta

$y = ax + b$, donde los coeficientes a y b cumplen con el siguiente par de ecuaciones lineales. [La notación $\sum_{k=1}^{n} x_k$ significa la suma de todas las x. Véase la sección 11.1 en donde hay una descripción completa de la notación (Σ).]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)a + nb = \sum_{k=1}^{n} y_k$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

Por medio de estas ecuaciones calcule la recta de mínimos cuadrados para los puntos siguientes.

$$(1, 3),\quad (2, 5),\quad (3, 6),\quad (5, 6),\quad (7, 9)$$

Localice los puntos y trace la recta para confirmar que ésta se ajusta a los puntos. Si su calculadora determina rectas de regresión, verifique si genera la misma recta que las fórmulas.

9.3 Sistemas de ecuaciones lineales con varias variables

Una **ecuación lineal con *n* variables** es una ecuación que se puede expresar en la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = c$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y c números reales, y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son las variables. Si tenemos sólo tres o cuatro variables, usamos por lo general x, y, z y w en lugar de x_1, x_2, x_3 y x_4. Dichas ecuaciones reciben el nombre de *lineales* porque si tenemos sólo dos variables la ecuación es $a_1x + a_2y = c$, que es la ecuación de una recta. En seguida hay algunos ejemplos de ecuaciones con tres variables que ilustran la diferencia entre ecuaciones lineales y no lineales.

Ecuaciones lineales	**Ecuaciones no lineales**	
$6x_1 - 3x_2 + \sqrt{5}x_3 = 10$	$x^2 + 3y - \sqrt{z} = 5$	No es lineal porque una variable está al cuadrado y hay una raíz cuadrada de otra.
$x + y + z = 2w - \frac{1}{2}$	$x_1x_2 + 6x_3 = -6$	No es lineal porque contiene un producto de variables.

En esta sección estudiamos sistemas de ecuaciones lineales con tres o más variables.

Resolución de un sistema lineal

Los dos ejemplos que siguen ilustran sistemas de ecuaciones lineales con tres variables. El segundo sistema es de **forma triangular**; es decir, la variable x no aparece en la segunda ecuación y las variables x y y no están en la tercera ecuación.

Un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ -x + 3y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 10 \end{cases}$$

Un sistema de forma triangular

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ z = 3 \end{cases}$$

Es fácil resolver un sistema que está en la forma triangular usando la sustitución. Entonces, el objetivo de esta sección es empezar con un sistema de ecuaciones lineales

Pierre de Fermat (1601-1665) fue un abogado francés que se interesó en las matemáticas a la edad de 30 años. A causa de sus ocupaciones, Fermat tenía poco tiempo para desarrollar demostraciones completas de sus descubrimientos por lo que, con frecuencia, las escribía en el margen de cualquier libro que estuviera leyendo en ese momento. Después de su muerte, su ejemplar de la *Aritmética* de Diofanto (véase la página 20) contenía un comentario particularmente provocador. Donde Diofanto analiza las soluciones de $x^2 + y^2 = z^2$ (por ejemplo, $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$), Fermat establece en el margen que para $n \geq 3$ no hay soluciones con números naturales para la ecuación $x^n + y^n = z^n$. En otras palabras, es imposible que un cubo sea igual a la suma de dos cubos, que una cuarta potencia sea igual a la suma de dos cuartas potencias, y así sucesivamente. Fermat escribe "He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa para esto, pero el margen es demasiado pequeño y no cabe". Todos los otros comentarios de los márgenes en el ejemplar de Fermat de la *Aritmética* han sido demostrados, pero éste en particular sigue sin ser demostrado, y se le ha llegado a conocer como el "Último teorema de Fermat".

En 1994, Andrew Wiles de Princeton University anunció la demostración del Último teorema de Fermat, algo asombroso 350 años después de que fue supuesto. Su demostración es uno de los resultados matemáticos dados a conocer más ampliamente en las publicaciones populares.

y cambiarlo en un sistema con forma triangular que tiene las mismas soluciones que el sistema original. Para iniciar se muestra cómo usar la sustitución para resolver un sistema que ya está en la forma triangular.

Ejemplo 1 Resolución de un sistema triangular usando sustitución

Resuelva el sistema usando la sustitución:

$$\begin{cases} x - 2y - z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ y + 2z = 5 & \text{Ecuación 2} \\ z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución De acuerdo con la última ecuación sabemos que $z = 3$. Sustituimos este valor en la segunda ecuación y determinamos y.

$$y + 2(3) = 5 \qquad \text{Sustitución de } z = 3 \text{ en la ecuación 2}$$

$$y = -1 \qquad \text{Determinación de } y$$

Luego se sustituye $y = -1$ y $z = 3$ en la primera ecuación y determinamos x.

$$x - 2(-1) - (3) = 1 \qquad \text{Sustitución de } y = -1 \text{ y } z = 3 \text{ en la ecuación 1}$$

$$x = 2 \qquad \text{Determinación de } x$$

La solución del sistema es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$. También se puede escribir la solución como una terna ordenada $(2, -1, 3)$. ■

Para pasar de un sistema de ecuaciones lineales a un **sistema equivalente**, es decir, a un sistema con las mismas soluciones que el sistema original, aplicamos el método de eliminación. Esto quiere decir que usamos las operaciones siguientes.

Operaciones que generan un sistema equivalente

1. Sume un múltiplo no cero de una de las ecuaciones a la otra.
2. Multiplique una ecuación por una constante no cero.
3. Intercambie las posiciones de dos ecuaciones.

Para resolver un sistema lineal, se ejecutan estas operaciones para modificar el sistema en un sistema triangular equivalente. Luego se aplica la sustitución como en el ejemplo 1. Este proceso se denomina **eliminación de Gauss**.

Ejemplo 2 Resolución de un sistema de tres ecuaciones con tres variables

Resuelva el sistema aplicando la eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución Es necesario cambiar este sistema a uno triangular, de modo que empezamos eliminando el término en x de la segunda ecuación.

$$\begin{array}{rl} x + 2y - z = 13 & \text{Ecuación 2} \\ x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ \hline 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} + (-1) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \end{array}$$

Esto proporciona un sistema equivalente que es un paso más cerca de la forma triangular.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 4y - 4z = 12 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 2y - 5z = 3 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora se elimina el término en x de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{r} 3x + 2y - 5z = 3 \\ -3x + 6y - 9z = -3 \\ \hline 8y - 14z = 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y - 4z = 12 \\ 8y - 14z = 0 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

Luego se elimina el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{array}{r} 8y - 14z = 0 \\ -8y + 8z = -24 \\ \hline -6z = -24 \end{array}$$

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 4y - 4z = 12 \\ -6z = -24 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

El sistema es ya triangular, pero será más sencillo trabajar con él si dividimos las ecuaciones segunda y tercera entre los factores comunes de cada término.

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 3 & \frac{1}{4} \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 2} \\ z = 4 & -\frac{1}{6} \times \text{ecuación 3} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora se sustituye para resolver el sistema. A partir de la tercera ecuación obtenemos $z = 4$. Se sustituye luego este valor en la segunda ecuación y se determina y.

$$\begin{array}{rl} y - (4) = 3 & \text{Sustitución de } z = 4 \text{ en la ecuación 2} \\ y = 7 & \text{Determinación de } y \end{array}$$

Luego se sustituye $y = 7$ y $z = 4$ en la primera ecuación y se determina x.

$$\begin{array}{rl} x - 2(7) + 3(4) = 1 & \text{Se sustituye } y = 7 \text{ y } z = 4 \text{ en la ecuación 1} \\ x = 3 & \text{Se determina } x \end{array}$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$, que se puede representar como la terna ordenada (3, 7, 4). ■

Compruebe su respuesta

Es necesario verificar que la respuesta $x = 3$, $y = 7$, $z = 4$, cumple *las tres ecuaciones*:

$$\begin{array}{r} (3) - 2(7) + 3(4) = 1 \\ (3) + 2(7) - (4) = 13 \\ 3(3) + 2(7) - 5(4) = 3 \end{array} \quad ✓$$

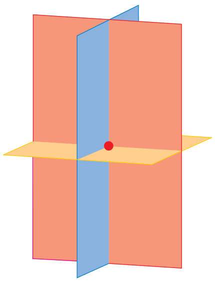
Número de soluciones de un sistema lineal

Al igual que en el caso de dos variables, un sistema de ecuaciones con varias variables puede tener una solución, ninguna solución, o bien, una cantidad infinita de soluciones. La interpretación gráfica de las soluciones de un sistema lineal es análoga a la de los sistemas de ecuaciones con dos variables (véase nota al margen).

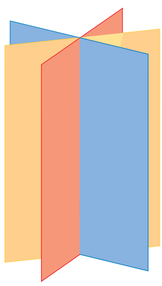
Intersección de tres planos

Cuando estudie cálculo o álgebra lineal, aprenderá que la gráfica de una ecuación lineal con tres variables es un *plano* en el sistema de coordenadas tridimensional. Por lo que toca a un sistema de tres ecuaciones con tres variables, surgen las situaciones siguientes:

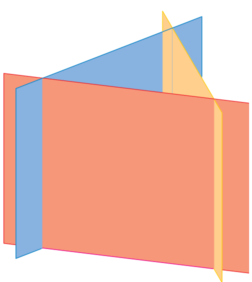
1. Los tres planos se cortan en un solo punto.
El sistema tiene una solución única.



2. Los tres planos se cortan en más de un punto.
El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.



3. Los tres planos carecen de un punto en común.
El sistema no tiene solución.



Número de soluciones de un sistema lineal

Para el caso de un sistema de ecuaciones lineales, exactamente uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. El sistema tiene exactamente una solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene una cantidad infinita de soluciones.

Se dice que un sistema que no tiene solución es **inconsistente** y que un sistema con una cantidad infinita de soluciones es **dependiente**. Como se puede observar en el ejemplo siguiente, un sistema lineal no tiene solución si obtenemos una *ecuación falsa* después de aplicar la eliminación de Gauss al sistema.

Ejemplo 3 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema siguiente.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + 2y - z = 6 & \text{Ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución Para poner este sistema en forma triangular, se empieza por eliminar los términos en x de la segunda ecuación y de la tercera.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 & \text{Ecuación 2} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \\ 3x + 4y - 3z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ -2y + 3z = 2 & \text{Ecuación 3} + (-3) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

Ahora se elimina el término en y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -2y + 3z = 4 \\ 0 = -2 & \text{Ecuación 3} + (-1) \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

El sistema está ahora en forma triangular, pero la tercera ecuación establece que $0 = -2$, lo cual es falso. No importa qué valores asignemos a x, y y z, la tercera ecuación nunca será verdadera. Esto quiere decir que el sistema *no tiene solución.* ■

Ejemplo 4 Un sistema con una cantidad infinita de soluciones

Resuelva el sistema siguiente

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 & \text{Ecuación 1} \\ 2x + y + 4z = 2 & \text{Ecuación 2} \\ 2x + 4y - 2z = 8 & \text{Ecuación 3} \end{cases}$$

Solución Para poner el sistema en forma triangular, se tiene que empezar por eliminar los términos en x de la segunda ecuación y de la tercera.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 3y - 6z = 6 & \text{Ecuación 2} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{nueva ecuación 2} \\ 2x + 4y - 2z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 3y - 6z = 6 \\ 6y - 12z = 12 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 1} = \text{ecuación 3} \end{cases}$$

En seguida eliminamos los términos que tienen y de la tercera ecuación.

$$\begin{cases} x - y + 5z = -2 \\ 3y - 6z = 6 \\ 0 = 0 & \text{Ecuación 3} + (-2) \times \text{ecuación 2} = \text{nueva ecuación 3} \end{cases}$$

La nueva tercera ecuación es verdadera, pero no proporciona nueva información así que se puede eliminar del sistema. Sólo quedan dos ecuaciones. Se pueden utilizar para determinar x y y en función de z, pero z puede tomar cualquier valor, de modo que hay una cantidad infinita de soluciones.

Para determinar la solución completa del sistema se empieza por despejar y y dejarla en función de z, usando la nueva segunda ecuación.

$$3y - 6z = 6 \qquad \text{Ecuación 2}$$

$$y - 2z = 2 \qquad \text{Multiplicación por } \tfrac{1}{3}$$

$$y = 2z + 2 \qquad \text{Despeje de } y$$

Luego se despeja x y se deja en función de z, usando la primera ecuación.

$$x - (2z + 2) + 5z = -2 \qquad \text{Sustitución de } y = 2z + 2 \text{ en la ecuación 1}$$

$$x + 3z - 2 = -2 \qquad \text{Simplificación}$$

$$x = -3z \qquad \text{Determinación de } x$$

Para tener la solución completa, t representará cualquier número real. La solución es

$$x = -3t$$

$$y = 2t + 2$$

$$z = t$$

También se puede expresar como una terna ordenada $(-3t, 2t + 2, t)$. ■

Matemáticas en el mundo moderno

Cortesía de NASA

Sistema de localización global

En un día frío y nublado de 1707, una flota naval británica navegaba rápidamente rumbo a casa. Los navegantes no lo sabían, pero la flota estaba sólo a unos pocos metros de las playas rocosas de Inglaterra. En el desastre que siguió, la flota quedó destruida por completo. Esta tragedia se podría haber evitado si los navegantes hubieran conocido su ubicación. En aquella época, la latitud se determinaba por medio de la posición de la Estrella Polar, lo cual sólo se podía calcular en la noche y con buen clima, y la longitud mediante la posición del Sol con respecto a dónde estaría en Inglaterra *al mismo tiempo*. Entonces, la navegación requería un método exacto para saber el tiempo en los barcos. La invención del reloj de resorte dio después la solución.

Desde entonces, se han ideado métodos distintos para determinar la posición y todo se apoya en las matemáticas (véase LORAN, página 768). El último método, conocido como Sistema de Localización Mundial (*Global Positioning System*, GPS), se apoya en la triangulación. En este sistema, 24 satélites importantes están ubicados estratégicamente por arriba de la Tierra. Un medidor GPS, que cabe en una

(*continúa*)

En la solución del ejemplo 4, la variable t se denomina **parámetro.** Para obtener una solución específica, damos un valor específico al parámetro t. Por ejemplo, si hacemos $t = 2$, tenemos

$$x = -3(2) = -6$$
$$y = 2(2) + 2 = 6$$
$$z = 2$$

Por lo tanto, $(-6, 6, 2)$ es una solución del sistema. En seguida se proporcionan otras soluciones del sistema obtenidas al sustituir otros valores del parámetro t.

Parámetro t	Solución $(-3t, 2t + 2, t)$
-1	$(3, 0, -1)$
0	$(0, 2, 0)$
3	$(-9, 8, 3)$
10	$(-30, 22, 10)$

Debemos comprobar que estos puntos satisfacen las ecuaciones originales. Hay una cantidad infinita de elecciones para el parámetro t, de modo que el sistema tiene una infinidad de soluciones.

Modelado usando sistemas lineales

Los sistemas lineales se usan para modelar situaciones en las que hay varias cantidades que varían. En el siguiente ejemplo consideramos una aplicación de los sistemas lineales a las finanzas.

Ejemplo 5 Modelado de un problema financiero usando un sistema lineal

John recibe una herencia de 50 000 dólares. Su asesor financiero le aconseja invertir en tres fondos mutualistas: un fondo de mercado de valores, un fondo de acciones selectas y un fondo de acciones de alta tecnología. El asesor financiero estima que el fondo del mercado de valores dará 5% el año próximo, el fondo de las acciones selectas dará 9% y el fondo de acciones de alta tecnología generará 16%. John desea un rendimiento total en el primer año de 4000 dólares. Para evitar un riesgo excesivo, decide invertir tres veces más en el fondo del mercado de valores que en el fondo de acciones de alta tecnología. ¿Cuánto debe invertir en cada fondo?

Solución Sean

x = cantidad invertida en el fondo del mercado de valores

y = cantidad invertida en el fondo de las acciones selectas

z = cantidad invertida en el fondo de las acciones de alta tecnología

Ahora hay que transformar cada hecho dado en el problema en una ecuación.

$$x + y + z = 50\,000$$ La cantidad total invertida es 50 000 dólares

$$0.05x + 0.09y + 0.16z = 4000$$ El rendimiento total de las inversiones es de 4000 dólares

$$x = 3z$$ La cantidad en el mercado de valores es 3 × la cantidad de acciones de alta tecnología

mano, determina la distancia desde un satélite por medio del tiempo de recorrido de las señales de radio emitidas desde el satélite. Luego de determinar la distancia hacia tres satélites diferentes, el instrumento nos indica que estamos en el punto de intersección de tres distintas esferas. Esto determina específicamente nuestra ubicación (véase el ejercicio 53, página 643).

Al multiplicar la segunda ecuación por 100 y volver a escribir la tercera ecuación tenemos el sistema siguiente, el cual resolvemos aplicando la eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ 5x + 9y + 16z = 400\,000 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$ 100 × ecuación 2; Resta de 3z

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ 4y + 11z = 150\,000 \\ -y - 4z = -50\,000 \end{cases}$$ Ecuación 2 + (−5) × ecuación 1 = nueva ecuación 2; Ecuación 3 + (−1) × ecuación 1 = nueva ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ -5z = -50\,000 \\ -y - 4z = -50\,000 \end{cases}$$ Ecuación 2 + 4 × ecuación 3 = nueva ecuación 2

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ z = 10\,000 \\ y + 4z = 50\,000 \end{cases}$$ $(-\frac{1}{5})$ × ecuación 2; (−1) × ecuación 3

$$\begin{cases} x + y + z = 50\,000 \\ y + 4z = 50\,000 \\ z = 10\,000 \end{cases}$$ Intercambio de ecuaciones 2 y 3

Ahora que el sistema está en la forma triangular, se efectúa la sustitución para determinar que $x = 30\,000$, $y = 10\,000$ y $z = 10\,000$. Esto significa que John debe invertir

30 000 dólares en el fondo del mercado de valores

10 000 dólares en el fondo de las acciones selectas

10 000 dólares en el fondo de acciones de alta tecnología ■

9.3 Ejercicios

1–4 ■ Establezca si la ecuación o el sistema de ecuaciones es lineal.

1. $6x - \sqrt{3}y + \frac{1}{2}z = 0$

2. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

3. $\begin{cases} xy - 3y + z = 5 \\ x - y^2 + 5z = 0 \\ 2x + yz = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2x + 5y = 2 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$

5–10 ■ Efectúe la sustitución para resolver el sistema triangular.

5. $\begin{cases} x - 2y + 4z = 3 \\ y + 2z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y - 3z = 8 \\ y - 3z = 5 \\ z = -1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ -y + 3z = 9 \\ 2z = 6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 10 \\ 2y - z = 2 \\ 3z = 12 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y + 6z = 5 \\ y + 4z = 0 \\ -2z = 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x + 3z = 10 \\ 2y - z = -6 \\ \frac{1}{2}z = 4 \end{cases}$

11–14 ■ Efectúe una operación en el sistema que permita eliminar la variable indicada. Escriba el sistema equivalente nuevo.

11. $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ Elimine el término en x de la segunda ecuación.

12. $\begin{cases} x + y - 3z = 3 \\ -2x + 3y + z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ Elimine el término en x de la segunda ecuación.

13. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ -4x + 5y + z = 10 \end{cases}$ Elimine el término en x de la tercera ecuación.

14. $\begin{cases} x - 4y + z = 3 \\ y - 3z = 10 \\ 3y - 8z = 24 \end{cases}$ Elimine el término en y de la tercera ecuación.

15–32 ■ Calcule la solución completa del sistema lineal o demuestre que es inconsistente.

15. $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + 3y + 3z = 10 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 3 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - 4z = 1 \\ 2x - y - 6z = 4 \\ 2x + 3y - 2z = 8 \end{cases}$

18. $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 3x + y + 5z = 8 \\ 2x - y - 2z = -7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 2 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + y - z = -8 \\ -x + y + z = 3 \\ -2x + 4z = 18 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y - 2z = 0 \\ 2x + 3y = 2 \\ -x - 2y + z = -1 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2y + z = 3 \\ 5x + 4y + 3z = -1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \\ 3x + 6y - 3z = 4 \end{cases}$

24. $\begin{cases} -x + 2y + 5z = 4 \\ x - 2z = 0 \\ 4x - 2y - 11z = 2 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 5 \\ 2x + y - z = 5 \\ 4x - 3y - 7z = 5 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y - 3z = -3 \\ 2x + 3y - 4z = -3 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 2x - 5y + 6z = 7 \\ 2x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 2x + 4z = 4 \\ 4x + 6y = 4 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 2x + 4y - z = 3 \\ x + 2y + 4z = 6 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + z + 2w = 6 \\ y - 2z = -3 \\ x + 2y - z = -2 \\ 2x + y + 3z - 2w = 0 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 2 \end{cases}$

Aplicaciones

33–34 ■ Finanzas Una inversionista tiene 100 000 dólares para invertir en tres tipos de bonos: corto plazo, plazo intermedio y largo plazo. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de modo que se cumplan las condiciones dadas?

33. Los bonos de corto plazo dan un rendimiento de 4% anual, los bonos de plazo intermedio 5%, y los de largo plazo, 6%. La inversionista desea tener un ingreso anual total de 5.1%, con cantidades iguales invertidas en bonos de corto plazo y de plazo intermedio.

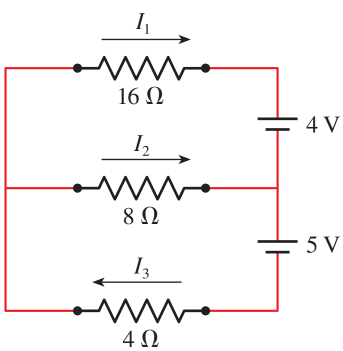
34. Los bonos de corto plazo dan un rendimiento de 4% al año, los bonos de plazo intermedio dan 6% y los de largo plazo dan 8%. La inversionista desea tener una utilidad anual total de 6700 dólares de su inversión, en la que invertiría cantidades iguales en los bonos de plazo intermedio y de largo plazo.

35. Nutrición Una bióloga está efectuando un experimento sobre los efectos de varias combinaciones de vitaminas. Quiere alimentar a cada uno de sus conejos de laboratorio con una dieta que contenga exactamente 9 mg de niacina, 14 mg de tiamina y 32 mg de riboflavina. Tiene tres tipos distintos de marcas comerciales de alimento; su contenido vitamínico por onza se proporciona en la tabla. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento deben comer todos los días los conejos para cumplir con los requisitos del experimento?

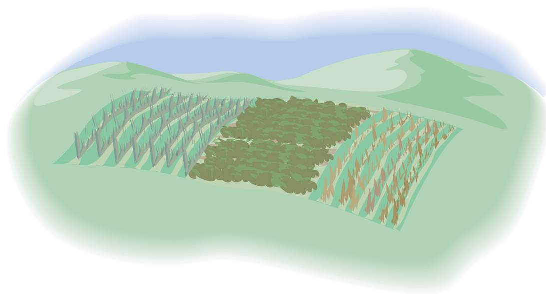
	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Niacina (mg)	2	3	1
Tiamina (mg)	3	1	3
Riboflavina (mg)	8	5	7

36. Electricidad Por medio de las leyes de Kirchhoff se puede demostrar que las corrientes I_1, I_2 e I_3 que pasan por las tres ramas del circuito de la figura cumplen con el sistema lineal dado. Resuelva el sistema para determinar I_1, I_2 e I_3.

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 16I_1 - 8I_2 = 4 \\ 8I_2 + 4I_3 = 5 \end{cases}$$



37. Agricultura Un granjero tiene 1200 acres de tierra en los que cultiva maíz, trigo y soya. Le cuesta 45 dólares por cada acre cultivar maíz, 60 dólares cultivar trigo y 50 dólares si quiere soya. Debido a la demanda del mercado cultivará el doble de acres de trigo que de maíz. Ya destinó 63 750 dólares para los costos del cultivo de sus cereales. ¿Cuántos acres de cada cereal debe plantar?



38. Opciones de inversión Un inversionista posee tres grupos de acciones: A, B y C. Los precios de las acciones al cierre en tres días comerciales consecutivos se proporcionan en la tabla.

	Acciones A	Acciones B	Acciones C
Lunes	\$10	\$25	\$29
Martes	\$12	\$20	\$32
Miércoles	\$16	\$15	\$32

A pesar de la volatilidad en los precios de las acciones, el valor total de las acciones del inversionista permanece sin cambios en 74 000 dólares al final de cada uno de estos tres días. ¿Cuánto posee de cada acción el inversionista?

Descubrimiento • Debate

39. ¿Puede un sistema lineal tener exactamente dos soluciones?

a) Suponga que (x_0, y_0, z_0) y (x_1, y_1, z_1) son soluciones del sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Demuestre que $\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, \frac{y_0 + y_1}{2}, \frac{z_0 + z_1}{2}\right)$ es también una solución.

b) A partir del resultado del inciso a) demuestre que si el sistema tiene dos soluciones distintas, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Mejor ajuste y ajuste exacto

Dados varios puntos en el plano, podemos determinar la recta que mejor se ajusta a ellos (véase *Enfoque en el modelado*, página 239). Claro, no todos los puntos quedarán en la recta. Asimismo, podemos determinar el polinomio cuadrático que mejor se ajusta a los puntos. Una vez más, no todos los puntos quedarán en la gráfica del polinomio.

No obstante, si tenemos sólo dos puntos, entonces podemos determinar una recta que ajuste *exacto*, es decir, una recta que realmente pase por ambos puntos. De manera similar, dados tres puntos, no todos en la misma recta, podemos determinar el polinomio cuadrático de ajuste *exacto*. Por ejemplo, suponga que tenemos los tres puntos siguientes:

$$(-1, 6), \quad (1, 2), \quad (2, 3)$$

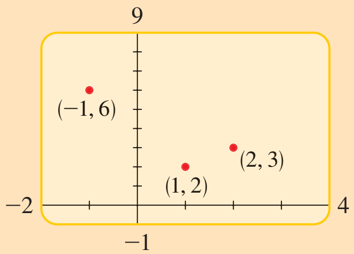


Figura 1

A partir de la figura 1 vemos que los puntos no quedan en una recta. Encontremos el polinomio cuadrático que se ajusta exactamente a estos puntos. El polinomio debe tener la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

Es necesario determinar a, b y c de modo que la gráfica del polinomio resultante contenga los puntos dados. Al sustituir los puntos dados en la ecuación llegamos a lo siguiente.

Punto	Sustitución	Ecuación
$(-1, 6)$	$x = -1, \quad y = 6$	$6 = a(-1)^2 + b(-1) + c$
$(1, 2)$	$x = 1, \quad y = 2$	$2 = a(1)^2 + b(1) + c$
$(2, 3)$	$x = 2, \quad y = 3$	$3 = a(2)^2 + b(2) + c$

Estas tres ecuaciones se simplifican en el sistema siguiente

$$\begin{cases} a - b + c = 6 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases}$$

Al aplicar la eliminación de Gauss obtenemos la solución $a = 1$, $b = -2$ y $c = 3$. Entonces, el polinomio requerido es

$$y = x^2 - 2x + 3$$

De acuerdo con la figura 2 vemos que la gráfica del polinomio pasa por los puntos dados.

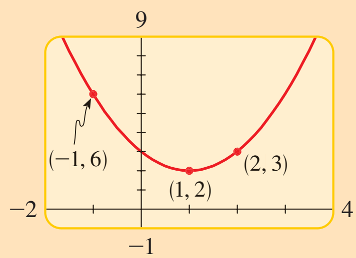
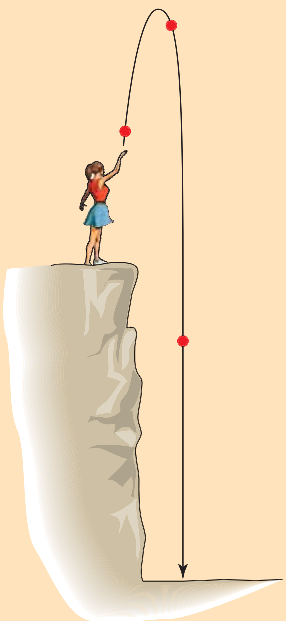


Figura 2



1. Determine el polinomio cuadrático $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos dados.

a) $(-2, 3)$, $(-1, 1)$, $(1, 9)$
b) $(-1, -3)$, $(2, 0)$, $(3, -3)$

2. Determinar el polinomio cúbico $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ cuya gráfica pasa por los puntos dados.

a) $(-1, -4)$, $(1, 2)$, $(2, 11)$, $(3, 32)$
b) $(-2, 10)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$, $(3, 45)$

3. Se lanza hacia arriba una piedra con velocidad v desde una altura h. Su elevación d por arriba del suelo en el tiempo t está representada por

$$d = at^2 + vt + h$$

La elevación se mide en tres tiempos diferentes como se muestra a continuación.

Tiempo (s)	1.0	2.0	6.0
Elevación (pies)	144	192	64

a) Determine las constantes a, v y h.
b) Determine la elevación de la piedra cuando $t = 4$ s.

4. a) Encuentre la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ cuya gráfica pasa por los puntos dados. Esta es la curva cuadrática que se ajusta *exactamente*. Grafique los puntos y la curva cuadrática que encontró.

$$(-2, 10), \quad (1, -5), \quad (2, -6), \quad (4, -2)$$

b) Ahora use el comando `QuadReg` de su calculadora para determinar la curva cuadrática que *mejor* se ajusta a los puntos del inciso a). ¿Cómo es en comparación con la función que encontró en el inciso a)?

c) Muestre que ninguna función cuadrática pasa por los puntos

$$(-2, 11), \quad (1, -6), \quad (2, -5), \quad (4, -1)$$

d) Use el comando `QuadReg` de su calculadora para determinar la curva cuadrática que mejor se ajusta a los puntos del inciso b). Grafique los puntos y la curva cuadrática que halló.

e) Explique qué tanto difiere la curva de ajuste exacto de la curva de mejor ajuste.

9.4 Sistemas de ecuaciones lineales: matrices

En esta sección se expresa un sistema lineal como un acomodo rectangular de números, que recibe el nombre de matriz. Las matrices* representan una herramienta eficaz para resolver sistemas lineales.

Matrices

Empezamos por definir los diversos elementos que conforman una matriz.

Definición de matriz

Una **matriz** $m \times n$ es un acomodo rectangular de números con m **renglones** y n **columnas**.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \text{ columnas}} \left.\begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \\ \leftarrow \end{matrix}\right\} m \text{ renglones}$$

Decimos que la matriz tiene **dimensiones** $m \times n$. Los números a_{ij} son los **elementos** de la matriz. Los subíndices del elemento a_{ij} señalan que está en el i-ésimo renglón y en la j-ésima columna.

A continuación se presentan algunos ejemplos de matrices.

Matriz	Dimensión	
$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	2×3	2 renglones por 3 columnas
$\begin{bmatrix} 6 & -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	1×4	1 renglón por 4 columnas

La matriz aumentada de un sistema lineal

Podemos representar un sistema de ecuaciones lineales como una matriz, que se denomina **matriz aumentada** del sistema, escribiendo sólo los coeficientes y constantes que aparecen en las ecuaciones. En seguida presentamos un ejemplo.

Sistema lineal	Matriz aumentada
$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ x + 3y - z = 0 \\ -x + 4z = 11 \end{cases}$	$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

* El plural de *matriz* es *matrices*.

Observe que una variable que falte en una ecuación corresponde a un elemento 0 en la matriz aumentada.

Ejemplo 1 Determinación de la matriz aumentada de un sistema lineal

Escriba la matriz aumentada del sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + z = 5 \end{cases}$$

Solución Primero se escribe el sistema lineal con las variables acomodadas en columnas.

$$\begin{cases} 6x - 2y - z = 4 \\ x + 3z = 1 \\ 7y + z = 5 \end{cases}$$

La matriz aumentada es la matriz cuyos elementos son los coeficientes y las constantes del sistema.

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

■

Operaciones elementales en los renglones

Las operaciones que se utilizan en la sección 9.3 para resolver sistemas lineales corresponden a operaciones en los renglones de la matriz aumentada del sistema. Por ejemplo, sumar un múltiplo de una ecuación a otra corresponde a sumar un múltiplo de una renglón a otro.

Operaciones elementales en los renglones

1. Sumar un múltiplo de un renglón a otro.
2. Multiplicar un renglón por una constante no cero.
3. Intercambiar dos renglones.

Observe que efectuar cualquiera de estas operaciones de la matriz aumentada de un sistema no cambia su solución. Usamos la siguiente notación para describir las operaciones elementales con los renglones:

Símbolo	Descripción
$R_i + kR_j \rightarrow R_i$	Cambiar el *i*-ésimo renglón sumando *k* veces el renglón *j* al *i*, poner luego el resultado en el renglón *i*.
kR_i	Multiplicar el *i*-ésimo renglón por *k*.
$R_i \leftrightarrow R_j$	Intercambiar los renglones *i*-ésimo y *j*-ésimo.

En el ejemplo siguiente comparamos las dos formas de expresar sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 2 Aplicación de las operaciones elementales con los renglones para resolver un sistema lineal

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Solución El objetivo es eliminar el término en x de la segunda ecuación y los términos x y y de la tercera ecuación. Para comparar, escribimos tanto el sistema de ecuaciones y la matriz aumentada.

	Sistema		Matriz aumentada
	$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$		$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 10 \\ 3 & -1 & 5 & 14 \end{bmatrix}$
Sume $(-1) \times$ ecuación 1 a ecuación 2. Sume $(-3) \times$ ecuación 1 a ecuación 3.	$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ 2y - 4z = 2 \end{cases}$	$\xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$
Multiplique ecuación 3 por $\frac{1}{2}$.	$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ 3y - 5z = 6 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$	$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
Sume $(-3) \times$ ecuación 3 a ecuación 2 para eliminar y de la ecuación 2.	$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ z = 3 \\ y - 2z = 1 \end{cases}$	$\xrightarrow{R_2 - 3R_3 \to R_2}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$
Intercambie las ecuaciones 2 y 3.	$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ y - 2z = 1 \\ z = 3 \end{cases}$	$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Ahora sustituimos al llegar a que $x = 2$, $y = 7$ y $z = 3$. La solución es $(2, 7, 3)$. ■

Eliminación de Gauss

En general, para resolver un sistema de ecuaciones lineales usando la matriz aumentada efectuamos operaciones elementales con los renglones para llegar a una matriz de una cierta forma. Esta forma se describe en el siguiente recuadro.

Forma escalonada y forma escalonada reducida de una matriz

Una matriz está en la **forma escalonada** si cumple con las condiciones siguientes.

1. El primer número no cero de cada renglón, de izquierda a derecha, es 1. Se denomina **elemento principal.**
2. El elemento principal de cada renglón está a la derecha del elemento principal en el renglón inmediatamente arriba de él.
3. Todos los renglones que constan totalmente de ceros están en la parte inferior de la matriz.

Una matriz está en la **forma escalonada reducida** si está en la forma escalonada y además cumple con las condiciones siguientes.

4. Todos los números por arriba y por abajo de cada elemento principal es 0.

En las matrices siguientes la primera matriz está en la forma escalonada reducida, pero la segunda está sólo en la forma escalonada. La tercera matriz no está en la forma escalonada. Los elementos en rojo son los elementos principales.

Forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales tienen ceros por arriba y por abajo de ellos.

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales se desplazan a la derecha en los renglones sucesivos.

No está en la forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Los 1 principales no se desplazan a la derecha en los renglones sucesivos.

A continuación se presenta una forma sistemática de poner una matriz en la forma escalonada efectuando operaciones elementales con los renglones:

- El principio es obtener un 1 en la parte superior izquierda. Luego obtenemos ceros abajo de ese 1 sumando múltiplos adecuados del primer renglón a los renglones abajo de él.
- A continuación, se obtiene un 1 principal en el siguiente renglón y luego formamos ceros abajo de ese 1.
- En cada etapa es necesario tener la seguridad que cada elemento principal está a la derecha del elemento principal que se encuentra en el renglón superior; reacomode los renglones si es necesario.
- Continúe este proceso hasta que tenga una matriz escalonada.

El proceso funciona como se indica en seguida en una matriz 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & \blacksquare & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Tras que la matriz aumentada está en la forma escalonada, podemos resolver el sistema lineal correspondiente mediante sustitución. Esta técnica se denomina **eliminación de Gauss,** en honor a su inventor, el matemático alemán C. F. Gauss (véase la página 294).

Resolución de un sistema usando la eliminación de Gauss

1. **Matriz aumentada.** Escriba la matriz aumentada del sistema.
2. **Forma escalonada.** Aplique las operaciones elementales en los renglones para cambiar la matriz aumentada a la forma escalonada.
3. **Sustitución.** Escriba el nuevo sistema de ecuaciones que corresponde a la forma escalonada de la matriz aumentada y resuelva por sustitución.

Ejemplo 3 Resolución de un sistema usando la forma escalonada

Resuelva un sistema de ecuaciones usando la eliminación de Gauss.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

Solución Primero se escribe la matriz aumentada del sistema y, luego, efectuamos operaciones elementales con los renglones para llegar a la forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & -4 & 4 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$$

Aquí necesitamos un 1.

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -11 \\ -2 & 1 & 12 & -17 \end{bmatrix}$$

Aquí necesitamos ceros.

$$\xrightarrow[R_3 + 2R_1 \to R_3]{R_2 - 3R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & -14 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

Necesitamos un 1 aquí.

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & 10 & -15 \end{bmatrix}$$

Necesitamos un 0 aquí.

$$\xrightarrow{R_3 - 5R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$$

Necesitamos un 1 aquí.

$$\xrightarrow{-\frac{1}{10}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos una matriz equivalente en la forma escalonada, y el sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + 4z = -7 \\ z = -2 \end{cases}$$

Recurrimos a la sustitución para resolver el sistema

$$\begin{aligned} y + 4(-2) &= -7 && \text{Sustitución de } z = -2 \text{ en la ecuación 2} \\ y &= 1 && \text{Determinación de } y \\ x + 2(1) - (-2) &= 1 && \text{Sustitución de } y = 1 \text{ y } z = -2 \text{ en la ecuación 1} \\ x &= -3 && \text{Determinación de } x \end{aligned}$$

Entonces, la solución del sistema es $(-3, 1, -2)$. ■

```
ref([A])
   [[1  2  -1  1  ]
    [0  1  2   -3]
    [0  0  1   -2]]
```

Figura 1

Las calculadoras que grafican poseen un comando "*row-echelon form*" (forma escalonada) que convierte a una matriz en la forma escalonada. (En la TI-83, el comando es `ref`.) En el caso de la matriz aumentada del ejemplo 3, el comando `ref` proporciona el resultado que se ilustra en la figura 1. Observe que la forma escalonada que se obtiene mediante la calculadora es diferente al que se llegó en el ejemplo 3. La razón es que la calculadora utilizada ejecuta operaciones distintas a las que efectuamos. Debe comprobar que la forma escalonada de su calculadora es la misma solución que la del libro.

Eliminación de Gauss-Jordan

Si ponemos la matriz aumentada de un sistema lineal en la forma escalonada *reducida*, entonces no necesitamos sustituir para resolver el sistema. Para expresar una matriz en la forma escalonada reducida seguimos los pasos siguientes.

- Efectuamos operaciones elementales con los renglones para poner la matriz en la forma escalonada.
- Obtenemos ceros arriba de cada elemento principal añadiendo múltiplos del renglón que contiene ese elemento a los renglones que se encuentran arriba de él. Empezamos con el último elemento principal y trabajamos hacia arriba.

En seguida se muestra cómo funciona el proceso en una matriz 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 1 & \blacksquare & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \blacksquare & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 1 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 1 & \blacksquare \end{bmatrix}$$

Aplicar la forma escalonada reducida para resolver un sistema recibe el nombre de **eliminación de Gauss-Jordan.** Ilustramos este proceso en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4 Resolución de un sistema usando la forma escalonada reducida

Resuelva el sistema de ecuaciones lineales, usando la eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{cases} 4x + 8y - 4z = 4 \\ 3x + 8y + 5z = -11 \\ -2x + y + 12z = -17 \end{cases}$$

Solución En el ejemplo se aplica la eliminación de Gauss a la matriz aumentada de este sistema para obtener una matriz equivalente en la forma escalonada. Se con-

tinúa efectuando operaciones elementales en los renglones de la última matriz del ejemplo 3 para llegar a una matriz equivalente en la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aquí son necesarios unos ceros

$$\xrightarrow[R_1 + R_3 \to R_1]{R_2 - 4R_3 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Aquí necesitamos un 0

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Ahora se tiene una matriz equivalente en la forma escalonada reducida, por lo que el sistema de ecuaciones equivalente es

Puesto que el sistema está en la forma escalonada reducida, no se requiere la sustitución para llegar a la solución.

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{cases}$$

De donde llegamos en forma inmediata a la solución $(-3, 1, -2)$. ■

```
rref([A])
    [[1  0  0  -3]
     [0  1  0  1 ]
     [0  0  1  -2]]
```

Figura 2

Las calculadoras que proporcionan gráficas también tienen un comando que convierte una matriz en la forma escalonada reducida. (En la TI-83, este comando es `rref`.) En el caso de la matriz aumentada del ejemplo 4, el comando `rref` proporciona los resultados que se ilustran en la figura 2. La calculadora proporciona la misma forma escalonada reducida que la obtenida en el ejemplo 4. La razón es que cada matriz tiene una forma escalonada reducida *única.*

Sistemas inconsistentes y dependientes

Los sistemas de ecuaciones lineales que estudiamos en los ejemplos 1 a 4 tienen exactamente una solución. Pero de acuerdo con la sección 9.3, un sistema lineal puede tener una solución, ninguna solución o una cantidad infinita de soluciones. Por fortuna, la forma escalonada de un sistema nos permite determinar de cuál de estos casos se trata, como se explica en el siguiente recuadro.

Primero es necesario presentar unos términos. Una **variable principal** de un sistema lineal es una que corresponde al elemento principal en la forma escalonada de la matriz aumentada del sistema.

Las soluciones de un sistema lineal en la forma escalonada

Suponga que la matriz aumentada de un sistema lineal se transformó mediante la eliminación de Gauss en la forma escalonada. Entonces, uno de los siguientes enunciados es verdadero.

1. **Ninguna solución.** Si la forma escalonada contiene un renglón que representa la ecuación $0 = c$ donde c no es cero, entonces el sistema no tiene solución. Un sistema sin solución se llama **inconsistente**.
2. **Una solución.** Si cada variable en la forma escalonada es una variable principal, entonces el sistema tiene exactamente una solución, que se determina mediante sustitución o por medio de la eliminación de Gauss-Jordan.
3. **Cantidad infinita de soluciones.** Si las variables en la forma escalonada no son variables principales, y si el sistema no es inconsistente, entonces tiene una cantidad infinita de soluciones. En este caso, el sistema se denomina dependiente. El sistema se resuelve convirtiendo la matriz en la forma escalonada reducida y después las variables principales se expresan en función de las variables no principales. Las variables no principales pueden tomar cualquier valor de número real.

Las matrices que siguen, todas en la forma escalonada, ilustran los tres casos descritos en el recuadro.

Sin solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La última ecuación dice que $0 = 1$.

Una solución

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Cada variable es una variable principal.

Cantidad infinita de soluciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La z no es una variable principal.

Ejemplo 5 Un sistema sin solución

Resuelva el sistema.

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 12 \\ 2x - 5y + 5z = 14 \\ x - 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

Solución Se transforma el sistema en la forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 2 & -5 & 5 & 14 \\ 1 & -2 & 3 & 20 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{18}R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta última matriz está en la forma escalonada, de modo que se puede detener el proceso de eliminación de Gauss. Ahora, si pasamos el último renglón de nuevo a la forma de ecuación, se obtiene $0x + 0y + 0z = 1$, o bien, $0 = 1$, lo cual es falso. Sin importar los valores que escojamos para x, y y z, la última ecuación nunca dará un enunciado verdadero. Esto quiere decir que el sistema *no tiene solución.* ■

```
ref([A])
[[1  -2.5  2.5  7   ]
 [0  1     1    -10]
 [0  0     0    1   ]]
```

Figura 3

En la figura 3 se ilustra la forma escalonada que proporciona la calculadora TI-83 para la matriz aumentada del ejemplo 5. Debe comprobar que da la misma solución.

Ejemplo 6 Un sistema con una cantidad infinita de soluciones

Determine la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} -3x - 5y + 36z = 10 \\ -x \qquad\quad + 7z = 5 \\ x + y - 10z = -4 \end{cases}$$

Solución Transformamos el sistema en la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} -3 & -5 & 36 & 10 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ -1 & 0 & 7 & 5 \\ -3 & -5 & 36 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -10 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El tercer renglón corresponde a la ecuación $0 = 0$. Esta ecuación es siempre verdadera, sin que importe qué valores tomen x, y y z. Como la ecuación no añade información nueva con respecto a las variables, se puede eliminar del sistema. De modo que la última matriz corresponde al sistema

Forma escalonada reducida que se obtiene en la calculadora TI-83

```
rref([A])
   [[1  0  -7  -5]
    [0  1  -3  1 ]
    [0  0  0   0 ]]
```

$$\begin{cases} x \qquad - 7z = -5 \\ \qquad y - 3z = 1 \end{cases}$$

Ecuación 1
Ecuación 2

Variables principales

En seguida se determinan las variables principales x y y en función de la variable no principal z:

$$x = 7z - 5 \qquad \text{Despeje de } x \text{ de la ecuación 1}$$

$$y = 3z + 1 \qquad \text{Despeje de } y \text{ de la ecuación 2}$$

Para obtener la solución completa, hacemos que t represente cualquier número real, y se expresa x, y y z en función de t:

$$\begin{aligned} x &= 7t - 5 \\ y &= 3t + 1 \\ z &= t \end{aligned}$$

También es posible escribir la solución como la terna ordenada $(7t - 5, 3t + 1, t)$, donde t es cualquier número real.. ■

En el ejemplo 6, para obtener soluciones específicas se asigna un valor específico a t. Por ejemplo, si $t = 1$, entonces,

$$\begin{aligned} x &= 7(1) - 5 = 2 \\ y &= 3(1) + 1 = 4 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Aquí están algunas otras soluciones del sistema obtenidas al sustituir otros valores del parámetro t.

Parámetro t	Solución $(7t - 5, 3t + 1, t)$
-1	$(-12, -2, -1)$
0	$(-5, 1, 0)$
2	$(9, 7, 2)$
5	$(30, 16, 5)$

Ejemplo 7 Un sistema con una cantidad infinita de soluciones

Determine la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 4w = 10 \\ x + 3y - 3z - 4w = 15 \\ 2x + 2y - 6z - 8w = 10 \end{cases}$$

Solución Se transforma el sistema en la forma escalonada reducida.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 1 & 3 & -3 & -4 & 15 \\ 2 & 2 & -6 & -8 & 10 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 - 2R_1 \to R_3]{R_2 - R_1 \to R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 + 2R_2 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2 \to R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Éste se encuentra en la forma escalonada reducida. Puesto que el último renglón representa la ecuación $0 = 0$, podemos desecharla. Entonces, la última matriz corresponde al sistema

$$\begin{cases} x \qquad - 3z - 4w = 0 \\ \qquad y \qquad\qquad = 5 \end{cases}$$

Variables principales

Konrad Jacobs, Erlanged

Olga Taussky-Todd (1906-1995) fue pieza importante en el desarrollo de las aplicaciones de la teoría de matrices. Descrita como "enamorada de cualquier matriz posible", aplicó con resultados satisfactorios las matrices a la aerodinámica, un campo usado en el diseño de aeroplanos y cohetes. Taussky-Todd también obtuvo fama por sus trabajos relacionados con la teoría de los números, que tratan sobre números primos y divisibilidad. A pesar de que la teoría de los números se consideró alguna vez como la rama de las matemáticas con menos aplicaciones, ahora se utiliza de manera importante en la industria de las computadoras.

Taussky-Todd estudió matemáticas en una época cuando las mujeres jóvenes rara vez aspiraban a ser matemáticas. Decía "Cuando ingresé a la universidad ni me imaginaba siquiera lo que significaba estudiar matemáticas". Fue una de los matemáticos más respetados de su época, y durante muchos años fue maestra de matemáticas en Caltech de Pasadena.

Para obtener la solución completa, se expresan las variables principales x y y en términos de las variables no principales z y w, y hacemos que z y w sean cualquier número real. Por consiguiente, la solución completa es

$$x = 3s + 4t$$
$$y = 5$$
$$z = s$$
$$w = t$$

donde s y t son cualquier número real.

Es posible expresar también las respuestas como la tétrada ordenada $(3s + 4t, 5, s, t)$. ■

Observe que s y t *no* tienen que ser el *mismo* número real en la solución para el ejemplo 7. Se puede elegir arbitrariamente valores para cada una si deseamos construir una solución específica para el sistema. Por ejemplo, si hacemos $s = 1$ y $t = 2$, entonces, se obtiene la solución (11, 5, 1, 2). Se debe comprobar que satisface a las tres ecuaciones originales del ejemplo 7.

Los ejemplos 6 y 7 ilustran este hecho general: si un sistema en la forma escalonada tiene n ecuaciones no cero con m variables $(m > n)$, entonces la solución completa tendrá $m - n$ variables no principales. Por ejemplo, en el ejemplo 6 obtenemos *dos* ecuaciones no cero con *tres* variables x, y y z, lo cual nos da $3 - 2 = 1$ variable no principal.

Modelado con sistemas lineales

Hay ecuaciones lineales, que a menudo contienen cientos o hasta miles de variables, que se utilizan con frecuencia en las aplicaciones del álgebra a las ciencias y a otros campos. Por ahora, consideremos un ejemplo que contiene sólo tres variables.

Ejemplo 8 Análisis nutricional usando un sistema de ecuaciones lineales

Un nutriólogo está ejecutando un experimento con estudiantes voluntarios. Desea alimentar a uno de sus individuos con una dieta diaria que consiste en una combinación de tres alimentos comerciales dietéticos: MiniCal, LiquiFast y SlimQuick. Por lo que se refiere al experimento, es importante que la persona consuma todos los días exactamente 500 mg de potasio, 75 g de proteína y 1150 unidades de vitamina D. Las cantidades de estos nutrientes en una onza de cada alimento se proporcionan en la tabla. ¿Cuántas onzas de cada alimento debe comer la persona todos los días para que cumpla con las cantidades exactas de los nutrientes?

	MiniCal	LiquiFast	SlimQuick
Potasio (mg)	50	75	10
Proteína (g)	5	10	3
Vitamina D (unidades)	90	100	50

Solución Sean x, y y z las cantidades de onzas de MiniCal, LiquiFast y SlimQuick, respectivamente, que la persona debe comer todos los días. Esto quiere decir que obtendremos $50x$ mg de postasio del MiniCal, $75y$ mg del LiquiFast y $10z$ mg del SlimQuick, para tener un total de $50x + 75y + 10z$ mg de potasio en total. Puesto que lo que se requiere de potasio es 500 mg, entonces obtenemos la primera ecuación

```
rref([A])
  [[1 0 0 5 ]
   [0 1 0 2 ]
   [0 0 1 10]]
```

Figura 4

que sigue. Mediante un razonamiento similar para las proteínas y para la vitamina D obtenemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 50x + 75y + 10z = 500 & \text{Potasio} \\ 5x + 10y + 3z = 75 & \text{Proteína} \\ 90x + 100y + 50z = 1150 & \text{Vitamina D} \end{cases}$$

Al dividir la primera ecuación entre 5 y la tercera entre 10 obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 10x + 15y + 2z = 100 \\ 5x + 10y + 3z = 75 \\ 9x + 10y + 5z = 115 \end{cases}$$

Es posible resolver este sistema mediante la eliminación de Gauss, o bien, utilizar una calculadora para encontrar la forma escalonada reducida de la matriz aumentada del sistema. Al usar el comando `rref` en la TI-83, se obtienen los resultados que se presentan en la figura 4. A partir de la forma escalonada reducida se puede observar que $x = 5$, $y = 2$, $z = 10$. La persona debe consumir todos los días 5 onzas de MiniCal, 2 onzas de LiquiFast y 10 onzas de SlimQuick. ■

Compruebe su respuesta

$x = 5, y = 2, z = 10$:

$$\begin{cases} 10(5) + 15(2) + 2(10) = 100 \\ 5(5) + 10(2) + 3(10) = 75 \\ 9(5) + 10(2) + 5(10) = 115 \end{cases} \checkmark$$

En una aplicación más práctica podrían entrar en juego docenas de alimentos y nutrientes en lugar de sólo tres. Tales problemas dan lugar a sistemas con cantidades grandes de variables y de ecuaciones. Las computadoras o las calculadoras que grafican son esenciales en la resolución de dichos sistemas.

9.4 Ejercicios

1–6 ■ Exprese la dimensión de la matriz.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 11 & 3 \end{bmatrix}$ **3.** $\begin{bmatrix} 12 \\ 35 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7–14 ■ Se tiene una matriz.

a) Determine si la matriz está en la forma escalonada.

b) Diga si la matriz está en la forma escalonada reducida.

c) Formule el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

7. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ **8.** $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **10.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

15–24 ■ Los sistemas de ecuaciones lineales tienen una solución única. Calcule la solución mediante la eliminación de Gauss o la eliminación de Gauss-Jordan.

15. $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ y + 2z = 5 \\ x + y + 3z = 8 \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} x + y + 6z = 3 \\ x + y + 3z = 3 \\ x + 2y + 4z = 7 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 4 \\ 4x + y - 3z = 1 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x + y + z = 4 \\ -x + 2y + 3z = 17 \\ 2x - y = -7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + 2y - z = -2 \\ x + z = 0 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} 2y + z = 4 \\ x + y = 4 \\ 3x + 3y - z = 10 \end{cases}$

21. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 22 \end{cases}$ **22.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

23. $$\begin{cases} 2x - 3y - z = 13 \\ -x + 2y - 5z = 6 \\ 5x - y - z = 49 \end{cases}$$

24. $$\begin{cases} 10x + 10y - 20z = 60 \\ 15x + 20y + 30z = -25 \\ -5x + 30y - 10z = 45 \end{cases}$$

25–34 ■ Determine si el sistema de ecuaciones lineales es inconsistente o dependiente. Si es dependiente, determine la solución completa.

25. $$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ y - 3z = 1 \\ 2x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

26. $$\begin{cases} x + 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 5 \\ -y + 8z = 8 \end{cases}$$

27. $$\begin{cases} 2x - 3y - 9z = -5 \\ x + 3z = 2 \\ -3x + y - 4z = -3 \end{cases}$$

28. $$\begin{cases} x - 2y + 5z = 3 \\ -2x + 6y - 11z = 1 \\ 3x - 16y + 20z = -26 \end{cases}$$

29. $$\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 4x - 8y + 32z = 24 \\ 2x - 3y + 11z = 4 \end{cases}$$

30. $$\begin{cases} -2x + 6y - 2z = -12 \\ x - 3y + 2z = 10 \\ -x + 3y + 2z = 6 \end{cases}$$

31. $$\begin{cases} x + 4y - 2z = -3 \\ 2x - y + 5z = 12 \\ 8x + 5y + 11z = 30 \end{cases}$$

32. $$\begin{cases} 3r + 2s - 3t = 10 \\ r - s - t = -5 \\ r + 4s - t = 20 \end{cases}$$

33. $$\begin{cases} 2x + y - 2z = 12 \\ -x - \frac{1}{2}y + z = -6 \\ 3x + \frac{3}{2}y - 3z = 18 \end{cases}$$

34. $$\begin{cases} y - 5z = 7 \\ 3x + 2y = 12 \\ 3x + 10z = 80 \end{cases}$$

35–46 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones lineales.

35. $$\begin{cases} 4x - 3y + z = -8 \\ -2x + y - 3z = -4 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

36. $$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 14 \\ 4x - y - 2z = -17 \\ -x - y + z = 3 \end{cases}$$

37. $$\begin{cases} x + 2y - 3z = -5 \\ -2x - 4y - 6z = 10 \\ 3x + 7y - 2z = -13 \end{cases}$$

38. $$\begin{cases} 3x - y + 2z = -1 \\ 4x - 2y + z = -7 \\ -x + 3y - 2z = -1 \end{cases}$$

39. $$\begin{cases} -x + 2y + z - 3w = 3 \\ 3x - 4y + z + w = 9 \\ -x - y + z + w = 0 \\ 2x + y + 4z - 2w = 3 \end{cases}$$

40. $$\begin{cases} x + y - z - w = 6 \\ 2x + z - 3w = 8 \\ x - y + 4w = -10 \\ 3x + 5y - z - w = 20 \end{cases}$$

41. $$\begin{cases} x + y + 2z - w = -2 \\ 3y + z + 2w = 2 \\ x + y + 3w = 2 \\ -3x + z + 2w = 5 \end{cases}$$

42. $$\begin{cases} x - 3y + 2z + w = -2 \\ x - 2y - 2w = -10 \\ z + 5w = 15 \\ 3x + 2z + w = -3 \end{cases}$$

43. $$\begin{cases} x + z + w = 4 \\ y - z = -4 \\ x - 2y + 3z + w = 12 \\ 2x - 2z + 5w = -1 \end{cases}$$

44. $$\begin{cases} y - z + 2w = 0 \\ 3x + 2y + w = 0 \\ 2x + 4w = 12 \\ -2x - 2z + 5w = 6 \end{cases}$$

45. $$\begin{cases} x - y + w = 0 \\ 3x - z + 2w = 0 \\ x - 4y + z + 2w = 0 \end{cases}$$

46. $$\begin{cases} 2x - y + 2z + w = 5 \\ -x + y + 4z - w = 3 \\ 3x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Aplicaciones

47. Nutrición Un médico recomienda que un paciente tome diariamente 50 mg de niacina, de riboflavina y de tiamina para aliviar la deficiencia de vitaminas. En el botiquín de su casa, el paciente encuentra tres marcas de píldoras de vitaminas. Las cantidades de las vitaminas por píldora se proporcionan en la tabla. ¿Cuántas píldoras de cada tipo debe ingerir diario para conseguir 50 mg de cada vitamina?

	VitaMax	Vitron	VitaPlus
Niacina (mg)	5	10	15
Riboflavina (mg)	15	20	0
Tiamina (mg)	10	10	10

48. Mezclas Un químico tiene tres soluciones a diversas concentraciones. La primera es ácido al 10%, la segunda es al 20% y la tercera al 40%. ¿Cuántos mililitros de cada una de ellas debe usar para obtener 100 mL de una solución al 18%, si tiene que utilizar cuatro veces más de la solución al 10% que de la solución al 40%?

49. Distancia, velocidad y tiempo Amanda, Bryce y Corey entran a un evento atlético, en el cual tienen que correr, nadar y andar en bicicleta a lo largo de una ruta trazada. Sus velocidades promedio se proporcionan en la tabla. Corey termina primero con un tiempo total de 1 h 45 min. Amanda llega en segundo lugar con un tiempo de 2 h 30 min. Bryce

termine al último con un tiempo de 3 h. Determine la distancia en millas para cada parte de la carrera.

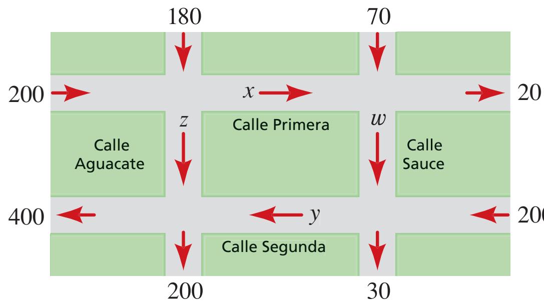
	Velocidad promedio (millas/h)		
	Carrera	Natación	Ciclismo
Amanda	10	4	20
Bryce	$7\frac{1}{2}$	6	15
Corey	15	3	40

50. Uso del salón de clases Una pequeña escuela tiene 100 alumnos que ocupan tres aulas: A, B y C. Después del primer periodo del día escolar, la mitad de los estudiantes del salón A se pasa al salón B, la quinta parte de los estudiantes del salón B se pasa al salón C y un tercio de los alumnos del salón C se pasa al A. Sin embargo, la cantidad total de estudiantes en cada salón es el mismo en ambos periodos. ¿Cuántos alumnos ocupan cada aula?

51. Fabricación de muebles Una fábrica de muebles manufactura mesas, sillas y armarios. Cada pieza requiere tres operaciones: corte de la madera, ensamble y acabado. Cada proceso requiere la cantidad de horas (h) que se da en la tabla. Los trabajadores de la fábrica pueden proporcionar 300 horas de corte, 400 h de ensamble y 590 h de acabado por cada semana. ¿Cuántas mesas, sillas y armarios se deben producir de modo que todas las horas de mano de obra se utilicen? ¿O esto es imposible?

	Mesa	Silla	Armarios
Corte (h)	$\frac{1}{2}$	1	1
Ensamble (h)	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	1
Acabado (h)	1	$1\frac{1}{2}$	2

52. Tránsito urbano Una parte de la red de calles de la ciudad se muestra en la figura. Las flechas indican las calles de un solo sentido y los números señalan cuántos automóviles entran o salen de esta sección de la ciudad por la calle indicada en un cierto periodo de una hora. Las variables x, y, z y w representan la cantidad de automóviles que se desplaza a lo largo de las partes de las calles Primera, Segunda, Aguacate y Sauce durante el primer periodo. Determine x, y, z y w, suponiendo que ninguno de los automóviles se detiene o se estaciona en cualquiera de las calles mostradas.



Descubrimiento • Debate

53. Polinomios determinados mediante un conjunto de puntos Todos sabemos que dos puntos definen sólo a la recta $y = ax + b$ en el plano coordenado. De manera similar, tres puntos determinan sólo un polinomio cuadrático, es decir, de segundo grado,

$$y = ax^2 + bx + c$$

cuatro puntos definen sólo un polinomio cúbico (tercer grado)

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y así sucesivamente. Algunas excepciones a esta regla son si los tres puntos quedan en realidad sobre una recta, o si los cuatro puntos quedan en un polinomio cuadrático o una recta, etcétera. Para el siguiente conjunto de cinco puntos, determine la recta que contiene los primeros dos puntos, el polinomio cuadrático que contiene los primeros tres puntos, y el polinomio cúbico que contiene los primeros cuatro puntos y el polinomio de cuarto grado que contiene los cinco puntos.

$$(0, 0), \quad (1, 12), \quad (2, 40), \quad (3, 6), \quad (-1, -14)$$

Localice los puntos y grafique las funciones en el mismo rectángulo de visión usando una calculadora o una computadora.

9.5 Álgebra de matrices

Hasta este momento hemos utilizado las matrices simplemente por conveniencia de la notación al resolver sistemas lineales. Se pueden utilizar las matrices en muchas otras aplicaciones en las matemáticas y en las ciencias, y para la mayoría de estas aplicaciones es esencial el conocimiento del álgebra de matrices. Al igual que los números, las matrices se pueden sumar, restar, multiplicar y dividir. En esta sección se estudia cómo ejecutar estas operaciones con matrices.

Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si tienen los mismos elementos en los mismos lugares.

Matrices iguales

$$\begin{bmatrix} \sqrt{4} & 2^2 & e^0 \\ 0.5 & 1 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices diferentes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son **iguales** si y sólo si tienen la misma dimensión $m \times n$, y los elementos correspondientes son iguales, es decir,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

para $i = 1, 2, \ldots, m$ y $j = 1, 2, \ldots, n$.

Ejemplo 1 Matrices iguales

Determine a, b, c y d si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Puesto que las dos matrices son iguales, los elementos correspondientes deben ser iguales. Así debemos tener $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$ y $d = 2$. ■

Adición, sustracción y multiplicación escalar de matrices

Dos matrices se pueden sumar o restar si tienen la misma dimensión. De no ser así, la suma o la diferencia no está definida. Se suman o restan las matrices sumando o restando elementos correspondientes. Para multiplicar una matriz por un número, se multiplica cada uno de los elementos de la matriz por dicho número. Esto se llama *producto escalar*.

Adición, sustracción y producto escalar de matrices

Sean $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ matrices de igual dimensión $m \times n$ y sea c cualquier número real.

1. La **suma** $A + B$ es la matriz $m \times n$ obtenida al sumar elementos correspondientes de A y B.

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$$

2. La **diferencia** $A - B$ es la matriz $m \times n$ obtenida al restar elementos correspondientes de A y B.

$$A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$$

3. El **producto escalar** cA es la matriz $m \times n$ obtenida al multiplicar cada elemento de A por c.

$$cA = [ca_{ij}]$$

Ejemplo 2 Ejecución de operaciones algebraicas con matrices

Sea
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

Efectúe cada una de las operaciones indicadas o explique por qué no se puede efectuar.

a) $A + B$ b) $C - D$ c) $C + A$ d) $5A$

Solución

a) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \\ 9 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $C - D = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 8 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 6 \\ -8 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

c) $C + A$ no está definida porque no se pueden sumar matrices de distintas dimensiones.

d) $5A = 5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \\ 7 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 25 \\ 35 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ ■

Las propiedades del recuadro se derivan de las definiciones de la suma de matrices y de la multiplicación escalar, así como de las propiedades correspondientes de los números reales.

Propiedades de la suma y multiplicación escalar de matrices

Sean A, B y C matrices $m \times n$ y sean c y d escalares.

$A + B = B + A$	Propiedad conmutativa de la suma de matrices
$(A + B) + C = A + (B + C)$	Propiedad asociativa de la suma de matrices
$c(dA) = (cd)A$	Propiedad asociativa de la multiplicación de escalares
$(c + d)A = cA + dA$ $c(A + B) = cA + cB$	Propiedades distributivas de los escalares Multiplicación

Ejemplo 3 Resolución de una ecuación de matrices

Resuelva la ecuación matricial
$$2X - A = B$$
y determine el valor de la matriz X, donde
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solución Aplicamos las propiedades de las matrices para determinar X.

$$2X - A = B \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$2X = B + A \qquad \text{Suma de la matriz } A \text{ a cada miembro}$$

$$X = \tfrac{1}{2}(B + A) \qquad \text{Multiplicación de cada miembro por el escalar } \tfrac{1}{2}$$

Así

$$X = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}\right) \qquad \text{Sustitución de las matrices } A \text{ y } B$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{Suma de matrices}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Multiplicación por el escalar } \tfrac{1}{2}$$

■

American Mathematical Society

Julia Robinson (1919-1985) nació en San Luis Missouri, y creció en Point Loma, California. Debido a una enfermedad, no asistió a la escuela dos años, pero después con ayuda de un tutor, terminó el quinto, sexto, séptimo y octavo grados en solo un año. Más tarde, en la San Diego State University, al leer las biografías de matemáticos en *Men of Mathematics* de E. T. Bell se despertó en ella lo que llegó a ser una pasión de toda su vida por las matemáticas. Decía "No creo exagerar al destacar la importancia de esos libros... en la vida intelectual de un estudiante." Robinson es famosa por su trabajo sobre el décimo problema de Hilbert (página 708), el cual pide un procedimiento general para determinar si una ecuación tiene soluciones con números enteros. Sus ideas dieron origen a una respuesta completa al problema. Es interesante hacer notar que la respuesta se relacionaba con ciertas propiedades de los números de Fibonacci (página 826) descubiertas por el entonces matemático ruso de 22 años Yuri Matijasevič. Como resultado de su brillante trabajo sobre el décimo problema de Hilbert, le ofrecieron una cátedra en la Universidad de California, Berkeley, y se convirtió en la primera mujer matemática elegida a la Academia Nacional de Ciencias de Estados Unidos. También fue presidenta de la American Mathematical Society.

Multiplicación de matrices

Multiplicar dos matrices es más difícil de explicar que cualquier otra operación con matrices. En los ejemplos que siguen veremos por qué multiplicar matrices es un procedimiento complejo, el cual en seguida explicamos.

Primero, el producto AB, es decir, $A \cdot B$, de dos matrices A y B está definido sólo cuando el número de columnas de A es igual al número de renglones de B. Esto quiere decir que si escribimos sus dimensiones lado a lado, los dos números interiores deben coincidir:

Matrices	A	B
Dimensiones	$m \times n$	$n \times k$
	Columnas en A	Renglones en B

Si las dimensiones de A y B corresponden de esta manera, entonces el producto AB es una matriz de dimensión $m \times k$. Antes de explicar el procedimiento para obtener los elementos de AB, definimos el *producto interior* de un renglón de A por una columna de B.

Si $[a_1 \quad a_2 \cdots a_n]$ es un renglón de A, y si $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ es una columna de B, entonces

su **producto interior** es el número $a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$. Por ejemplo,

al obtener el producto interior de $[2 \quad -1 \quad 0 \quad 4]$ y $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ tenemos

$$2 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 8$$

A continuación se define el **producto** AB de dos matrices.

Multiplicación de matrices

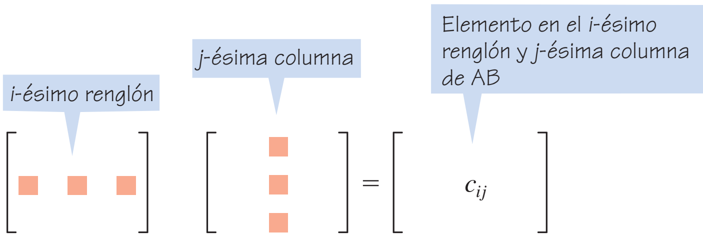
Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz $m \times n$ y $B = [b_{ij}]$ una matriz $n \times k$, entonces su producto es la matriz $m \times k$

$$C = [c_{ij}]$$

donde c_{ij} es el producto interior del i-ésimo renglón de A y la columna j-ésima de B. Expresamos el producto como

$$C = AB$$

Esta definición del producto de matrices establece que cada elemento de la matriz AB se obtiene de un *renglón* de A y de una *columna* de B como sigue: el elemento c_{ij} en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de la matriz AB se obtiene multiplicando los elementos del i-ésimo renglón de A por los elementos correspondientes en la j-ésima columna de B y sumando los resultados.



Ejemplo 4 Multiplicación de matrices

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Calcule, si es posible, los productos AB y BA.

Los números interiores corresponden, de modo que el producto está definido.

$2 \times 2 \quad 2 \times 3$

Los números exteriores dan la dimensión del producto 2×3.

Solución Puesto que A tiene dimensión 2×2 y B tiene dimensión 2×3, el producto AB está definido y tiene dimensión 2×3. Por lo tanto, podemos escribir

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

donde los signos de interrogación se deben reemplazar aplicando la regla que define el producto de dos matrices. Si definimos $C = AB = [c_{ij}]$, entonces el elemento c_{11} es el producto interior del primer renglón de A y la primera columna de B:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \qquad 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = -1$$

De igual manera calculamos los elementos restantes del producto:

Elemento	Producto interior de:	Valor	Matriz producto
c_{12}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$1 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 17$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & \\ & & \end{bmatrix}$
c_{13}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$1 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 23$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ & & \end{bmatrix}$
c_{21}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 1$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & & \end{bmatrix}$
c_{22}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1) \cdot 5 + 0 \cdot 4 = -5$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & \end{bmatrix}$
c_{23}	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$	$(-1) \cdot 2 + 0 \cdot 7 = -2$	$\begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

Por lo tanto, tenemos $$AB = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 23 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

No son iguales, por lo tanto el producto no está definido

$2 \times 3 \quad 2 \times 2$

El producto BA no está definido porque las dimensiones de B y A son

$$2 \times 3 \qquad \text{y} \qquad 2 \times 2$$

Los dos números interiores no son iguales, de modo que los renglones y las columnas no corresponderían al tratar de calcular el producto. ■

Las calculadoras gráficas y las computadoras son capaces de ejecutar operaciones algebraicas con matrices. Por ejemplo, si introducimos los datos de las matrices del ejemplo 4 en las variables de la matriz [A] y [B] en la calculadora TI-83, entonces ésta determina el producto como se muestra en la figura 1.

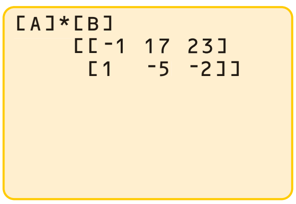


Figura 1

Propiedades de la multiplicación de matrices

Aunque el producto de matrices no es conmutativo, sí sigue las propiedades asociativa y distributiva

Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean A, B y C matrices para las cuales los productos siguientes están definidos. Entonces

$$A(BC) = (AB)C \qquad \text{Propiedad asociativa}$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA \qquad \text{Propiedad distributiva}$$

El ejemplos siguiente muestra que aun cuando tanto AB como BA están definidos, no son necesariamente iguales. Este resultado demuestra que la multiplicación de matrices *no* es conmutativa.

Ejemplo 5 La multiplicación de matrices no es conmutativa

Sea
$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcule los productos AB y BA.

Solución Puesto que tanto la matriz A como la B tienen dimensiones 2×2, ambos productos AB y BA están definidos, y cada uno también es una matriz 2×2.

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 + 7 \cdot 9 & 5 \cdot 2 + 7 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 1 + 0 \cdot 9 & (-3) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 68 & 3 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) & 1 \cdot 7 + 2 \cdot 0 \\ 9 \cdot 5 + (-1) \cdot (-3) & 9 \cdot 7 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 48 & 63 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que, en general, $AB \neq BA$. En efecto, en este ejemplo AB y BA no tienen un elemento común. ■

Aplicaciones de la multiplicación de matrices

Ahora consideramos algunos ejemplos de aplicación que muestran por qué los matemáticos han escogido esta manera aparentemente extravagante para definir el producto de matrices. El ejemplo 6 permite ver cómo esta definición de producto de matrices facilita expresar un sistema lineal de ecuaciones como una ecuación de una sola matriz.

Ejemplo 6 Expresar un sistema de ecuaciones como una ecuación matricial

Demuestre que la siguiente ecuación matricial es equivalente al sistema de ecuaciones del ejemplo 2 de la sección 9.4.

Las ecuaciones matriciales como ésta se estudian con más detalle en la página 694.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Solución Si ejecutamos la multiplicación de matrices en el lado izquierdo de la ecuación tenemos

$$\begin{bmatrix} x - y + 3z \\ x + 2y - 2z \\ 3x - y + 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Como dos matrices son iguales sólo si sus elementos correspondientes son iguales, igualamos los elementos para llegar a

$$\begin{cases} x - y + 3z = 4 \\ x + 2y - 2z = 10 \\ 3x - y + 5z = 14 \end{cases}$$

Esto es exactamente el sistema de ecuaciones del ejemplo 2 de la sección 9.4. ■

Ejemplo 7 Representación de los datos de la población mediante matrices

En una cierta ciudad la proporción de los electores en cada grupo de edad, que están registrados como demócratas, republicanos e independientes se representa mediante la matriz siguiente.

	Edad 18–30	31–50	Más de 50
Demócrata	0.30	0.60	0.50
Republicano	0.50	0.35	0.25
Independiente	0.20	0.05	0.25

$$\begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.50 \\ 0.50 & 0.35 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix} = A$$

La matriz siguiente proporciona la distribución, por edad y género, de la población de electores de esta ciudad.

Edad	Varones	Mujeres
18–30	5000	6000
31–50	10 000	12 000
Más de 50	12 000	15 000

$$\begin{bmatrix} 5000 & 6000 \\ 10\,000 & 12\,000 \\ 12\,000 & 15\,000 \end{bmatrix} = B$$

En el caso de este problema, hagamos una suposición realmente irreal de que dentro de cada grupo de edad, la preferencia política no se relaciona con el género. Es decir, el porcentaje de varones demócratas en el grupo de edad de 18 a 30 años, por ejemplo, es el mismo que el porcentaje de mujeres demócratas de este grupo.

a) Calcule el producto AB.

b) ¿Cuántos varones están registrados como demócratas en esta ciudad?

c) ¿Cuántas mujeres están registradas como republicanas?

Solución

a) $$AB = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.60 & 0.50 \\ 0.50 & 0.35 & 0.25 \\ 0.20 & 0.05 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5000 & 6000 \\ 10\,000 & 12\,000 \\ 12\,000 & 15\,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\,500 & 16\,500 \\ 9000 & 10\,950 \\ 4500 & 5550 \end{bmatrix}$$

b) Cuando calculamos el producto interior de un renglón de A con una columna de B, estamos sumando el número de personas en cada grupo de edad que pertenece a la categoría en cuestión. Por ejemplo, el elemento c_{21} de AB (el 9000) se obtiene al calcular el producto interior del renglón Republicanos de A con la columna Varones de B. Por lo tanto, esta cantidad es el total de varones repu-

---

Matemáticas en el mundo moderno

Métodos para una votación justa

Los métodos de las matemáticas se aplicaron recientemente a problemas de las ciencias sociales. Por ejemplo, ¿cómo encontrar métodos para una votación justa? Usted podría preguntar ¿cuál es el problema en cómo votamos en las elecciones? Bueno, supongamos que los candidatos A, B y C compiten por la presidencia. La cuenta final de los votos es como sigue: A obtiene 40%, B gana el 39% y C tiene 21%. Así las cosas, el candidato A es el vencedor. Pero 60% de los votantes no lo quiere. Además, usted votó por C, pero le disgusta tanto A que hasta hubiera estado dispuesto a votar por B con el fin de evitar que ganara A. La mayoría de los electores que votó por C siente lo mismo que usted, de modo que estamos en una situación donde la mayoría de los electores prefiere a B y no a A, pero A gana. ¿Esto es justo?

En la década de los años 50, Kenneth Arrow demostró matemáticamente que ningún método democrático para votar puede ser justo del todo, y más tarde ganó el Premio Nobel por este trabajo. Los matemáticos continúan investigando si hay sistemas para votar más justos. El sistema que más se usa en el Estado federal y en las elecciones locales se denomina voto de la pluralidad (el candidato que obtiene la mayoría de votos es el que gana). Entre otros sistemas se encuentran el voto de la mayoría (si ningún candidato obtiene una mayoría, se efectúa un desempate entre los candidatos con mayor cantidad de votos), voto de aprobación (cada elector puede votar por todos los candidatos que apruebe), voto por preferencias (cada votante ordena a los candidatos de acuerdo con sus preferencias) y voto acumulativo (cada elector tiene tantos votos como candidatos haya,

(*continúa*)

y puede dar todos sus votos a un candidato o distribuirlos entre los candidatos con quien se identifique). Este último sistema se aplica a menudo para elegir a los directores de las corporaciones. Cada sistema de voto tiene tanto ventajas como desventajas.

blicanos en esta ciudad. Podemos nombrar los renglones y columnas de AB como sigue:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Demócrata} \\ \text{Republicano} \\ \text{Independiente} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Varón} & \text{Mujer} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 13\,500 & 16\,500 \\ 9000 & 10\,950 \\ 4500 & 5550 \end{bmatrix} \end{array} = AB$$

Por consiguiente, 13 500 varones están registrados como demócratas en esta ciudad.

c) Hay 10 950 mujeres registradas como republicanas. ■

En el ejemplo 7, los elementos de la columna de A suman 1. (¿Puede apreciar por qué esto tiene que ser cierto, dado lo que la matriz describe?). Una matriz con esta propiedad se denomina **estocástica**. Las matrices estocásticas se utilizan ampliamente en la estadística, en donde aparecen con frecuencia en las situaciones como la descrita aquí.

Elementos gráficos elaborados mediante computadora

Un uso importante de las matrices es la representación digital de imágenes. Una cámara digital o un escáner, es decir, un explorador, convierte una imagen en una matriz, dividiendo la imagen en un acomodo rectangular de elementos llamados pixeles. A cada pixel se le asigna un valor que representa el color, la brillantez o alguna otra característica de ese lugar. Por ejemplo, en una imagen en escala de grises de 256 niveles, a cada pixel se le asigna un valor de 0 a 255, donde 0 representa el blanco, 255 el negro y los números entre ellos una graduación creciente de grises. Las graduaciones de una escala de grises mucho más simple de 8 niveles se muestran en la figura 2. Utilizamos esta escala de grises de 8 niveles para ilustrar el proceso.

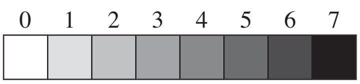
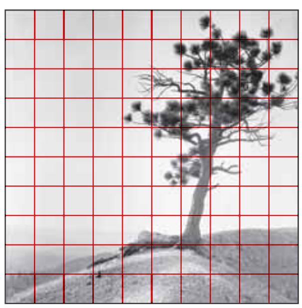


Figura 2

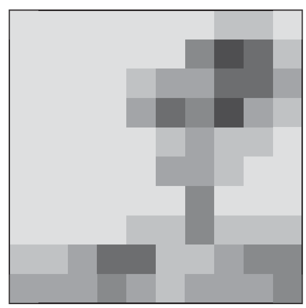
a) Imagen original



b) Pantalla de 10 × 10

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 5 & 2 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

c) Representación matricial



d) Imagen digital

Figura 3

Para digitalizar la imagen en blanco y negro de la figura 3a), colocamos una pantalla o rejilla sobre la fotografía como se muestra en la figura 3b). Cada celda de la rejilla se compara contra la escala de grises y se le asigna un valor entre 0 y 7, dependiendo de qué cuadro gris de la escala corresponde más estrechamente con la "oscuridad" de la celda. Si la celda no es uniformemente gris, se le asigna un valor promedio. Los valores se guardan en la matriz mostrada en la figura 3c). La imagen digital que corresponde a esta matriz se ilustra en la figura 3d). Es obvio que la pan-

talla o rejilla que usamos es muy amplia y no proporciona una buena resolución de la imagen. En la práctica, las cámaras digitales de alta resolución disponibles en la actualidad utilizan matrices con dimensiones de 2048×2048 o mayores.

Una vez que la imagen está almacenada en una matriz, se puede manipular efectuando operaciones matriciales. Por ejemplo, para oscurecer la imagen, sumamos una constante a cada elemento de la matriz. Para aclarar la imagen, restamos. Para incrementar el contraste, oscurecemos las zonas más oscuras y aclaramos las más claras, de modo que podríamos sumar 1 a cada elemento que sea 4, 5 o 6, y restar 1 de cada elemento que se desee 1, 2 o 3. Obsérvese que no podemos oscurecer un elemento de valor 7 o aclarar uno de valor 0. Al aplicar este proceso a la matriz de la figura 3c) se genera una nueva matriz de la figura 4a). Esto genera la imagen de alto contraste que se ilustra en la figura 4b).

$$\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&7&6&1\\ 0&0&0&0&1&2&2&6&6&2\\ 0&0&0&0&2&6&5&7&2&1\\ 0&0&0&0&0&1&2&1&1&0\\ 0&0&0&0&0&2&2&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&5&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&1&5&1&1&1\\ 1&1&2&6&6&1&1&2&5&5\\ 2&2&2&5&2&1&2&2&2&5 \end{bmatrix}$$

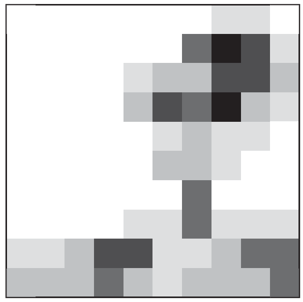


Figura 4 a) Matriz modificada para aumentar el contraste b) Imagen de alto contraste

Otras maneras de representar y manipular imágenes usando matrices se estudian en el *Proyecto Descubrimiento* de las páginas 700 y 792.

9.5 Ejercicios

1–2 ■ Determine si las matrices A y B son iguales.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 6 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \ln 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ \sqrt{4} & \frac{6}{2} \end{bmatrix}$

3–10 ■ Ejecute operaciones con las matrices o si es imposible explique la razón.

3. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

5. $3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

6. $2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

11–16 ■ Resuelva la ecuación matricial y determine la matriz X, o bien, explique por qué no hay solución.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 20 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

11. $2X + A = B$

12. $3X - B = C$

13. $2(B - X) = D$

14. $5(X - C) = D$

15. $\frac{1}{5}(X + D) = C$

16. $2A = B - 3X$

17–38 ■ Las matrices A, B, C, D, E, F y G se definen como sigue.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 7 & 3 \end{bmatrix} \qquad E = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad G = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 10 \\ 6 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Efectúe las operaciones algebraicas que se piden o explique la razón de no poder ejecutarlas.

17. $B + C$

18. $B + F$

19. $C - B$

20. $5A$

21. $3B + 2C$

22. $C - 5A$

23. $2C - 6B$

24. DA

25. AD

26. BC

27. BF

28. GF

29. $(DA)B$

30. $D(AB)$

31. GE

32. A^2

33. A^3

34. $DB + DC$

35. B^2

36. F^2

37. $BF + FE$

38. ABE

39–42 ■ Despeje x y y.

39. $\begin{bmatrix} x & 2y \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2x & -6y \end{bmatrix}$

40. $3\begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 6 \end{bmatrix}$

41. $2\begin{bmatrix} x & y \\ x + y & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$

43–46 ■ Escriba el sistema de ecuaciones en la forma de una ecuación de matrices (véase ejemplo 6).

43. $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

44. $\begin{cases} 6x - y + z = 12 \\ 2x + z = 7 \\ y - 2z = 4 \end{cases}$

45. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_3 = 5 \\ 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 4x - 2y - z = 2 \\ x + y + 5z = 2 \\ -x - y - z = 2 \end{cases}$

47. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -9 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Determine cuál de los siguientes productos están definidos y calcule los que lo estén.

ABC	ACB	BAC
BCA	CAB	CBA

48. a) Demuestre que si A y B son matrices 2×2, entonces

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

b) Si A y B son matrices 2×2, es necesariamente cierto que

$$(A + B)^2 \stackrel{?}{=} A^2 + 2AB + B^2$$

Aplicaciones

49. Ventas de bocadillos Una pequeña cadena que vende hamburguesas, *hot dogs* y malteadas posee restaurantes en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim. Cierto día, las ventas se distribuyeron de acuerdo con la matriz siguiente.

Cantidad de bocadillos vendidos

	Santa Mónica	Long Beach	Anaheim
Hamburguesas	4000	1000	3500
Hot dogs	400	300	200
Malteadas	700	500	9000

$= A$

El precio de cada bocadillo se proporciona en la matriz siguiente.

Hamburguesas	Hot dog	Malteadas
[$0.90	$0.80	$1.10]

$= B$

a) Calcule el producto BA.

b) Interprete los elementos de la matriz producto BA.

50. Ganancias por la fabricación de automóviles Un fabricante de automóviles de lujo tiene plantas en Auburn, Biloxi y Chattanooga. Produce tres modelos, y la producción diaria se presenta en la matriz siguiente.

Automóviles producidos diario

	Modelo K	Modelo R	Modelo W
Auburn	12	10	0
Biloxi	4	4	20
Chattanooga	8	9	12

$= A$

Debido a los incrementos de los salarios, las ganancias de febrero fueron menores que las de enero. La ganancia por automóvil se tabula por modelo en la matriz siguiente.

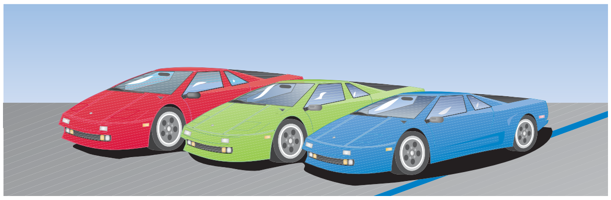
	Enero	Febrero
Modelo K	$1000	$500
Modelo R	$2000	$1200
Modelo W	$1500	$1000

$= B$

a) Calcule AB.

b) Si suponemos que los vehículos producidos se vendieron, ¿cuál fue la ganancia diaria en enero en la planta de Biloxi?

c) ¿Cuál fue la ganancia diaria por las tres plantas en febrero?



51. Empacado de productos de jitomate Jaeger Foods produce salsa y pasta de jitomate, y las empaca en recipientes pequeños, medios, grandes y gigantes. La matriz A proporciona el tamaño en onzas de cada recipiente.

	Pequeño	Medio	Grandes	Gigante
Onzas	[6	10	14	28]

$= A$

La matriz B tabula la producción de un día de salsa y pasta de jitomate.

	Latas de salsa	Latas de pasta
Pequeño	2000	2500
Medio	3000	1500
Grande	2500	1000
Gigante	1000	500

$= B$

a) Calcule el producto de AB.

b) Interprete los elementos de la matriz producto AB.

52. Ventas de productos Los tres hijos de un granjero, Amy, Beth y Chad atienden tres puestos al lado de la carretera durante los meses del verano. Un fin de semana, todos venden sandías, calabaza amarilla y jitomates. Las matrices A y B tabulan la cantidad de libras de cada uno de los productos vendidos por cada uno de los hijos en el sábado y el domingo.

Sábado

	Sandías	Calabazas	Jitomates
Amy	120	50	60
Beth	40	25	30
Chad	60	30	20

$$\begin{bmatrix} 120 & 50 & 60 \\ 40 & 25 & 30 \\ 60 & 30 & 20 \end{bmatrix} = A$$

Domingo

	Sandías	Calabazas	Jitomates
Amy	100	60	30
Beth	35	20	20
Chad	60	25	30

$$\begin{bmatrix} 100 & 60 & 30 \\ 35 & 20 & 20 \\ 60 & 25 & 30 \end{bmatrix} = B$$

La matriz C proporciona los precios por libra, en dólares, de cada tipo de producto que venden

Precio por libra

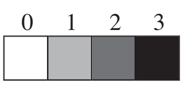
Sandías	0.10
Calabazas	0.50
Jitomates	1.00

$$\begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.50 \\ 1.00 \end{bmatrix} = C$$

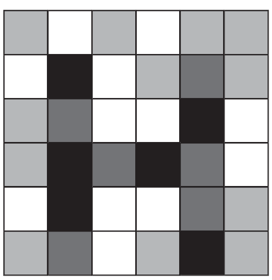
Efectúe las siguientes operaciones con las matrices e interprete los elementos en cada resultado.

a) AC **b)** BC **c)** $A + B$ **d)** $(A + B)C$

53. Imágenes digitales A continuación se muestra una escala de grises de cuatro niveles



a) Utilice la escala de grises para encontrar una matriz 6×6 que representa digitalmente la imagen de la figura.



b) Determine una matriz que represente una versión más oscura de la imagen de la figura.

c) El **negativo** de una imagen se obtiene invirtiendo luz y oscuridad, como en el negativo de una fotografía. Determine la matriz que representa el negativo de la imagen en la figura. ¿Cómo cambiará usted los elementos de la matriz para crear el negativo?

d) Incremente el contraste de la imagen cambiando cada 1 en 0 y cada 2 en 3 en la matriz que encontró en el inciso b). Dibuje la imagen representada por la matriz resultante. ¿Se aclara la imagen?

e) Dibuje la imagen representada por la matriz I. ¿Es capaz de identificar lo que es? Si no es así, trate de aumentar el contraste.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Descubrimiento • Debate

54. ¿Cuándo están definidos ambos productos? ¿Qué debe ser cierto con respecto a las dimensiones de las matrices A y B si ambos productos AB y BA están definidos?

55. Potencias de una matriz Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para A^n.

56. Potencias de una matriz Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $A^2, A^3, A^4, \ldots$ hasta que detecte un patrón. Escriba una fórmula general para A^n.

57. Raíces cuadradas de matrices Una raíz cuadrada de una matriz B es una matriz A con la propiedad de que $A^2 = B$. (Es la misma definición que para la raíz cuadrada de un número.) Calcule tantas raíces como pueda de cada matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

[*Sugerencia:* Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, escriba las ecuaciones que a, b, c y d tendrían que satisfacer si A es la raíz cuadrada de la matriz dada.]

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

¿Sobrevivirán las especies?

Para estudiar cómo sobreviven las especies, los matemáticos modelan su población mediante la observación de las diversas etapas de su vida. Por ejemplo, consideran la etapa en la cual el animal es fértil, la proporción de la población que se reproduce y la proporción de los jóvenes que sobreviven cada año. En el caso de ciertas especies hay tres etapas: inmadura, juvenil y adulta. Se considera que un animal es inmaduro el primer año de su vida; es juvenil el segundo año y adulto después. Los biólogos dedicados a la conservación han colectado los siguientes datos de campo para estas especies:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Inmadura} & \text{Juvenil} & \text{Adulta} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.8 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Inmadura} \\ \text{Juvenil} \\ \text{Adulta} \end{array} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 600 \\ 400 \\ 3500 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Inmadura} \\ \text{Juvenil} \\ \text{Adulta} \end{array}$$

Art Wolfe/Stone/Getty Images

Los elementos de la matriz A indican la proporción de la población que sobrevive *para el año próximo*. Por ejemplo, la primera columna describe qué sucede con la población inmadura: ninguna se conserva inmadura, el 10% sobrevive para convertirse en juvenil y, naturalmente, ninguna se vuelve adulta. La segunda columna describe qué sucede con la población juvenil: ninguna se vuelve inmadura, ni se queda como juvenil, y 30% sobrevive a la edad adulta. La tercera columna describe la población adulta: la cantidad de sus nuevos hijos es 40% de la población adulta, ningún adulto se vuelve juvenil y 80% sobrevive para vivir otro año. Los elementos en la matriz de la población X_0 representan la población actual (año 0) de animales inmaduros, juveniles y adultos.

Sean $X_1 = AX_0$, $X_2 = AX_1$, $X_3 = AX_2$, y así sucesivamente.

1. Explique por qué X_1 da la población en el año 1, X_2 la población en el año 2, etcétera.

2. Encuentre la matriz de la población para los años 1, 2, 3 y 4. Redondee los elementos fraccionarios al entero más cercano. ¿Observa alguna tendencia?

3. Demuestre que $X_2 = A^2X_0$, $X_3 = A^3X_0$, y así sucesivamente.

4. Calcule la población después de 50 años, es decir, determine X_{50}. Utilice los resultados del ejemplo 3 y una calculadora para graficar. ¿Parece que sobrevivirá la especie?

5. Suponga que el ambiente mejoró de modo que la proporción de inmaduros que se transforman cada año en juveniles aumenta de 0.1 a 0.3, la proporción de juveniles que se vuelven adultos se incrementa de 0.3 a 0.7 y que la proporción de adultos que sobrevive hasta el año siguiente aumenta desde 0.8 a 0.95. Calcule la población después de 50 años con la nueva matriz A. ¿Parece que la especie sobrevivirá en estas nuevas condiciones?

6. La matriz A de tasa de sobrevivencia anterior se llama **matriz de transición.** Dicha matriz se presenta en muchas aplicaciones del álgebra de matrices. La siguiente matriz de transición T predice las calificaciones de una clase de cálculo de estudiantes universitarios que deben cursar cuatro semestres de dicha materia.

Por ejemplo, la primera columna de la matriz indica que de los estudiantes que obtienen una A en un curso, 70% obtendrá una A en el curso siguiente, 15% obtendrá B y 10% tendrá C. (Los estudiantes que obtienen D o F no pueden tomar el curso siguiente, de modo que no están incluidos en la matriz.) Los elementos de la matriz Y_0 proporcionan el número de estudiantes de nuevo ingreso que obtuvieron A, B y C, respectivamente, en su curso final de matemáticas de bachillerato.

Sean $Y_1 = TY_0$, $Y_2 = TY_1$, $Y_3 = TY_2$ y $Y_4 = TY_3$. Calcule e interprete los elementos Y_1, Y_2, Y_3 y Y_4.

$$\begin{array}{c} \\ T = \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{C} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.70 & 0.25 & 0.05 \\ 0.15 & 0.50 & 0.25 \\ 0.05 & 0.15 & 0.45 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array} \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} 140 \\ 320 \\ 400 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{A} \\ \text{B} \\ \text{C} \end{array}$$

9.6 Inversas de matrices y ecuaciones matriciales

En la sección anterior estudiamos que cuando las dimensiones son adecuadas, las matrices se pueden sumar, restar y multiplicar. En esta sección se aborda la división de matrices. Con esta operación podemos resolver ecuaciones que se relacionan con matrices.

La inversa de una matriz

Primero, se definen las *matrices identidad*, las cuales desempeñan el mismo papel para la multiplicación de matrices que el número 1 para la multiplicación ordinaria de los números; es decir, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ para todos los números a. En la definición siguiente, el término **diagonal principal** se refiere a los elementos de una matriz cuadrada cuyo número de renglones y columnas son iguales. Estos elementos se acomodan en la diagonal de la matriz, de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha.

La **matriz identidad** I_n es la matriz $n \times n$ para la cual cada elemento de la diagonal principal es 1 y para la cual todos los otros elementos son 0.

Por lo tanto, las matrices identidad 2×2, 3×3 y 4×4 son

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices identidad se comportan igual que el número 1 en el sentido de que

$$A \cdot I_n = A \qquad \text{y} \qquad I_n \cdot B = B$$

siempre que estos productos estén definidos.

Ejemplo 1 Matrices identidad

Los siguientes productos de matrices muestran cómo al multiplicar una matriz por una matriz identidad de la dimensión adecuada no modifica a la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 7 & \frac{1}{2} \\ 12 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

■

Si A y B son matrices $n \times n$, y si $AB = BA = I_n$, entonces se dice que B es la inversa de A, y se escribe $B = A^{-1}$. El concepto de la inversa de una matriz es análogo al del recíproco de un número.

Inversa de una matriz

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si existe una matriz A^{-1} que sea $n \times n$ con la propiedad de que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

entonces decimos que A^{-1} es la **inversa** de A.

Ejemplo 2 Comprobación de que una matriz es una inversa

Verifique que B es la inversa de A, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Solución Se efectúan las multiplicaciones de matrices para mostrar que $AB = I$ y que $BA = I$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 1(-5) & 2(-1) + 1\cdot 2 \\ 5\cdot 3 + 3(-5) & 5(-1) + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 2 + (-1)5 & 3\cdot 1 + (-1)3 \\ (-5)2 + 2\cdot 5 & (-5)1 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Determinación de la inversa de una matriz 2 × 2

La regla siguiente proporciona una manera sencilla de determinar la inversa de una matriz 2×2, cuando existe. En el caso de matrices grandes, hay un procedimiento más general para determinar inversas, el cual se trata más adelante en esta sección.

Inversa de una matriz 2 × 2

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{entonces} \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Si $ad - bc = 0$, entonces A no tiene inversa.

Ejemplo 3 Determinación de la inversa de una matriz 2 × 2

Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine A^{-1} y compruebe que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_2$.

Solución Al aplicar la regla para la inversa de una matriz 2×2, tenemos

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \cdot 3 - 5 \cdot 2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que sí es la inversa de A, calculamos AA^{-1} y $A^{-1}A$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot \frac{3}{2} + 5(-1) & 4\left(-\frac{5}{2}\right) + 5 \cdot 2 \\ 2 \cdot \frac{3}{2} + 3(-1) & 2\left(-\frac{5}{2}\right) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot 4 + \left(-\frac{5}{2}\right)2 & \frac{3}{2} \cdot 5 + \left(-\frac{5}{2}\right)3 \\ (-1)4 + 2 \cdot 2 & (-1)5 + 2 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ■

La cantidad $ad - bc$ que aparece en la regla para calcular la inversa de una matriz 2×2 se conoce con el nombre de **determinante** de la matriz. Si el determinante es 0, entonces la matriz no tiene una inversa, ya que no podemos dividir entre 0.

Determinación de la inversa de una matriz $n \times n$

Por lo que se refiere a matrices cuadradas 3×3 y más grandes, la técnica siguiente proporciona la manera más eficaz de calcular las inversas. Si A es una matriz $n \times n$, primero construimos la matriz $n \times 2n$ que tiene los elementos de A en la izquierda y de la matriz identidad I_n a la derecha:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

Luego se efectúan operaciones elementales con los renglones en esta gran matriz nueva para cambiar el lado izquierdo en la matriz identidad. (Esto quiere decir que estamos cambiando la matriz grande a una forma escalonada reducida.) El lado de la derecha se transforma de manera automática en A^{-1}. Omitimos la demostración de este hecho.

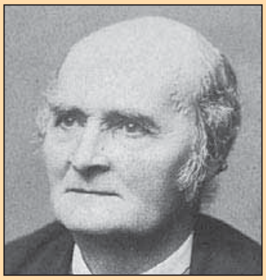
Ejemplo 4 Determinación de la inversa de una matriz 3 × 3

Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$$

a) Determine A^{-1}.

b) Verifique que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.



The Granger Collection

Arthur Cayley (1821-1895) fue un matemático inglés que desarrolló la teoría de las matrices. Fue el primero en utilizar un solo símbolo como *A* para representar a una matriz, con lo cual introdujo la idea de que una matriz es una sola entidad, y no una colección de números. Cayley ejerció como abogado hasta la edad de 42 años, pero su principal interés desde que era adolescente fueron las matemáticas. Publicó cerca de 200 artículos sobre el tema. En 1863 aceptó ser catedrático de matemáticas en Cambridge, de donde fue maestro hasta que murió. El trabajo de Cayley sobre las matrices fue de interés puramente teórico en su época, pero en el siglo XX muchos de sus resultados encontraron aplicación en la física, las ciencias sociales, finanzas y otros campos. En la actualidad, uno de los usos más comunes de las matrices se da en las computadoras, en las que se utilizan para guardar información, para corrección de errores, manipulación de imágenes y muchas cosas más. Estas aplicaciones han hecho que el álgebra de matrices sea más útil que nunca.

Solución

a) Empezamos con la matriz 3×6 cuya mitad izquierda es A y cuya mitad derecha es la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Luego transformamos la mitad izquierda de esta nueva matriz en la matriz identidad efectuando la secuencia siguiente de operaciones elementales con los renglones en *toda* la matriz nueva:

$$\xrightarrow[R_3 + 3R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3} R_3} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1 + 2R_2 \to R_1} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 - 2R_3 \to R_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Ya transformamos la mitad izquierda de esta matriz en una matriz identidad. Esto quiere decir que ya convertimos toda la matriz en la forma escalonada reducida. Observe que para hacerlo tan sistemático como sea posible, primero se cambian los elementos que se encuentran abajo de la diagonal principal a ceros, justo como lo haríamos si fuéramos a utilizar la eliminación de Gauss. Luego se cambia cada elemento de la diagonal principal a 1 multiplicando por la(s) constante(s) adecuada(s). Para finalizar, el proceso termina al cambiar los elementos restantes en el lado izquierdo a ceros.

La mitad derecha es ahora A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

b) Calculamos AA^{-1} y $A^{-1}A$, y comprobamos que ambos productos dan la matriz identidad I_3.

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Mediante las calculadoras para graficar también se puede calcular la inversa de las matrices. En las calculadoras TI-82 y TI-83, las matrices se almacenan en la memoria usando nombres como `[A]`, `[B]`, `[C]`, ... Para determinar la inversa de `[A]`, se presionan las teclas

`[A]` $\boxed{x^{-1}}$ $\boxed{\text{ENTER}}$

```
[A]⁻¹▶Frac
   [[-3 2 0    ]
    [-4 1 -2/3]
    [1  0 1/3 ]]
```

Figura 1

En el caso de la matriz del ejemplo 4, estos resultados en la salida que se ilustra en la figura 1, donde también usamos el comando `▶Frac` para desplegar los resultados en la forma fraccionaria y no en la forma decimal.

El ejemplo siguiente ilustra que no todas las matrices cuadradas tienen una inversa.

Ejemplo 5 Una matriz que no tiene inversa

Calcule la inversa de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución Procedemos como sigue.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 - R_1 \to R_3]{R_2 - 2R_1 \to R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -21 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7} R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1 - 2R_2 \to R_1]{R_3 + R_2 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{5}{7} & 1 \end{array}\right]$$

En este punto nos gustaría cambiar el 0 en la posición (3, 3) de esta matriz en 1, sin cambiar los ceros de las posiciones (3, 1) y (3, 2). No hay manera de lograrlo porque no importa qué múltiplo de renglones 1, 2 o de ambos sumemos al renglón 3, no podemos cambiar el tercer 0 del reglón 3 sin cambiar el primero o el segundo cero también. Por lo tanto, no podemos cambiar la mitad izquierda a la matriz identidad, de modo que la matriz original no tiene inversa. ■

```
ERR:SINGULAR MAT
1:Quit
2:Goto
```

Figura 2

Si encontramos un renglón de ceros a la izquierda cuando tratamos de encontrar la inversa, como en el ejemplo 5, entonces la matriz original no tiene inversa. Si tratamos de calcular la inversa de la matriz del ejemplo 5 en la graficadora TI-83 obtenemos el mensaje de error que se muestra en la figura 2. (La matriz que no tiene inversa se llama *singular*.)

Ecuaciones matriciales

Ya vimos en el ejemplo 6 de la sección 9.5 que el sistema de ecuaciones lineales se puede escribir como una ecuación de una sola matriz. Por ejemplo, el sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 7 \\ 2x - 3y - 6z = 5 \\ -3x + 6y + 15z = 0 \end{cases}$$

equivale a la ecuación matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B}$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces esta ecuación matricial se puede escribir como

$$AX = B$$

La matriz A se llama **matriz de coeficientes.**

Resolvemos esta ecuación matricial multiplicando cada lado por la inversa de A (siempre que esta inversa exista):

La resolución de la ecuación $AX = B$ es muy parecida a la resolución de la ecuación simple de números reales

$$3x = 12$$

lo cual se hace multiplicando ambos miembros por el recíproco (o inverso) de 3:

$$\tfrac{1}{3}(3x) = \tfrac{1}{3}(12)$$

$$x = 4$$

$AX = B$	
$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$	Multiplicación de ambos lados de la ecuación por A^{-1}
$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$	Propiedad asociativa
$I_3X = A^{-1}B$	Propiedad de las inversas
$X = A^{-1}B$	Propiedad de la matriz identidad

En el ejemplo 4 mostramos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

De este modo, de acuerdo con $X = A^{-1}B$ tenemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} -11 \\ -23 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $x = -11$, $y = -23$, $z = 7$ es la solución del sistema original.

Ya demostramos que la ecuación matricial $AX = B$ se puede resolver mediante el método siguiente.

Resolución de una ecuación matricial

Si A es una matriz cuadrada $n \times n$ cuya inversa es A^{-1} y si X es una matriz variable y B una matriz conocida, ambas con n renglones, entonces la solución de la ecuación matricial

$$AX = B$$

está dada por

$$X = A^{-1}B$$

Ejemplo 6 Resolución de un sistema usando la inversa de una matriz

a) Escriba el sistema de ecuaciones como una ecuación matricial.

b) Resuelva el sistema determinando la solución de la ecuación matricial.

$$\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$$

Solución

a) Se escribe el sistema como una ecuación matricial de la forma $AX = B$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}}_{B}$$

b) Si se aplica la regla para determinar la inversa de la matriz 2×2, obtenemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2(-6) - (-5)3} \begin{bmatrix} -6 & -(-5) \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación matricial por esta matriz inversa, se obtiene

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}}_{A^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Entonces $x = 30$ y $y = 9$. ■

Matemáticas en el mundo moderno

Volvox/Index Stock

Ecología matemática

En los años setenta del siglo XX, las ballenas jorobadas se convirtieron en un punto de controversia. Los ambientalistas opinaban que la caza de ballenas amenazaba a estos animales con una inminente extinción: los cazadores de ballenas consideraron que su medio de subsistencia se veía amenazado por los intentos de detener la cacería de ballenas. ¿Realmente la caza de ballenas amenaza con extinguirlas? ¿Qué nivel de caza es seguro para garantizar la supervivencia de las ballenas? Estas preguntas ocasionaron que los matemáticos estudiaran con mayor detenimiento los patrones poblacionales de las ballenas y otras especies.

Ya por los años veinte del siglo pasado, Alfred J. Lotka y Vito Volterra crearon el campo de la biología matemática que planteaba los modelos predador/presa. Sus modelos, los cuales se apoyan en una rama de las matemáticas llamada ecuaciones diferenciales, toman en cuenta la velocidad a la cual el predador consume a su presa y la tasa de crecimiento de cada población. Tenga en cuenta que cuando el predador se come a su presa, la población de la presa disminuye; esto significa que hay menos alimento para los predadores, de modo que su población empieza a decrecer; con menos predadores, la población de las presas empieza a incrementarse, y así sucesivamente. Por lo regular, se genera un estado de equilibrio, y las dos

(continúa)

Aplicaciones

Suponga que es necesario resolver varios sistemas de ecuaciones con la misma matriz de coeficientes. Entonces, transformar los sistemas en ecuaciones matriciales proporciona una manera eficaz de llegar a las soluciones porque sólo necesitamos encontrar una vez la inversa de la matriz de coeficientes. Este procedimiento es conveniente en particular si usamos una calculadora de gráficas para efectuar las operaciones con matrices, como en el ejemplo que sigue.

Ejemplo 7 Modelado de las cantidades de nutrientes necesarias usando ecuaciones matriciales

El dueño de una tienda de animales alimenta a hamsters y jerbos con diferentes mezclas de tres tipos de alimento para roedores: KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow. Quiere alimentar a sus animales con la cantidad correcta de cada marca para cumplir exactamente con las necesidades diarias de proteínas, grasas y carbohidratos. Suponga que los hamsters requieren todos los días 340 mg de proteínas, 280 mg de grasa y 440 mg de carbohidratos, y los jerbos necesitan 480 mg de proteínas, 360 mg de grasa y 680 mg de carbohidratos. La cantidad de cada nutriente, en miligramos, en un gramo de cada marca se proporciona en la tabla siguiente. ¿Cuántos gramos de cada marca debe dar diariamente el dueño de la tienda a sus hamsters y jerbos con el fin de cumplir con las necesidades nutricionales?

	KayDee Food	Pet Pellets	Rodent Chow
Proteína (mg)	10	0	20
Grasas (mg)	10	20	10
Carbohidratos (mg)	5	10	30

Solución Sean x_1, x_2 y x_3 las cantidades en gramos de KayDee Food, Pet Pellets y Rodent Chow que deben comer los hamsters y y_1, y_2 y y_3 las cantidades correspondientes para los jerbos. Luego resolvemos las ecuaciones matriciales

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para los hamsters}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix} \qquad \text{Ecuación para los jerbos}$$

Sea

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 480 \\ 360 \\ 680 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

poblaciones alternan entre un mínimo y un máximo. Observe que si los predadores se comen a su presa demasiado rápido se quedarán sin alimento y se encaminan a su propia extinción.

Desde la época de Lotka y Volterra se han desarrollado modelos matemáticos más detallados de las poblaciones de animales. Por lo que toca a muchas especies, la población se divide en varias etapas: inmaduros, juveniles, adultos, etcétera. La proporción de cada etapa que sobrevive o se reproduce en un tiempo dado se introduce en una matriz, que se llama matriz de transición. Luego se usa la multiplicación de matrices para predecir la población en los periodos exitosos. (Véase el *Proyecto para un descubrimiento*, página 688.)

Como se puede observar, el poder de las matemáticas para modelar y predecir es una herramienta invaluable en el debate actual sobre el ambiente.

Luego se pueden escribir estas ecuaciones matriciales como

$$AX = B \qquad \text{Ecuación para los hamsters}$$

$$AY = C \qquad \text{Ecuación para los jerbos}$$

Se quiere determinar X y Y, así que se multiplican ambos miembros de cada ecuación por A^{-1}, la inversa de la matriz de los coeficientes. Podemos determinar A^{-1} en forma manual, pero es mejor usar una calculadora graficadora como se muestra en la figura 3.

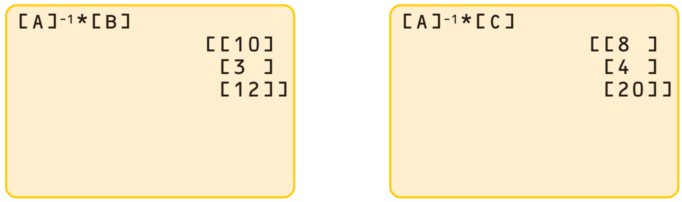


Figura 3 a) b)

De acuerdo con los resultados que da la calculadora vemos que

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}, \qquad Y = A^{-1}C = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, cada hamster debe comer diario 10 g de KayDee Food, 3 g de Pet Pellets y 12 g de Rodent Chow, y cada jerbo debe comer todos los días 8 g de KayDee Food, 4 g de Pet Pellets y 20 g de Rodent Chow. ■

9.6 Ejercicios

1–4 ■ Calcule los productos AB y BA para verificar que B es la inversa de A.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -8 \\ -12 & 14 & 11 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5–6 ■ Determine la inversa de la matriz y verifique que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_2$ y $B^{-1}B = BB^{-1} = I_3$.

5. $A = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

7–22 ■ Determine la inversa de la matriz, si existe.

7. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & -13 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -8 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 0.4 & -1.2 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -10 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

23–30 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones transformándolo en una ecuación matricial y usando la inversa de la matriz de los coeficientes como en el ejemplo 6. Use las inversas de los ejercicios 7 a 10, 15, 16, 19 y 21.

23. $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ -5x - 13y = 20 \end{cases}$

26. $\begin{cases} -7x + 4y = 0 \\ 8x - 5y = 100 \end{cases}$

27. $\begin{cases} 2x + 4y + z = 7 \\ -x + y - z = 0 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 5x + 7y + 4z = 1 \\ 3x - y + 3z = 1 \\ 6x + 7y + 5z = 1 \end{cases}$

29. $\begin{cases} -2y + 2z = 12 \\ 3x + y + 3z = -2 \\ x - 2y + 3z = 8 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + 2y + 3w = 0 \\ y + z + w = 1 \\ y + w = 2 \\ x + 2y + 2w = 3 \end{cases}$

31–36 ■ Mediante una calculadora que puede ejecutar operaciones con las matrices resuelva el sistema, como en el ejemplo 7.

31. $\begin{cases} x + y - 2z = 3 \\ 2x + 5z = 11 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$

32. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 2 \\ 2x - 3y + z = -5 \\ 5x - 2y + 2z = -3 \end{cases}$

33. $\begin{cases} 12x + \frac{1}{2}y - 7z = 21 \\ 11x - 2y + 3z = 43 \\ 13x + y - 4z = 29 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z = 4 \\ x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{6}z = 7 \\ x + y - z = -6 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x + y - 3w = 0 \\ x - 2z = 8 \\ 2y - z + w = 5 \\ 2x + 3y - 2w = 13 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + y + z + w = 15 \\ x - y + z - w = 5 \\ x + 2y + 3z + 4w = 26 \\ x - 2y + 3z - 4w = 2 \end{cases}$

37–38 ■ Resuelva la ecuación matricial multiplicando cada miembro por la matriz inversa adecuada.

37. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

39–40 ■ Determine la inversa de la matriz.

39. $\begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}$ $(a \neq 0)$

40. $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ $(abcd \neq 0)$

41–46 ■ Determine la inversa de la matriz. ¿Para qué valor(es) de x, si lo(s) hay, la matriz no tiene inversa?

41. $\begin{bmatrix} 2 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix}$

42. $\begin{bmatrix} e^x & -e^{2x} \\ e^{2x} & e^{3x} \end{bmatrix}$

43. $\begin{bmatrix} 1 & e^x & 0 \\ e^x & -e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

44. $\begin{bmatrix} x & 1 \\ -x & \dfrac{1}{x-1} \end{bmatrix}$

45. $\begin{bmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$

46. $\begin{bmatrix} \sec x & \tan x \\ \tan x & \sec x \end{bmatrix}$

Aplicaciones

47. Nutrición Un nutriólogo está estudiando los efectos del ácido fólico, colina e inositol. Dispone de tres tipos de alimentos, y cada uno contiene las cantidades siguientes por cada onza:

	Tipo A	Tipo B	Tipo C
Ácido fólico (mg)	3	1	3
Colina (mg)	4	2	4
Inositol (mg)	3	2	4

a) Determine la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

y por medio de ella resuelva las otras partes del problema.

b) ¿Con cuántas onzas de cada alimento debe alimentar el nutriólogo a sus ratas de laboratorio si desea que su dieta diaria contenga 10 g de ácido fólico, 14 mg de colina y 13 mg de inositol?

c) ¿Cuánto alimento es necesario para suministrar 9 mg de ácido fólico, 12 mg de colina y 10 mg de inositol?

d) ¿Alguna combinación de estos alimentos proporciona 2 mg de ácido fólico, 4 mg de colina y 11 mg de inositol?

48. Nutrición Refiérase al ejercicio 47. Suponga que el alimento tipo C está mal etiquetado, y que en realidad contiene 4 mg de ácido fólico, 6 mg de colina y 5 mg de inositol por cada onza. ¿Sería posible usar la inversión de matrices para resolver los incisos b), c) y d) del ejercicio 47? ¿Por qué sí o por qué no?

49. Comisiones por ventas Una vendedora de enciclopedias trabaja para una compañía que ofrece tres distintos grados de forros para sus enciclopedias: estándar, de lujo y de piel. Por cada juego que vende, gana una comisión que se basa en el tipo de forro de los tomos. Una semana vendió una enciclopedia con forro estándar, una de lujo y dos con forro de piel, lo cual representó 675 dólares de comisión. La siguiente semana vendió dos con forro estándar, una de lujo y una de piel para conseguir una comisión de 600 dólares. La tercera semana vendió una estándar, dos de lujo y una de piel, y ganó 625 dólares en comisión.

a) Sea x, y y z las comisiones que gana la vendedora en la enciclopedia estándar, de lujo y de piel, respectivamente. Traduzca la información a un sistema de ecuaciones con x, y y z.

b) Exprese el sistema de ecuaciones que determinó en el inciso a) como una ecuación matricial de la forma $AX = B$.

c) Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes A y utilícela para resolver la ecuación matricial del inciso b). ¿Qué tanto de comisión gana la vendedora por cada enciclopedia de los distintos tipos de forro?

Descubrimiento • Debate

50. Propiedad del producto no nulo de las matrices Hemos aplicado la propiedad del producto nulo para resolver ecuaciones algebraicas. Las matrices *no* tienen esta propiedad. Sea O la **matriz nula 2 × 2:**

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine matrices 2×2 $A \neq O$ y $B \neq O$ tal como $AB = O$. ¿Puede determinar una matriz $A \neq O$ tal que $A^2 = O$?

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Imágenes mediante computadora I

El álgebra de matrices es la herramienta fundamental que se usa en la computadora para manipular imágenes en la pantalla. Vemos cómo la multiplicación de matrices se puede usar para "mover" un punto en el plano hasta un lugar determinado. Al combinar dichos movimientos podemos estirar, comprimir, girar y hacer otro tipo de transformaciones en una figura, como vemos en las imágenes que siguen.

Imagen

Comprimida

Girada

Alargamiento

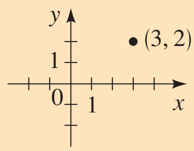
Puntos que se desplazan en el plano

Representemos el punto (x, y) en el plano mediante la matriz 2×1:

$$(x, y) \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, el punto $(3, 2)$ en la figura se representa con la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

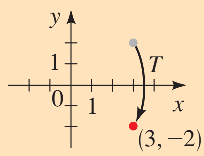


Al multiplicar por una matriz 2×2 el punto se *mueve* en el plano. Por ejemplo, si

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

entonces al multiplicar P por T tenemos

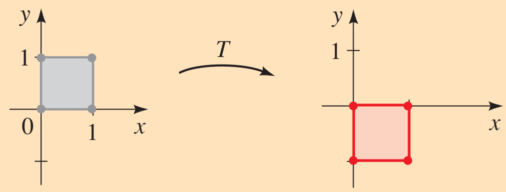
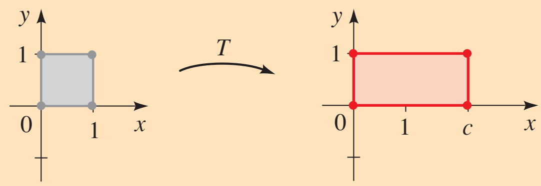
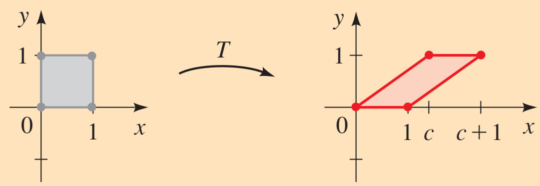
$$TP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$



Vemos que el punto $(3, 2)$ se desplazó al punto $(3, -2)$. En general, la multiplicación por esta matriz T refleja puntos en el eje x. Si cada uno de los puntos de una imagen se multiplica por esta matriz, entonces la imagen completa cambia bruscamente de arriba hacia abajo con respecto al eje x. La multiplicación matricial "transforma" un punto en otro punto nuevo en el plano. Por esta razón, una matriz usada de esta manera se llama **transformación.**

En la tabla 1 se proporcionan algunas transformaciones y sus efectos en el cuadrado gris en el primer cuadrante.

Tabla 1

Transformación matricial	Efecto
$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ Reflexión en el eje x	
$T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Expansión, o bien, contracción en la dirección del eje x	
$T = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Cortante o alargamiento sesgado en la dirección x	

Imágenes que se desplazan en el plano

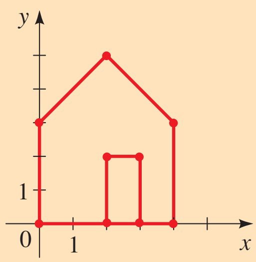


Figura 1

Los dibujos sencillos de línea como la casita de la figura 1 consisten en una colección de vértices que se unen mediante segmentos de recta. La imagen completa de la figura 1 se puede representar en una computadora mediante la **matriz de datos** 2×11

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Las columnas de D representan los vértices de la imagen. Para dibujar la casa unimos los puntos sucesivos (columnas) de D mediante segmentos de recta. Luego podemos transformar la casa entera si multiplicamos D por una matriz adecuada de transformación. Por ejemplo, si aplicamos la transformación de cortante $T = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtenemos la siguiente matriz

$$TD = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1.5 & 4.5 & 5.5 & 4 & 3 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

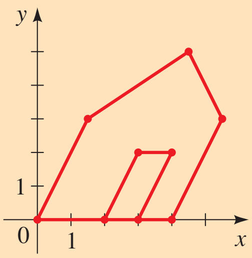
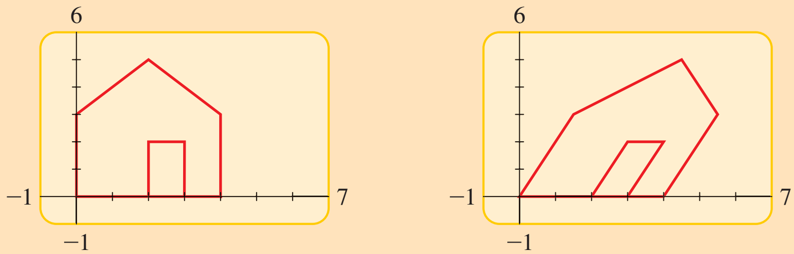


Figura 2

```
PROGRAM:IMAGE
:For(N,1,10)
:Line([A](1,N),
 [A](2,N),[A](1,N+1),
 [A](2,N+1))
:End
```

Para dibujar la imagen representada por TD, empezamos con el punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, que se une con el punto $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, mediante un segmento rectilíneo, luego otro segmento de recta va al punto $\begin{bmatrix} 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$, y así sucesivamente. La casa inclinada resultante se ilustra en la figura 2.

Una manera conveniente de dibujar una imagen que corresponde a una matriz de datos dada es usar una calculadora para graficar. El programa de la TI-83 que se encuentra en el margen convierte una matriz de datos almacenada en `[A]` en la imagen correspondiente, como se muestra en la figura 3. (Para usar este programa con una matriz de datos con m columnas, almacene la matriz en `[A]`, y cambie el "10" en el comando `For` a $m - 1$.)



a) Casa con matriz de datos D

b) Casa inclinada con la matriz de datos TD

Figura 3

Volveremos sobre el tema de los elementos gráficos elaborados mediante computadora en el Proyecto *Descubrimiento* de la página 792, donde encontraremos matrices que giran una imagen en un ángulo dado.

1. El cuadrado gris de la tabla 1 tiene los vértices siguientes.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aplique las tres transformaciones que se proporcionan en la tabla 1 a estos vértices y dibuje el resultado para verificar que cada transformación tiene el efecto indicado. Use $c = 2$ en la matriz de expansión y $c = 1$ en la matriz de cortante.

2. Verifique que la multiplicación por una matriz dada tiene el efecto señalado cuando se aplica al cuadrado gris de la tabla. Use $c = 3$ en la matriz de expansión y $c = 1$ en la matriz de cortante.

$$T_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \qquad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexión en el eje y — Expansión o contracción en la dirección y — Cortante en la dirección y

3. Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) ¿Qué efecto tiene T en el cuadrado gris de la tabla 1?

b) Determine T^{-1}.

c) ¿Qué efecto tiene T^{-1} en el cuadrado gris?

d) ¿Qué sucede en el cuadrado si primero aplicamos T y luego T^{-1}?

4. a) Sea $T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ¿Qué efecto tiene T en el cuadrado gris de la tabla 1?

b) Sea $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. ¿Qué efecto tiene S en el cuadrado gris de la tabla 1?

c) Aplique S a los vértices del cuadrado y luego aplique T al resultado. ¿Cuál es el efecto de la transformación combinada?

d) Determine la matriz producto $W = TS$.

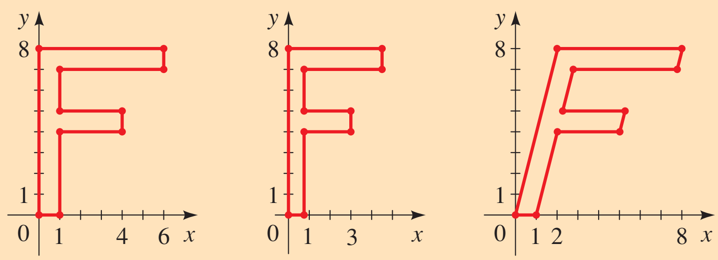
e) Aplique la transformación W al cuadrado. Compare con el resultado final del inciso c). ¿Qué observa?

5. La figura muestra tres versiones de la letra **F**. La segunda se obtiene de la primera encogiéndola horizontalmente por un factor de 0.75, y la tercera es el resultado de estirar la primera, es decir, aplicarle horizontalmente un cortante, en un factor de 0.25.

a) Determine una matriz de datos D para la primera letra **F**.

b) Encuentre la matriz de transformación T que convierte la primera **F** en la segunda. Calcule TD y verifique que es una matriz de datos para la segunda **F.**

c) Calcule la matriz de transformación S que convierte la primera **F** en la tercera. Calcule también SD y compruebe que es una matriz de datos para la tercera **F**.



6. He aquí una matriz de datos para un dibujo de línea.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Dibuje la imagen que representa D.

b) Sea $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Calcule el producto matricial TD y dibuje la imagen que representa este producto. ¿Cuál es el efecto de la transformación T?

c) Exprese T como un producto de matriz de cortante y una matriz de reflexión. (Véase el problema 2.)

9.7 Determinantes y la regla de Cramer

Si una matriz es **cuadrada**, es decir, si tiene el mismo número de renglones que de columnas, entonces podemos asignarle un número llamado *determinante*. Mediante determinantes podemos resolver sistemas de ecuaciones lineales, como se ve más adelante en esta misma sección. También son de utilidad para determinar si una matriz tiene una inversa.

Determinantes de una matriz 2 × 2

El determinante de una matriz cuadrada A se denota por el símbolo $\det(A)$ o $|A|$. Primero definimos $\det(A)$ para los casos más sencillos. Si $A = [a]$ es una matriz 1×1 entonces $\det(A) = a$. En el siguiente recuadro se encuentra la definición de un determinante 2×2.

Usaremos ambas notaciones, $\det(A)$ y $|A|$, para el determinante de A. Aunque el símbolo $|A|$ se parece al símbolo de valor absoluto, es evidente que por el contexto se sabrá cuál es el significado que tiene.

Determinante de una matriz 2 × 2

El **determinante** de la matriz 2×2, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Ejemplo 1 Determinante de una matriz 2 × 2

Evalúe $|A|$ para $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Solución

Para evaluar un determinante 2×2 calculamos el producto de la diagonal que va de la esquina superior izquierda a la esquina inferior derecha, y se resta el producto de la esquina superior derecha a la esquina inferior izquierda, según se indica mediante las flechas.

$$\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - (-3)2 = 18 - (-6) = 24$$ ■

Determinante de una matriz *n* × *n*

Para definir el concepto de determinante para una matriz arbitraria $n \times n$ se necesitan los términos siguientes.

Sea A una matriz $n \times n$.

1. El **menor** M_{ij} del elemento a_{ij} es el determinante de la matriz obtenido al eliminar el renglón i-esimo y la j-ésima columna de A.
2. El **cofactor** A_{ij} del elemento a_{ij} es

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Por ejemplo si A es la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

entonces el menor M_{12} es el determinante de la matriz que se obtiene luego de borrar el primer renglón y la segunda columna de A. Por lo tanto,

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 0(6) - 4(-2) = 8$$

Entonces, el cofactor $A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -8$. De igual manera,

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 0 = 4$$

Así que, $A_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = 4$.

Observe que el cofactor de a_{ij} es simplemente el menor de a_{ij} multiplicado por 1 o -1, lo cual depende de si $i + j$ es par o impar. Por lo tanto, en una matriz 3×3 obtenemos el cofactor de cualquier elemento anteponiendo a su menor el signo obtenido del siguiente diagrama:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

Ahora ya estamos listos para definir el determinante de cualquier matriz cuadrada.

Determinante de una matriz cuadrada

Si A es una matriz $n \times n$, entonces el **determinante** de A se obtiene multiplicando cada elemento del primer renglón por su cofactor, y sumando luego los resultados. En símbolos,

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

Ejemplo 2 Determinante de una matriz 3 × 3

Evalúe el determinante de la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2 \cdot 6 - 4 \cdot 5) - 3[0 \cdot 6 - 4(-2)] - [0 \cdot 5 - 2(-2)]$$

$$= -16 - 24 - 4$$

$$= -44$$

■

En la definición de determinante usamos sólo los cofactores de los elementos del primer renglón. Este procedimiento se denomina **expansión del determinante a partir del primer renglón**. En efecto, *podemos expandir el determinante a partir de cualquier renglón o columna, y obtener el mismo resultado en cada caso* (aunque no lo demostraríamos). El ejemplo siguiente ilustra este principio.

Ejemplo 3 Expansión de un determinante con respecto a un renglón y a una columna

Sea A la matriz del ejemplo 2. Evalúe el determinante de A expandiendo

a) a partir del segundo renglón

b) a partir de la tercera columna.

Verifique que cada expansión dé el mismo valor.

Solución

a) Al expandir a partir del segundo renglón tenemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 2[2 \cdot 6 - (-1)(-2)] - 4[2 \cdot 5 - 3(-2)]$$

$$= 0 + 20 - 64 = -44$$

b) Al expandir a partir de la tercera columna tenemos

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= -1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -[0 \cdot 5 - 2(-2)] - 4[2 \cdot 5 - 3(-2)] + 6(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0)$$

$$= -4 - 64 + 24 = -44$$

Las calculadoras gráficas pueden calcular determinantes. En seguida se muestra el resultado que proporciona la TI-83 del cálculo del determinante del ejemplo 3.

```
[A]
        [[2  3 -1]
         [0  2  4 ]
         [-2 5  6 ]]
det([A])
                -44
```

En ambos casos llegamos al mismo valor del determinante, como cuando expandimos a partir de primer renglón del ejemplo 2. ■

El criterio siguiente permite que determinemos si una matriz cuadrada tiene una inversa sin calcular realmente la inversa. Este es uno de los más importantes usos del determinante en el álgebra de matrices, y es la razón del nombre *determinante*.

Criterio de inversibilidad

Si A es una matriz cuadrada, entonces A tiene una inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

No demostraremos este hecho, pero a partir de la fórmula de la inversa de una matriz 2×2 (página 704) usted puede observar por qué es verdadero en el caso de 2×2.

Ejemplo 4 Uso del determinante para mostrar que una matriz no es invertible

Demuestre que la matriz A no tiene inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

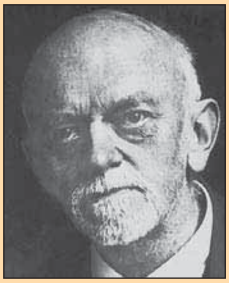
Solución Empezamos por calcular el determinante de A. Puesto que todos menos uno de los elementos de segundo renglón son cero, expandimos el determinante a partir del segundo renglón. Si así lo hacemos, de acuerdo con la siguiente ecuación vemos que sólo el cofactor A_{24} tendrá que ser calculado.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 9 \end{vmatrix} \\ &= -0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} - 0 \cdot A_{23} + 3 \cdot A_{24} = 3A_{24} \\ &= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \text{Expandir esto a partir de la columna 3} \\ &= 3(-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-2)(1 \cdot 4 - 2 \cdot 2) = 0 \end{aligned}$$

Como el determinante de A es cero, A no puede tener una inversa, de acuerdo con el criterio de la inversibilidad. ■

Transformaciones de renglones y columnas

El ejemplo anterior muestra que si expandimos un determinante con respecto a un renglón o una columna que contiene muchos ceros, el trabajo se reduce en forma notable porque no tenemos que evaluar los cofactores de los elementos que son cero. Con frecuencia, el principio siguiente simplifica el proceso de calcular un determinante mediante la introducción de ceros sin cambiar su valor.



B. H. Ward and K. C. Ward/Corbis

David Hilbert (1862-1943) nació en Königsberg, Alemania, y fue maestro en la Universidad de Göttingen. Muchos lo consideran como el matemático más grande del siglo XX. En el Congreso Internacional de Matemáticos celebrado en París en 1900, Hilbert fijó la dirección de las matemáticas del apenas iniciado siglo XX planteando 23 problemas que creyó eran de gran importancia. Decía "éstos son problemas cuyas soluciones esperamos desde el futuro". La mayoría de los problemas de Hilbert ya fue resuelta (véanse Julia Robinson, página 678, y Alan Turing, página 103), y sus soluciones han guiado hacia nuevos campos de la investigación matemática. Pero ya empezado el nuevo milenio varios de sus problemas siguen sin ser resueltos. En su trabajo, Hilbert destacó la estructura, lógica y los fundamentos de las matemáticas. Parte de su genio radicaba en su habilidad para ver el planteamiento más general posible de un problema. Por ejemplo, Euler demostró que todo número entero es la suma de cuatro cuadrados; Hilbert demostró un enunciado similar para todas las potencias de enteros positivos.

Transformaciones de renglones y columnas de un determinante

Si A es una matriz cuadrada y si la matriz B se obtiene a partir de A sumando un múltiplo de un renglón a otro, o un múltiplo de una columna a otra, entonces $\det(A) = \det(B)$.

Ejemplo 5 Uso de las transformaciones de renglones y columnas para calcular un determinante

Calcule el determinante de la matriz A. ¿Tiene inversa?

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & 11 \\ 24 & 6 & 1 & -12 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución Si se multiplica por -3 al renglón 1 y se suma todo al renglón 3, hacemos cero todos los elementos, con excepción de uno, del renglón 3:

$$\begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 5 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta nueva matriz tiene el mismo determinante que A, y si se expande su determinante a partir del tercer renglón, se obtiene

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Ahora se multiplica 2 por la columna 3 y se suma a la columna 1 en este determinante, y tenemos

$$\det(A) = 4\begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 25 & 5 & 11 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{Expanda esto a partir de la columna 1}$$

$$= 4(-25)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-25)[2(-1) - (-4)2] = -600$$

Como el determinante de A no es cero, A sí tiene inversa. ■

Regla de Cramer

Algunas veces, las soluciones de las ecuaciones lineales se pueden expresar usando determinantes. Para ilustrarlo, resolvamos el siguiente par de ecuaciones lineales y determinemos la variable x.

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

Para eliminar la variable y, multiplicamos la primera ecuación por d y la segunda por b, y restamos.

$$\begin{array}{r} adx + bdy = rd \\ bcx + bdy = bs \\ \hline adx - bcx = rd - bs \end{array}$$

Al factorizar el primer miembro, obtenemos $(ad - bc)x = rd - bs$. Si suponemos que $ad - bc \neq 0$, ya podemos encontrar el valor de x:

$$x = \frac{rd - bs}{ad - bc}$$

De igual manera, determinamos que

$$y = \frac{as - cr}{ad - bc}$$

El numerador y el denominador de las fracciones de x y de y son determinantes de matrices 2×2. Entonces podemos expresar la solución del sistema usando determinantes como sigue.

Regla de Cramer para sistemas con dos variables

El sistema lineal

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = s \end{cases}$$

tiene como solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

siempre que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

Si usamos la notación

$$D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad D_x = \begin{bmatrix} r & b \\ s & d \end{bmatrix} \qquad D_y = \begin{bmatrix} a & r \\ c & s \end{bmatrix}$$

Matriz de coeficientes

Reemplace la primera columna de D por r y s.

Reemplace la segunda columna de D por r y s.

podemos escribir la solución del sistema como

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} \quad \text{y} \quad y = \frac{|D_y|}{|D|}$$

The Granger Collection

Emmy Noether (1882-1935) fue uno de los matemáticos más destacados de los inicios del siglo XX. Su trabajo innovador en álgebra abstracta proporcionó gran parte de los cimientos de este campo, y su trabajo en la teoría invariante fue esencial en la formulación de la teoría general de la relatividad de Einstein. Aunque a las mujeres no se les permitía estudiar en las universidades alemanas en esa época, ella tomó cursos como oyente y continuó hasta que recibió un doctorado *summa cum laude* en Erlangen, a pesar de la oposición del Consejo Académico, el cual declaró que las mujeres estudiantes "desmantelarían todo el orden académico". Posteriormente fue maestra de matemáticas en Göttingen, Moscú y Frankfurt. En 1933 abandonó Alemania para escapar de la persecución de los nazis, y aceptó trabajar en el Bryn Mawr College en los suburbios de Filadelfia. Fue maestra allí y en el Institute for Advanced Study de Princeton, Nueva Jersey, hasta su temprana muerte en 1935.

Ejemplo 6 Uso de la regla de Cramer para resolver un sistema con dos variables

Aplique la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x + 6y = -1 \\ x + 8y = 2 \end{cases}$$

Solución En el caso de este sistema tenemos

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 10$$

$$|D_x| = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = (-1)8 - 6 \cdot 2 = -20$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-1)1 = 5$$

La solución es

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-20}{10} = -2$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

■

La regla de Cramer se puede generalizar para que se aplique a cualquier sistema de n ecuaciones lineales con n variables en el cual el determinante de la matriz de coeficientes no es cero. Como ya vimos en la sección anterior, cualquiera de tales sistemas se puede escribir en la forma matricial como

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Por analogía con la deducción de la regla de Cramer en el caso de dos ecuaciones con dos incógnitas, sea D la matriz de coeficientes de este sistema, y D_{x_i}, la matriz obtenida al reemplazar la i-ésima columna de D por los números $b_1, b_2, \ldots, b_n$ que aparece a la derecha del signo de igual. Entonces la regla siguiente proporciona la solución del sistema.

Regla de Cramer

Si un sistema de n ecuaciones lineales con n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ equivale a la ecuación matricial $DX = B$, y si $|D| \neq 0$, entonces sus soluciones son

$$x_1 = \frac{|D_{x_1}|}{|D|}, \quad x_2 = \frac{|D_{x_2}|}{|D|}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{|D_{x_n}|}{|D|}$$

donde D_{xi} es la matriz obtenida al reemplazar la i-ésima columna de D por la matriz B $n \times 1$.

Ejemplo 7 **Aplicación de la regla de Cramer para resolver un sistema con tres variables**

Aplique la regla de Cramer para resolver el sistema.

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 1 \\ x \quad\quad\; + 6z = 0 \\ 3x - 2y \quad\quad\; = 5 \end{cases}$$

Solución Primero evaluamos los determinantes que aparecen en la regla de Cramer. Observe que D es la matriz de coeficientes y que D_x, D_y y D_z se obtienen al reemplazar las columnas primera, segunda y tercera de D por los términos constantes.

$$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -38 \qquad |D_x| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -78$$

$$|D_y| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = -22 \qquad |D_z| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

Ahora aplicamos la regla de Cramer para llegar a la solución:

$$x = \frac{|D_x|}{|D|} = \frac{-78}{-38} = \frac{39}{19}$$

$$y = \frac{|D_y|}{|D|} = \frac{-22}{-38} = \frac{11}{19}$$

$$z = \frac{|D_z|}{|D|} = \frac{13}{-38} = -\frac{13}{38}$$

■

Si resolvemos el sistema del ejemplo 7 usando la eliminación de Gauss podríamos encontrar matrices cuyos elementos son fracciones con denominadores ciertamente grandes. Por lo tanto, en casos como los de los ejemplos 6 y 7, la regla de Cramer es una manera eficaz de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Pero en sistemas con más de tres ecuaciones, evaluar los distintos determinantes es por lo regular una tarea tardada y tediosa, a menos que usted utilice una calculadora graficadora. Además, la regla de Cramer no se aplica si $|D|$ o si D no es una matriz cuadrada. Entonces, la regla de Cramer es una alternativa útil para no usar la eliminación de Gauss, pero sólo en algunas ocasiones.

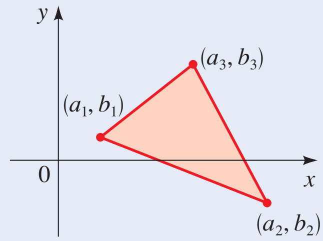
Áreas de triángulos usando determinantes

Los determinantes proporcionan una manera sencilla de calcular el área de un triángulo en el plano coordenado.

Área de un triángulo

Si un triángulo en el plano coordenado tiene vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3), entonces el área es

$$\text{área} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$



donde el signo se escoge de tal manera que el área sea positiva.

En el ejercicio 59 se le pide que demuestre esta fórmula.

Ejemplo 8 Área de un triángulo

Calcule el área del triángulo que se muestra en la figura 1.

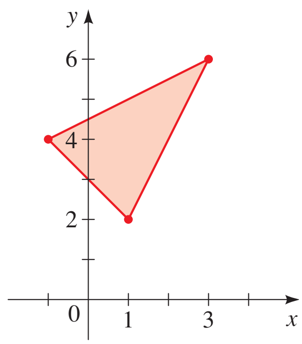


Figura 1

Solución Los vértices son $(-1, 4)$, $(3, 6)$ y $(1, 2)$. Al aplicar las fórmulas del recuadro anterior tenemos

Podemos calcular el determinante a mano o usando una calculadora que grafique.

```
[A]
        [[-1  4  1]
         [3   6  1]
         [1   2  1]]
det([A])
                 -12
```

$$\text{área} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \pm\tfrac{1}{2}(-12)$$

Para que el área sea positiva, escogemos el signo negativo de la fórmula. Por lo tanto, el área del triángulo es

$$\text{área} = -\tfrac{1}{2}(-12) = 6$$

■

9.7 Ejercicios

1–8 ■ Determine el determinante de la matriz, si existe.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2.2 & -1.4 \\ 0.5 & 1.0 \end{bmatrix}$

9–14 ■ Evalúe el menor y el cofactor mediante la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

9. M_{11}, A_{11} **10.** M_{33}, A_{33} **11.** M_{12}, A_{12}

12. M_{13}, A_{13} **13.** M_{23}, A_{23} **14.** M_{32}, A_{32}

15–22 ■ Encuentre el determinante de la matriz. Investigue si la matriz tiene inversa, pero no la calcule.

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **16.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} -2 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & 4 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 30 & 0 & 20 \\ 0 & -10 & -20 \\ 40 & 0 & 10 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ **22.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

23–26 ■ Evalúe el determinante por medio de operaciones en los renglones o en las columnas siempre que sea posible para simplificar el trabajo.

23. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ **24.** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 & 7 \\ 4 & 6 & -2 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 5 \\ 3 & -12 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ **26.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 & 4 \\ 7 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 10 & 8 \\ 6 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

27. Sea

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Evalúe $\det(B)$ por expansión del segundo renglón.

b) Encuentre $\det(B)$ por expansión de la tercera columna.

c) ¿Concuerdan sus resultados del inciso a) y del inciso b)?

28. Considere el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 6z = 5 \\ -3x - 6y + 5z = 8 \\ 2x + 6y + 9z = 7 \end{cases}$$

a) Verifique que $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ es una una solución del sistema.

b) Halle el determinante de la matriz de coeficientes.

c) Sin resolver el sistema determine si hay otras soluciones.

d) ¿Se puede utilizar la regla de Cramer para resolver este sistema? ¿Por qué si o por qué no?

29–44 ■ Aplique la regla de Cramer para resolver un sistema.

29. $\begin{cases} 2x - y = -9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$ **30.** $\begin{cases} 6x + 12y = 33 \\ 4x + 7y = 20 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x - 6y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ **32.** $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = -\frac{3}{2} \end{cases}$

33. $\begin{cases} 0.4x + 1.2y = 0.4 \\ 1.2x + 1.6y = 3.2 \end{cases}$ **34.** $\begin{cases} 10x - 17y = 21 \\ 20x - 31y = 39 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + z = 11 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ **36.** $\begin{cases} 5x - 3y + z = 6 \\ 4y - 6z = 22 \\ 7x + 10y = -13 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$ **38.** $\begin{cases} -2a + c = 2 \\ a + 2b - c = 9 \\ 3a + 5b + 2c = 22 \end{cases}$

39. $\begin{cases} \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{10} \\ -\frac{2}{3}x + \frac{2}{5}y + \frac{3}{2}z = \frac{11}{10} \\ x - \frac{4}{5}y + z = \frac{9}{5} \end{cases}$ **40.** $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 5x + 3z = 19 \\ 4y + 7z = 17 \end{cases}$

41. $\begin{cases} 3y + 5z = 4 \\ 2x - z = 10 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} 2x - 5y = 4 \\ x + y - z = 8 \\ 3x + 5z = 0 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ 2x + w = 0 \\ y - z = 0 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$ **44.** $\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ z + w = 3 \\ w - x = 4 \end{cases}$

45–46 ■ Evalúe los determinantes.

45. $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{vmatrix}$ **46.** $\begin{vmatrix} a & a & a & a & a \\ 0 & a & a & a & a \\ 0 & 0 & a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$

47–50 ■ Determine x.

47. $\begin{vmatrix} x & 12 & 13 \\ 0 & x - 1 & 23 \\ 0 & 0 & x - 2 \end{vmatrix} = 0$ **48.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & x \end{vmatrix} = 0$

49. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ x^2 & 1 & 0 \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ **50.** $\begin{vmatrix} a & b & x - a \\ x & x + b & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

51–54 ■ Dibuje el triángulo de acuerdo con los vértices dados y use un determinante para encontrar el área.

51. $(0, 0), (6, 2), (3, 8)$

52. $(1, 0), (3, 5), (-2, 2)$

53. $(-1, 3), (2, 9), (5, -6)$

54. $(-2, 5), (7, 2), (3, -4)$

55. Demuestre que $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x)$

Aplicaciones

56. Compra de fruta Un puesto de fruta a la orilla de la carretera vende manzanas a 75 centavos de dólar cada libra, duraznos a 90 centavos la libra y peras a 60 centavos cada libra. Muriel compra 18 libras de fruta por un total de 13.80 dólares. Los duraznos y las peras juntas costaron 12.80 dólares más que las manzanas.

a) Plantee un sistema lineal para la cantidad de libras de manzanas, duraznos y peras que compró Muriel.

b) Resuelva el sistema mediante la regla de Cramer.

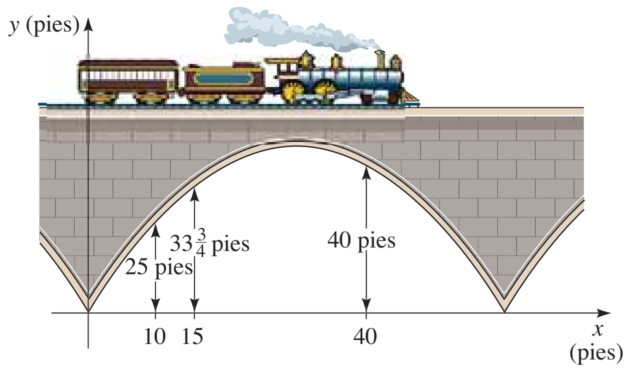
57. Arco de un puente El puente para ferrocarril que cruza una carretera tiene la forma de una parábola. Un topógrafo mide las alturas de tres puntos en el puente, que se muestran en la figura. Desea encontrar una ecuación de la forma

$$y = ax^2 + bx + c$$

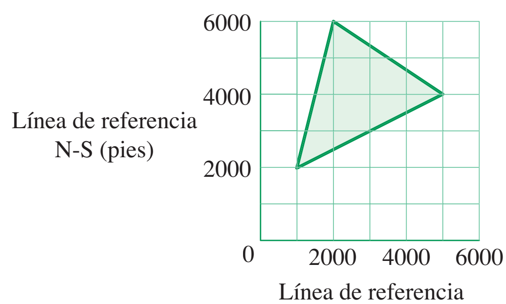
para modelar la forma del arco.

a) Utilice los puntos medidos para plantear un sistema de ecuaciones lineales para los coeficientes desconocidos a, b y c.

b) Resuelva el sistema aplicando la regla de Cramer.



58. Un terreno triangular Un club compra tierra para establecer una zona de conservación. El último trozo que necesita comprar es el terreno triangular que se ilustra en la figura. Aplique la fórmula del determinante para el área de un triángulo y calcule el área del terreno.



Descubrimiento • Debate

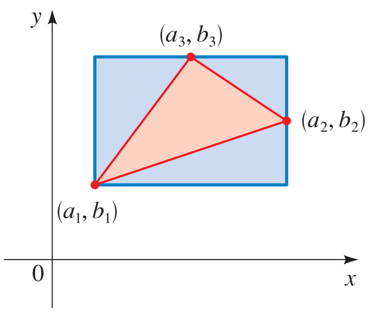
59. Fórmula del determinante para el área de un triángulo La figura muestra un triángulo en el plano con vértices (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3).

a) Determine las coordenadas de los vértices del rectángulo y calcule su área.

b) Calcule el área del triángulo rojo mediante la diferencia de áreas de los tres triángulos azules y el área del rectángulo.

c) Mediante esta respuesta del inciso b) muestre que el área del triángulo rojo está dada por

$$\text{área} = \pm\tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix}$$



60. Puntos colineales y determinantes

a) Si tres puntos quedan sobre una recta, ¿cuál es el área del "triángulo" que definen? Utilice la respuesta a esta pregunta junto con la fórmula del determinante que da el área de un triángulo para explicar por qué los puntos (a_1, b_1), (a_2, b_2) y (a_3, b_3) son colineales si y sólo si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Utilice un determinante para verificar si cada conjunto de puntos es colineal. Grafíquelos para comprobar su respuesta.

i) $(-6, 4), (2, 10), (6, 13)$

ii) $(-5, 10), (2, 6), (15, -2)$

61. Ecuación de una recta en forma de determinante

a) Mediante el resultado del ejercicio 60a) muestre que la ecuación de la recta que contiene los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b) Utilice el resultado del inciso a) para encontrar una ecuación para la recta que contiene los puntos $(20, 50)$ y $(-10, 25)$.

62. Matrices con determinante cero Utilice la definición de determinante y las operaciones elementales con renglones y columnas para explicar por qué el determinante de las matrices de los tipos siguientes es 0.

a) Una matriz con un renglón o una columna que consiste totalmente en ceros.

b) Una matriz con dos renglones iguales o dos columnas iguales

c) Una matriz en la cual un renglón es múltiplo de otro renglón, o bien, una columna es un múltiplo de otra columna.

63. Resolución de sistemas lineales Suponga que tiene que resolver un sistema lineal con cinco ecuaciones y cinco variables sin la ayuda de calculadora ni computadora. ¿Qué método preferiría: la regla de Cramer o la eliminación de Gauss? Escriba una breve explicación acerca de las razones que sustentan su respuesta.

9.8 Fracciones parciales

Para escribir una suma o diferencia de expresiones fraccionarias como una sola fracción, se busca un denominador común. Por ejemplo,

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{(2x+1)+(x-1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{3x}{2x^2-x-1}$$

Común denominador →

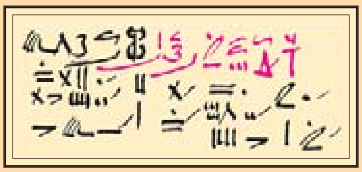
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2x+1} = \frac{3x}{2x^2-x-1}$$

← Fracciones parciales

Pero para el caso de algunas aplicaciones del álgebra al cálculo, es necesario revisar este proceso, es decir, se debe expresar una fracción como $3x/(2x^2 - x - 1)$ como la suma de fracciones más sencillas $1/(x-1)$ y $1/(2x+1)$. Estas fracciones más sencillas se llaman *fracciones parciales*. En esta sección se estudia la manera de determinarlas.

El papiro Rhind es el documento matemático más antiguo que se conoce a la fecha. Es un documento egipcio que copió el escriba Ahmes en el año 1650 antes de nuestra era, quien explica que el documento es una copia exacta de otro escrito 200 años antes. Ahmes afirma que el documento contiene "un estudio completo de todas las cosas, una reflexión de todo lo que existe, el conocimiento de todos los secretos oscuros". En realidad, el documento contiene reglas para los cálculos aritméticos, sin olvidar la multiplicación y división de fracciones y varios ejercicios con soluciones. En el ejercicio que se muestra abajo se lee: un montón y un séptimo de él hacen un total de 19; ¿de qué tamaño es el montón? Para resolver problemas de este tipo, los egipcios recurrían a las fracciones parciales porque su sistema numérico requería que todas las fracciones se escribieran como sumas de recíprocos de números enteros. Por ejemplo, $\frac{7}{12}$ se escribiría como $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$.

Los papiros contienen una fórmula correcta del volumen de una pirámide truncada (página 143). También se proporciona la fórmula $A=\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ del área de un círculo con diámetro d. ¿Qué tan cercano es este valor con el área real?



Sea r la función racional

$$r(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de P es menor que el grado de Q. De acuerdo con el teorema de los factores lineales y cuadráticos de la sección 3.4, todo polinomio con coeficientes reales se puede factorizar completamente en factores lineales y cuadráticos irreducibles, es decir, factores de la forma $ax+b$ y ax^2+bx+c, donde a, b y c son números reales. Por ejemplo,

$$x^4-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Después de haber factorizado del todo el denominador Q de r, se puede expresar $r(x)$ como una suma de **fracciones parciales** de la forma

$$\frac{A}{(ax+b)^i} \quad \text{y} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^j}$$

Esta suma se llama **descomposición en fracciones parciales** de r. Examinemos los detalles de los cuatro casos posibles.

Caso 1: El denominador es un producto de factores lineales distintos

Suponga que podemos factorizar $Q(x)$ como

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\cdots(a_nx+b_n)$$

donde no se repite ningún factor. En este caso, la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ toma la forma de

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

Las constantes $A_1, A_2, \ldots, A_n$ están determinadas como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1 Factores lineales distintos

Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}$.

Solución Los factores del denominador son

$$\begin{aligned} x^3+2x^2-x-2 &= x^2(x+2)-(x+2)=(x^2-1)(x+2) \\ &= (x-1)(x+1)(x+2) \end{aligned}$$

Lo anterior nos da la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}$$

Al multiplicar cada miembro por el común denominador $(x-1)(x+1)(x+2)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 5x+7 &= A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1) \\ &= A(x^2+3x+2)+B(x^2+x-2)+C(x^2-1) && \text{Desarrollo} \\ &= (A+B+C)x^2+(3A+B)x+(2A-2B-C) && \text{Separación por términos semejantes} \end{aligned}$$

Si dos polinomios son iguales, entonces sus coeficientes son iguales. Por lo tanto, puesto que $5x+7$ carece de términos con x^2, tenemos $A+B+C=0$. De igual manera, al comparar los coeficientes de x, vemos que $3A+B=5$, y al comparar los términos constantes, obtenemos $2A-2B-C=7$. Esto da lugar al siguiente sistema de ecuaciones lineales para A, B y C.

$$\begin{cases} A+B+C=0 & \text{Ecuación 1: coeficientes de } x^2 \\ 3A+B=5 & \text{Ecuación 2: coeficientes de } x \\ 2A-2B-C=7 & \text{Ecuación 3: coeficientes constantes} \end{cases}$$

Aplicamos la eliminación de Gauss para resolver este sistema.

$$\begin{cases} A+B+C=0 & \\ -2B-3C=5 & \text{Ecuación } 2+(-3)\times\text{ ecuación } 1 \\ -4B-3C=7 & \text{Ecuación } 3+(-2)\times\text{ ecuación } 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 & \\ -2B-3C=5 & \\ 3C=-3 & \text{Ecuación } 3+(-2)\times\text{ ecuación } 2 \end{cases}$$

A partir de la tercera ecuación llegamos a $C=-1$. Al sustituir encontramos que $B=-1$ y $A=2$ Entonces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{5x+7}{x^3+2x^2-x-2}=\frac{2}{x-1}+\frac{-1}{x+1}+\frac{-1}{x+2}$$ ■

El mismo razonamiento funciona para los casos restantes. Planteamos la descomposición en fracciones parciales con las constantes desconocidas, $A, B, C, \ldots$. Luego multiplicamos ambos miembros de la ecuación resultante por el común denominador, simplificamos el segundo miembro de la ecuación e igualamos los coeficientes. Esto proporciona un conjunto de ecuaciones lineales que siempre tiene una solución única (siempre que la descomposición en fracciones parciales se haya planteado de manera correcta).

Caso 2: El denominador es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten

Suponga que la factorización total de $Q(x)$ contiene el factor lineal $ax+b$ repetido k veces; es decir $(ax+b)^k$ es un factor de $Q(x)$. Entonces, para cada uno de tales factores, la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ contiene

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

Ejemplo 2 Factores lineales repetidos

Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)^3}$.

Solución Como el factor $x - 1$ se repite tres veces en el denominador, la descomposición en fracciones parciales tiene la forma

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$$

Al multiplicar ambos miembros por el común denominador, $x(x-1)^3$, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx \\ &= A(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + B(x^3 - 2x^2 + x) + C(x^2 - x) + Dx && \text{Desarrollo} \\ &= (A + B)x^3 + (-3A - 2B + C)x^2 + (3A + B - C + D)x - A && \text{Separación de términos semejantes} \end{aligned}$$

Al igualar los coeficientes, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 0 & \text{Coeficientes de } x^3 \\ -3A - 2B + C = 1 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ 3A + B - C + D = 0 & \text{Coeficientes de } x \\ -A = 1 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

Si se reacomodan estas ecuaciones poniendo la última en primer lugar, podemos ver con facilidad, usando la sustitución, que la solución al sistema es $A = -1$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 2$, y, entonces, la descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

■

Caso 3: El denominador tiene factores cuadráticos irreducibles, ninguno de los cuales se repite

Suponga que la factorización de $Q(x)$ contiene el factor cuadrático $ax^2 + bx + c$, el cual ya no se puede factorizar más. Entonces, en correspondencia con lo anterior, la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá un término de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Ejemplo 3 Factores cuadráticos distintos

Determine la descomposición en fracciones parciales de $\dfrac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}$.

Solución Como $x^3 + 4x = x(x^2 + 4)$, la cual no se puede factorizar más, escribimos

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Al multiplicar por $x(x^2 + 4)$, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x^2 - x + 4 &= A(x^2 + 4) + (Bx + C)x \\ &= (A + B)x^2 + Cx + 4A \end{aligned}$$

Luego de igualar los coeficientes tenemos las ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 2 & \text{Coeficientes de } x^2 \\ C = -1 & \text{Coeficientes de } x \\ 4A = 4 & \text{Coeficientes constantes} \end{cases}$$

y entonces $A = 1$, $B = 1$ y $C = -1$. La descomposición en fracciones parciales es

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x - 1}{x^2 + 4}$$

■

Caso 4: El denominador tiene un factor cuadrático irreducible repetido

Suponga que la factorización completa de $Q(x)$ contiene al factor $(ax^2 + bx + c)^k$, donde $ax^2 + bx + c$ ya no se puede factorizar más. Entonces la descomposición en fracciones parciales de $P(x)/Q(x)$ tendrá los términos

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

Ejemplo 4 Factores cuadráticos repetidos

Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3}$$

Solución

$$\frac{x^5 - 3x^2 + 12x - 1}{x^3(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^3}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1} + \frac{Fx + G}{x^2 + 2} + \frac{Hx + I}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Jx + K}{(x^2 + 2)^3}$$

■

Para determinar los valores de *A, B, C, D, E, F, G, H, I, J* y *K* del ejemplo 4, se tendría que resolver un sistema de 11 ecuaciones lineales. Es posible hacerlo, ¡pero se requeriría una gran cantidad de trabajo!

Las técnicas que ya explicamos en esta sección se aplican sólo a funciones racionales $P(x)/Q(x)$ en las cuales el grado de P es menor que el grado de Q. Si no es el caso, entonces es necesario usar primero la división larga para dividir Q entre P.

Ejemplo 5 Uso de la división larga en la preparación para las fracciones parciales

Determine la descomposición en fracciones parciales de

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

Solución Puesto que el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, usamos la división larga para llegar a

$$\begin{array}{r} 2x \\ x^3 + 2x^2 - x - 2 \overline{)2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7} \\ \underline{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x} \\ 5x + 7 \end{array}$$

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{5x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$$

El término restante ahora cumple con el requisito de que el grado del numerador es menor que el grado del denominador. En este punto procedemos como en el ejemplo 1 para obtener la descomposición

$$\frac{2x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x + 7}{x^3 + 2x^2 - x - 2} = 2x + \frac{2}{x - 1} + \frac{-1}{x + 1} + \frac{-1}{x + 2}$$ ■

9.8 Ejercicios

1–10 ■ Escriba la forma de la descomposición en fracciones parciales de la función, como en el ejemplo 4. No determine los valores numéricos de los coeficientes.

1. $\dfrac{1}{(x - 1)(x + 2)}$

2. $\dfrac{x}{x^2 + 3x - 4}$

3. $\dfrac{x^2 - 3x + 5}{(x - 2)^2(x + 4)}$

4. $\dfrac{1}{x^4 - x^3}$

5. $\dfrac{x^2}{(x - 3)(x^2 + 4)}$

6. $\dfrac{1}{x^4 - 1}$

7. $\dfrac{x^3 - 4x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$

8. $\dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2(x^2 + 4)^2}$

9. $\dfrac{x^3 + x + 1}{x(2x - 5)^3(x^2 + 2x + 5)^2}$

10. $\dfrac{1}{(x^3 - 1)(x^2 - 1)}$

11–42 ■ Determine la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

11. $\dfrac{2}{(x - 1)(x + 1)}$

12. $\dfrac{2x}{(x - 1)(x + 1)}$

13. $\dfrac{5}{(x - 1)(x + 4)}$

14. $\dfrac{x + 6}{x(x + 3)}$

15. $\dfrac{12}{x^2 - 9}$

16. $\dfrac{x - 12}{x^2 - 4x}$

17. $\dfrac{4}{x^2 - 4}$

18. $\dfrac{2x + 1}{x^2 + x - 2}$

19. $\dfrac{x + 14}{x^2 - 2x - 8}$

20. $\dfrac{8x - 3}{2x^2 - x}$

21. $\dfrac{x}{8x^2 - 10x + 3}$

22. $\dfrac{7x - 3}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

23. $\dfrac{9x^2 - 9x + 6}{2x^3 - x^2 - 8x + 4}$

24. $\dfrac{-3x^2 - 3x + 27}{(x + 2)(2x^2 + 3x - 9)}$

25. $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 + x^2}$

26. $\dfrac{3x^2 + 5x - 13}{(3x + 2)(x^2 - 4x + 4)}$

27. $\dfrac{2x}{4x^2 + 12x + 9}$

28. $\dfrac{x - 4}{(2x - 5)^2}$

29. $\dfrac{4x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^3}$

30. $\dfrac{x^3 - 2x^2 - 4x + 3}{x^4}$

31. $\dfrac{-10x^2 + 27x - 14}{(x - 1)^3(x + 2)}$

32. $\dfrac{-2x^2 + 5x - 1}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}$

33. $\dfrac{3x^3 + 22x^2 + 53x + 41}{(x + 2)^2(x + 3)^2}$

34. $\dfrac{3x^2 + 12x - 20}{x^4 - 8x^2 + 16}$

35. $\dfrac{x - 3}{x^3 + 3x}$

36. $\dfrac{3x^2 - 2x + 8}{x^3 - x^2 + 2x - 2}$

37. $\dfrac{2x^3 + 7x + 5}{(x^2 + x + 2)(x^2 + 1)}$

38. $\dfrac{x^2 + x + 1}{2x^4 + 3x^2 + 1}$

39. $\dfrac{x^4 + x^3 + x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)^2}$ **40.** $\dfrac{2x^2 - x + 8}{(x^2 + 4)^2}$

41. $\dfrac{x^5 - 2x^4 + x^3 + x + 5}{x^3 - 2x^2 + x - 2}$

42. $\dfrac{x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 4x + 12}{(x - 2)^2(x^2 + 2)}$

43. Determine A y B en términos de a y b:

$$\frac{ax + b}{x^2 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1}$$

44. Determine A, B, C y D en términos de a y b:

$$\frac{ax^3 + bx^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 1)^2}$$

Descubrimiento • Debate

45. Identificación de las descomposiciones de fracciones parciales Para cada expresión, determine si ya es una descomposición en fracciones parciales o si se puede descomponer más.

a) $\dfrac{x}{x^2 + 1} + \dfrac{1}{x + 1}$ **b)** $\dfrac{x}{(x + 1)^2}$

c) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{2}{(x + 1)^2}$ **d)** $\dfrac{x + 2}{(x^2 + 1)^2}$

46. Ensamble y desensamble de fracciones parciales La expresión siguiente es una descomposición en fracciones parciales:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{1}{x + 1}$$

Utilice un común denominador para combinar los términos de una fracción. Luego aplique las técnicas de esta sección para determinar su descomposición en fracciones parciales. ¿Obtuvo de nuevo la expresión original?

9.9 Sistemas de desigualdades

En esta sección estudiamos los sistemas de desigualdades con dos variables desde el punto de vista gráfico.

Gráfica de una desigualdad

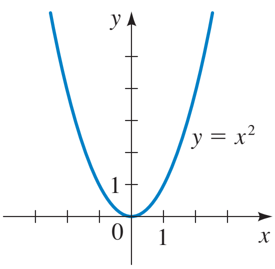


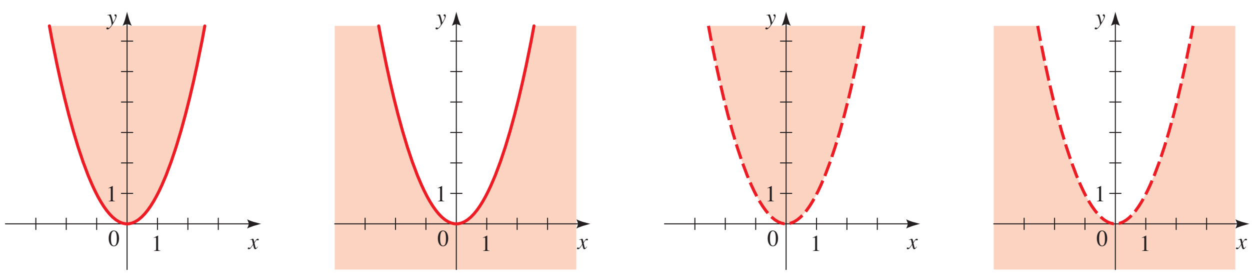
Figura 1

Iniciamos considerando la gráfica de una desigualdad sencilla. Ya sabemos que la gráfica de $y = x^2$, por ejemplo, es la *parábola* de la figura 1. Si reemplazamos el signo igual por el símbolo $\geq$, obtenemos la *desigualdad*

$$y \geq x^2$$

Su gráfica consiste no sólo en la parábola de la figura 1, sino también en todos los puntos cuya coordenada y es *mayor* que x^2. La solución está en la figura 2a) mediante los puntos sombreados por arriba de la parábola.

De manera similar, la gráfica de $y \leq x^2$ de la figura 2b) consta de todos los puntos sobre y *por abajo* de la parábola. No obstante, las gráficas de $y > x^2$ y $y < x^2$ no incluyen los puntos en la parábola en sí, como se indica mediante las curvas discontinuas de las figuras 2c) y 2d).



a) $y \geq x^2$ b) $y \leq x^2$ c) $y > x^2$ d) $y < x^2$

Figura 2

En general, la gráfica de una desigualdad consiste en una región en el plano cuya frontera es la gráfica de la ecuación obtenida al reemplazar el signo de desigualdad ($\geq, \leq, >$ o $<$) con un signo igual. Para determinar cuál lado de la gráfica proporciona el conjunto solución de la desigualdad, sólo es necesario verificar unos **puntos de prueba**.

Graficación de desigualdades

Para graficar una desigualdad se efectúan los pasos siguientes.

1. **Ecuación de la gráfica.** Se grafica la ecuación que corresponde a la desigualdad. Se utiliza una curva discontinua para $>$ o $<$, y una curva continua para $\leq$ o $\geq$.
2. **Puntos de prueba.** Pruebe un punto en cada región formada por la gráfica en el paso 1. Si el punto satisface la desigualdad, entonces todos los puntos de esa región cumplen con la desigualdad. En ese caso, se sombrea la región para indicar que es parte de la gráfica. Si el punto de prueba no cumple con la desigualdad, entonces la región no es parte de la gráfica.

Ejemplo 1 Gráficas de desigualdades

Grafique cada una de las desigualdades

a) $x^2 + y^2 < 25$ b) $x + 2y \geq 5$

Solución

a) La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es una circunferencia de radio 5 con centro en el origen. Los puntos de la circunferencia no cumplen con la desigualdad porque es de la forma $<$, de modo que graficamos la circunferencia con una curva discontinua como se muestra en la figura 3.

Para determinar si el interior o el exterior de la circunferencia cumple con la desigualdad, utilizamos los puntos de prueba $(0, 0)$ en el interior y $(6, 0)$ en el exterior. Para hacerlo, sustituimos las coordenadas de cada punto en la desigualdad y verificamos si el resultado satisface la desigualdad. (Observe que *cualquier* punto fuera o adentro de la circunferencia puede servir como punto de prueba. Hemos escogido estos puntos por facilidad.)

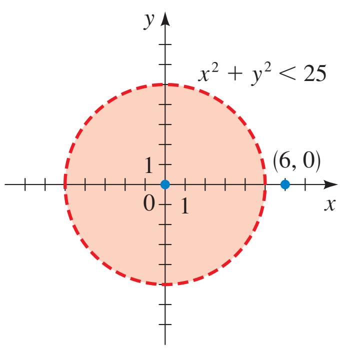


Figura 3

Punto de prueba	$x^2 + y^2 < 25$	Conclusión
$(0, 0)$	$0^2 + 0^2 = 0 < 25$	Parte de la gráfica
$(6, 0)$	$6^2 + 0^2 = 36 \not< 25$	No es parte de la gráfica

Por consiguiente, la gráfica de $x^2 + y^2 < 25$ es el conjunto de todos los puntos *dentro* de la circunferencia (véase la figura 3).

b) La gráfica de $x + 2y = 5$ es la recta ilustrada en la figura 4. Usamos los puntos de prueba $(0, 0)$ y $(5, 5)$ en los lados opuestos de la recta.

Punto de prueba	$x + 2y \geq 5$	Conclusión
$(0, 0)$	$0 + 2(0) = 0 \not\geq 5$	No es parte de la gráfica
$(5, 5)$	$5 + 2(5) = 15 \geq 5$	Parte de la gráfica

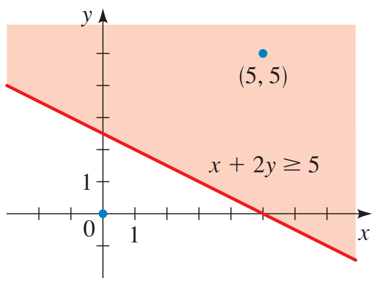


Figura 4

La verificación señala que los puntos *arriba* de la recta satisfacen la desigualdad.

Otra posibilidad es expresar la desigualdad como cuando tenemos pendiente y ordenada en el origen, y graficarla directamente:

$$
\begin{aligned}
x + 2y &\geq 5 \\
2y &\geq -x + 5 \\
y &\geq -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2}
\end{aligned}
$$

De acuerdo con esta forma vemos que la gráfica incluye todos los puntos cuya coordenada y son *mayores* que los que se encuentran en la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$; es decir, la gráfica consiste en los puntos *de esta recta o arriba de ella*, como se ilustra en la figura 4. ■

Sistemas de desigualdades

Ahora consideremos los *sistemas* de desigualdades. La solución de tal sistema es el conjunto de todos los puntos en el plano coordenado que cumplen toda desigualdad del sistema.

Ejemplo 2 Un sistema de dos desigualdades

Grafique la solución del sistema de desigualdades.

$$
\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}
$$

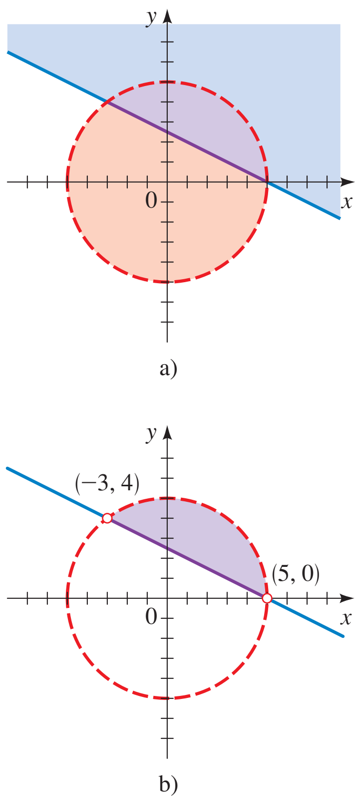


Figura 5

$$
\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ x + 2y \geq 5 \end{cases}
$$

Solución Son las dos desigualdades del ejemplo 1. En este ejemplo queremos graficar sólo los puntos que satisfacen en forma simultánea ambas desigualdades. La solución consiste en la intersección de las gráficas del ejemplo 1. En la figura 5a) mostramos las dos regiones en el mismo plano coordenado, pero con diferentes colores, y en la figura 5b) mostramos la intersección.

VÉRTICES Los puntos $(-3, 4)$ y $(5, 0)$ de la figura 5b) son los **vértices** del conjunto solución. Se determinan resolviendo el sistema de *ecuaciones*

$$
\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + 2y = 5 \end{cases}
$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones mediante sustitución. Al despejar x de la segunda ecuación tenemos $x = 5 - 2y$, y al sustituir lo anterior en la primera ecuación tenemos

$$
\begin{aligned}
(5 - 2y)^2 + y^2 &= 25 && \text{Sustitución de } x = 5 - 2y \\
(25 - 20y + 4y^2) + y^2 &= 25 && \text{Desarrollo} \\
-20y + 5y^2 &= 0 && \text{Simplificación} \\
-5y(4 - y) &= 0 && \text{Factorización}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $y = 0$ o $y = 4$. Cuando $y = 0$, tenemos que $x = 5 - 2(0) = 5$, y cuando $y = 4$, tenemos $x = 5 - 2(4) = -3$. Entonces, los puntos de intersección de estas curvas son $(5, 0)$ y $(-3, 4)$.

Observe que, en este caso, los vértices no forman parte del conjunto solución, ya que no cumplen con la desigualdad $x^2 + y^2 < 25$, por lo que se grafican como círculos abiertos en la figura. Simplemente muestran dónde quedan las "esquinas" del conjunto solución. ■

Sistemas de desigualdades lineales

Una desigualdad es lineal si se puede expresar en una de las formas siguientes:

$$ax + by \geq c \qquad ax + by \leq c \qquad ax + by > c \qquad ax + by < c$$

En el ejemplo siguiente graficamos el conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales.

Ejemplo 3 Un sistema de cuatro desigualdades lineales

Grafique el conjunto solución del sistema y nombre los vértices.

$$\begin{cases} x + 3y \leq 12 \\ x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Solución En la figura 6 graficamos primero las rectas de las ecuaciones que corresponden a cada desigualdad. Para determinar las gráficas de las desigualdades lineales, sólo necesitamos verificar un punto de prueba. Por facilidad usamos el punto (0, 0).

Desigualdad	Punto de prueba (0, 0)	Conclusión
$x + 3y \leq 12$	$0 + 3(0) = 0 \leq 12$	Cumple con la desigualdad
$x + y \leq 8$	$0 + 0 = 0 \leq 8$	Cumple con la desigualdad

Puesto que (0, 0) está abajo de la recta $x + 3y = 12$, la verificación muestra que la región en la recta o abajo de ella debe cumplir la desigualdad. De igual manera, como (0, 0) está abajo de la recta $x + y = 8$, la verificación muestra que la región en esta recta o abajo de ella debe cumplir con la desigualdad. Las desigualdades $x \geq 0$ y $y \geq 0$ establecen que x y y no son negativas. Estas regiones se grafican en la figura 6a), y la intersección, es decir, el conjunto solución, se grafica en la figura 6b).

VÉRTICES Las coordenadas de cada vértice se obtienen al resolver en forma simultánea las ecuaciones de las rectas que pasan por ese vértice. De acuerdo con el sistema

$$\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

llegamos al vértice (6, 2). Los otros vértices son los puntos donde las rectas cortan al eje x y al eje y, (8, 0) y (0, 4) y el origen (0, 0). En este caso, todos los vértices *son* parte del conjunto solución.

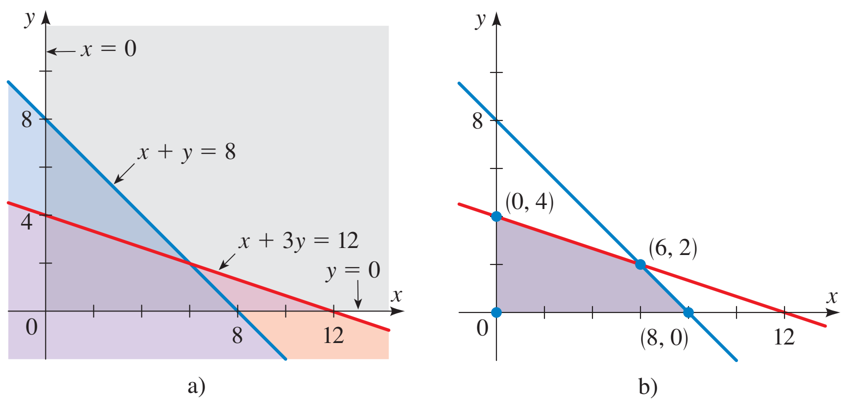


Figura 6

Ejemplo 4 Un sistema de desigualdades lineales

Grafique el conjunto solución del sistema.

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 \\ -x + 2y \leq 4 \\ 3x - 2y \leq 8 \end{cases}$$

Solución En necesario graficar las rectas que corresponden a estas desigualdades y luego sombrear las regiones adecuadas, como en el ejemplo 3. Usamos una calculadora para graficar, de modo que primero tenemos que aislar a y en el lado izquierdo de cada desigualdad.

$$\begin{cases} y \geq -\frac{1}{2}x + 4 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq \frac{3}{2}x - 4 \end{cases}$$

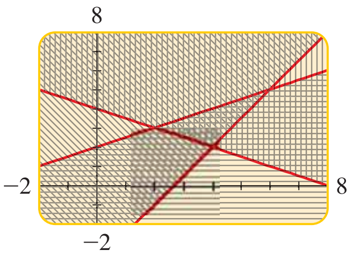


Figura 7

Al aplicar la característica de sombreado de la calculadora obtenemos la gráfica de la figura 7. El conjunto solución es la región triangular que está sombreada con los tres patrones. Luego usamos TRACE o el comando `Intersect` para determinar los vértices de la región. El conjunto solución se grafica en la figura 8. ■

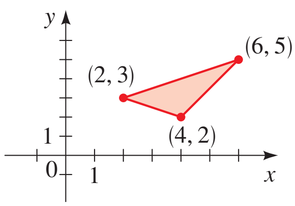


Figura 8

Cuando una región del plano se puede abarcar por un círculo suficientemente grande, se dice que está **acotada**, y si no es así se le llama **no acotada**. Por ejemplo, las regiones graficadas en las figuras 3, 5b), 6b) y 8 son acotadas, en tanto que las de las figuras 2 y 4 son no acotadas. Una región no acotada no puede ser "encerrada", ya que se extiende hasta el infinito por lo menos en una dirección.

Aplicación: regiones factibles

En muchos problemas aplicados hay *restricciones* en las variables. Por ejemplo, el gerente de una fábrica tiene sólo una cantidad de trabajadores que pueden ser asignados a ejecutar tareas en el piso de la fábrica. Un granjero que está pensando qué cultivos sembrar tiene sólo una cierta cantidad de tierra que puede trabajar. Por lo regular, dichas restricciones o limitaciones se pueden expresar como sistemas de desigualdades. Cuando se trabaja con desigualdades aplicadas, por lo general se llama al conjunto solución de un sistema *región factible* porque los puntos del conjunto solución representan valores factibles o posibles de las cantidades que están siendo estudiadas.

Ejemplo 5 Restricción de sustancias contaminantes

Una fábrica produce dos plaguicidas A y B para uso en la agricultura. Por cada barril de A, la fábrica emite 0.25 kg de monóxido de carbono (CO) y 0.60 kg de dióxido de azufre (SO_2). En cuanto a B, por cada barril producido la fábrica emite 0.50 kg de CO y 0.20 kg de SO_2. Las leyes contra la contaminación restringen la emanación de CO de la fábrica a un máximo de 75 kg y SO_2 a un máximo de 90 kg por día.

a) Plantee un sistema de desigualdades que describa la cantidad de barriles de cada plaguicida que la fábrica puede producir y cumplir con las leyes contra la contaminación. Grafique la región factible.

b) ¿Sería legal que la fábrica produjera 100 barriles de A y 80 barriles de B por día?

c) ¿Sería legal que la fábrica produjera 60 barriles de A y 160 barriles de B por día?

Solución

a) Para plantear las desigualdades requeridas es útil organizar la información en una tabla.

	A	B	Máximo
CO (kg)	0.25	0.50	75
SO_2 (kg)	0.60	0.20	90

Hacemos

$$x = \text{cantidad de barriles de A producida por día}$$

$$y = \text{cantidad de barriles de B producida por día}$$

Según los datos de la tabla y el hecho de que x y y no pueden ser negativas, obtenemos las desigualdades siguientes.

$$\begin{cases} 0.25x + 0.50y \le 75 & \text{Desigualdad del CO} \\ 0.60x + 0.20y \le 90 & \text{Desigualdad del } SO_2 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

Al multiplicar la primera desigualdad por 4 y la segunda por 5 simplificamos a

$$\begin{cases} x + 2y \le 300 \\ 3x + y \le 450 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible es la solución de este sistema de desigualdades que se muestra en la figura 9.

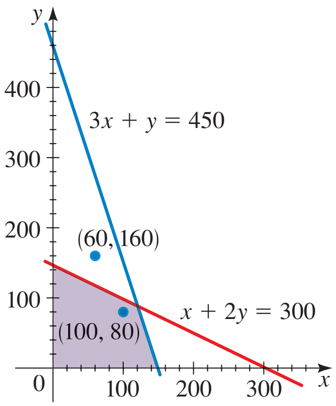


Figura 9

b) Puesto que el punto (100, 80) queda dentro de la región factible, este plan de producción queda dentro de la ley.

c) Como el punto (60, 160) queda fuera de la región factible, este plan de producción no es legal. Transgrede la restricción del CO, aunque no la del SO_2 (véase la figura 9). ■

9.9 Ejercicios

1–14 ■ Grafique la desigualdad.

1. $x < 3$

2. $y \ge -2$

3. $y > x$

4. $y < x + 2$

5. $y \le 2x + 2$

6. $y < -x + 5$

7. $2x - y \le 8$

8. $3x + 4y + 12 > 0$

9. $4x + 5y < 20$

10. $-x^2 + y \ge 10$

11. $y > x^2 + 1$

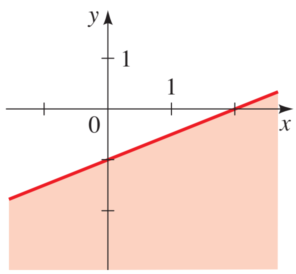
12. $x^2 + y^2 \ge 9$

13. $x^2 + y^2 \le 25$

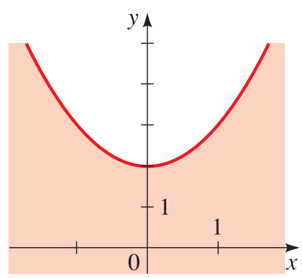
14. $x^2 + (y - 1)^2 \le 1$

15–18 ■ Se dan una ecuación y su gráfica. Plantee una desigualdad cuya solución es la región sombreada.

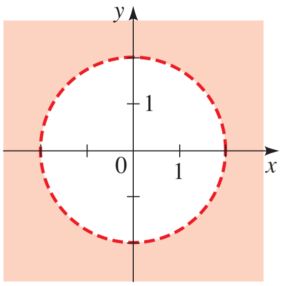
15. $y = \frac{1}{2}x - 1$



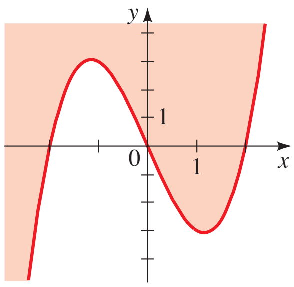
16. $y = x^2 + 2$



17. $x^2 + y^2 = 4$



18. $y = x^3 - 4x$



19–40 ■ Grafique la solución del sistema de desigualdades. Determine las coordenadas de todos los vértices y si el conjunto solución es acotado.

19. $\begin{cases} x + y \le 4 \\ y \ge x \end{cases}$

20. $\begin{cases} 2x + 3y > 12 \\ 3x - y < 21 \end{cases}$

21. $\begin{cases} y < \frac{1}{4}x + 2 \\ y \ge 2x - 5 \end{cases}$

22. $\begin{cases} x - y > 0 \\ 4 + y \le 2x \end{cases}$

23. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ 3x + 5y \le 15 \\ 3x + 2y \le 9 \end{cases}$

24. $\begin{cases} x > 2 \\ y < 12 \\ 2x - 4y > 8 \end{cases}$

25. $\begin{cases} y < 9 - x^2 \\ y \ge x + 3 \end{cases}$

26. $\begin{cases} y \ge x^2 \\ x + y \ge 6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4 \\ x - y > 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x + y < 10 \\ x^2 + y^2 > 9 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 - y \le 0 \\ 2x^2 + y \le 12 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ 2x + y^2 \ge 1 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x + 2y \le 14 \\ 3x - y \ge 0 \\ x - y \ge 2 \end{cases}$

32. $\begin{cases} y < x + 6 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x - 2y \le 2 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x \le 5 \\ x + y \le 7 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ y \le 4 \\ 2x + y \le 8 \end{cases}$

35. $\begin{cases} y > x + 1 \\ x + 2y \le 12 \\ x + 1 > 0 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x + y > 12 \\ y < \frac{1}{2}x - 6 \\ 3x + y < 6 \end{cases}$

37. $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 8 \\ x \ge 2 \\ y \ge 0 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^2 - y \ge 0 \\ x + y < 6 \\ x - y < 6 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y > 0 \\ x \le 0 \end{cases}$

40. $\begin{cases} y \ge x^3 \\ y \le 2x + 4 \\ x + y \ge 0 \end{cases}$

41–44 ■ Con la ayuda de una calculadora para graficar o de una computadora grafique la solución del sistema de desigualdades. Determine las coordenadas de todos los vértices con una cifra decimal.

41. $\begin{cases} y \ge x - 3 \\ y \ge -2x + 6 \\ y \le 8 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x + y \ge 12 \\ 2x + y \le 24 \\ x - y \ge -6 \end{cases}$

43. $\begin{cases} y \le 6x - x^2 \\ x + y \ge 4 \end{cases}$

44. $\begin{cases} y \ge x^3 \\ 2x + y \ge 0 \\ y \le 2x + 6 \end{cases}$

Aplicaciones

45. Publicación de libros Una editorial publica un total de no más de 100 títulos cada año. Por lo menos 20 de ellos no son de ficción, pero la casa editorial siempre publica por lo menos tanta ficción como no ficción. Encuentre un sistema de desigualdades que represente las cantidades posibles de libros de ficción y de no ficción que la compañía puede producir cada año de acuerdo con estas políticas. Grafique el conjunto solución.

46. Fabricación de muebles Un hombre y su hija fabrican mesas y sillas sin acabado. Cada mesa requiere 3 h de aserrado y 1 h de ensamble. Cada silla requiere 2 h de aserrado y 2 h de ensamble. Entre los dos pueden trabajar aserrando hasta 12 h y ensamblando 8 h todos los días. Formule un sistema de desigualdades que describa todas las combinaciones posibles de mesas y sillas que pueden fabricar cada día. Grafique el conjunto solución.

47. Mezclas de café Un comerciante en café vende dos diferentes mezclas de café. La mezcla Estándar lleva 4 onzas de granos de *arábica* y 12 onzas de *robusta* por cada paquete. La mezcla Deluxe requiere 10 onzas de *arábica* y 6 onzas de *robusta* por paquete. El comerciante cuenta con 80 lb de granos *arábica* y 90 lb de *robusta*. Plantee un sistema de desigualdades que describa la cantidad posible de paquetes Estándar y Deluxe que puede hacer. Grafique el conjunto solución.

48. Nutrición Un fabricante de alimento para gato utiliza subproductos de pescado y carne de res. El pescado contiene 12 g de proteína y 3 g de grasa por cada onza. La carne de res contiene 6 g de proteína y 9 g de grasa por onza. Cada lata de alimento para gato debe contener por lo menos 60 g de proteína y 45 g de grasa. Plantee un sistema de desigualdades que describa el número posible de onzas de pescado y carne de res que se pueden usar en cada lata para cumplir con estas condiciones mínimas. Grafique el conjunto solución.

Descubrimiento • Debate

49. Regiones sombreadas no deseadas Para graficar la solución de un sistema de desigualdades hemos sombreado la solución de cada desigualdad de un color distinto. La solución del sistema es la región donde todas las partes sombreadas se sobreponen. He aquí un método distinto: por cada desigualdad, sombree la región que *no* satisface a la desigualdad. Explique por qué la parte del plano que se quedó sin sombrear es la solución del sistema. Resuelva el sistema siguiente por ambos métodos. ¿Cuál prefiere?

$$\begin{cases} x + 2y > 4 \\ -x + y < 1 \\ x + 3y < 9 \\ x < 3 \end{cases}$$

9 Repaso

Revisión de conceptos

1. Suponga que se le pide resolver un sistema de dos ecuaciones, no necesariamente lineales, con dos variables. Explique cómo resolvería el sistema:

a) por el método de sustitución

b) por el método de eliminación

c) por el método gráfico

2. Suponga que se le pide resolver un sistema de dos ecuaciones *lineales* con dos variables.

a) ¿Preferiría aplicar el método de sustitución o el método de eliminación?

b) ¿Cuántas soluciones son posibles? Dibuje un diagrama para ilustrar las posibilidades.

3. ¿Qué operaciones se pueden efectuar en un sistema lineal que den como resultado un sistema equivalente?

4. Explique cómo funciona la eliminación de Gauss. Su explicación debe incluir un análisis de los pasos que se siguen para obtener un sistema de forma triangular y efectuar la sustitución.

5. ¿Qué queremos dar a entender cuando decimos que A es una matriz de dimensión $m \times n$?

6. ¿Cuál es la matriz aumentada de un sistema? Describa el papel de las operaciones elementales con los renglones, la forma escalonada, la sustitución y las variables principales cuando se resuelve un sistema en forma de matriz.

7. a) ¿Qué significa sistema inconsistente?

b) ¿Qué significa sistema independiente?

8. Suponga que usó la eliminación de Gauss para transformar en la forma escalonada la matriz aumentada de un sistema lineal. ¿Cómo sabe que un sistema tiene

a) exactamente una solución?

b) ninguna solución?

c) una cantidad infinita de soluciones?

9. ¿Cómo sabe que una matriz está en la forma escalonada reducida?

10. ¿Cuál es la diferencia entre eliminación de Gauss y eliminación de Gauss-Jordan? ¿Qué ventajas ofrece la eliminación de Gauss-Jordan?

11. Si A y B son matrices con la misma dimensión y k es un número real, ¿cómo calcula $A + B$, $A - B$ y kA?

12. a) ¿Qué debe ser cierto de las dimensiones de A y B para que el producto AB esté definido?

b) Si el producto AB está definido, ¿cómo lo calcula?

13. a) ¿Cuál es la matriz identidad I_n?

b) Si A es una matriz cuadrada $n \times n$, ¿cuál es la matriz inversa?

c) Escriba una fórmula para la inversa de una matriz 2×2.

d) Explique cómo se puede encontrar la inversa de una matriz 3×3.

14. a) Explique cómo se expresa un sistema lineal como una ecuación matricial $AX = B$?

b) Si A tiene una inversa, ¿cómo resolvería la ecuación matricial $AX = B$?

15. Suponga que A es una matriz $n \times n$.

a) ¿Cuál es el menor M_{ij} del elemento a_{ij}?

b) ¿Cuál es el cofactor A_{ij}?

c) ¿Cómo calcula el determinante de A?

d) ¿Cómo sabe que A tiene una inversa?

16. Establezca la regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones lineales en términos de determinantes. ¿Prefiere aplicar la regla de Cramer o la eliminación de Gauss? Explique.

17. Explique cómo calcular la descomposición en fracciones parciales de una expresión racional. Incluya en su explicación un análisis de cada uno de los cuatro casos que surgen.

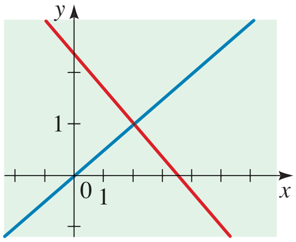
18. ¿Cómo grafica usted una desigualdad con dos variables?

19. ¿Cómo grafica el conjunto solución de un sistema de desigualdades?

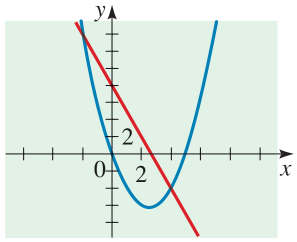
Ejercicios

1–4 ■ Se proporcionan dos ecuaciones y sus gráficas. Determine los puntos de intersección de las gráficas resolviendo el sistema.

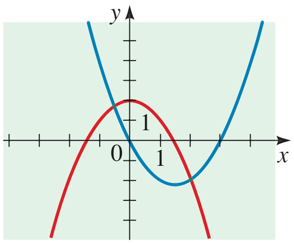
1. $\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$



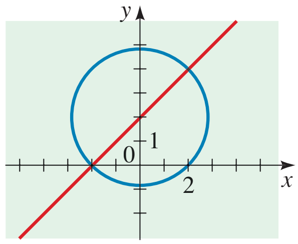
2. $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ y = x^2 - 5x \end{cases}$



3. $\begin{cases} x^2 + y = 2 \\ x^2 - 3x - y = 0 \end{cases}$



4. $\begin{cases} x - y = -2 \\ x^2 + y^2 - 4y = 4 \end{cases}$



5–10 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones y grafique las rectas.

5. $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y = 2x + 6 \\ y = -x + 3 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x - 7y = 28 \\ y = \frac{2}{7}x - 4 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 6x - 8y = 15 \\ -\frac{3}{2}x + 2y = -4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 10 \\ 3x + 4y = 15 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 3y = 1 \\ 7x - 2y = 14 \end{cases}$

11–14 ■ Resuelva el sistema de ecuaciones.

11. $\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = 6 + x \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ y = x + 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x + \dfrac{4}{y} = 6 \\ x - \dfrac{8}{y} = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + 2y^2 - 7y = 0 \end{cases}$

15–18 ■ Use una calculadora para graficar o una computadora para resolver el sistema con una aproximación a la centésima más cercana.

15. $\begin{cases} 0.32x + 0.43y = 0 \\ 7x - 12y = 341 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \sqrt{12}x - 3\sqrt{2}y = 660 \\ 7137x + 3931y = 20\,000 \end{cases}$

17. $\begin{cases} x - y^2 = 10 \\ x = \frac{1}{22}y + 12 \end{cases}$

18. $\begin{cases} y = 5^x + x \\ y = x^5 + 5 \end{cases}$

19–24 ■ Se proporciona una matriz.

a) Determine la dimensión de la matriz.

b) ¿Está la matriz en la forma escalonada?

c) ¿La matriz está en la forma escalonada reducida?

d) Escriba el sistema de ecuaciones para el cual la matriz dada es la matriz aumentada.

19. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

23. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 1 & 8 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

25–46 ■ Calcule la solución completa del sistema o demuestre que el sistema no tiene solución.

25. $\begin{cases} x + y + 2z = 6 \\ 2x + 5z = 12 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}$

26. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = 0 \\ 2x - 6z = 6 \end{cases}$

27. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - y + z = 3 \\ 2x - 7y + 11z = 2 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x + y + z + w = 2 \\ 2x - 3z = 5 \\ x - 2y + 4w = 9 \\ x + y + 2z + 3w = 5 \end{cases}$

29. $\begin{cases} x + 2y + 2z = 6 \\ x - y = -1 \\ 2x + y + 3z = 7 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases}$

31. $\begin{cases} x - 2y + 3z = -2 \\ 2x - y + z = 2 \\ 2x - 7y + 11z = -9 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 3z = 6 \\ 3x - y + 5z = 10 \end{cases}$

33. $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y - 4z - w = -1 \\ x - 2y + 4w = -7 \\ 2x + 2y + 3z + 4w = -3 \end{cases}$

34. $\begin{cases} x + 3z = -1 \\ y - 4w = 5 \\ 2y + z + w = 0 \\ 2x + y + 5z - 4w = 4 \end{cases}$

35. $\begin{cases} x - 3y + z = 4 \\ 4x - y + 15z = 5 \end{cases}$

36. $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ 4x - 5y + 9z = 13 \\ 2x + 7z = 0 \end{cases}$

37. $\begin{cases} -x + 4y + z = 8 \\ 2x - 6y + z = -9 \\ x - 6y - 4z = -15 \end{cases}$

38. $\begin{cases} x - z + w = 2 \\ 2x + y - 2w = 12 \\ 3y + z + w = 4 \\ x + y - z = 10 \end{cases}$

39. $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2x + y + z = 2 \\ 3x + 4z = 4 \end{cases}$

40. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y + 2z = 3 \\ x - 3y - 2z = -1 \end{cases}$

41. $\begin{cases} x - y + z - w = 0 \\ 3x - y - z - w = 2 \end{cases}$

42. $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 6 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$

43. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 3x + 2y - z = 6 \\ x + 4y - 3z = 3 \end{cases}$

44. $\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x - y - 5z = 1 \\ 4x + 3y + z = 6 \end{cases}$

45. $\begin{cases} x + y - z - w = 2 \\ x - y + z - w = 0 \\ 2x + 2w = 2 \\ 2x + 4y - 4z - 2w = 6 \end{cases}$

46. $\begin{cases} x - y - 2z + 3w = 0 \\ y - z + w = 1 \\ 3x - 2y - 7z + 10w = 2 \end{cases}$

47. Un hombre invierte sus ahorros en dos cuentas. Una da un interés de 6% al año y la otra proporciona 7%. Tiene el doble invertido en la cuenta que da el 7% que en la cuenta que proporciona 6%, y el rendimiento anual es 600 dólares. ¿Cuánto tiene invertido en cada cuenta?

48. Una alcancía contiene 50 monedas todas de 5, 10 y 25 centavos. El valor total de las monedas es 5.60 dólares, y el valor de las monedas de 10 centavos es cinco veces el valor de las monedas de 5 centavos. ¿Cuántas monedas de cada tipo hay?

49. Clarisse invierte 60 000 dólares en cuentas del mercado de valores en tres bancos distintos. El banco A paga 2% de interés anual, el banco B paga 2.5% y el banco C da el 3%. Decide invertir el doble en el banco B de lo que invierte en los otros dos bancos. Después de un año Clarisse gana 1575 dólares de intereses. ¿Cuánto invirtió en cada banco?

50. Un pescador comercial pesca abadejo, robalo y pargo. Le pagan 1.25 dólares por una libra de abadejo, 0.75 dólares por una libra de robalo y 2 dólares por cada libra de pargo. Ayer capturó 560 lb de pescado que valían 575 dólares. El abadejo y el pargo juntos valían 320 dólares. ¿Cuántas libras de cada especie pescó?

51–62 ■ Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 3 \\ 2 & \frac{3}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Efectúe la operación indicada o explique por qué no se puede efectuar.

51. $A + B$ **52.** $C - D$ **53.** $2C + 3D$

54. $5B - 2C$ **55.** GA **56.** AG

57. BC **58.** CB **59.** BF

60. FC **61.** $(C + D)E$ **62.** $F(2C - D)$

63–64 ■ Verifique que las matrices A y B son inversas entre sí calculando el producto AB y BA.

63. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

64. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 & \frac{5}{2} \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

65–70 ■ Resuelva la ecuación matricial para determinar la matriz desconocida, X, o demuestre que no existe solución.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

65. $A + 3X = B$ **66.** $\frac{1}{2}(X - 2B) = A$

67. $2(X - A) = 3B$ **68.** $2X + C = 5A$

69. $AX = C$ **70.** $AX = B$

71–78 ■ Calcule el determinante y, si es posible, la inversa de la matriz.

71. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ **72.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$

73. $\begin{bmatrix} 4 & -12 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ **74.** $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

75. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ **76.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

77. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ **78.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

79–82 ■ Exprese el sistema de ecuaciones lineales como una ecuación matricial. Luego resuelva la ecuación matricial multiplicando ambos miembros por la inversa de la matriz de coeficientes.

79. $\begin{cases} 12x - 5y = 10 \\ 5x - 2y = 17 \end{cases}$ **80.** $\begin{cases} 6x - 5y = 1 \\ 8x - 7y = -1 \end{cases}$

81. $\begin{cases} 2x + y + 5z = \frac{1}{3} \\ x + 2y + 2z = \frac{1}{4} \\ x + 3z = \frac{1}{6} \end{cases}$ **82.** $\begin{cases} 2x + 3z = 5 \\ x + y + 6z = 0 \\ 3x - y + z = 5 \end{cases}$

83–86 ■ Resuelva el sistema mediante la regla de Cramer.

83. $\begin{cases} 2x + 7y = 13 \\ 6x + 16y = 30 \end{cases}$

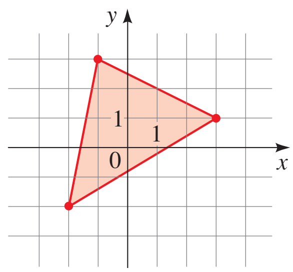
84. $\begin{cases} 12x - 11y = 140 \\ 7x + 9y = 20 \end{cases}$

85. $\begin{cases} 2x - y + 5z = 0 \\ -x + 7y = 9 \\ 5x + 4y + 3z = -9 \end{cases}$

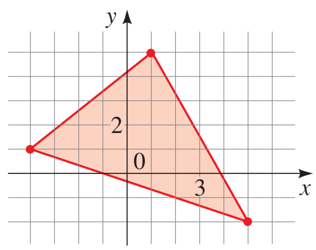
86. $\begin{cases} 3x + 4y - z = 10 \\ x - 4z = 20 \\ 2x + y + 5z = 30 \end{cases}$

87–88 ■ Aplique la fórmula de determinante para encontrar el área del triángulo de la figura.

87.



88.



89–94 ■ Encuentre la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

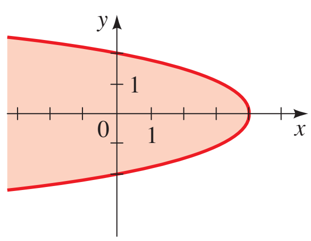
89. $\dfrac{3x + 1}{x^2 - 2x - 15}$ **90.** $\dfrac{8}{x^3 - 4x}$

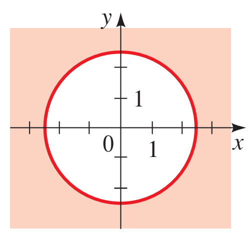
91. $\dfrac{2x - 4}{x(x - 1)^2}$ **92.** $\dfrac{x + 6}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}$

93. $\dfrac{2x - 1}{x^3 + x}$ **94.** $\dfrac{5x^2 - 3x + 10}{x^4 + x^2 - 2}$

95–96 ■ De acuerdo con la ecuación y su gráfica dadas determine una desigualdad cuya solución es la región sombreada

95. $x + y^2 = 4$ **96.** $x^2 + y^2 = 8$





97–100 ■ Grafique la desigualdad.

97. $3x + y \leq 6$

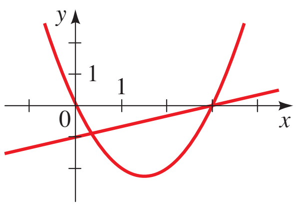
98. $y \geq x^2 - 3$

99. $x^2 + y^2 > 9$

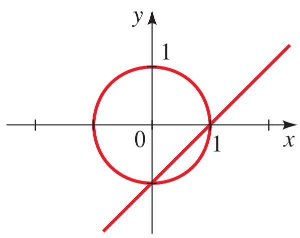
100. $x - y^2 < 4$

101–104 ■ La figura ilustra la gráfica de las ecuaciones que corresponden a las desigualdades dadas. Sombree la región del conjunto solución del sistema de desigualdades.

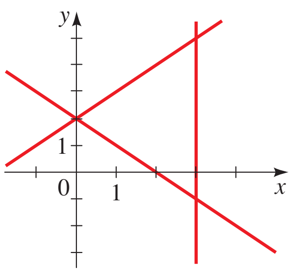
101. $\begin{cases} y \geq x^2 - 3x \\ y \leq \frac{1}{3}x - 1 \end{cases}$



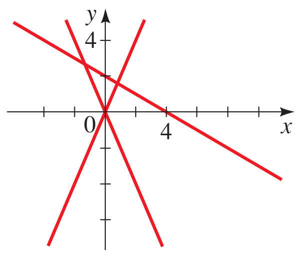
102. $\begin{cases} y \geq x - 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$



103. $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ y - x \leq 2 \\ x \leq 3 \end{cases}$



104. $\begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq 2x \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$



105–108 ■ Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades. Calcule las coordenadas de todos los vértices y determine si el conjunto solución es acotado o no acotado.

105. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x + y < 0 \end{cases}$

106. $\begin{cases} y - x^2 \geq 4 \\ y < 20 \end{cases}$

107. $\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x + 2y \leq 12 \\ y \leq x + 4 \end{cases}$

108. $\begin{cases} x \geq 4 \\ x + y \geq 24 \\ x \leq 2y + 12 \end{cases}$

109–110 ■ Determine x, y y z en función de a, b y c.

109. $\begin{cases} -x + y + z = a \\ x - y + z = b \\ x + y - z = c \end{cases}$

110. $\begin{cases} ax + by + cz = a - b + c \\ bx + by + cz = c \\ cx + cy + cz = c \end{cases} \qquad (a \neq b, b \neq c, c \neq 0)$

111. ¿Para qué valores de k las siguientes tres rectas tienen un punto común de intersección?

$$x + y = 12$$
$$kx - y = 0$$
$$y - x = 2k$$

112. ¿Para qué valores de k el siguiente sistema tiene una cantidad infinita de soluciones?

$$\begin{cases} kx + y + z = 0 \\ x + 2y + kz = 0 \\ -x + 3z = 0 \end{cases}$$

9 Evaluación

1–2 ■ De acuerdo con el sistema de ecuaciones dado.

a) Determine si el sistema es lineal o no lineal.

b) Calcule todas las soluciones del sistema.

1. $\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 5x + 2y = -4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x + y^2 = 10 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$

3. Mediante una calculadora para graficar o de una computadora calcule todas las soluciones del sistema con dos cifras decimales.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ y = x^3 - 2x^2 \end{cases}$$

4. En $2\frac{1}{2}$ h un aeroplano recorre 600 km contra el viento. Tarda 50 min en viajar 300 km con el viento. Determine la velocidad del viento y la velocidad del aeroplano en viento quieto.

5. Determine si cada matriz está en la forma escalonada reducida, escalonada o ninguna de las dos.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6. Aplique la eliminación de Gauss para calcular la solución completa del sistema, o para demostrar que no existe solución.

a) $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 5z = -5 \\ 2y - 3z = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 3 \\ x + 2y + 2z = -1 \\ 4x + y + 5z = 4 \end{cases}$

7. Aplique la eliminación de Gauss-Jordan para determinar la solución completa del sistema.

$$\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ 3x + 4y - 2z = -1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

8. Anne, Barry y Cathy entran a una cafetería. Anne pide dos cafés, un jugo y dos donas, y paga 6.25 dólares. Barry ordena un café y tres donas, y paga 3.75 dólares. Cathy pide tres cafés, un jugo y cuatro donas, y paga 9.25 dólares. Calcule el precio del café, jugo y donas de esta cafetería.

9. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Efectúe la operación indicada o explique por qué no se puede ejecutar

a) $A + B$ b) AB c) $BA - 3B$ d) CBA

e) A^{-1} f) B^{-1} g) $\det(B)$ h) $\det(C)$

10. a) Escriba una ecuación matricial que sea equivalente al sistema siguiente.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10 \\ 3x - 2y = 30 \end{cases}$$

b) Determine la inversa de la matriz de coeficientes y úsela para resolver el sistema.

11. Sólo una de las matrices siguientes tiene inversa. Calcule el determinante de cada matriz y úselo para identificar la matriz que tiene inversa. Encuentre luego esta inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Resuelva aplicando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 2x \phantom{{}-y} - z = 14 \\ 3x - y + 5z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = -2 \end{cases}$$

13. Determine la descomposición en fracciones parciales de la función racional.

a) $\dfrac{4x - 1}{(x - 1)^2(x + 2)}$ b) $\dfrac{2x - 3}{x^3 + 3x}$

14. Grafique el conjunto solución del sistema de desigualdades. Dé las coordenadas de los vértices y nómbrelos.

a) $\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ x - y \ge -2 \\ x + 2y \ge 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y \le 5 \\ y \le 2x + 5 \end{cases}$

Enfoque en el modelado

Programación lineal

La **programación lineal** es una técnica de modelado usada para determinar la asignación óptima de recursos en los negocios, la milicia y otras áreas de las actividades humanas. Por ejemplo, un fabricante que produce varios productos diversos de la misma materia prima puede aplicar la programación lineal para determinar cuánto de cada producto debe ser producido para maximizar la ganancia. Es probable que esta técnica de modelado sea la aplicación práctica más importante de los sistemas de desigualdades lineales. En 1975, Leonid Kantorovich y T. C. Koopmans recibieron el Premio Nobel en economía por su trabajo en el desarrollo de esta técnica.

Aunque la programación lineal se puede aplicar a problemas muy complejos con cientos o hasta miles de variables, consideramos sólo algunos ejemplos para los cuales se pueden aplicar los métodos gráficos de la sección 9.9. En el caso de grandes cantidades de variables, se usa un método de programación lineal basado en matrices. Examinemos un problema representativo.

Ejemplo 1 Manufactura para obtener una ganancia máxima

Un pequeño fabricante de zapatos produce dos estilos de zapatos: zapatos de agujetas y mocasines. Utiliza dos máquinas en el proceso: una máquina cortadora y una máquina de coser. Cada tipo de zapato requiere 15 min por cada par en la cortadora. Los zapatos de agujetas requieren 10 min de costura por par y los mocasines requieren 20 min de costura por par. Como el fabricante sólo quiere contratar un operador por máquina, cada proceso está disponible sólo por 8 h al día. Si la ganancia es de 15 dólares por cada par de zapatos de agujetas y 20 dólares por cada par de mocasines, ¿cuántos pares de cada tipo debe producir por día para tener una ganancia máxima?

Puesto que los mocasines son los que proporcionan más ganancia por cada par, parecería que lo mejor es producir sólo mocasines. Pero para nuestra sorpresa, esto no resulta ser la solución más rentable.

Solución Primero organizamos los datos en una tabla. Para ser congruentes, convertimos todos los tiempos en horas.

	Zapatos de agujeta	Mocasines	Tiempo disponible
Tiempo en la cortadora (h)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	8
Tiempo en la máquina de coser (h)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	8
Ganancia	\$15	\$20	

Describimos el modelo y resolvemos el problema en cuatro pasos.

ELECCIÓN DE LAS VARIABLES Para formular un modelo matemático, primero damos nombres a las cantidades variables. En el caso de este problema hacemos

x = cantidad de pares de zapatos de agujetas fabricados diario

y = cantidad de pares de mocasines fabricados diario

DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO El objetivo es determinar qué valores de x y de y dan la ganancia máxima. Puesto que cada par de zapatos de

agujetas genera 15 dólares de ganancia y cada par de mocasines genera 20 dólares, la ganancia total se representa con

$$P = 15x + 20y$$

esta función se denomina *función objetivo*.

GRÁFICA DE LA REGIÓN FACTIBLE Entre más grande sean x y y, más alta es la ganancia. Pero no podemos escoger en forma arbitraria valores grandes para estas variables debido a las *restricciones* del problema. Cada restricción es una desigualdad de las variables.

En este problema, la cantidad total de horas de corte necesarias es $\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y$. Puesto que sólo hay 8 horas disponibles en la cortadora, tenemos

$$\tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y \leq 8$$

De igual manera, al considerar la cantidad de tiempo necesario y disponible en la máquina de coser tenemos

$$\tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3}y \leq 8$$

No podemos producir cantidades negativas de zapatos, de modo que

$$x \geq 0 \qquad \text{y} \qquad y \geq 0$$

Por lo tanto, x y y deben cumplir con las restricciones

$$\begin{cases} \tfrac{1}{4}x + \tfrac{1}{4}y \leq 8 \\ \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{3}y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Si multiplicamos la primera desigualdad por 4 y la segunda por 6 obtenemos el sistema simplificado

$$\begin{cases} x + \ \ y \leq 32 \\ x + 2y \leq 48 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

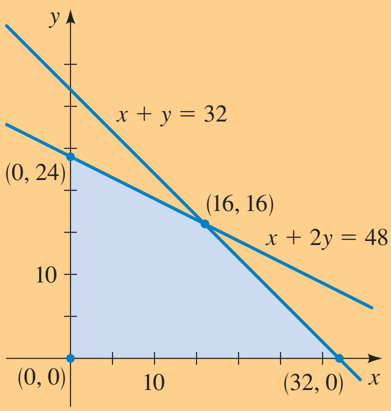


Figura 1

La solución de este sistema se presenta en la figura 1, en donde los vértices ya contienen las coordenadas. Los únicos valores que satisfacen las restricciones del problema son los que corresponden a los puntos de la región sombreada de la figura 1. Se denomina *región factible* del problema.

DETERMINACIÓN DE LA GANANCIA MÁXIMA Cuando x y y se incrementan, también aumenta la ganancia. Por lo tanto, parece razonable que la ganancia máxima ocurra en un punto en una de las orillas externas de la región factible, donde es imposible incrementar x y y sin salir de la región. En efecto, se puede demostrar que el valor máximo ocurre en un vértice. Esto quiere decir que necesitamos comprobar la ganancia sólo en los vértices. El valor más grande de P se presenta en el punto (16, 16), donde P = 560 dólares. Por lo tanto, el fabricante debe hacer 16 pares de zapatos de agujeta y 16 pares de mocasines para obtener una ganancia máxima diaria de 560 dólares.

Vértice	$P = 15x + 20y$
(0, 0)	0
(0, 24)	15(0) + 20(24) = \$480
(16, 16)	15(16) + 20(16) = \$560
(32, 0)	15(32) + 20(0) = \$480

Ganancia máxima

> **La programación lineal** ayuda a la industria telefónica a determinar la manera más eficiente de guiar las llamadas telefónicas. Las decisiones computarizadas del enrutamiento deben efectuarse con mucha rapidez para que los que llaman no estén esperando la conexión. Puesto que la base de datos de los clientes y las rutas es enorme, es esencial un método extremadamente rápido para resolver los problemas de la programación lineal. En 1984, el matemático de 28 años de edad **Narendra Karmarkar**, quien trabajaba en los Bell Labs, en Murray Hill, Nueva Jersey, descubrió justamente ese método. Su idea fue tan ingeniosa y su método tan veloz que su descubrimiento causó admiración en el mundillo matemático. Aunque los descubrimientos matemáticos rara vez aparecen en los periódicos, el *Time* del 3 de diciembre de 1984 sí publicó éste. En la actualidad, las aerolíneas aplican en forma rutinaria la técnica de Karmarkar para reducir al mínimo los costos al programar pasajeros, personal de los vuelos, combustible, equipaje y trabajadores de mantenimiento.

Todos los problemas de programación lineal que consideramos siguen el patrón del ejemplo 1. En cada problema hay dos variables. El problema describe **restricciones**, que llevan a un sistema de desigualdades lineales cuya solución se denomina **región factible**. Esta función siempre tiene sus valores máximo y mínimo en los **vértices** de la región factible. Esta técnica de modelado requiere cuatro pasos, que se resumen en el recuadro siguiente.

Reglas para la programación lineal

1. **Elija las variables.** Decida qué cantidades variables del problema se deben llamar x y y.
2. **Encuentre la función objetivo.** Escriba una expresión para la función que queremos maximizar o minimizar.
3. **Grafique la región factible.** Escriba una expresión para la función que queremos maximizar o minimizar.
4. **Determine el máximo y el mínimo.** Evalúe la función objetivo en los vértices de la región factible para determinar su valor máximo y mínimo.

Ejemplo 2 Un problema de embarque

Un comerciante de automóviles posee bodegas en Millville y en Trenton y franquicias en Camden y Atlantic City. Cada automóvil vendido en las franquicias debe ser entregado desde uno de los almacenes. En un cierto día, los vendedores de Camden venden 10 automóviles y los de Atlantic City venden 12. La bodega de Millville tiene 15 vehículos y la de Trenton tienen 10. El costo de embarcar un automóvil es de 50 dólares desde Millville a Camden, 40 dólares desde Millville a Atlantic City, 60 dólares de Trenton a Camden y 55 dólares de Trenton a Atlantic City. ¿Cuántos vehículos deben ser transportados desde cada almacén a cada franquicia para cumplir con los pedidos al mínimo costo?

Solución El primer paso es organizar la información. En lugar de elaborar una tabla, mejor hacemos un diagrama para mostrar el flujo de vehículos desde los almacenes hasta las franquicias (véase la figura 2 en la página siguiente). El diagrama muestra el número de automóviles disponible en cada almacén o el requerido en cada franquicia y el costo del embarque entre los lugares.

ELECCIÓN DE VARIABLES Las flechas de la figura 2 indican cuatro rutas posibles, de modo que el problema parece tener cuatro variables. Pero hacemos

x = número de automóviles que serán embarcados desde Millville a Camden

y = número de automóviles que serán embarcados desde Millville a Atlantic City

Para cumplir con los pedidos debemos tener

$10 - x$ = número de automóviles embarcados desde Trenton a Camden

$12 - y$ = número de automóviles embarcados desde Trenton a Atlantic City

De modo que las únicas variables en el problema son x y y.

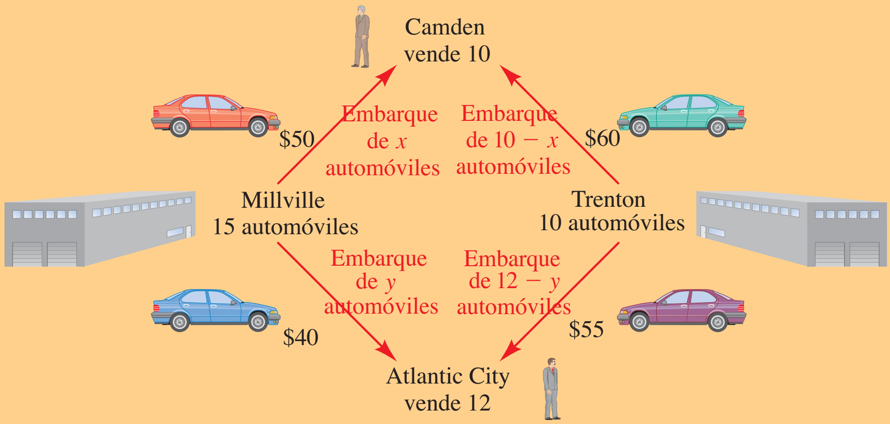


Figura 2

DETERMINACIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO El objetivo de este problema es minimizar los costos. Según la figura 2 vemos que el costo total C de embarcar los automóviles es

$$\begin{aligned} C &= 50x + 40y + 60(10 - x) + 55(12 - y) \\ &= 50x + 40y + 600 - 60x + 660 - 55y \\ &= 1260 - 10x - 15y \end{aligned}$$

Esta es la función objetivo.

GRÁFICA DE LA REGIÓN FACTIBLE Ahora planteamos las desigualdades de restricción que definen la región factible. Primero, la cantidad de automóviles embarcados en cada ruta no puede ser negativa, así que tenemos

$$\begin{aligned} x &\geq 0 & y &\geq 0 \\ 10 - x &\geq 0 & 12 - y &\geq 0 \end{aligned}$$

Segundo, el número total de automóviles embarcados desde cada bodega no puede exceder la cantidad de automóviles disponible ahí, entonces

$$\begin{aligned} x + y &\leq 15 \\ (10 - x) + (12 - y) &\leq 10 \end{aligned}$$

Luego de simplificar la última desigualdad tenemos

$$\begin{aligned} 22 - x - y &\leq 10 \\ -x - y &\leq -12 \\ x + y &\geq 12 \end{aligned}$$

Las desigualdades $10 - x \geq 0$ y $12 - y \geq 0$ se pueden volver a escribir como $x \leq 10$ y $y \leq 12$. Por lo tanto, la región factible se describe mediante las restricciones

$$\begin{cases} x + y \leq 15 \\ x + y \geq 12 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 12 \end{cases}$$

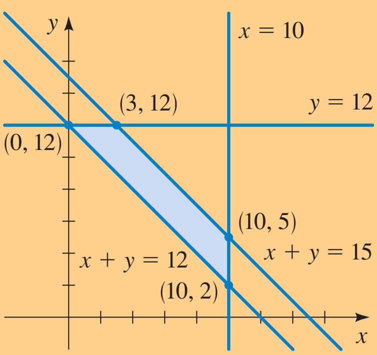


Figura 3

La región factible se grafica en la figura 3.

DETERMINACIÓN DEL COSTO MÍNIMO Comprobamos el valor de la función objetivo en cada vértice de la región factible.

Vértice	$C = 1260 - 10x - 15y$
(0, 12)	$1260 - 10(0) - 15(12) = \$1080$
(3, 12)	$1260 - 10(3) - 15(12) = \$1050$
(10, 5)	$1260 - 10(10) - 15(5) = \$1085$
(10, 2)	$1260 - 10(10) - 15(2) = \$1130$

Costo mínimo

El costo mínimo se presenta en el punto (3, 12). Por lo tanto, el comerciante debe embarcar

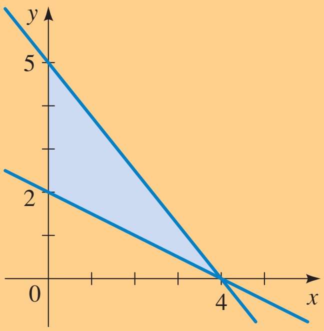
3 automóviles desde Millville a Camden
12 automóviles desde Millville a Atlantic City
7 automóviles desde Trenton a Camden
0 automóviles desde Trenton a Atlantic City ■

Por los años cuarenta del siglo pasado, los matemáticos crearon métodos matriciales para resolver problemas de programación lineal que contienen más de dos variables. Estos métodos fueron aplicados por primera vez entre los Aliados, en la Segunda Guerra Mundial, para resolver problemas de aprovisionamiento similares, pero, naturalmente, mucho más complicados que el ejemplo 2. El mejoramiento de los métodos matriciales es un campo activo y emocionante de la investigación matemática actual.

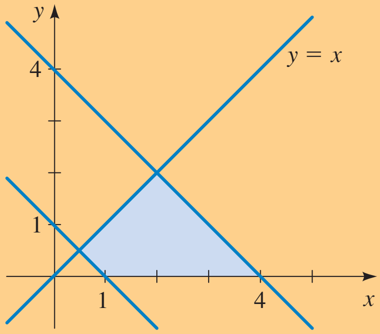
Problemas

1–4 ■ Determine los valores máximo y mínimo de la función objetivo dada en la región factible indicada.

1. $M = 200 - x - y$



2. $N = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 40$



3. $P = 140 - x + 3y$

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ 2x + y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 28 \end{cases}$$

4. $Q = 70x + 82y$

$$\begin{cases} x \geq 0, \quad y \geq 0 \\ x \leq 10, \quad y \leq 20 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \leq 18 \end{cases}$$

5. Fabricación de muebles Un fabricante de muebles hace mesas y sillas de madera. El proceso de producción requiere dos tipos básicos de tarea: carpintería y acabado. Una mesa requiere 2 horas de carpintería y 1 h de acabado. Una silla requiere 3 h de carpintería y media hora de acabado. La ganancia es de 35 dólares por mesa y 20 dólares

por silla. Los empleados de la fábrica pueden proporcionar un máximo de 108 h de trabajo de carpintería y 20 h de acabado por día. ¿Cuántas mesas y sillas se deben manufacturar diario para maximizar la ganancia?

6. **Construcción de vivienda** Un contratista de vivienda subdividió una granja en 100 lotes para construcción. Diseñó dos tipos de casa para estos lotes: tipo colonial y tipo rancho. Una casa colonial requiere 30 000 dólares de capital y producirá una ganancia de 4 000 dólares cuando se venda. Una casa tipo rancho requiere 40 000 dólares de capital y generará una ganancia de 8 000 dólares cuando se venda. Si cuenta ahora ya con 3.6 millones de dólares de capital, ¿cuántas casas de cada tipo se deben construir para maximizar la ganancia? ¿Quedará alguno de los terrenos vacío?

7. **Trasiego de fruta** Un transportista traslada fruta desde Florida hasta Montreal. Cada huacal de naranjas es de 4 pies cúbicos de volumen y pesa 80 lb, y cada huacal de toronjas es de 6 pies cúbicos de volumen y pesa 100 lb. El camión tiene una capacidad máxima de 300 pies cúbicos y puede llevar hasta 5600 lb. Además, no puede llevar más huacales de toronjas que de naranjas. Si la ganancia es de 2.50 dólares por cada huacal de naranjas y 4 dólares por cada huacal de toronjas, ¿cuántos huacales de cada fruta debe transportar para obtener una ganancia máxima?

8. **Fabricación de calculadoras** Un fabricante de calculadoras produce dos modelos: la estándar y la científica. La demanda a largo plazo de los dos modelos dicta que la compañía debe fabricar todos los días por lo menos 100 calculadoras estándar y 80 científicas. Pero a causa de las limitaciones de la capacidad de producción, no más de 200 calculadoras estándar y 170 científicas se pueden producir al día. Para cumplir con el contrato de embarque, un total de por lo menos 200 calculadoras se deben embarcar todos los días.
   a) Si el costo de la producción es 5 dólares por cada calculadora estándar y 7 dólares por la científica, ¿cuántas calculadoras de cada modelo se deben producir todos los días para minimizar el costo?
   b) Si cada calculadora estándar genera una pérdida de 2 dólares, pero cada calculadora científica produce una ganancia de 5 dólares, ¿cuantas de cada modelo se deben fabricar diario para maximizar la ganancia?

9. **Embarque de equipos estereofónicos** Una cadena de descuento en artículos electrónicos tiene en venta una cierta marca de equipos estereofónicos. La cadena posee tiendas en Santa Mónica y en El Toro, y bodegas en Long Beach y Pasadena. Para cumplir con pedidos urgentes, 15 equipos se transportan desde las bodegas a la tienda de Santa Mónica, y 19 se deben embarcar a la tienda de El Toro. El costo del embarque de un equipo es 5 dólares desde Long Beach a Santa Mónica, 6 dólares desde Long Beach a El Toro, 4 dólares de Pasadena a Santa Mónica y 5.50 dólares desde Pasadena a El Toro. Si la bodega de Long Beach tiene 24 equipos y la de Pasadena tiene 18 equipos en existencia, ¿cuántos equipos se deben embarcar desde cada bodega a cada tienda para cumplir con los pedidos a un costo mínimo de embarque?

10. **Entrega de madera contrachapada** Un hombre es dueño de dos tiendas de material para construcción, una en el lado este y otra en el lado oeste de una ciudad. Dos clientes piden madera contrachapada de media pulgada. El cliente A necesita 50 hojas y el cliente B quiere 70 hojas. La tienda del lado este tiene 80 hojas y las del lado oeste tiene 45 de esta madera en existencia. El costo de entrega por hoja de la tienda del lado este es de 50 centavos de dólar para el cliente A y 60 centavos de dólar para el cliente B. El costo de entrega por hoja de la tienda del lado oeste es de 40 centavos de dólar para A y 55 centavos de dólar para B. ¿Cuántas hojas se deben embarcar desde cada tienda para cada cliente para reducir al mínimo los costos de entrega?

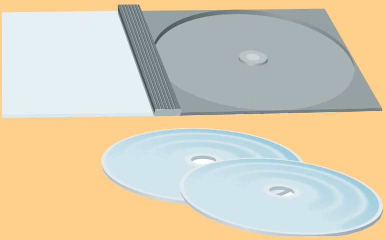
11. **Empaque de frutas secas** Un comerciante vende dos tipos de mezclas de nueces. El paquete con mezcla estándar contiene 100 g de castañas y 200 g de cacahuate y lo vende en 1.95 dólares. El paquete de mezcla de lujo contiene 150 g de castañas y 50 g de cacahuates, y lo vende a 2.25 dólares. El comerciante tiene 15 kg de castañas y 20 kg de cacahuate en existencia. Con base en las ventas pasadas, necesita tener por lo menos tantos paquetes estándar como de lujo. ¿Cuántos paquetes de cada mezcla debe hacer para maximizar su ganancia?

12. **Alimentación de conejos de laboratorio** Un biólogo desea alimentar a sus conejos de laboratorio con una mezcla de dos tipos de alimentos. El tipo I contiene 8 g de grasa, 12 g de carbohidratos y 2 g de proteína por cada onza. El tipo II contiene 12 g de grasa, 12 g de carbohidratos y 1 g de proteína por cada onza. El tipo I cuesta

0.20 dólares la onza y el tipo II cuesta 0.30 dólares la onza. Los conejos reciben un mínimo diario de 24 g de grasa, 36 g de carbohidratos y 4 g de proteína, pero no obtienen más de 5 onzas de alimento por día. ¿Cuántas onzas de cada tipo de alimento se deben dar diario a los conejos para satisfacer las necesidades dietéticas a un mínimo costo.

13. Inversión en bonos Una mujer desea invertir 12 000 dólares en tres tipos de bonos: bonos municipales que proporcionan un interés anual de 7%, certificados de inversión bancarios que dan 8% y bonos de alto riesgo que dan 12%. Por cuestiones de impuestos, desea que la cantidad invertida en bonos municipales sea por lo menos el triple de la cantidad invertida en los certificados bancarios. Para conservar su nivel de riesgo manejable, invertirá no más de 2000 dólares en los bonos de alto riesgo. ¿Cuánto debe invertir en cada tipo de bono para maximizar su rendimiento de interés anual? [*Sugerencia*: sea $x =$ cantidad en bonos municipales y $y =$ cantidad en certificados bancarios. Entonces la cantidad en bonos de alto riesgo será de $12\,000 - x - y$.]

14. Rendimiento del interés anual Refiérase al problema 13. Suponga que el inversionista decide incrementar el máximo invertido en bonos de alto riego a 3000 dólares, pero deja las otras condiciones sin cambio. ¿En cuánto se incrementará su rendimiento máximo posible del interés?



15. Estrategia para los negocios Una pequeña compañía de programas para computadoras publica juegos para computadoras y programas educativos y de servicio. Su estrategia de negocio es comercializar un total de 36 nuevos programas cada año, y por lo menos cuatro de ellos serán juegos. La cantidad de programas de servicio publicados nunca es más del doble de la cantidad de programas educativos. En promedio, la compañía tiene una ganancia anual de 5000 dólares por cada juego para computadora, 8000 dólares por cada programa educativo y 6000 dólares por cada programa de servicio. ¿Cuántos programas de cada tipo debe publicar cada año para lograr una ganancia máxima?

16. Región factible Todas las partes de este problema se refieren a la siguiente región factible y función objetivo

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq y \\ x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

$$P = x + 4y$$

a) Grafique la región factible.

b) En la gráfica del inciso a) trace las gráficas de las ecuaciones lineales obtenidas al hacer P igual a 40, 36, 32 y 28.

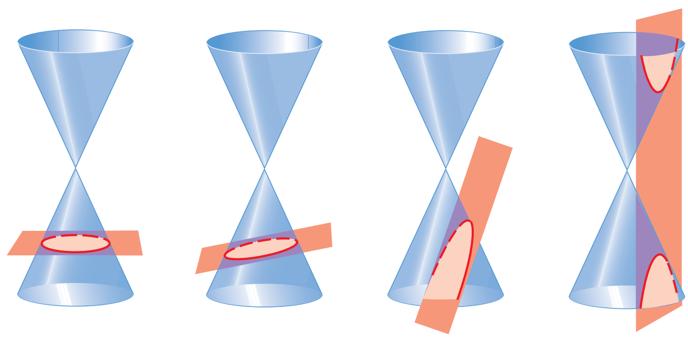
c) Si continuamos reduciendo el valor de P, ¿en cuál vértice de la región factible estas rectas tocarán primero la región factible?

d) Verifique que el valor máximo de P en la región factible está en el vértice que eligió en el inciso c).

10 Geometría analítica

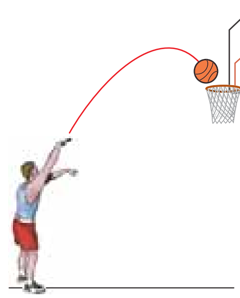
Esquema del capítulo

Las secciones cónicas son las curvas que se obtienen cuando se hace un corte recto en un cono, como se muestra en la figura. Por ejemplo, si se corta un cono horizontalmente, la sección transversal es un círculo. Por lo tanto, un círculo es una sección cónica. Otras formas de corte de un cono producen parábolas, elipses e hipérbolas.

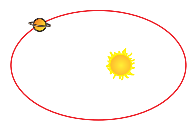


Círculo Elipse Parábola Hipérbola

El objetivo en este capítulo es hallar ecuaciones cuyas gráficas son las secciones cónicas. Ya se sabe de la sección 1.8 que la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ es un círculo. Se encontrarán ecuaciones para cada una de las otras secciones cónicas al analizar sus propiedades geométricas.



La trayectoria de una pelota de baloncesto es una parábola.



La órbita de un planeta es una elipse.

La forma de una torre de enfriamiento es una hipérbola.

Las secciones cónicas son importantes porque sus formas están ocultas en la estructura de muchas cosas. Por ejemplo, la trayectoria de un planeta que se mueve alrededor del Sol es una elipse. La trayectoria de un proyectil (como un cohete, una pelota de baloncesto o el agua que brota de una fuente) es una parábola, lo cual hace

que el estudio de las parábolas sea indispensable en la ciencia de los cohetes. Las secciones cónicas también ocurren en muchos lugares inesperados. Por ejemplo, la gráfica del rendimiento de una cosecha como una función de la cantidad de lluvia es una parábola (véase la página 321). Se examinarán algunos usos de las cónicas en medicina, ingeniería, navegación y astronomía.

En la sección 10.7 se estudian ecuaciones paramétricas, las cuales se pueden usar para describir la curva que un cuerpo en movimiento traza con el tiempo. En *Énfasis en el modelado*, página 816, se deducen ecuaciones paramétricas para la trayectoria de un proyectil.

10.1 Parábolas

En la sección 2.5 se vio que la gráfica de la ecuación $y = ax^2 + bx + c$ es una curva en forma de U llamada *parábola* que abre hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de si el signo de a es positivo o negativo.

En esta sección se estudian las parábolas desde un punto de vista geométrico en vez de algebraico. Se empieza con la definición geométrica de una parábola y se muestra cómo esto conduce a la fórmula algebraica con la que ya se está familiarizado.

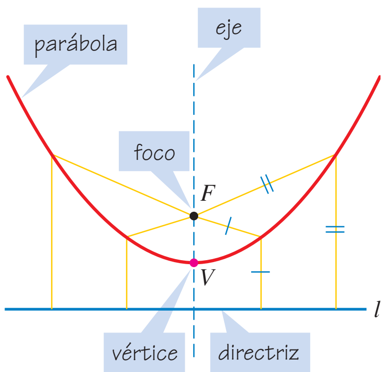


Figura 1

Definición geométrica de una parábola

Una parábola es el conjunto de puntos en el plano equidistante de un punto fijo F (llamado **foco**) y una línea fija l (llamada **directriz**).

Esta definición se ilustra en al figura 1. El **vértice** V de la parábola se localiza a la mitad entre el foco y la directriz, y el **eje de simetría** es la línea que corre por el foco perpendicular a la directriz.

En esta sección se restringe la atención a parábolas que están situadas con el vértice en el origen y que tienen un eje de simetría vertical u horizontal. (Las parábolas en posiciones más generales serán consideradas en las secciones 10.4 y 10.5.) Si el foco de tal parábola es el punto $F(0, p)$, entonces el eje de simetría debe ser vertical y la directriz tiene la ecuación $y = -p$. En la figura 2 se ilustra el caso $p > 0$.

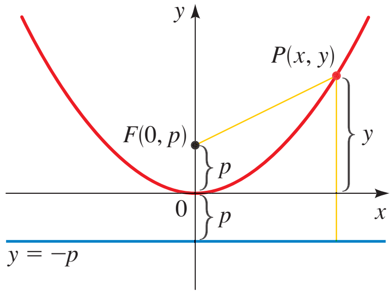


Figura 2

Si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la parábola, entonces la distancia de P al foco F (con la fórmula de la distancia) es

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

La distancia desde P a la directriz es

$$|y - (-p)| = |y + p|$$

Por la definición de una parábola, estas dos distancias deben ser iguales:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

$$x^2 + (y - p)^2 = |y + p|^2 = (y + p)^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado ambos lados}$$

$$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2 \qquad \text{Desarrolle}$$

$$x^2 - 2py = 2py \qquad \text{Simplifique}$$

$$x^2 = 4py$$

Si $p > 0$, entonces la parábola abre hacia arriba, pero si $p < 0$, abre hacia abajo. Cuando x se reemplaza por $-x$, la ecuación permanece sin cambio, de modo que la gráfica es simétrica respecto al eje y.

Ecuaciones y gráficas de parábolas

En el cuadro siguiente se resume lo que se ha probado acerca de la ecuación y características de una parábola con un eje vertical.

Parábola con eje vertical

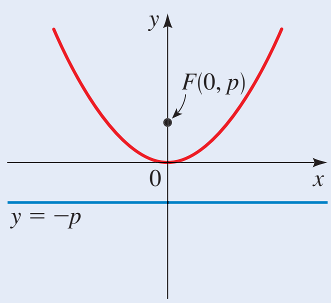
La gráfica de la ecuación

$$x^2 = 4py$$

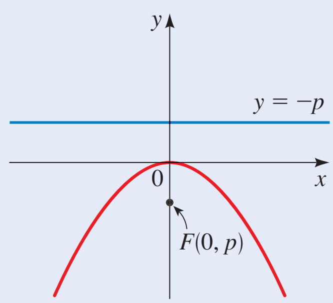
es una parábola con las siguientes propiedades.

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(0, p)$
DIRECTRIZ	$y = -p$

La parábola abre hacia arriba si $p > 0$ o hacia abajo si $p < 0$.



$x^2 = 4py$ con $p > 0$



$x^2 = 4py$ con $p < 0$

Matemáticas en el mundo moderno

Roger Ressmeyer/Corbis

Buscando dentro de tu cabeza

¿Cómo le gustaría ver dentro de su cabeza? La idea no es particularmente atractiva para la mayor parte de nosotros, pero con frecuencia los médicos necesitan hacer eso. Si pueden mirar sin cirugía invasiva, es mejor. Una radiografía no proporciona en realidad una vista interna, simplemente da una "gráfica" de la densidad de tejido que deben pasar los rayos X. Por lo tanto, una radiografía es una vista "aplanada" en una dirección. Suponga que obtiene una vista de rayos X desde muchas direcciones distintas, ¿se pueden usar estas "gráficas" para reconstruir la vista interna tridimensional? Este es un problema puramente matemático y hace mucho tiempo lo resolvieron los matemáticos. Sin embargo, reconstruir la vista interna requiere miles de cálculos tediosos. En la actualidad, los matemáticos y las computadoras de alta velocidad brindan la posibilidad de "ver dentro" mediante un proceso llamado Tomografía Auxiliada por Computadora (o exploración TAC). Los matemáticos continúan investigando muchas formas de usar las matemáticas para reconstruir imágenes. Una de las técnicas más recientes, llamada Imagen de Resonancia Magnética (IRM), combina la biología molecular y las matemáticas para "ver al interior" con claridad.

Ejemplo 1 Hallar la ecuación de una parábola

Encuentre la ecuación de la parábola con vértice $V(0, 0)$ y foco $F(0, 2)$ y bosqueje su gráfica.

Solución Puesto que el foco es $F(0, 2)$, se concluye que $p = 2$ (y, por lo tanto, la directriz es $y = -2$). Así, la ecuación de la parábola es

$$x^2 = 4(2)y \qquad x^2 = 4py \text{ con } p = 2$$

$$x^2 = 8y$$

Puesto que $p = 2 > 0$, la parábola abre hacia arriba. Véase la figura 3.

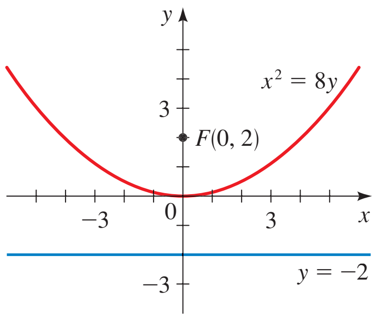


Figura 3

■

Ejemplo 2 Hallar el foco y la directriz de una parábola a partir de su ecuación

Encuentre el foco y la directriz de la parábola $y = -x^2$ y bosqueje la gráfica.

Solución Para hallar el foco y la directriz, se escribe en forma estándar la ecuación $x^2 = -y$. Comparando esto con la ecuación general $x^2 = 4px$, se puede observar que $4p = -1$, por lo tanto $p = -\frac{1}{4}$. Así, el foco es $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ y la directriz es $y = \frac{1}{4}$. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestran en la figura 4a). Se puede trazar también la gráfica por medio de una calculadora como se muestra en la figura 4b).

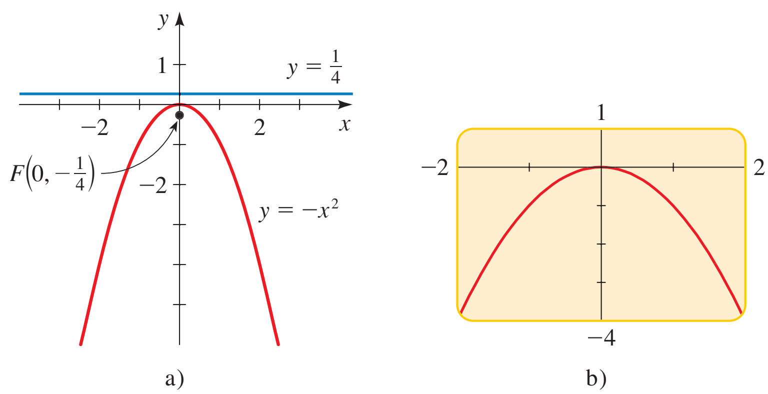


Figura 4

■

Reflejando la gráfica en la figura 2 respecto a la diagonal $y = x$ tiene el efecto de intercambiar los papeles de x y y. Esto produce una parábola con eje horizontal. Por el mismo método que antes, se pueden probar las siguientes propiedades.

Parábola con eje horizontal

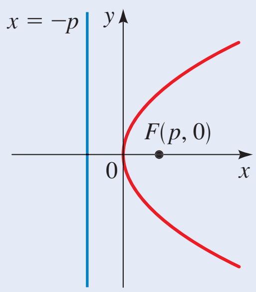
La gráfica de la ecuación

$$y^2 = 4px$$

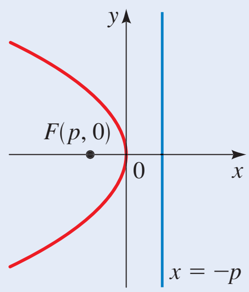
es una parábola con las siguientes propiedades.

VÉRTICE	$V(0, 0)$
FOCO	$F(p, 0)$
DIRECTRIZ	$x = -p$

La parábola abre hacia arriba a la derecha si $p > 0$ o a la izquierda si $p < 0$.



$y^2 = 4px$ con $p > 0$



$y^2 = 4px$ con $p < 0$

Ejemplo 3 Una parábola con eje horizontal

Una parábola tiene la ecuación $6x + y^2 = 0$.

a) Encuentre el foco y la directriz de la parábola y bosqueje la gráfica.

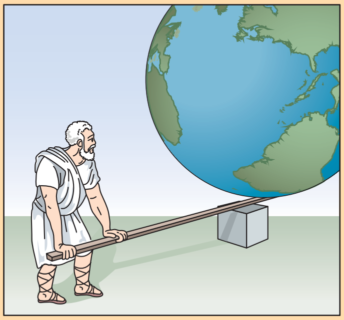
b) Use una calculadora para trazar la gráfica.

Solución

a) Para encontrar el foco y la directriz, se pone la ecuación dada en la forma estándar $y^2 = -6x$. Al comparar esto con la ecuación general $y^2 = 4px$, se puede observar que $4p = -6$, por lo tanto $p = -\frac{3}{2}$. Así, el foco es $F\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y la directriz es $x = \frac{3}{2}$. Puesto que $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda. La gráfica de la parábola, junto con el foco y la directriz, se muestra en la figura 5a) en la página siguiente.

b) Dibuje la gráfica con una calculadora, se necesita despejar y.

$$\begin{aligned} 6x + y^2 &= 0 \\ y^2 &= -6x && \text{Reste } 6x \\ y &= \pm\sqrt{-6x} && \text{Tome las raíces cuadradas} \end{aligned}$$



Arquímedes (287-212 a.C.) fue el más grande matemático del mundo antiguo. Nació en Siracusa, una colonia griega en Sicilia, una generación después de Euclides (véase la página 532). Uno de sus muchos descubrimientos es la ley de la palanca (véase la página 69). Es famoso por su dicho: “dame un punto de apoyo y moveré la Tierra”.

Renombrado como un genio mecánico por sus muchos inventos de ingeniería, diseñó poleas para levantar pesadas naves y el tornillo sinfín para transportar agua a niveles superiores. Se dice que usó espejos parabólicos con el fin de concentrar los rayos del Sol y así encender las naves romanas que atacaban Siracusa.

El rey Hieron II de Siracusa sospechaba que un joyero se quedaba con parte del oro destinado a la corona del rey y lo sustituía con una cantidad igual de plata. El rey pidió a Arquímedes un consejo. Mientras meditaba sobre el asunto en un baño público, Arquímedes descubrió la solución al problema del rey cuando notó que el volumen de su cuerpo era el mismo que el volumen del agua desplazada de la tina. Según la historia, corrió a casa desnudo, gritando “¡eureka!, ¡eureka!” (“¡la hallé!, ¡la hallé!”) Este incidente atestigua su enorme poder de concentración.

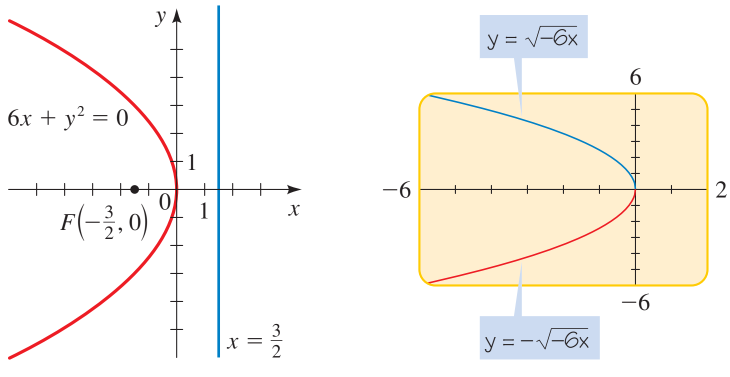
A pesar de sus proezas de ingeniería, Arquímedes estaba más orgulloso de sus desubrimientos matemáticos. Estos incluyen las

(*continúa*)

Para obtener la gráfica de la parábola, se grafican ambas funciones

$$y = \sqrt{-6x} \qquad \text{y} \qquad y = -\sqrt{-6x}$$

como se ilustra en la figura 5b).



a) b)

Figura 5

La ecuación $y^2 = 4px$ no define a y como una función de x (véase la página 164). Por lo tanto, a fin de usar una calculadora para graficar una parábola con eje horizontal, primero se debe despejar y. Esto conduce a dos funciones, $y = \sqrt{4px}$ y $y = -\sqrt{4px}$. Necesitamos graficar ambas funciones para obtener completa la gráfica de la parábola. Por ejemplo, en la figura 5b) tuvimos que gráficar a $y = \sqrt{-6x}$ y a $y = -\sqrt{-6x}$ para graficar la parábola $y^2 = -6x$.

Se pueden usar las coordenadas del foco para estimar la “amplitud” de una parábola al bosquejar su gráfica. El segmento de recta que pasa por el foco perpendicular al eje, con puntos finales en la parábola, se llama **lado recto**, y su longitud es el **diámetro focal** de la parábola. De la figura 6 se puede observar que la distancia de un punto final Q del lado recto a la directriz es $|2p|$. Así, la distancia de Q al foco debe ser $|2p|$ también (por la definición de una parábola) y, por lo tanto, la distancia focal es $|4p|$. En el ejemplo siguiente se usa el diámetro focal para determinar la “amplitud” de una parábola al graficarla.

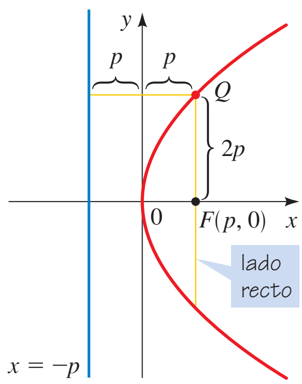


Figura 6

fórmulas para el volumen de una esfera, $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; el área superficial de una esfera, $S = 4\pi r^2$, y un cuidadoso análisis de las propiedades de las parábolas y otras cónicas.

Ejemplo 4 Diámetro focal de una parábola

Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola $y = \frac{1}{2}x^2$ y grafíquela.

Solución Primero se escribe la ecuación en la forma $x^2 = 4py$.

$$y = \tfrac{1}{2}x^2$$

$$x^2 = 2y \qquad \text{Multiplique cada lado por 2}$$

De esta ecuación se puede observar que $4p = 2$, así que el diámetro focal es 2. Al despejar p se obtiene $p = \frac{1}{2}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y la directriz es $y = -\frac{1}{2}$. Puesto que el diámetro focal es 2, el lado recto se extiende 1 unidad a la izquierda y 1 unidad a la derecha del foco. La gráfica se bosqueja en la figura 7. ■

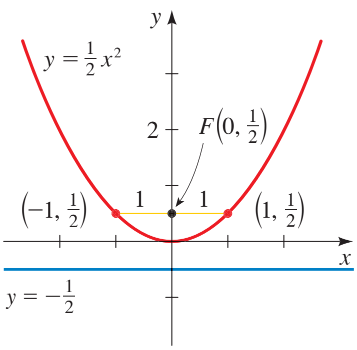


Figura 7

En el ejemplo siguiente se grafica una familia de parábolas, para mostrar cómo al cambiar la distancia entre el foco y el vértice afecta la “amplitud” de una parábola.

Ejemplo 5 Una familia de parábolas

a) Encuentre ecuaciones para parábolas con vértice en el origen y focos $F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $F_3(0, 1)$ y $F_4(0, 4)$.

b) Dibuje gráficas de las parábolas del inciso a). ¿Qué concluye?

Solución

a) Puesto que los focos están en el eje positivo y, las parábolas abren hacia arriba y tienen ecuaciones de la forma $x^2 = 4py$. Esto conduce a las siguientes ecuaciones.

Foco	p	Ecuación $x^2 = 4py$	Forma de la ecuación para calculadora graficadora
$F_1\left(0, \frac{1}{8}\right)$	$p = \frac{1}{8}$	$x^2 = \frac{1}{2}y$	$y = 2x^2$
$F_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$p = \frac{1}{2}$	$x^2 = 2y$	$y = 0.5x^2$
$F_3(0, 1)$	$p = 1$	$x^2 = 4y$	$y = 0.25x^2$
$F_4(0, 4)$	$p = 4$	$x^2 = 16y$	$y = 0.0625x^2$

b) Las gráficas se trazan en la figura 8. Se puede observar que mientras más cerca del vértice esté el foco, más estrecha es la parábola.

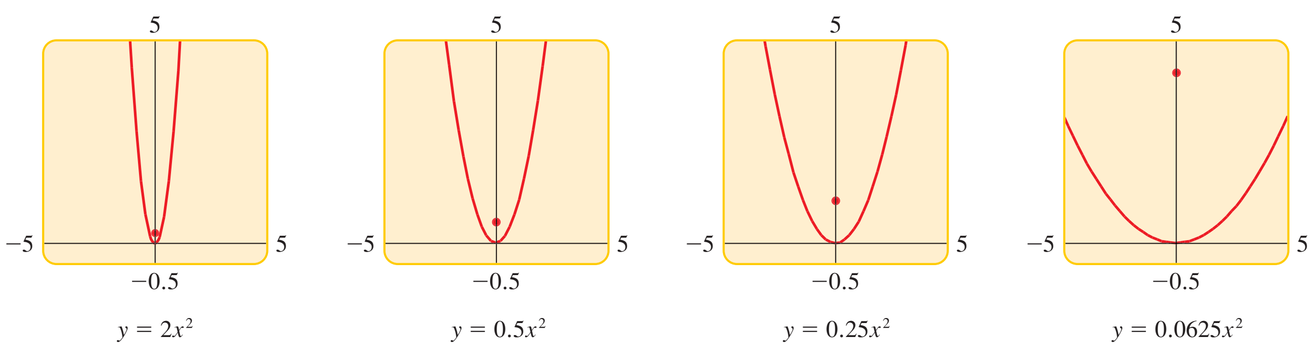


Figura 8
Una familia de parábolas ■

Aplicaciones

Las parábolas tienen una propiedad importante que las hace útiles como reflectores para lámparas y telescopios. La luz de una fuente colocada en el foco de una superficie con sección transversal parabólica se reflejará de tal forma que viaja paralela al eje de la parábola (véase la figura 9). Así, un espejo parabólico refleja la luz en un haz de rayos paralelos. Por el contrario, la luz que se aproxima al reflector en rayos paralelos a su eje de simetría es concentrada al foco. Esta *propiedad de reflexión*, que se puede demostrar por medio de cálculo, se emplea en la construcción de telescopios reflectores.

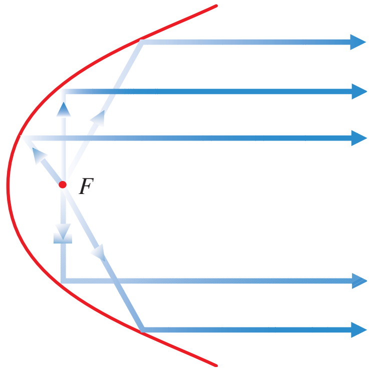


Figura 9
Reflector parabólico

Ejemplo 6 Hallar el punto focal de un reflector proyector

Un proyector tiene un reflector parabólico que forma un "tazón" que mide 12 pulgadas de ancho de borde a borde y 8 pulgadas de profundidad, como se ilustra en la figura 10. Si el filamento del bombillo se localiza en el foco, ¿que tan lejos del vértice del reflector está?

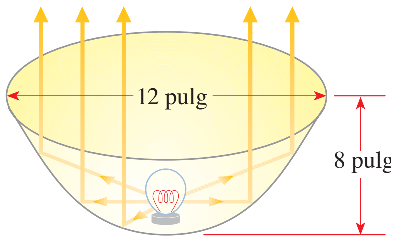


Figura 10
Un reflector parabólico

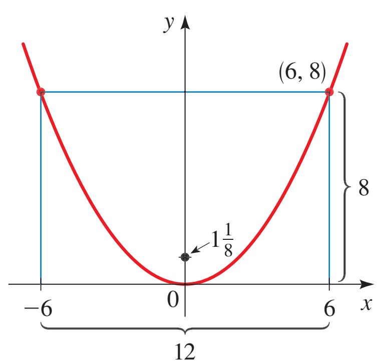


Figura 11

Solución Se introduce un sistema de coordenadas y se coloca una sección transversal parabólica del reflector de modo que su vértice esté en el origen y su eje sea vertical (véase la figura 11). Entonces la ecuación de esta parábola tiene la forma $x^2 = 4py$. De la figura 11 se puede observar que el punto (6, 8) se encuentra sobre la parábola. Se emplea ésta para hallar p.

$$6^2 = 4p(8) \qquad \text{El punto } (6, 8) \text{ satisface la ecuación } x^2 = 4py$$
$$36 = 32p$$
$$p = \tfrac{9}{8}$$

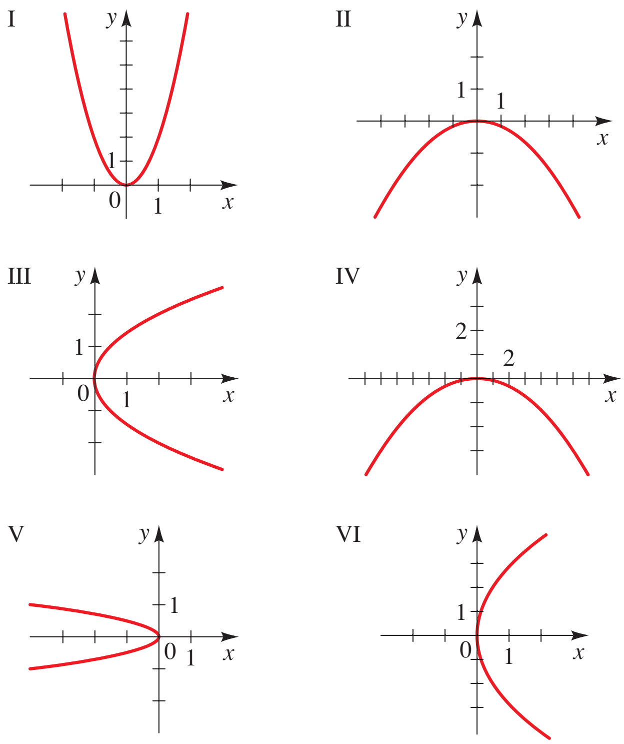
El foco es $F\left(0, \frac{9}{8}\right)$, de modo que la distancia entre el vértice y el foco es $\frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}$ pulg. Debido a que el filamento está colocado en el foco, se localiza a $1\frac{1}{8}$ pulgadas del vértice del reflector. ■

10.1 Ejercicios

1–6 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-VI. Dé razones para sus respuestas.

1. $y^2 = 2x$ **2.** $y^2 = -\frac{1}{4}x$ **3.** $x^2 = -6y$

4. $2x^2 = y$ **5.** $y^2 - 8x = 0$ **6.** $12y + x^2 = 0$



7–18 ■ Encuentre el foco, la directriz y el diámetro focal de la parábola, y bosqueje su gráfica.

7. $y^2 = 4x$ **8.** $x^2 = y$

9. $x^2 = 9y$ **10.** $y^2 = 3x$

11. $y = 5x^2$ **12.** $y = -2x^2$

13. $x = -8y^2$ **14.** $x = \frac{1}{2}y^2$

15. $x^2 + 6y = 0$ **16.** $x - 7y^2 = 0$

17. $5x + 3y^2 = 0$ **18.** $8x^2 + 12y = 0$

19–24 ■ Use un dispositivo de graficación para graficar la parábola.

19. $x^2 = 16y$ **20.** $x^2 = -8y$

21. $y^2 = -\frac{1}{3}x$ **22.** $8y^2 = x$

23. $4x + y^2 = 0$ **24.** $x - 2y^2 = 0$

25–36 ■ Encuentre una ecuación para la parábola que tiene su vértice en el origen y satisface la condición dada o condiciones.

25. Foco $F(0, 2)$ **26.** Foco $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$

27. Foco $F(-8, 0)$ **28.** Foco $F(5, 0)$

29. Directriz $x = 2$ **30.** Directriz $y = 6$

31. Directriz $y = -10$ **32.** Directriz $x = -\frac{1}{8}$

33. El foco está en el eje x positivo a 2 unidades de la directriz

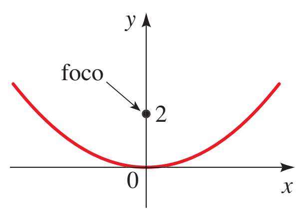
34. La directriz tiene ordenada 6

35. Abre hacia arriba con foco a 5 unidades del vértice

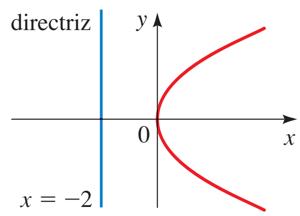
36. El diámetro focal es 8 y el foco está sobre el eje y negativo

37–46 ■ Encuentre una ecuación de la parábola cuya gráfica se muestra.

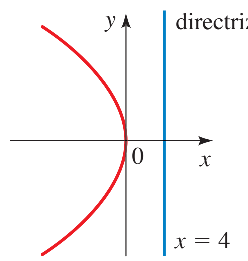
37.



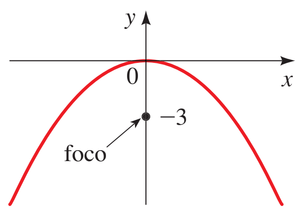
38.



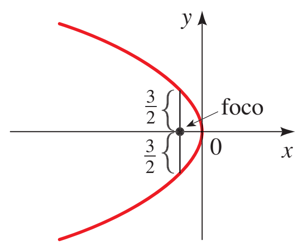
39.



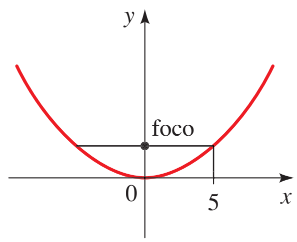
40.



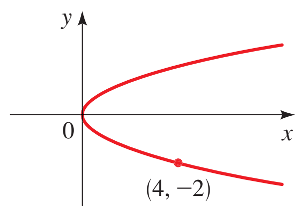
41.



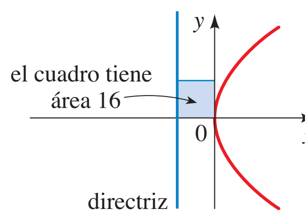
42.



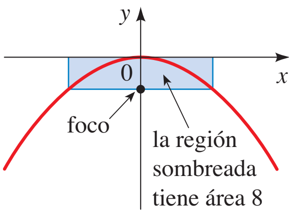
43.



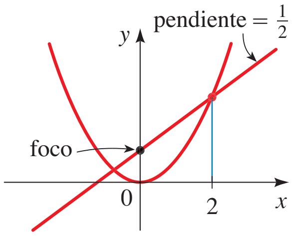
44.



45.



46.



47. a) Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen y con directrices $y = \frac{1}{2}$, $y = 1$, $y = 4$ y $y = 8$.

b) Dibuje las gráficas. ¿Qué concluye?

48. a) Encuentre ecuaciones para la familia de parábolas con vértice en el origen, foco en el eje y positivo y con diámetros focales 1, 2, 4 y 8.

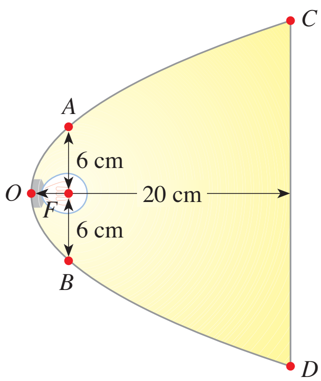
b) Dibuje las gráficas. ¿Qué concluye?

Aplicaciones

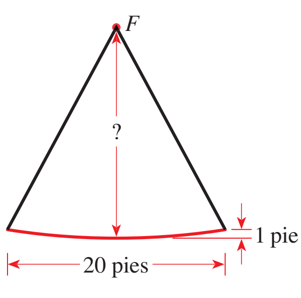
49. Reflector parabólico En la figura se muestra una lámpara con un reflector parabólico. La bombilla se coloca en el foco y el diámetro focal es 12 cm.

a) Encuentre una ecuación de la parábola.

b) Encuentre el diámetro $d(C, D)$ de la abertura a 20 cm del vértice.

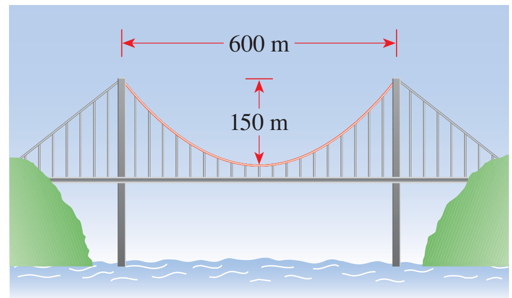


50. Plato de satélite Un reflector para un plato de satélite es una sección transversal parabólica, con el receptor en el foco F. El reflector tiene un pie de profundidad y 20 pies de ancho de borde a borde (véase la figura). ¿Qué tan lejos está el receptor del vértice del reflector parabólico?

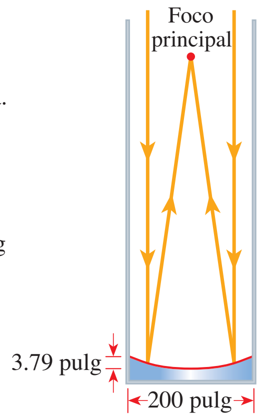


51. Puente suspendido En un puente suspendido la forma de los cables de suspensión es parabólica. El puente mostrado en la figura tiene torres que están apartadas 600 m, y el punto más bajo de los cables de suspensión está a 150 m debajo de la parte superior de las torres. Encuentre la ecuación de la parte parabólica de los cables, con el origen del sistema de coordenadas en el vértice.

NOTA Esta ecuación se emplea para hallar la longitud del cable necesaria en la construcción del puente.



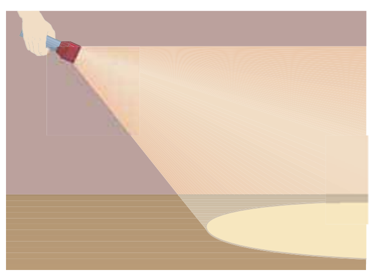
52. Telescopio reflector El telescopio Hale en el observatorio de Monte Palomar tiene un espejo de 200 pulgadas, como se muestra. El espejo se construye en una forma parabólica que colecta luz de las estrellas y la enfoca en el **foco principal**, es decir, el foco de la parábola. El espejo mide 3.79 pulg de profundidad en su centro. Encuentre la **longitud focal** de este espejo parabólico, es decir, la distancia del vértice al foco.



Descubrimiento • Debate

53. Parábolas en el mundo real En el texto se dan varios ejemplos de los usos de las parábolas. Encuentre otras situaciones de la vida real donde ocurren parábolas. Consulte una enciclopedia científica en su biblioteca o investigue en la Internet.

54. Cono de luz de una linterna Se sostiene una linterna para formar un área iluminada sobre el suelo, como se muestra en la figura. ¿Es posible orientar la linterna de manera que el límite del área sombreada sea una parábola? Explique su respuesta.



10.2 Elipses

Una elipse es una curva ovalada que se asemeja a un círculo alargado. De manera más precisa, se tiene la siguiente definición.

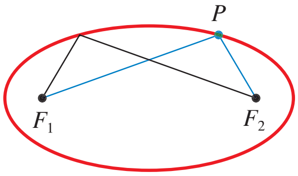


Figura 1

Definición geométrica de una elipse

Una **elipse** es el conjunto de los puntos en el plano la suma de cuyas distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante (véase la figura 1). Estos dos puntos fijos son los **focos** (plural de **foco**) de la elipse.

La definición geométrica hace pensar en un método simple para dibujar una elipse. Coloque una hoja de papel sobre una mesa de dibujo e inserte tachuelas en dos puntos que serán los focos de la elipse. Fije los extremos de una cuerda a las tachuelas, como se muestra en la figura 2a). Con la punta de un lápiz sostenga tensa la cuerda. Después mueva con cuidado el lápiz en torno a los focos, manteniendo tensa la cuerda todo el tiempo. El lápiz trazará una elipse, porque la suma de las distancias de la punta del lápiz a los focos siempre será igual a la longitud de la cuerda, que es constante.

Si la cuerda es sólo un poco más grande que la distancia entre los focos, entonces la elipse trazada se extenderá como en la figura 2a), pero si los focos están cerca en relación con la longitud de la cuerda, la elipse será casi circular, como se muestra en la figura 2b).

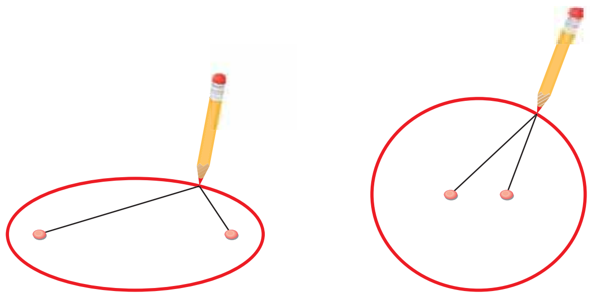


Figura 2 a) b)

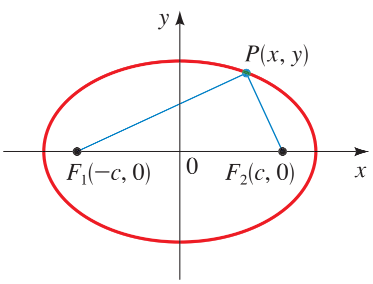


Figura 3

Para obtener la ecuación más simple para una elipse, se colocan los focos en el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$, de modo que el origen está a la mitad entre ellos (véase la figura 3).

Por conveniencia, se permite que la suma de las distancias de un punto sobre la elipse a los focos sea $2a$. Entonces si $P(x, y)$ es cualquier punto sobre la elipse, se tiene

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Por lo tanto, de la fórmula de la distancia

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

o bien,

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado cada lado y desarrollar, se obtiene

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x^2 + 2cx + c^2 + y^2)$$

que se simplifica a

$$4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 4a^2 + 4cx$$

Al dividir cada lado entre 4 y elevar de nuevo al cuadrado, se obtiene

$$a^2[(x + c)^2 + y^2] = (a^2 + cx)^2$$
$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Puesto que la suma de las distancias de P a los focos debe ser mayor que la distancia entre ellos, se tiene que $2a > 2c$, o $a > c$. Por consiguiente, $a^2 - c^2 > 0$, y se puede dividir cada lado de la ecuación precedente entre $a^2(a^2 - c^2)$ para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

Por conveniencia sea $b^2 = a^2 - c^2$ (con $b > 0$). Puesto que $b^2 < a^2$, se deduce que $b < a$. Así, la ecuación precedente se convierte en

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$

Esta es la ecuación de la elipse. Para graficarla, es necesario conocer las intersecciones con los ejes x y y. Si se establece que $y = 0$, se obtiene

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$

por lo tanto, $x^2 = a^2$, o bien, $x = \pm a$. Así, la elipse cruza el eje x en $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, como en la figura 4. Estos puntos se llaman **vértices** de la elipse, y el segmento que los une se llama **eje mayor**. Su longitud es $2a$.

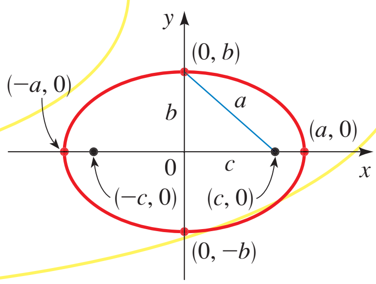


Figura 4
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b$

De manera similar, si se establece que $x = 0$, se obtiene $y = \pm b$, por lo tanto la elipse cruza el eje y en $(0, b)$ y $(0, -b)$. El segmento que une a estos puntos se llama **eje menor**, y tiene longitud $2b$. Hay que observar que $2a > 2b$, así que el eje mayor es más largo que el eje menor. El origen es el **centro** de la elipse.

Si los focos de la elipse se colocan sobre el eje y en $(0, \pm c)$ y no sobre el eje x, entonces se invierten los papeles de x y y en la descripción anterior, y se obtiene una elipse vertical.

Ecuaciones y gráficas de elipses

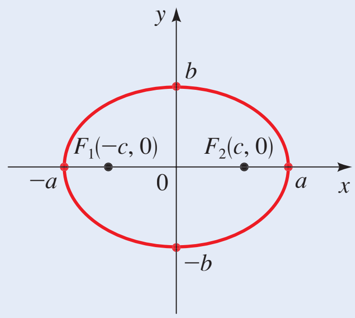
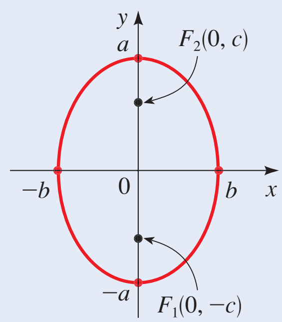
Las órbitas de los planetas son elipses, con el Sol en uno de los focos.

En el siguiente cuadro se resume lo que se ha demostrado acerca de la ecuación y características de una elipse centrada en el origen.

En la ecuación estándar para una elipse, a^2 es el denominador *más grande* y b^2 es el *más pequeño*. Para encontrar c^2, se resta: denominador más grande menos denominador más pequeño.

Elipse con centro en el origen

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una elipse con centro en el origen y que tiene las propiedades dadas.

ECUACIÓN	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b > 0$	$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ $a > b > 0$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE MAYOR	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
EJE MENOR	Vertical, longitud $2b$	Horizontal, longitud $2b$
FOCOS	$(\pm c, 0),\ c^2 = a^2 - b^2$	$(0, \pm c),\ c^2 = a^2 - b^2$
GRÁFICA		

Ejemplo 1 Trazo de una elipse

Una elipse tiene la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

a) Encuentre los focos, vértices y longitudes de los ejes mayor y menor, y bosqueje la gráfica.

b) Dibuje la gráfica en una calculadora.

Solución

a) Puesto que el denominador de x^2 es más grande, la elipse tiene eje mayor horizontal. Esto da $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo tanto $c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$. Así, $a = 3$, $b = 2$ y $c = \sqrt{5}$.

FOCOS	$(\pm\sqrt{5}, 0)$
VÉRTICES	$(\pm 3, 0)$
LONGITUD DEL EJE MAYOR	6
LONGITUD DEL EJE MENOR	4

La gráfica se muestra en la figura 5a) en la página siguiente.

b) Para dibujar la gráfica con una calculadora, se necesita despejar y.

Hay que observar que la ecuación de una elipse no define a y como una función de x (véase la página 164). Ésa es la razón de por qué es necesario graficar dos funciones para trazar una elipse.

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{9} \qquad \text{Resta } x^2/9$$

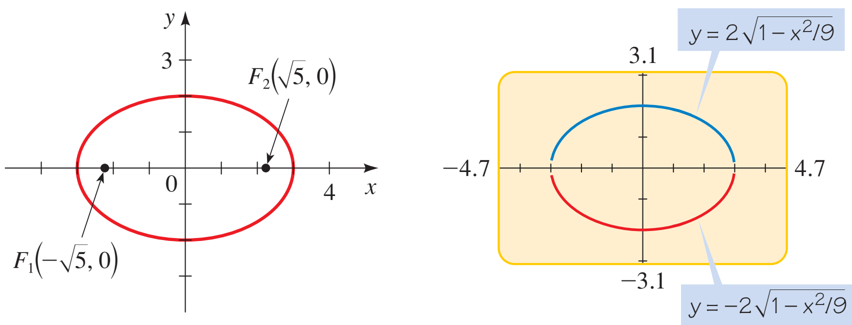
$$y^2 = 4\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) \qquad \text{Multiplique por 4}$$

$$y = \pm 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{9}} \qquad \text{Tome las raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la elipse, se grafican ambas funciones

$$y = 2\sqrt{1 - x^2/9} \qquad \text{y} \qquad y = -2\sqrt{1 - x^2/9}$$

como se muestra en la figura 5b).



a) b)

Figura 5
$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Ejemplo 2 Encuentre los focos de una elipse

Determine los focos de la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ y bosqueje su gráfica.

Solución Primero se escribe la ecuación en forma estándar. Al dividir entre 144, se obtiene

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Puesto que $16 > 9$, ésta es una elipse con sus focos en el eje y, y con $a = 4$ y $b = 3$. Se tiene

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$
$$c = \sqrt{7}$$

Por consiguiente, los focos son $(0, \pm\sqrt{7})$. La gráfica se muestra en la figura 6a).

La gráfica se puede trazar también por medio de una calculadora como se muestra en la figura 6b).

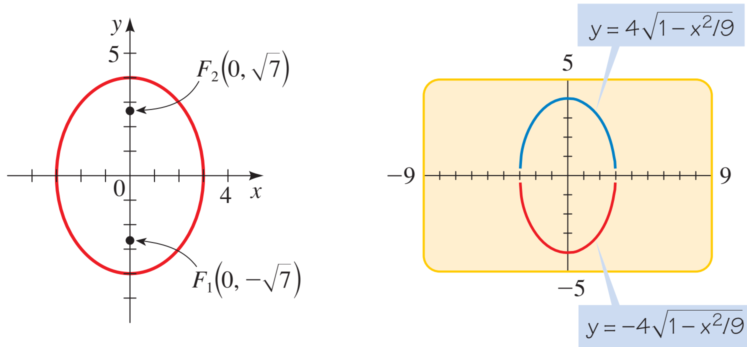


Figura 6
$16x^2 + 9y^2 = 144$

■

Ejemplo 3 Hallar la ecuación de una elipse

Los vértices de una elipse son $(\pm 4, 0)$ y los focos son $(\pm 2, 0)$. Encuentre su ecuación y bosqueje la gráfica.

Solución Puesto que los vértices son $(\pm 4, 0)$, se tiene $a = 4$. Los focos son $(\pm 2, 0)$, de modo que $c = 2$. Para escribir la ecuación, se necesita encontrar b. Puesto que $c^2 = a^2 - b^2$, se tiene

$$2^2 = 4^2 - b^2$$

$$b^2 = 16 - 4 = 12$$

Así que la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

La gráfica se muestra en la figura 7. ■

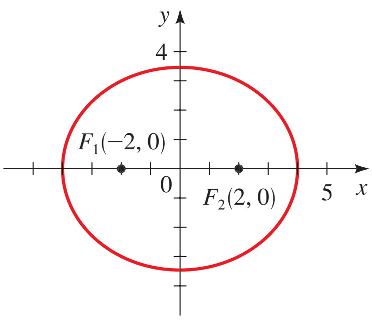


Figura 7
$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

Excentricidad de una elipse

Se vio antes en esta sección (figura 2) que si $2a$ es sólo un poco mayor que $2c$, la elipse es larga y delgada, mientras que si $2a$ es mucho mayor que $2c$, la elipse es casi circular. Se mide la desviación de una elipse de ser circular por la relación de a y c.

Definición de excentricidad

Para la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ (con $a > b > 0$), la **excentricidad *e*** es el número

$$e = \frac{c}{a}$$

donde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. La excentricidad de toda elipse satisface $0 < e < 1$.

Excentricidades de las órbitas de los planetas

Las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en un foco. Para la mayor parte de los planetas estas elipses tienen excentricidad muy pequeña, de manera que son casi circulares. Sin embargo, Mercurio y Plutón, los planetas interior y exterior, tienen órbitas visiblemente elípticas.

Planeta	Excentricidad
Mercurio	0.206
Venus	0.007
Tierra	0.017
Marte	0.093
Júpiter	0.048
Saturno	0.056
Urano	0.046
Neptuno	0.010
Plutón	0.248

Por consiguiente, si e es cercana a 1, entonces c es casi igual a a, y la elipse es de forma alargada, pero si e es cercana a 0, entonces la elipse casi tiene la forma de un círculo. La excentricidad es una medida de cuán "alargada" es una elipse.

En la figura 8 se muestran varias elipses para demostrar el efecto de variar la excentricidad e.

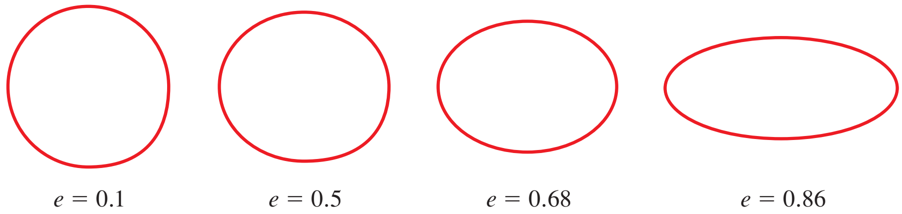


Figura 8
Elipses con varias excentricidades

Ejemplo 4 Hallar la ecuación de una elipse a partir de su excentricidad y focos

Encuentre la ecuación de la elipse con focos $(0, \pm 8)$ y excentricidad $e = \frac{4}{5}$ y bosqueje su gráfica.

Solución Se dan $e = \frac{4}{5}$ y $c = 8$. Por lo tanto,

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{a} \qquad \text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}$$

$$4a = 40 \qquad \text{Multiplicación en cruz}$$

$$a = 10$$

Para hallar b, se usa el hecho de que $c^2 = a^2 - b^2$.

$$8^2 = 10^2 - b^2$$

$$b^2 = 10^2 - 8^2 = 36$$

$$b = 6$$

En consecuencia, la ecuación de la elipse es

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$$

Debido a que los focos están sobre el eje y, la elipse está orientada verticalmente. Para bosquejar la elipse, se encuentran los intersectos: las abscisas son ± 6 y las ordenadas son ± 10. La gráfica se bosqueja en la figura 9. ■

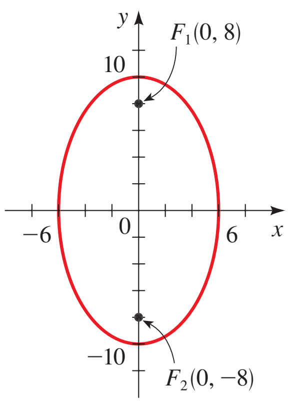


Figura 9
$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$

La atracción gravitacional causa que los planetas se muevan en órbitas elípticas alrededor del Sol con el Sol en un foco. Johannes Kepler fue el primero en observar esta propiedad notable e Isaac Newton la dedujo después de su ley de la inversa del cuadrado de la gravedad por medio de cálculo. Las órbitas de los planetas tienen excentricidades distintas, pero la mayor parte son casi circulares (véase la nota al margen arriba).

Las elipses, como las parábolas, tienen una interesante *propiedad de reflexión* que conduce a varias aplicaciones prácticas. Si se coloca una fuente de luz en un foco de una superficie reflectora con secciones transversales elípticas, entonces toda la luz se reflejará fuera de la superficie al otro foco, como se muestra en la figura 10. Este principio, que funciona para ondas sonoras así como para la luz, se usa en *litotricia*, un tratamiento para los cálculos renales. Se coloca al paciente en una tina de agua con secciones transversales elípticas de tal manera que el cálculo renal se localiza con exactitud en un foco. Las ondas sonoras de alta densidad generadas en el otro foco se reflejan en el cálculo y lo destruyen con daño mínimo del tejido circundante. Al paciente se le libera del traumatismo de la cirugía y se recupera en días en vez de semanas.

La propiedad de reflexión de las elipses se emplea también en la construcción de *cúpulas susurrantes*. El sonido que proviene de un foco rebota en paredes y techo de un cuarto elíptico y pasa por el otro foco. En estas salas incluso susurros silenciosos emitidos en un foco se pueden escuchar con claridad en el otro. Las cúpulas susurrantes famosas son el Natural Statuary Hall del Capitolio de Estados Unidos en Washington, D.C. (véase la página 771) y el Mormon Tabernacle en Salt Lake City, Utah.

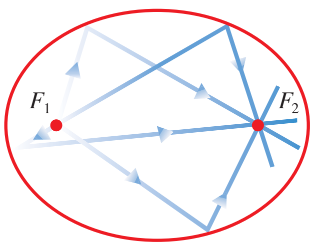


Figura 10

10.2 Ejercicios

1–4 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

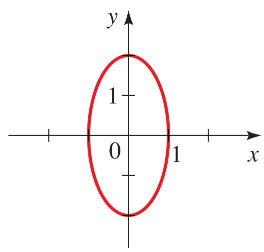
1. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

2. $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$

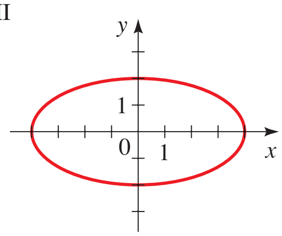
3. $4x^2 + y^2 = 4$

4. $16x^2 + 25y^2 = 400$

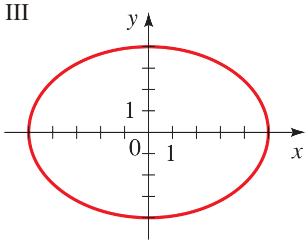
I



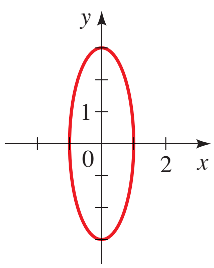
II



III



IV



5–18 ■ Encuentre los vértices, focos y excentricidad de la elipse. Determine las longitudes de los ejes mayor y menor, y bosqueje su gráfica.

5. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

6. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

7. $9x^2 + 4y^2 = 36$

8. $4x^2 + 25y^2 = 100$

9. $x^2 + 4y^2 = 16$

10. $4x^2 + y^2 = 16$

11. $2x^2 + y^2 = 3$

12. $5x^2 + 6y^2 = 30$

13. $x^2 + 4y^2 = 1$

14. $9x^2 + 4y^2 = 1$

15. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = \frac{1}{4}$

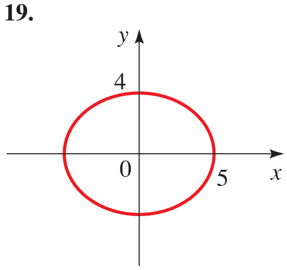
16. $x^2 = 4 - 2y^2$

17. $y^2 = 1 - 2x^2$

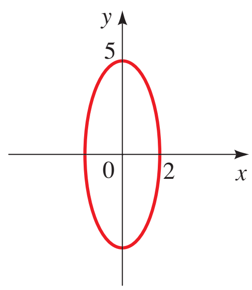
18. $20x^2 + 4y^2 = 5$

19–24 ■ Encuentre una ecuación para la elipse cuya gráfica se muestra.

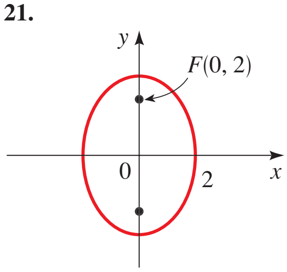
19.



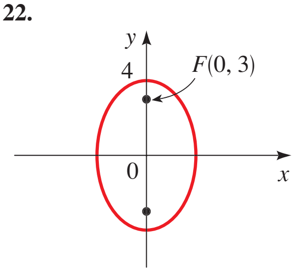
20.



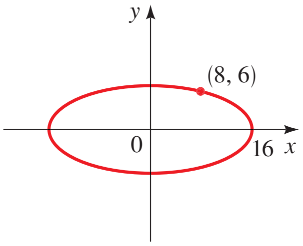
21.



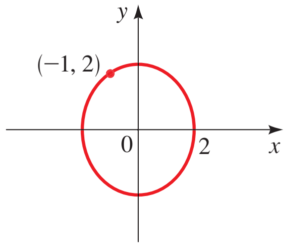
22.



23.



24.



25–28 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la elipse.

25. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{20} = 1$ **26.** $x^2 + \dfrac{y^2}{12} = 1$

27. $6x^2 + y^2 = 36$ **28.** $x^2 + 2y^2 = 8$

29–40 ■ Encuentre una ecuación para la elipse que satisface las condiciones dadas.

29. Focos $(\pm 4, 0)$, vértices $(\pm 5, 0)$

30. Focos $(0, \pm 3)$, vértices $(0, \pm 5)$

31. Longitud del eje mayor 4, longitud del eje menor 2, focos en el eje y

32. Longitud del eje mayor 6, longitud del eje menor 4, focos en el eje x

33. Focos $(0, \pm 2)$, longitud del eje menor 6

34. Focos $(\pm 5, 0)$, longitud del eje mayor 12

35. Puntos finales del eje mayor $(\pm 10, 0)$, distancia entre focos 6

36. Puntos terminales del eje menor $(0, \pm 3)$, distancia entre focos 8

37. Longitud del eje mayor 10, focos en el eje x, la elipse pasa por el punto $(\sqrt{5}, 2)$

38. Excentricidad $\frac{1}{9}$, focos $(0, \pm 2)$

39. Excentricidad 0.8, focos $(\pm 1.5, 0)$

40. Excentricidad $\sqrt{3}/2$, focos en el eje y, longitud del eje mayor 4

41–43 ■ Encuentre los puntos de intersección del par de elipses. Bosqueje las gráficas de cada par de ecuaciones en los mismos ejes coordenados y marque los puntos de intersección.

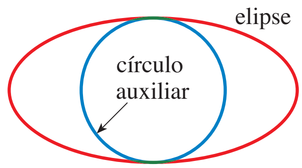
41. $\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases}$ **42.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \end{cases}$

43. $\begin{cases} 100x^2 + 25y^2 = 100 \\ x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$

44. El **círculo auxiliar** de una elipse es el círculo con radio igual a la mitad de la longitud del eje menor y el mismo centro que la elipse (véase la figura). El círculo auxiliar es por lo tanto el círculo más grande que puede ajustar dentro de una elipse.

a) Encuentre una ecuación para el círculo auxiliar de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$.

b) Para la elipse y el círculo auxiliar del inciso a), muestre que si (s, t) es un punto en el círculo auxiliar, entonces $(2s, t)$ es un punto sobre la elipse.



45. a) Use un dispositivo de graficación para trazar la mitad superior (la porción en los cuadrantes primero y segundo) de la familia de elipses $x^2 + ky^2 = 100$ para $k = 4$, 10, 25 y 50.

b) ¿Qué tienen en común los miembros de la familia de elipses? ¿Cómo difieren?

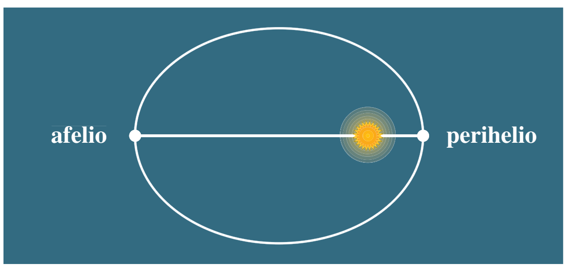
46. Si $k > 0$, la siguiente ecuación representa una elipse:

$$\frac{x^2}{k} + \frac{y^2}{4 + k} = 1$$

Muestre que las elipses representadas por esta ecuación tienen los mismos focos, sin importar cuál sea el valor de k.

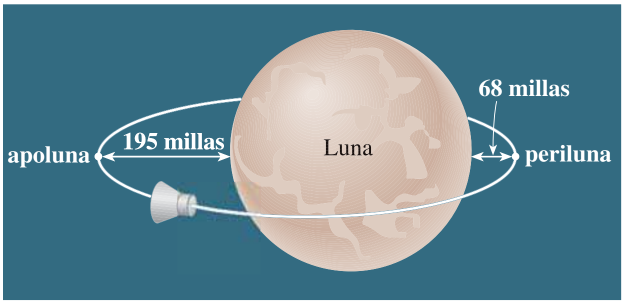
Aplicaciones

47. Perihelio y afelio Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. El punto en la órbita en la cual el planeta está más próximo al Sol se llama **perihelio** y el punto en el que está más alejado se llama **afelio**. Estos puntos son los vértices de la órbita. La distancia de la Tierra desde el Sol es 147 000 000 km en el perihelio y 153 000 000 km en el afelio. Encuentre una ecuación apropiada para la órbita de la Tierra. (Coloque el origen en el centro de la órbita con el Sol en el eje x.)

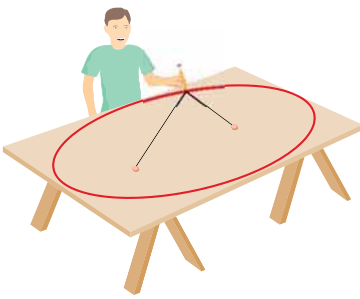


48. La órbita de Plutón Con una excentricidad de 0.25, la órbita de Plutón es la más excéntrica en el sistema solar. La longitud del eje menor de su órbita es aproximadamente 10 000 000 000 km. Encuentre la distancia entre Plutón y el Sol en el perihelio y el afelio. (Véase el ejercicio 47.)

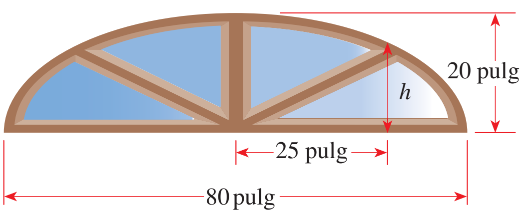
49. Órbita lunar Para un objeto en una órbita elíptica alrededor de la Luna, los puntos en la órbita que están más próximos a y más alejados del centro de la Luna se llaman **periluna** y **apoluna**, respectivamente. Estos son los vértices de la órbita. El centro de la Luna está en un foco de la órbita. La nave espacial *Apolo 11* se colocó en una órbita lunar con periluna a 68 millas y apoluna en 195 millas arriba de la superficie de la Luna. Suponiendo que la Luna es una esfera de radio 1075 millas, encuentre una ecuación para la órbita del *Apolo 11*. (Coloque los ejes coordenados de modo que el origen esté en el centro de la órbita y los focos se localicen en el eje x.)



50. Elipse de madera contrachapada Un carpintero desea construir una mesa con cubierta elíptica a partir de una hoja de madera contrachapada de 4 por 8 pies. Él trazará una elipse por medio del método de "tachuelas y cuerda" ilustrado en las figuras 2 y 3. ¿Qué longitud de cuerda debe usar y qué tan apartadas deben estar las tachuelas, si la elipse será la más grande posible que se puede cortar de la hoja de madera?



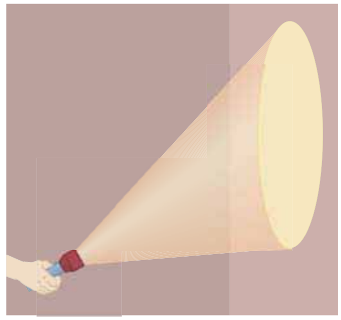
51. Ventana ornamental Una ventana arriba de una entrada se construye en la forma de la mitad superior de una elipse, como se muestra en la figura. La ventana es de 20 pulg de alto en su punto más alto y de 80 pulg de ancho en el fondo. Encuentre la altura de la ventana a 25 pulg del centro de la base.



Descubrimiento • Debate

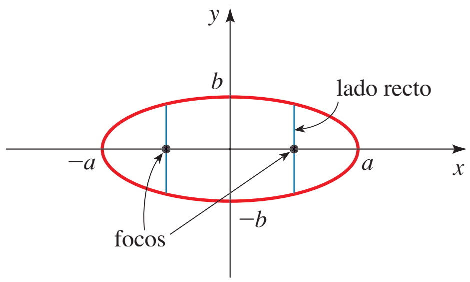
52. Dibujar una elipse en un pizarrón Intente dibujar una elipse lo más exacto posible en un pizarrón. ¿Cómo ayudarían a este proceso un trozo de cuerda y dos amigos?

53. Cono de luz de una linterna Una linterna ilumina una pared como se ilustra en la figura. ¿Cuál es la forma del límite del área sombreada? Explique su respuesta.

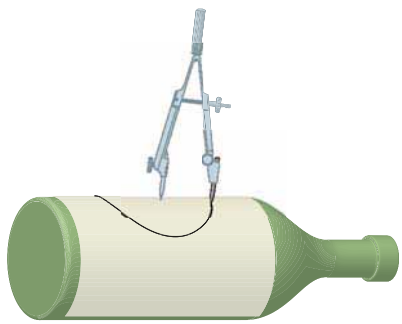


54. ¿Qué tan amplia es una elipse en sus focos? Un *lado recto* para una elipse es un segmento de recta perpendicular al eje mayor en un foco, con puntos finales en la elipse, como se ilustra. Muestre que la longitud de un lado recto es $2b^2/a$ para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{con } a > b$$



55. ¿Es una elipse? Se coloca un trozo de papel alrededor de una botella cilíndrica, y luego se emplea un compás para dibujar un círculo sobre el papel, como se ilustra en la figura. Cuando el papel se coloca sobre una superficie plana, ¿la forma del dibujo es una elipse? (No es necesario que pruebe su respuesta, pero es posible que desee hacer el experimento y ver qué obtiene.)



10.3 Hipérbolas

Aunque las elipses y las hipérbolas tienen formas completamente distintas, sus definiciones y ecuaciones son similares. En lugar de usar la *suma* de distancias desde dos focos fijos, como en el caso de una elipse, se usa la *diferencia* para definir una hipérbola.

Definición geométrica de una hipérbola

Una **hipérbola** es el conjunto de los puntos en el plano, la diferencia de cuyas distancias desde dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. (Véase la figura 1.) Estos dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

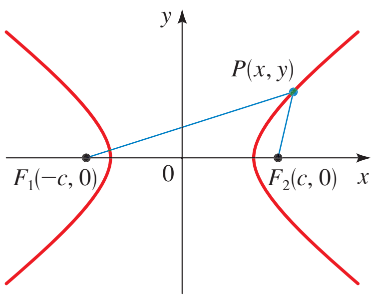


Figura 1
P está en la hipérbola si $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Como en el caso de la elipse, se obtiene la ecuación más simple para la hipérbola al colocar los focos en el eje x en $(\pm c, 0)$, como se muestra en la figura 1. Por definición, si $P(x, y)$ se encuentra sobre la hipérbola, entonces $d(P, F_1) - d(P, F_2)$ o $d(P, F_2) - d(P, F_1)$ debe ser igual a alguna constante positiva, que se llama $2a$. Así, se tiene

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

o bien
$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Si se procede como se hizo en el caso de la elipse (sección 10.2), esto se simplifica a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Del triángulo PF_1F_2 en la figura 1 se puede observar que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| < 2c$. Se deduce que $2a < 2c$, o bien $a < c$. Así, $c^2 - a^2 > 0$, de modo que se puede establecer $b^2 = c^2 - a^2$. Entonces se simplifica la última ecuación mostrada para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la *ecuación de la hipérbola*. Si se remplaza x por $-x$ o y por $-y$ en esta ecuación, permanece sin cambio, así que la parábola es simétrica con respecto a los ejes x y y y respecto al origen. Las intersecciones con el eje x son $\pm a$, y los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ son los **vértices** de la hipérbola. No hay intersección con el eje y porque al fijar $x = 0$ en la ecuación de la hipérbola se obtiene $-y^2 = b^2$, que no tiene solución real. Además, la ecuación de la hipérbola implica que

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1 \geq 1$$

de modo que $x^2/a^2 \geq 1$; así, $x^2 \geq a^2$, y por consiguiente $x \geq a$ o $x \leq -a$. Esto significa que la hipérbola consiste en dos partes, llamadas **ramas**. El segmento que une los dos vértices en las ramas separadas es el **eje transversal** de la hipérbola, y el origen se llama **centro**.

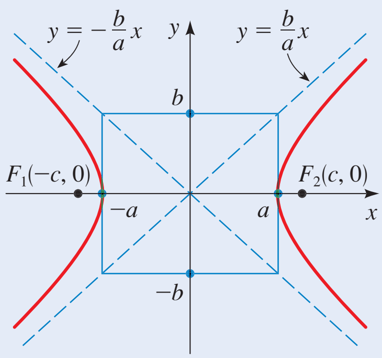
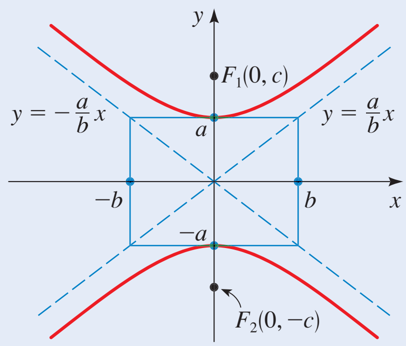
Si se colocan los focos de la hipérbola en el eje y en vez de en el eje x, entonces esto tiene el efecto de invertir los papeles de x y y en la derivación de la ecuación de la hipérbola. Esto origina una hipérbola con un eje transversal horizontal.

Ecuaciones y gráficas de hipérbolas

Las propiedades principales de las hipérbolas se listan en el cuadro siguiente.

Hipérbola con centro en el origen

La gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una hipérbola con centro en el origen y que tiene las siguientes propiedades.

ECUACIÓN	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > 0, b > 0)$	$\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (a > 0, b > 0)$
VÉRTICES	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm a)$
EJE TRANSVERSAL	Horizontal, longitud $2a$	Vertical, longitud $2a$
ASÍNTOTAS	$y = \pm\dfrac{b}{a}x$	$y = \pm\dfrac{a}{b}x$
FOCOS	$(\pm c, 0), \quad c^2 = a^2 + b^2$	$(0, \pm c), \quad c^2 = a^2 + b^2$
GRÁFICA		

Las asíntotas de funciones racionales se analizan en la sección 3.6.

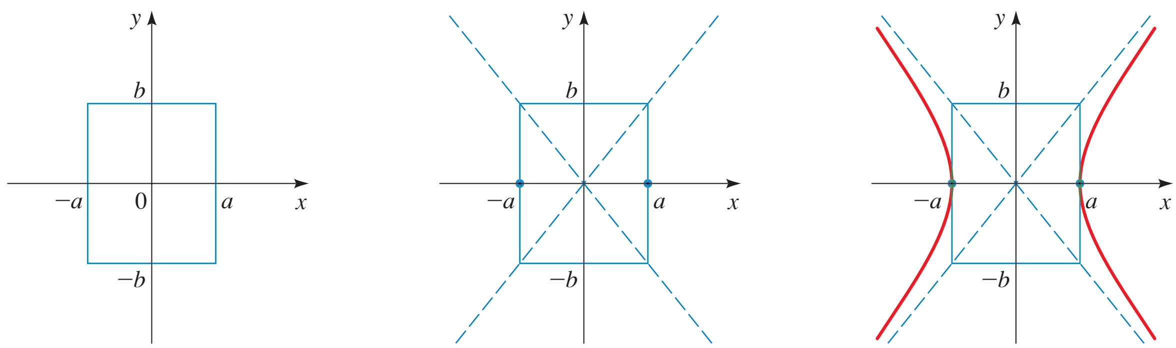
Las *asíntotas* mencionadas en este cuadro son líneas a las que se aproxima la hipérbola para valores grandes de x y y. Para encontrar las asíntotas en el primer caso del cuadro, de la ecuación se despeja y para obtener

$$
\begin{aligned}
y &= \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \\
&= \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}
\end{aligned}
$$

A medida que crece x, a^2/x^2 se aproxima cada vez más a cero. En otras palabras, cuando $x \to \infty$ se tiene $a^2/x^2 \to 0$. Por consiguiente, para x grande el valor de y se puede aproximar como $y = \pm(b/a)x$. Esto muestra que estas líneas son asíntotas de la hipérbola.

Las asíntotas son una ayuda esencial para graficar una hipérbola; ayudan a determinar su forma. Una manera conveniente de encontrar las asíntotas, para una hipérbola con eje transversal horizontal, es graficar primero los puntos $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, -b)$. Luego, se bosquejan los segmentos verticales y horizontales que pasan por estos puntos para construir un rectángulo, como se muestra en la figura 2a) en la página siguiente. A este rectángulo se le llama **caja central** de la hipérbola. Las pendientes de las diagonales de la caja central son $\pm b/a$, de modo que al extenderlas se obtienen las asíntotas $y = \pm(b/a)x$, como se bosqueja en el inciso b) de la figura. Por último, se grafican los vértices y se usan las asíntotas como guía para bosquejar la

hipérbola mostrada en el inciso c). (Un procedimiento similar se aplica para graficar una hipérbola que tiene un eje transversal vertical.)



a) Caja central b) Asíntotas c) Hipérbola

Figura 2

Pasos para graficar la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Cómo bosquejar una hipérbola

1. **Dibuje el cuadro central.** Este es el rectángulo centrado en el origen, con lados paralelos a los ejes, que cruzan un eje en $\pm a$, el otro en $\pm b$.
2. **Bosqueje las asíntotas.** Estas son las líneas que se obtienen al extender las diagonales del cuadro central.
3. **Grafique los vértices.** Éstos son las dos intersecciones con el eje x y las dos intersecciones con el eje y.
4. **Bosqueje la hipérbola.** Comience en un vértice y bosqueje una rama de la hipérbola, que se aproxima a las asíntotas. Bosqueje la otra rama de la misma manera..

Ejemplo 1 Una hipérbola con eje transversal horizontal

Una hipérbola tiene la ecuación

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

a) Encuentre los vértices, focos y asíntotas, y bosqueje la gráfica.

b) Dibuje la gráfica en una calculadora.

Solución

a) Primero divida ambos lados de la ecuación entre 144 para escribirla en forma estándar:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Debido a que el término x^2 es positivo, la hipérbola tiene un eje transversal horizontal; sus vértices y los focos están sobre el eje x. Puesto que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, se obtiene $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{16 + 9} = 5$. Por lo tanto, se tiene

VÉRTICES	$(\pm 4, 0)$
FOCOS	$(\pm 5, 0)$
ASÍNTOTAS	$y = \pm\frac{3}{4}x$

Después de bosquejar el cuadro central y las asíntotas, se completa el dibujo de la hipérbola como en la figura 3a).

b) Para dibujar la gráfica en una calculadora, se requiere despejar y.

Hay que observar que la ecuación de una hipérbola no define a y como una función de x (véase la página 164). Esto es porque se necesitan graficar dos funciones para trazar una hipérbola.

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$-16y^2 = -9x^2 + 144 \qquad \text{Restar } 9x^2$$

$$y^2 = 9\left(\frac{x^2}{16} - 1\right) \qquad \text{Divida entre } -16 \text{ y use como factor al } 9$$

$$y = \pm 3\sqrt{\frac{x^2}{16} - 1} \qquad \text{Tome las raíces cuadradas}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, se grafican las funciones

$$y = 3\sqrt{(x^2/16) - 1} \qquad \text{y} \qquad y = -3\sqrt{(x^2/16) - 1}$$

como se muestra en la figura 3b).

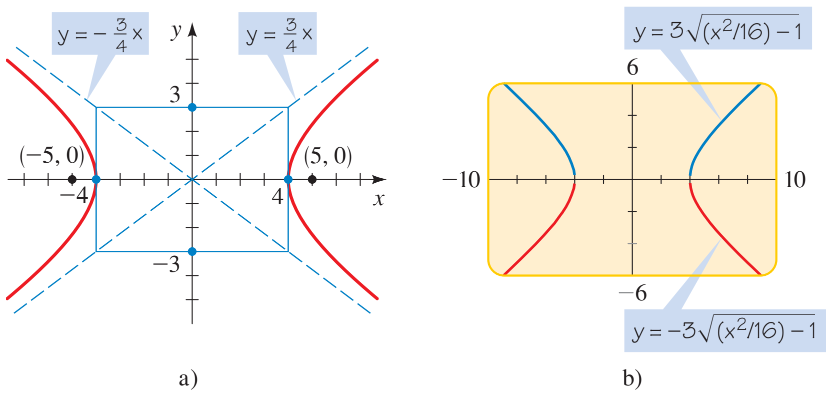


Figura 3
$9x^2 - 16y^2 = 144$

Ejemplo 2 Una hipérbola con eje transversal vertical

Determine los vértices, focos y asíntotas del la hipérbola, y bosqueje su gráfica.

$$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$$

Solución Se comienza escribiendo la ecuación en la forma estándar para una hipérbola.

$$x^2 - 9y^2 = -9$$

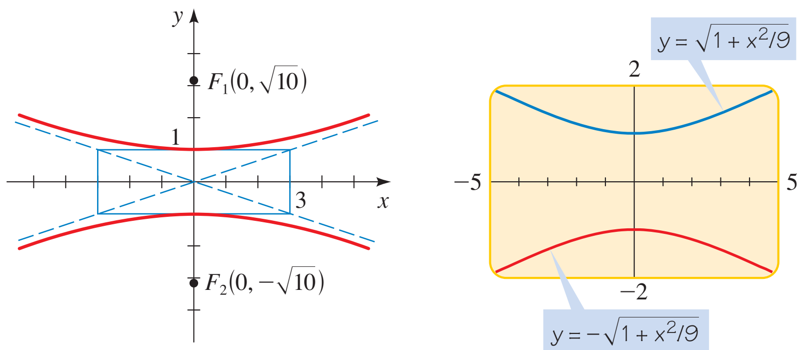
$$y^2 - \frac{x^2}{9} = 1 \qquad \text{Divida entre } -9$$

Debido a que el término y^2 es positivo, la hipérbola tiene un eje transversal vertical; sus focos y vértices están sobre el eje y. Puesto que $a^2 = 1$ y $b^2 = 9$, se obtiene $a = 1$, $b = 3$ y $c = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$. Por lo tanto, se tiene

VÉRTICES	$(0, \pm 1)$
FOCOS	$(0, \pm\sqrt{10})$
ASÍNTOTAS	$y = \pm\frac{1}{3}x$

Se dibujan el cuadro central y las asíntotas, luego se completa la gráfica, como se muestra en la figura 4a).

La gráfica se puede dibujar también en una calculadora, como se muestra en la figura 4b).

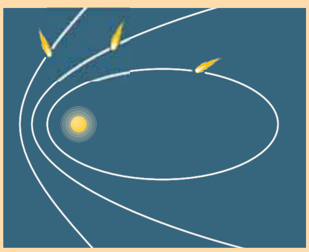


a) b)

Figura 4
$x^2 - 9y^2 + 9 = 0$ ■

Trayectorias de cometas

La trayectoria de un cometa es una elipse, una parábola o una hipérbola con el Sol en un foco. Este hecho se puede probar por medio del cálculo y las leyes de Newton del movimiento.* Si la trayectoria es una parábola o una hipérbola, el cometa nunca regresará. Si la trayectoria es una elipse, se puede determinar con precisión dónde y cuándo el cometa puede ser visto de nuevo. El cometa Halley tiene una trayectoria elíptica y vuelve cada 75 años; fue visto por última vez en 1987. El cometa más brillante del siglo XX fue el cometa Hale-Bopp, visto en 1997. Su órbita es una elipse muy excéntrica; se espera que vuelva al sistema solar interior alrededor del año 4377.



*James Stewart, *Calculus*, 5a. ed. (Pacific Grove, CA; Brooks/Cole, 2003), pp. 912-914.

Ejemplo 3 Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y focos

Encuentre la ecuación de la hipérbola con vértices $(\pm 3, 0)$ y focos $(\pm 4, 0)$. Bosqueje la gráfica.

Solución Puesto que los vértices están sobre el eje x, la hipérbola tiene un eje transversal horizontal. Su ecuación es de la forma

$$\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se tiene $a = 3$ y $c = 4$. Para hallar b, se usa la relación $a^2 + b^2 = c^2$.

$$3^2 + b^2 = 4^2$$
$$b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$
$$b = \sqrt{7}$$

Por lo tanto, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

La gráfica se muestra en la figura 5.

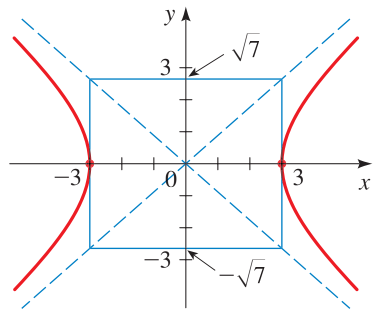


Figura 5
$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

■

Ejemplo 4 Hallar la ecuación de una hipérbola a partir de sus vértices y asíntotas

Encuentre la ecuación y los focos de la hipérbola con vértices $(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm 2x$. Bosqueje la gráfica.

Solución Puesto que los vértices están sobre el eje y, la hipérbola tiene un eje transversal vertical con $a = 2$. De la ecuación de la asíntota se ve que $a/b = 2$. Puesto que $a = 2$, se obtiene $2/b = 2$ y, por lo tanto, $b = 1$. Así, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$

Para hallar los focos, se calcula $c^2 = a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5$, por lo tanto $c = \sqrt{5}$. Así, los focos son $(0, \pm\sqrt{5})$. La gráfica se muestra en la figura 6. ■

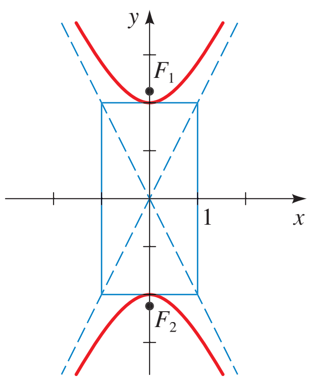


Figura 6
$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1$

Al igual que las parábolas y elipses, las hipérbolas tienen una *propiedad de reflexión* interesante. La luz dirigida a un foco de un espejo hiperbólico se refleja hacia el otro foco, según se ilustra en la figura 7. Esta propiedad se usa en la construcción de telescopios tipo Cassegrain. Se coloca un espejo hiperbólico en el tubo telescópico de modo que la luz reflejada del reflector parabólico primario se dirija a un foco del espejo hiperbólico. La luz se enfoca de nuevo a un punto más accesible debajo del reflector primario (figura 8).

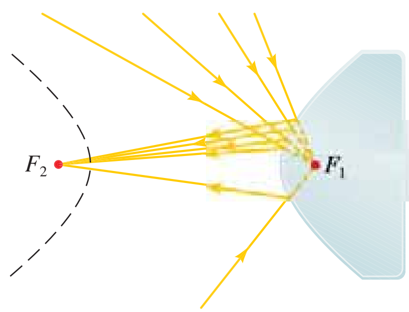


Figura 7
Propiedad de reflexión de las hipérbolas

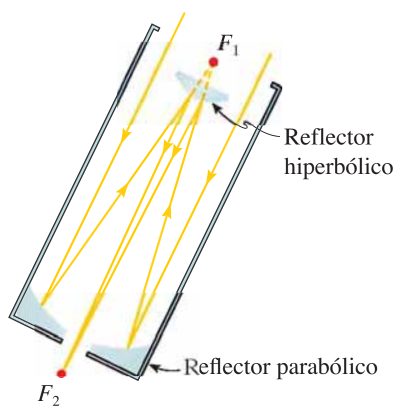


Figura 8
Telescopio tipo Cassegrain

El sistema LORAN (LOng RAnge Navigation) se usó hasta comienzos de la década de 1990; ahora ha sido superado por el sistema GPS (véase la página 656). En el sistema LORAN, las hipérbolas se emplean a bordo de una nave para determinar su ubicación. En la figura 9 las estaciones de radio en A y B transmiten señales en forma simultánea para que las reciba la nave en P. La computadora de abordo convierte la diferencia de tiempo en recepción de estas señales en una diferencia de distancia $d(P, A) - d(P, B)$. De la definición de una hipérbola ésta localiza la nave en una rama de una hipérbola con focos en A y B (bosquejados en negro en la figura). El mismo procedimiento se lleva a cabo en otras dos estaciones de radio en C y D, y con esto se localiza a la nave en una segunda hipérbola (mostrada en rojo en la figura). (En la práctica, sólo se requieren tres estaciones porque una de ellas se puede usar como foco para ambas hipérbolas.) Las coordenadas del punto de intersección de estas dos hipérbolas, que pueden ser calculadas con precisión por la computadora, dan la ubicación de P.

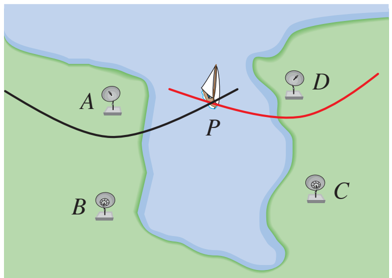


Figura 9
Sistema LORAN para hallar la ubicación de una nave

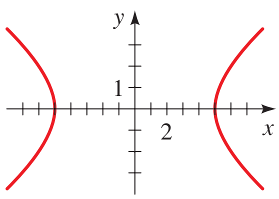
10.3 Ejercicios

1–4 ■ Compare la ecuación con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

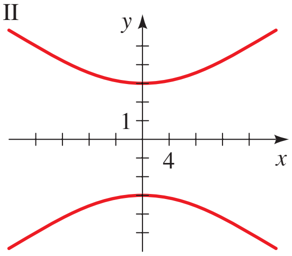
1. $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$ **2.** $y^2 - \dfrac{x^2}{9} = 1$

3. $16y^2 - x^2 = 144$ **4.** $9x^2 - 25y^2 = 225$

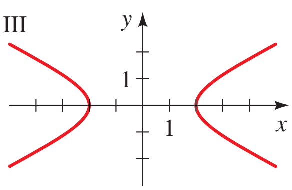
I



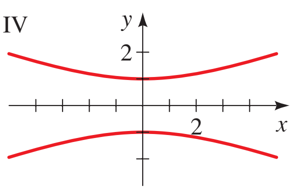
II



III



IV



5–16 ■ Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y bosqueje su gráfica.

5. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **6.** $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

7. $y^2 - \dfrac{x^2}{25} = 1$ **8.** $\dfrac{x^2}{2} - y^2 = 1$

9. $x^2 - y^2 = 1$ **10.** $9x^2 - 4y^2 = 36$

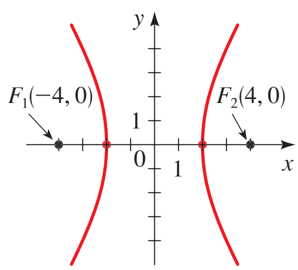
11. $25y^2 - 9x^2 = 225$ **12.** $x^2 - y^2 + 4 = 0$

13. $x^2 - 4y^2 - 8 = 0$ **14.** $x^2 - 2y^2 = 3$

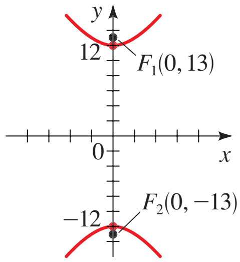
15. $4y^2 - x^2 = 1$ **16.** $9x^2 - 16y^2 = 1$

17–22 ■ Encuentre la ecuación para la hipérbola cuya gráfica se muestra.

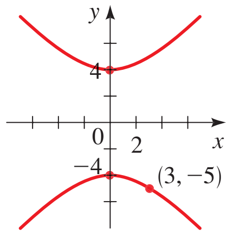
17.



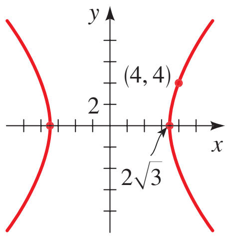
18.



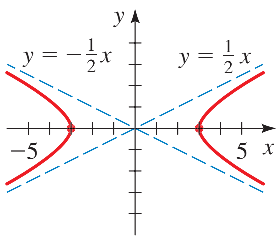
19.



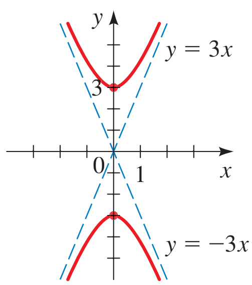
20.



21.



22.



23–26 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la hipérbola.

23. $x^2 - 2y^2 = 8$

24. $3y^2 - 4x^2 = 24$

25. $\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{6} = 1$

26. $\dfrac{x^2}{100} - \dfrac{y^2}{64} = 1$

27–38 ■ Encuentre una ecuación para la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

27. Focos $(\pm 5, 0)$, vértices $(\pm 3, 0)$

28. Focos $(0, \pm 10)$, vértices $(0, \pm 8)$

29. Focos $(0, \pm 2)$, vértices $(0, \pm 1)$

30. Focos $(\pm 6, 0)$, vértices $(\pm 2, 0)$

31. Vértices $(\pm 1, 0)$, asíntotas $y = \pm 5x$

32. Vértices $(0, \pm 6)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{3}x$

33. Focos $(0, \pm 8)$, asíntotas $y = \pm \frac{1}{2}x$

34. Vértices $(0, \pm 6)$, la hipérbola pasa por $(-5, 9)$

35. Asíntotas $y = \pm x$, la hipérbola pasa por $(5, 3)$

36. Focos $(\pm 3, 0)$, la hipérbola pasa por $(4, 1)$

37. Focos $(\pm 5, 0)$, longitud del eje transversal 6

38. Focos $(0, \pm 1)$, longitud del eje transversal 1

39. **a)** Muestre que las asíntotas de la hipérbola $x^2 - y^2 = 5$ son perpendiculares entre sí.

b) Encuentre una ecuación para la hipérbola con focos $(\pm c, 0)$ y con asíntotas perpendiculares entre sí.

40. Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

son **conjugadas** entre sí.

a) Muestre que las hipérbolas

$$x^2 - 4y^2 + 16 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4y^2 - x^2 + 16 = 0$$

son conjugadas entre sí, y bosqueje sus gráficas en los mismos ejes coordenados.

b) ¿Qué tienen en común las hipérbolas del inciso a)?

c) Muestre que cualquier par de hipérbolas conjugadas tienen la relación que descubrió en el inciso b).

41. En la derivación de la ecuación de la hipérbola al comienzo de esta sección, se dijo que la ecuación

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

se simplifica a

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Proporcione los pasos necesarios para demostrar esto.

42. **a)** Para la hipérbola

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

determine los valores de a, b y c, y encuentre las coordenadas de los focos F_1 y F_2.

b) Muestre que el punto $P(5, \frac{16}{3})$ se encuentra sobre la hipérbola.

c) Encuentre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$.

d) Compruebe que la diferencia entre $d(P, F_1)$ y $d(P, F_2)$ es $2a$.

43. Las hipérbolas se llaman **confocales** si tienen los mismos focos.

a) Muestre que las hipérbolas

$$\frac{y^2}{k} - \frac{x^2}{16 - k} = 1 \qquad \text{con } 0 < k < 16$$

son confocales.

b) Use un dispositivo de graficación para dibujar las ramas superiores de la familia de hipérbolas del inciso a) para $k = 1, 4, 8$ y 12. ¿Cómo cambia la forma de la gráfica cuando se incrementa k?

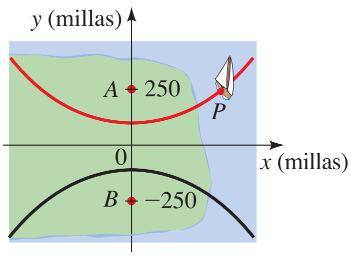
Aplicaciones

44. Navegación En la figura, las estaciones LORAN en A y B están apartadas 500 millas y la nave en P recibe la señal de la estación A 2640 microsegundos (μs) antes de que reciba la señal de B.

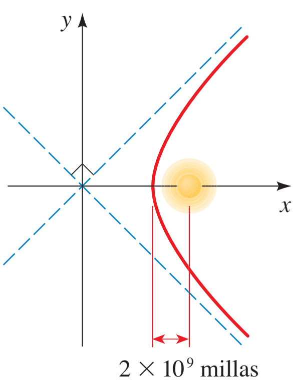
a) Si se supone que las señales de radio viajan a 980 pies/μs, encuentre $d(P, A) - d(P, B)$

b) Encuentre una ecuación para la rama de la hipérbola indicada en rojo en la figura. (Use millas como unidad de distancia.)

c) Si A está al norte de B y si P está al este de A, ¿qué tan lejos está P de A?



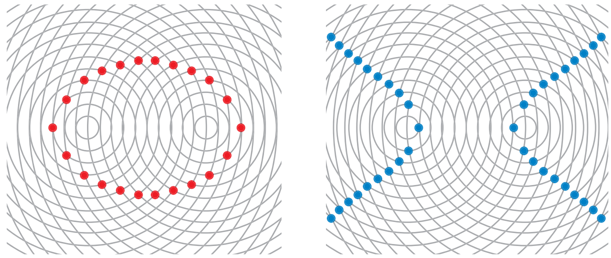
45. Trayectorias de cometas Algunos cometas, como el cometa Halley, son una parte permanente del sistema solar, que viajan en órbitas elípticas alrededor del Sol. Otros pasan por el sistema solar sólo un vez, siguiendo una trayectoria hiperbólica con el Sol en un foco. La figura muestra la trayectoria de esta clase de cometa. Encuentre una ecuación para la trayectoria, suponiendo que lo más que el cometa se aproxima al Sol son 2×10^9 millas y que la trayectoria que estaba tomando el cometa antes de acercase al sistema solar es en un ángulo recto a la trayectoria que continúa después de dejar el sistema solar.



46. Ondas en un estanque Se lanzan dos piedras al mismo tiempo en un estanque de agua en calma. Las crestas de las ondas resultantes forman círculos concéntricos igualmente espaciados, como se muestra en las figuras. Las ondas interactúan entre sí para crear ciertos patrones de interferencia.

a) Explique por qué los puntos rojos yacen sobre una elipse.

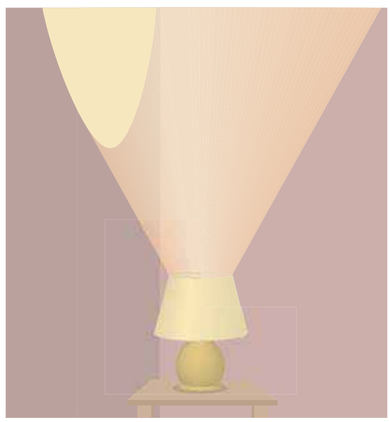
b) Explique por qué los puntos azules yacen en una hipérbola.



Descubrimiento • Debate

47. Hipérbolas en el mundo real En el texto se dan varios ejemplos de los usos de hipérbolas. Encuentre otras situaciones de la vida real donde ocurren hipérbolas. Consulte una enciclopedia científica en su biblioteca, o busque en Internet.

48. Luz de una lámpara La luz de una lámpara forma un área iluminada en una pared, como se muestra en la figura. ¿Por qué el límite de esta área iluminada es una hipérbola? ¿Cómo se puede sostener una linterna de modo que su haz forme una hipérbola en el suelo?



PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Cónicas en la arquitectura

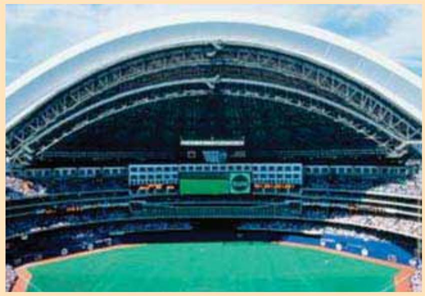
En la antigüedad la arquitectura fue parte de las matemáticas, así que los arquitectos tenían que ser matemáticos. Muchas de las estructuras que construían, pirámides, templos, anfiteatros y proyectos de irrigación, aún están en pie. En la actualidad los arquitectos emplean principios matemáticos incluso más complejos. Las fotografías siguientes muestran algunas estructuras que emplean secciones cónicas en su diseño.

Anfiteatro romano en Alejandría, Egipto (círculo)

Nik Wheeler/Corbis

Techo del Statuary Hall en el Capitolio de Estados Unidos (elipse)

Techo del U.S. House of Representatives

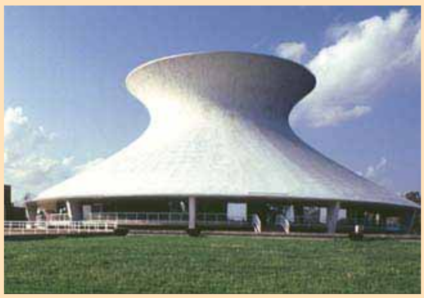


Techo del Skydome en Toronto, Canadá (parábola)

Walter Schmid/Stone/Getty Images

Techo del aeropuerto Dulles en Washington (hipérbola y parábola)

Richard T. Nowitz/Corbis



Planetario McDonnell, St. Louis, MO (hipérbola)

Cortesía de Chamber of Commerce, St. Louis, MO

Ático en La Pedrera, Barcelona, España (parábola)

O. Alamany and Vincens/Corbis

Los arquitectos tienen razones diferentes para usar cónicas en sus diseños. Por ejemplo, el arquitecto español Antoni Gaudi empleó parábolas en el ático de La Pedrera (véase la foto anterior). Su razonamiento fue que una cuerda suspendida entre dos puntos con carga igualmente distribuida (como en un puente suspendido) tiene la forma de una parábola, una parábola invertida proveería el mejor apoyo para un techo plano.

Construcción de cónicas

Las ecuaciones de las cónicas son útiles para fabricar objetos pequeños, porque una herramienta de corte controlada por computadora puede trazar con exactitud una curva dada por una ecuación. Pero en un proyecto de construcción, ¿cómo se puede construir una porción de una parábola, elipse o hipérbola que abarca el

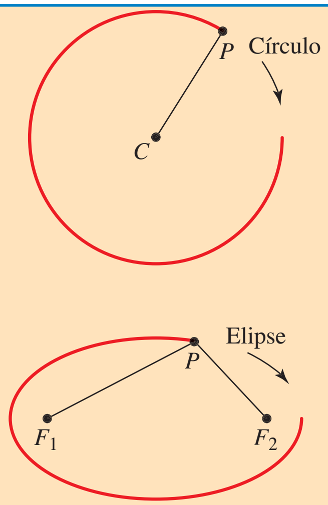


Figura 1
Construcción de un círculo y una elipse

techo o paredes de un edificio? Las propiedades geométricas de las cónicas proveen formas prácticas para construirlas. Por ejemplo, si estuviera construyendo una torre circular, elegiría un punto central, luego se aseguraría de que las paredes de la torre estuvieran a una distancia fija de ese punto. Las paredes elípticas se pueden construir por medio de una cuerda anclada en dos puntos, como se ilustra en la figura 1.

Para construir una parábola, se puede usar el aparato mostrado en la figura 2. Un trozo de cuerda de longitud a se ancla en F y A. La escuadra en T, también de longitud a, se desliza a lo largo de la barra recta L. Un lápiz en P sostiene la cuerda tensa contra la escuadra. Cuando la escuadra en T se desliza a la derecha el lápiz traza una curva.

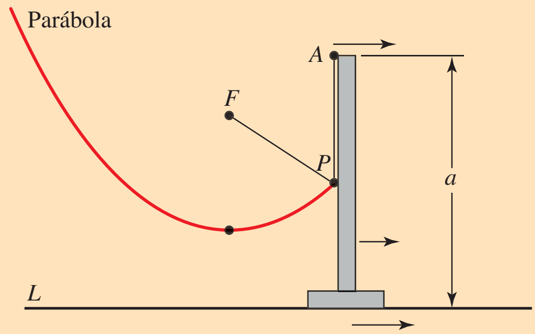


Figura 2
Construcción de una parábola

De la figura se puede observar que

$$d(F, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La cuerda es de longitud } a$$

$$d(L, P) + d(P, A) = a \qquad \text{La escuadra en T es de longitud } a$$

Se deduce que $d(F, P) + d(P, A) = d(L, P) + d(P, A)$. Al restar $d(P, A)$ de cada lado, se obtiene

$$d(F, P) = d(L, P)$$

La última ecuación dice que la distancia de F a P es igual a la distancia de P a la línea L. Así, la cuerva es una parábola con foco F y directriz L.

En proyectos de construcción es más fácil construir una recta que una curva. Por lo tanto, en algunos edificios, como en la Torre Kobe (véase el problema 4), se produce una superficie curva al usar muchas rectas. Se puede producir una curva usando líneas rectas, como la parábola mostrada en la figura 3.

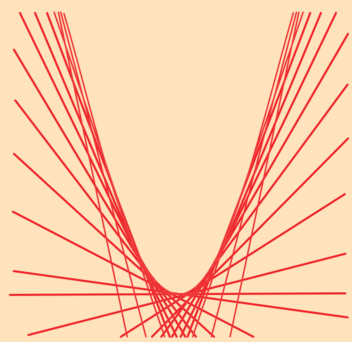


Figura 3
Rectas tangentes a una parábola

Cada recta es **tangente** a la parábola; es decir, la línea que se encuentra con la parábola en exactamente un punto y no la cruza. La recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) es

$$y = 2ax - a^2$$

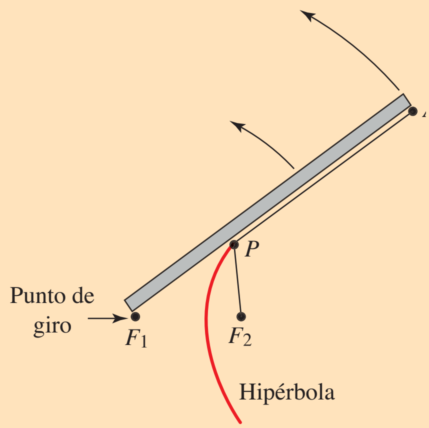
En el problema 6 se pide demostrar esto. La parábola se llama **envolvente** de tales líneas.

1. Las fotografías de la página 771 muestran seis ejemplos de edificios que contienen secciones cónicas. Busque en Internet otros ejemplos de estructuras que emplean parábolas, elipses o hipérbolas en su diseño. Encuentre por lo menos un ejemplo de cada tipo de cónica.

2. En este problema se construye una parábola. La barra de madera de la figura puede rotar en F_1. Una cuerda más corta que la barra está anclada en F_2 y en A, al otro extremo de la barra. Un lápiz en P sostiene tensa a la cuerda contra la barra cuando se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de F_1.

a) Muestre que la curva trazada con el lápiz es una rama de un hipérbola con focos en F_1 y F_2.

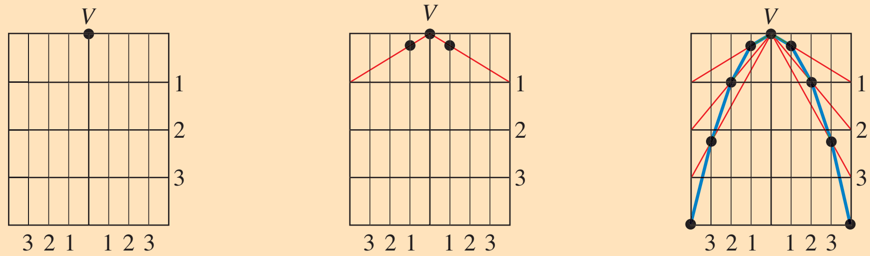
b) ¿Cómo se debe configurar el aparato para dibujar la otra rama de la hipérbola?



3. El siguiente método se puede usar para construir una parábola que ajusta en un rectángulo dado. La parábola será aproximada mediante muchos segmentos de recta cortos.

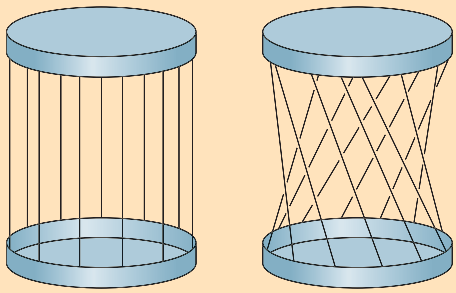
Primero, dibuje un rectángulo. Divida el rectángulo a la mitad mediante un segmento de recta y marque el punto final superior con V. A continuación, divida la longitud y el ancho de cada mitad de rectángulo en un número igual de partes para formar líneas de cuadrícula, como se muestra en la figura de la página siguiente. Dibuje líneas de V a los puntos finales de la línea de cuadrícula horizontal 1 y marque los puntos donde estas líneas cortan a las líneas de cuadrícula verticales marcadas con 1. A continuación, dibuje líneas de V a los puntos finales de la línea de cuadrícula horizontal 2 y marque los puntos donde estás líneas cortan a las líneas de cuadrícula verticales marcadas con 2. Continúe de esta manera hasta que haya usado todas las líneas de cuadrícula horizontales. Ahora, use segmentos de recta para unir los puntos que marcó

para obtener una aproximación a la parábola deseada. Aplique este procedimiento para dibujar una parábola que ajuste en un rectángulo de 6 por 10 pies sobre césped.



4. En este problema se construyen formas hiperbólicas por medio de rectas. Haga orificios igualmente espaciados en los bordes de dos tapas de plástico grandes. Una los orificios correspondientes con cuerdas de igual longitud como se muestra en la figura. Manteniendo tensas las cuerdas, gire una tapa en dirección contraria a la otra. Una superficie imaginaria que pasa por las cuerdas tiene secciones transversales hiperbólicas. (Un ejemplo arquitectónico de esto es la torre Kobe en Japón mostrada en la fotografía.) ¿Qué sucede con los vértices de las secciones transversales hiperbólicas cuando se hacen girar más las tapas?

Torre de Kobe en Japón



5. En este problema se muestra que la recta tangente a la parábola $y = x^2$ en el punto (a, a^2) tiene la ecuación $y = 2ax - a^2$.

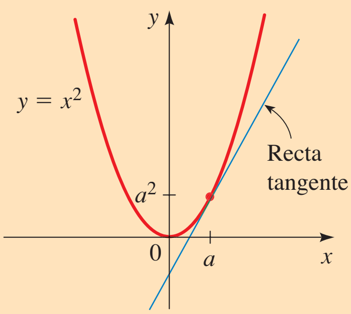
a) Sea m la pendiente de la recta tangente en (a, a^2). Muestre que la ecuación de la recta tangente es $y - a^2 = m(x - a)$.

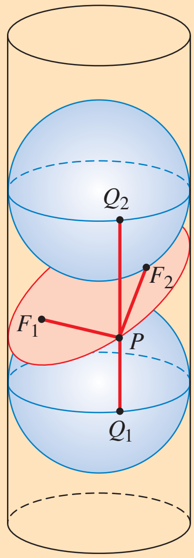
b) Use el hecho de que la tangente interseca a la parábola en sólo un punto para mostrar que (a, a^2) es la única solución del sistema.

$$\begin{cases} y - a^2 = m(x - a) \\ y = x^2 \end{cases}$$

c) Elimine a y del sistema del inciso b) para obtener una ecuación cuadrática en x. Muestre que el discriminante de esta ecuación cuadrática es $(m - 2a)^2$. Puesto que el sistema en b) tiene exactamente una solución, el discriminante debe ser igual a 0. Encuentre m.

d) Sustituya el valor para m que encontró en el inciso c) en la ecuación del inciso a) y simplifique para obtener la ecuación de la recta tangente.





6. En este problema se prueba que cuando el cilindro es cortado por un plano se forma una elipse. Un ejemplo arquitectónico de esto es el Tycho Brahe Planetarium en Copenhage (véase la fotografía). En la figura un plano corta un cilindro y se obtiene como resultado la curva roja. Dos esferas con el mismo radio que el cilindro se deslizan dentro de él de modo que sólo tocan el plano en F_1 y F_2. Elija un punto arbitrario P sobre la curva y sean Q_1 y Q_2 los dos puntos sobre el cilindro donde una vertical por P toca el "ecuador" de cada esfera.

a) Muestre que $PF_1 = PQ_1$ y $PF_2 = PQ_2$. [*Sugerencia*: use el hecho de que las tangentes a una esfera desde un punto dado fuera de la esfera son de la misma longitud.]

b) Explique por qué $PQ_1 + PQ_2$ es la misma para todos los puntos P sobre la curva.

c) Muestre que $PF_1 + PF_2$ es la misma para todos los puntos sobre la curva.

d) Concluya que la curva es una elipse con focos F_1 y F_2.

Bob Krist/Corbis

10.4 Cónicas desplazadas

En secciones anteriores, se estudiaron parábolas con vértices en el origen y elipses e hipérbolas con centros en el origen. Sólo se revisaron estos casos porque estas ecuaciones tienen la forma más simple. En esta sección se consideran cónicas cuyos vértices y centros no están necesariamente en el origen, y se determina cómo esto afecta a sus ecuaciones.

En la sección 2.4 se estudiaron transformaciones de funciones que tienen el efecto de desplazar sus gráficas. En general, para cualquier ecuación en x y y, si se remplaza x por $x - h$ o por $x + h$, la gráfica de la nueva ecuación es simplemente la gráfica anterior desplazada horizontalmente; si y se reemplaza por $y - k$ o por $y + k$, la gráfica se desplaza verticalmente. En el cuadro siguiente se dan los detalles.

Gráficas de desplazamiento de ecuaciones

Si h y k son números reales positivos, entonces reemplazar x por $x - h$ o por $x + h$ y reemplazar y por $y - k$ o por $y + k$ tiene los siguientes efectos sobre la gráfica de cualquier ecuación en x y y.

Reemplazo	Cómo de desplaza la gráfica
1. x se sustituye por $x - h$	h unidades a la derecha
2. x se sustituye por $x + h$	h unidades a la izquierda
3. y se sustituye por $y - k$	k unidades hacia arriba
4. y se sustituye por $y + k$	k unidades hacia abajo

Elipses desplazadas

Se aplicará desplazamiento horizontal y vertical a la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

cuya gráfica se muestra en la figura 1. Si se desplaza de modo que su centro esté en el punto (h, k) en lugar de en el origen, entonces su ecuación se convierte en

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

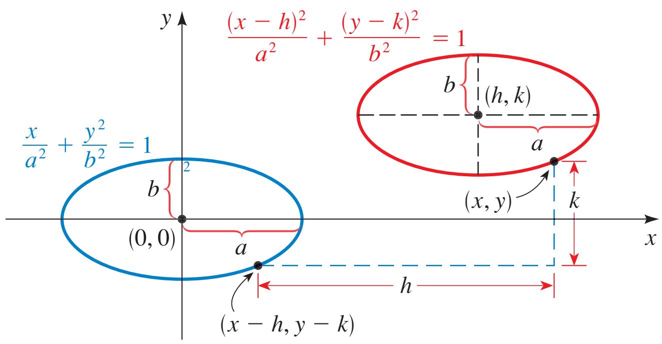


Figura 1
Elipse desplazada

Ejemplo 1 Bosquejar la gráfica de una elipse desplazada

Bosqueje la gráfica de la elipse

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1$$

y determine las coordenadas de los focos.

Solución La elipse

$$\frac{(x + 1)^2}{4} + \frac{(y - 2)^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse desplazada}$$

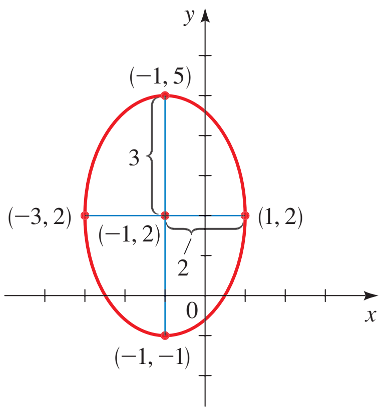


Figura 2
$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

está desplazada de modo que su centro está en $(-1, 2)$. Se obtiene de la elipse

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Elipse con centro en el origen}$$

al desplazarla a la izquierda 1 unidad y hacia arriba dos unidades. Los puntos finales de los ejes menor y mayor de la elipse desplazada son $(2, 0)$, $(-2, 0)$, $(0, 3)$, $(0, -3)$. Se aplican los desplazamientos requeridos a estos puntos para obtener los puntos correspondientes en la elipse desplazada:

$$\begin{aligned}
(2, 0) &\rightarrow (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)\\
(-2, 0) &\rightarrow (-2 - 1, 0 + 2) = (-3, 2)\\
(0, 3) &\rightarrow (0 - 1, 3 + 2) = (-1, 5)\\
(0, -3) &\rightarrow (0 - 1, -3 + 2) = (-1, -1)
\end{aligned}$$

Esto ayuda a trazar la gráfica de la figura 2.

Para hallar los focos de la elipse desplazada, primero se encuentran los focos de la elipse con centro en el origen. Puesto que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, se tiene $c^2 = 9 - 4 = 5$, por lo tanto $c = \sqrt{5}$. Por lo tanto, los focos son $\left(0, \pm\sqrt{5}\right)$. Al desplazar a la izquierda 1 unidad y hacia arriba 2 unidades, se obtiene

$$\begin{aligned}
\left(0, \sqrt{5}\right) &\rightarrow \left(0 - 1, \sqrt{5} + 2\right) = \left(-1, 2 + \sqrt{5}\right)\\
\left(0, -\sqrt{5}\right) &\rightarrow \left(0 - 1, -\sqrt{5} + 2\right) = \left(-1, 2 - \sqrt{5}\right)
\end{aligned}$$

Así, los focos de la elipse desplazada son

$$\left(-1, 2 + \sqrt{5}\right) \quad \text{y} \quad \left(-1, 2 - \sqrt{5}\right)$$

■

Parábolas desplazadas

Aplicar desplazamientos a las parábolas conduce a las ecuaciones y gráficas mostradas en la figura 3.

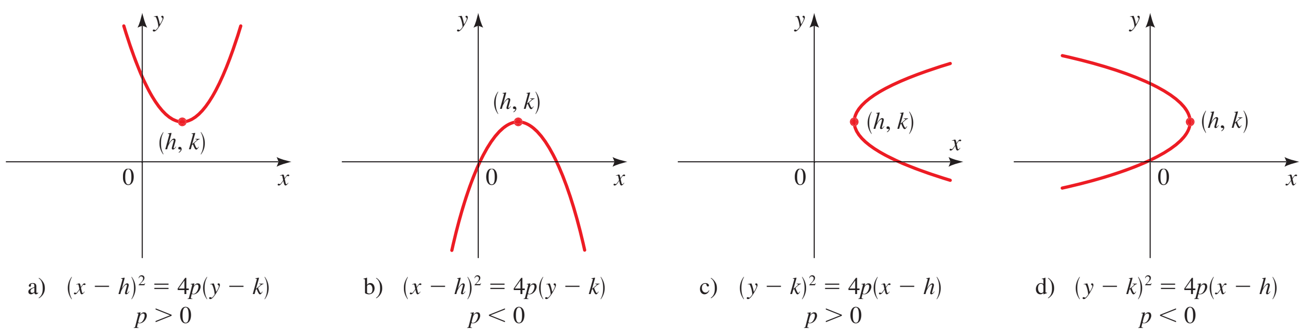


Figura 3
Parábolas desplazadas

Ejemplo 2 Graficar una parábola desplazada

Determine el vértice, foco y directriz y bosqueje la gráfica de la parábola.

$$x^2 - 4x = 8y - 28$$

Solución Se completa el cuadrado en x para escribir esta ecuación en las formas de la figura 3.

$$x^2 - 4x + 4 = 8y - 28 + 4 \quad \text{Sume 4 para completar el cuadrado}$$
$$(x - 2)^2 = 8y - 24$$
$$(x - 2)^2 = 8(y - 3) \quad \text{Parábola desplazada}$$

Esta parábola abre hacia arriba con vértice en (2, 3). Se obtiene de la parábola

$$x^2 = 8y \quad \text{Parábola con vértice en el origen}$$

al desplazar 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba. Puesto que $4p = 8$, se tiene $p = 2$, de modo que el foco está 2 unidades arriba del vértice y la directriz está 2 unidades abajo del vértice. Por lo tanto, el foco es (2, 5) y la directriz es $y = 1$. La gráfica se muestra en la figura 4. ■

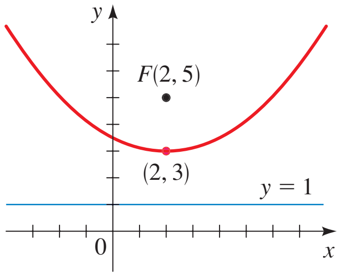
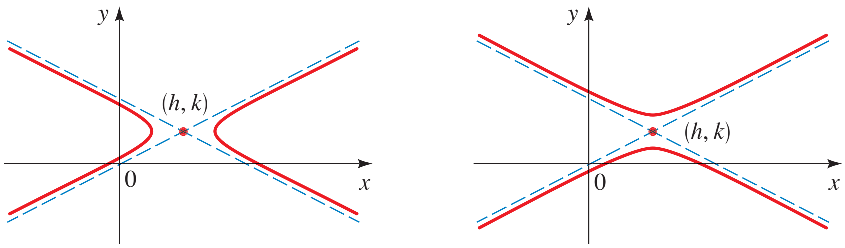


Figura 4
$x^2 - 4x = 8y - 28$

Hipérbolas desplazadas

La aplicación de desplazamientos a hipérbolas conduce a las ecuaciones y gráficas mostradas en la figura 5.



a) $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ b) $-\dfrac{(x-h)^2}{b^2} + \dfrac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Figura 5
Hipérbolas desplazadas

Ejemplo 3 Graficar una hipérbola desplazada

Una cónica desplazada tiene la ecuación

$$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$$

a) Complete el cuadrado en x y y para mostrar que la ecuación representa una hipérbola.

b) Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola y bosqueje su gráfica.

c) Dibuje la gráfica por medio de una calculadora para gráficas.

Solución

a) Se completan los cuadrados en x y y:

$$9(x^2 - 8x \qquad) - 16(y^2 + 2y \qquad) = 16$$
$$9(x^2 - 8x + 16) - 16(y^2 + 2y + 1) = 16 + 9 \cdot 16 - 16 \cdot 1 \quad \text{Complete los cuadrados}$$
$$9(x - 4)^2 - 16(y + 1)^2 = 144 \quad \text{Divida esto entre 144}$$
$$\frac{(x-4)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{9} = 1 \quad \text{Hipérbola desplazada}$$

Al comparar esto con la figura 5a), se ve que esta es la ecuación de una hipérbola desplazada.

b) La hipérbola desplazada tiene centro $(4, -1)$ y eje transversal horizontal.

$$\textbf{CENTRO} \quad (4, -1)$$

Su gráfica tendrá la misma forma que la hipérbola no desplazada

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \text{Hipérbola con centro en el origen}$$

Puesto que $a^2 = 16$ y $b^2 = 9$, se tiene $a = 4$, $b = 3$ y $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$. Así, los focos están 5 unidades a la izquierda y a la derecha del centro, y los vértices están 4 unidades a cualquier lado del centro.

$$\textbf{FOCOS} \quad (-1, -1) \quad \text{y} \quad (9, -1)$$

$$\textbf{VÉRTICES} \quad (0, -1) \quad \text{y} \quad (8, -1)$$

Las asíntotas de la hipérbola no desplazada son $y = \pm\frac{3}{4}x$, así que las asíntotas de la hipérbola desplazada se encuentran como sigue.

$$\textbf{ASÍNTOTAS} \quad y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}(x - 4)$$

$$y + 1 = \pm\tfrac{3}{4}x \mp 3$$

$$y = \tfrac{3}{4}x - 4 \qquad \text{y} \qquad y = -\tfrac{3}{4}x + 2$$

Para ayudar a bosquejar la hipérbola, se dibuja el cuadro central; se extiende 4 unidades a la izquierda y a la derecha desde el centro y 3 unidades hacia arriba y abajo del centro. Después se dibujan las asíntotas y se completa la gráfica de la hipérbola desplazada como se muestra en la figura 6a).

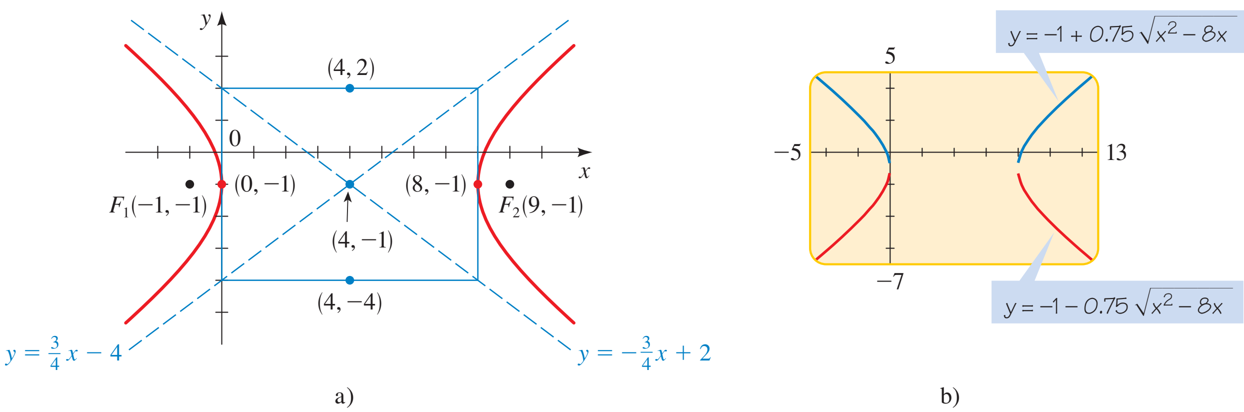


Figura 6
$9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$

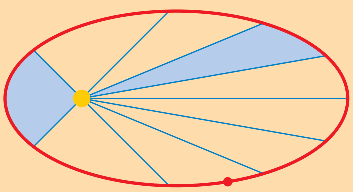
c) Para dibujar la gráfica con una calculadora, se requiere despejar y. La ecuación dada es una ecuación cuadrática en y, de modo que se usa la fórmula cuadrática para despejar y. Al escribir la ecuación en la forma

$$16y^2 + 32y - 9x^2 + 72x + 16 = 0$$

Johannes Kepler (1571-1630) fue el primero en dar una descripción correcta del movimiento de los planetas. La cosmología de su tiempo postuló sistemas complicados de círculos que se mueven en círculos para describir estos movimientos. Kepler buscó una descripción más simple y armoniosa. Como astrónomo oficial en la corte imperial en Praga, estudió las observaciones astronómicas del astrónomo danés Tycho Brahe, cuyos datos eran los más exactos disponibles en ese momento. Después de numerosos intentos por hallar una teoría, Kepler hizo un descubrimiento momentáneo de que las órbitas de los planetas son elípticas. Sus tres grandes leyes del movimiento planetario son:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en un foco.
2. El segmento de recta que une al Sol con un planeta barre áreas iguales en igual tiempo. (Véase la figura).
3. El cuadrado del periodo de revolución de un planeta es proporcional al cubo de la longitud del eje principal de su órbita.

Su formulación de estas leyes es quizá la deducción más impresionante de datos empíricos en la historia de la ciencia.



se obtiene

$$y = \frac{-32 \pm \sqrt{32^2 - 4(16)(-9x^2 + 72x + 16)}}{2(16)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-32 \pm \sqrt{576x^2 - 4608x}}{32} \qquad \text{Desarrolle}$$

$$= \frac{-32 \pm 24\sqrt{x^2 - 8x}}{32} \qquad \text{Factorice 576 del radical}$$

$$= -1 \pm \tfrac{3}{4}\sqrt{x^2 - 8x} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la hipérbola, se grafican las funciones

$$y = -1 + 0.75\sqrt{x^2 - 8x} \qquad \text{y} \qquad y = -1 - 0.75\sqrt{x^2 - 8x}$$

como se ilustra en la figura 6b). ■

Ecuación general de una cónica desplazada

Si se desarrollan y simplifican las ecuaciones de cualquiera de las cónicas desplazadas ilustradas en las figuras 1, 3 y 5, entonces siempre se obtendrá una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son ambas cero. Por el contrario, si se comienza con una ecuación de esta forma, entonces se puede completar el cuadrado en x y y para ver qué tipo de sección cónica representa la ecuación. En algunos casos, la gráfica de la ecuación resulta ser sólo un par de líneas, un solo punto, o bien, podría no haber gráfica en absoluto. Estos casos se llaman **cónicas degeneradas**. Si la ecuación no es degenerada, entonces se puede decir si representa una parábola, una elipse o una hipérbola, simplemente examinando los signos de A y C, como se describe en el cuadro siguiente.

Ecuación general de una cónica desplazada

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde A y C no son cero, es una cónica o una cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si A o C es 0

2. una elipse si A y C tienen el mismo signo (o un círculo si $A = C$)

3. una hipérbola si A y C tienen signos opuestos

Ejemplo 4 Una ecuación que conduce a una cónica degenerada

Bosqueje la gráfica de la ecuación

$$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$$

Solución Debido a que los coeficientes de x^2 y y^2 son de signo opuesto, esta ecuación parece como si debiera representar una hipérbola (como la ecuación del ejemplo 3). Para ver si éste es de hecho el caso, se completan los cuadrados:

$$9(x^2 + 2x \qquad) - (y^2 - 6y \qquad) = 0 \qquad \text{Agrupe términos y factorice 9}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 6y + 9) = 0 + 9 \cdot 1 - 9 \qquad \text{Complete el cuadrado}$$

$$9(x + 1)^2 - (y - 3)^2 = 0 \qquad \text{Factorice}$$

$$(x + 1)^2 - \frac{(y - 3)^2}{9} = 0 \qquad \text{Divida entre 9}$$

Para que se ajuste a la forma de la ecuación de una hipérbola, sería necesaria una constante no cero a la derecha del signo igual. De hecho, el análisis siguiente muestra que es la ecuación de un par de líneas que se cortan:

$$(y - 3)^2 = 9(x + 1)^2$$

$$y - 3 = \pm 3(x + 1) \qquad \text{Tome las raíces cuadradas}$$

$$y = 3(x + 1) + 3 \qquad \text{o} \qquad y = -3(x + 1) + 3$$

$$y = 3x + 6 \qquad\qquad y = -3x$$

Estas líneas se grafican en la figura 7. ■

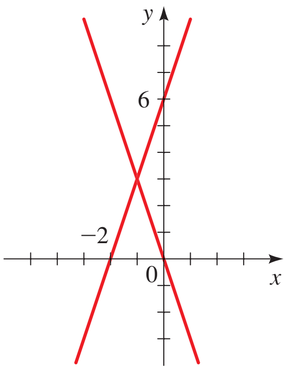


Figura 7
$9x^2 - y^2 + 18x + 6y = 0$

Debido a que la ecuación del ejemplo 4 se parece en primera instancia a la ecuación de una hipérbola pero, de hecho, resulta representar simplemente un par de líneas, se hace referencia a esta gráfica como una **hipérbola degenerada.** Las elipses e hipérbolas degeneradas surgen también cuando se completan el(los) cuadrado(s) en una ecuación que al parecer representa una cónica. Por ejemplo, la ecuación

$$4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 6 = 0$$

parece como si representara una elipse, porque los coeficientes de x^2 y y^2 tienen el mismo signo. Pero completar el cuadrado conduce a

$$(x - 1)^2 + \frac{(y + 1)^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

que no tiene solución (puesto que la suma de dos cuadrados no puede ser negativa). Por lo tanto, esta ecuación es degenerada.

10.4 Ejercicios

1–4 ■ Encuentre el centro, focos y vértices de la elipse y determine las longitudes de los ejes mayor y menor. Luego bosqueje la gráfica.

1. $\dfrac{(x - 2)^2}{9} + \dfrac{(y - 1)^2}{4} = 1$ **2.** $\dfrac{(x - 3)^2}{16} + (y + 3)^2 = 1$

3. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{(y + 5)^2}{25} = 1$ **4.** $\dfrac{(x + 2)^2}{4} + y^2 = 1$

5–8 ■ Halle el vértice, foco y directriz de la parábola y bosqueje la gráfica.

5. $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$ **6.** $(y + 5)^2 = -6x + 12$

7. $-4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = y$ **8.** $y^2 = 16x - 8$

9–12 ■ Encuentre el centro, focos, vértices y las asíntotas de la hipérbola. Luego bosqueje la gráfica.

9. $\dfrac{(x + 1)^2}{9} - \dfrac{(y - 3)^2}{16} = 1$

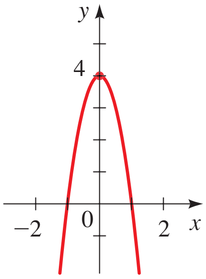
10. $(x - 8)^2 - (y + 6)^2 = 1$

11. $y^2 - \dfrac{(x + 1)^2}{4} = 1$

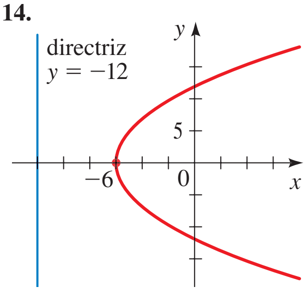
12. $\dfrac{(y - 1)^2}{25} - (x + 3)^2 = 1$

13–18 ■ Halle una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

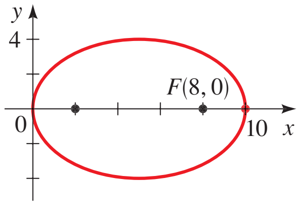
13.



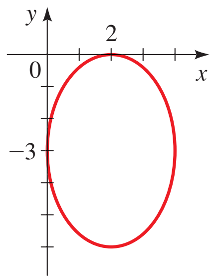
14.



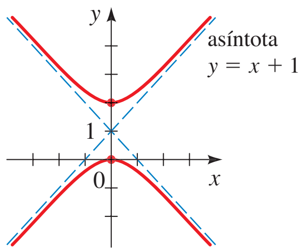
15.



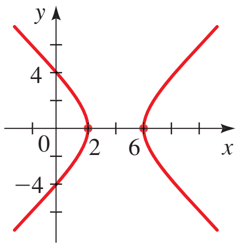
16.



17.



18.



19–30 ■ Complete el cuadrado para determinar si la ecuación representa una elipse, una parábola, una hipérbola o una cónica degenerada. Si la gráfica es una elipse, encuentre el centro, focos, vértices y longitudes de los ejes mayor y menor. Si es una parábola, determine el vértice, foco y directriz. Si es una hipérbola, encuentre el centro, focos, vértices y asíntotas. Después bosqueje la gráfica de la ecuación. Si la ecuación no tiene gráfica explique por qué.

19. $9x^2 - 36x + 4y^2 = 0$

20. $y^2 = 4(x + 2y)$

21. $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y = 20$

22. $x^2 + 6x + 12y + 9 = 0$

23. $4x^2 + 25y^2 - 24x + 250y + 561 = 0$

24. $2x^2 + y^2 = 2y + 1$

25. $16x^2 - 9y^2 - 96x + 288 = 0$

26. $4x^2 - 4x - 8y + 9 = 0$

27. $x^2 + 16 = 4(y^2 + 2x)$

28. $x^2 - y^2 = 10(x - y) + 1$

29. $3x^2 + 4y^2 - 6x - 24y + 39 = 0$

30. $x^2 + 4y^2 + 20x - 40y + 300 = 0$

31–34 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la cónica.

31. $2x^2 - 4x + y + 5 = 0$

32. $4x^2 + 9y^2 - 36y = 0$

33. $9x^2 + 36 = y^2 + 36x + 6y$

34. $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y = 0$

35. Determine cuál debe ser el valor de F si la gráfica de la ecuación

$$4x^2 + y^2 + 4(x - 2y) + F = 0$$

es **a)** una elipse, **b)** un solo punto o **c)** el conjunto vacío.

36. Encuentre una ecuación para la elipse que comparte un vértice y un foco con la parábola $x^2 + y = 100$ y tiene su otro foco en el origen.

37. Este ejercicio trata con las **parábolas focales**, es decir, familias de parábolas que tienen el mismo foco.

a) Dibuje las gráficas de la familia de parábolas

$$x^2 = 4p(y + p)$$

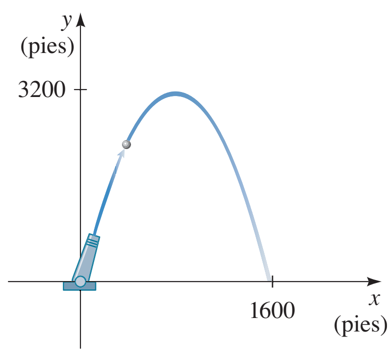
para $p = -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

b) Muestre que cada parábola de esta familia tiene su foco en el origen.

c) Describa el efecto sobre la gráfica de mover el vértice más cerca del origen.

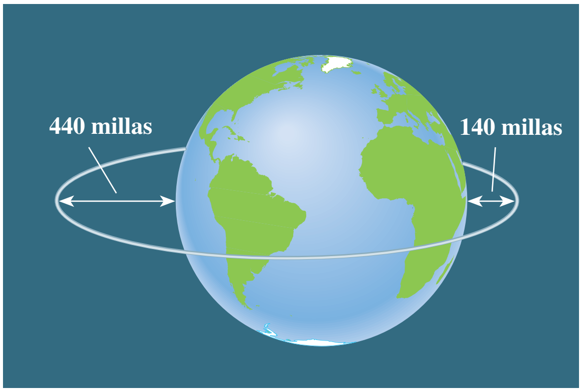
Aplicaciones

38. Trayectoria de una bala de cañón Un cañón dispara una bala como se ilustra en la figura. La trayectoria de la bala es una parábola con vértice en el punto más alto de la trayectoria. Si la bala aterriza a 1600 pies del cañón y el punto más alto que alcanza está a 3200 pies sobre el suelo, encuentre una ecuación para la trayectoria de la bala. Coloque el origen en el lugar del cañón.



39. Órbita de un satélite Un satélite está en una órbita elíptica alrededor de la Tierra con el centro de la Tierra en un foco. La altura del satélite arriba de la Tierra varía entre 140 y 440 millas. Suponga que la Tierra es una esfera con radio de

3960 millas. Encuentre una ecuación para la trayectoria del satélite con el origen en el centro de la Tierra.



Descubrimiento • Debate

40. Una familia de cónicas cofocales Las cónicas que comparten un foco se llaman **cofocales.** Considere la familia de cónicas que tienen un foco en (0, 1) y un vértice en el origen (véase la figura).

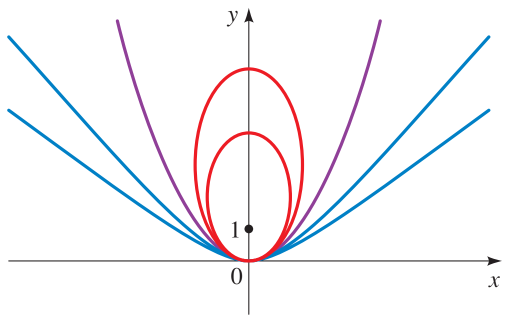
a) Encuentre las ecuaciones de dos elipses diferentes que tienen estas propiedades.

b) Halle las ecuaciones de dos hipérbolas diferentes que tienen estas propiedades.

c) Explique por qué sólo una parábola satisface estas propiedades. Encuentre su ecuación.

d) Bosqueje las cónicas que encontró en los incisos a), b) y c) en los mismos ejes coordenados (para las hipérbolas, bosqueje las ramas superiores solamente).

e) ¿Cómo se relacionan las elipses e hipérbolas con la parábola?



10.5 Rotación de ejes

En la sección 10.4 se estudian cónicas con ecuaciones de la forma

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se vio que la gráfica es siempre una elipse, parábola o hipérbola con ejes horizontales o verticales (excepto en los casos degenerados). En esta sección se estudia la ecuación de segundo grado más general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se verá que la gráfica de una ecuación de esta forma es también una cónica. De hecho, al rotar los ejes coordenados por un ángulo apropiado, se puede eliminar el término Bxy y usar después lo que se sabe de las secciones cónicas para analizar la gráfica.

Rotación de ejes

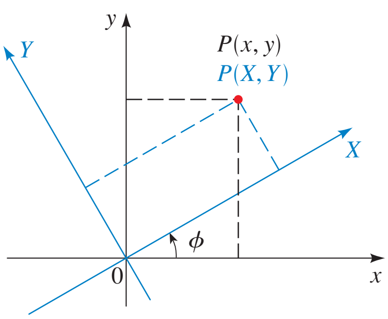


Figura 1

En la figura 1 los ejes x y y han sido girados por un ángulo agudo ϕ respecto al origen para producir un nuevo par de ejes, que se llaman ejes X y Y. Un punto P que tiene coordenadas (x, y) en el sistema anterior tiene coordenadas (X, Y) en el nuevo sistema. Si r denota la distancia de P desde el origen y θ es el ángulo que el segmento OP forma con el nuevo eje X, entonces se puede ver de la figura 2 en la siguiente página (considerando los dos triángulos rectángulos de la figura) que

$$X = r\cos\theta \qquad Y = r\operatorname{sen}\theta$$

$$x = r\cos(\theta + \phi) \qquad y = r\operatorname{sen}(\theta + \phi)$$

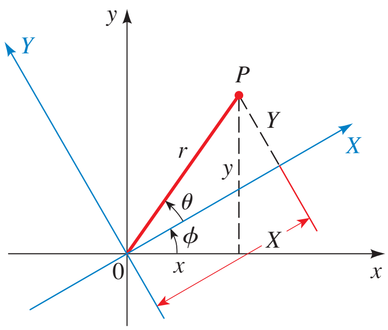


Figura 2

Al usar la fórmula de adición para el coseno, se puede observar que

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta + \phi) \\ &= r(\cos\theta\cos\phi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ &= (r\cos\theta)\cos\phi - (r\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\phi \\ &= X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \end{aligned}$$

De manera similar, se puede aplicar la fórmula de adición para el seno a la expresión para y a fin de obtener $y = X \operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi$. Cuando estas ecuaciones para x y y se tratan como un sistema de ecuaciones lineales en las variables X y Y (véase el ejercicio 33), se obtienen expresiones para X y Y en términos de x y y, según se detalla en el siguiente cuadro.

Rotación de fórmulas de ejes

Suponga que los ejes x y y en un plano coordenado se rotan por un ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y, como se muestra en la figura 1. Entonces las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en los planos xy y XY se relacionan como sigue:

$$x = X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi \qquad X = x\cos\phi + y\operatorname{sen}\phi$$
$$y = X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi \qquad Y = -x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi$$

Ejemplo 1 Rotación de ejes

Si el sistema coordenado se hace girar por un ángulo de 30°, encuentre las coordenadas XY del punto con coordenadas xy $(2, -4)$.

Solución Usando las fórmulas de rotación de ejes con $x = 2$, $y = -4$ y $\phi = 30°$, se obtiene

$$X = 2\cos 30° + (-4)\operatorname{sen} 30° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$$

$$Y = -2\operatorname{sen} 30° + (-4)\cos 30° = -2\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}$$

Las coordenadas XY son $(-2 + \sqrt{3}, -1 - 2\sqrt{3})$. ■

Ejemplo 2 Rotación de una hipérbola

Gire los ejes coordenados 45° para mostrar que la gráfica de la ecuación $xy = 2$ es una hipérbola.

Solución Se usan las fórmulas de rotación de ejes con $\phi = 45°$ para obtener

$$x = X\cos 45° - Y\operatorname{sen} 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

$$y = X\operatorname{sen} 45° + Y\cos 45° = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}$$

Al sustituir estas expresiones en la ecuación original, se obtiene

$$\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} = 2$$

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

Se reconoce a ésta como una hipérbola con vértices $(\pm 2, 0)$ en el sistema coordenado XY. Sus asíntotas son $Y = \pm X$, que corresponden a los ejes coordenados en el sistema xy (véase la figura 3).

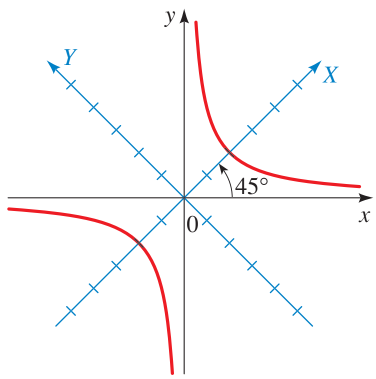


Figura 3
$xy = 2$

Ecuación general de una cónica

El método del ejemplo 2 se puede usar para transformar cualquier ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

en una ecuación en X y Y que no contiene un término XY al elegir un ángulo de rotación apropiado. Para hallar el ángulo que funciona, se hacen girar los ejes por un ángulo ϕ y se sustituyen x y y en las fórmulas de rotación de ejes:

$$\begin{aligned} A(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)^2 &+ B(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi)(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) \\ &+ C(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi)^2 + D(X\cos\phi - Y\operatorname{sen}\phi) \\ &+ E(X\operatorname{sen}\phi + Y\cos\phi) + F = 0 \end{aligned}$$

Si se desarrolla la ecuación y se reúnen términos semejantes, se obtiene una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\phi + B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\operatorname{sen}^2\phi \\ B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \operatorname{sen}^2\phi) \\ C' &= A\operatorname{sen}^2\phi - B\operatorname{sen}\phi\cos\phi + C\cos^2\phi \end{aligned}$$

$$D' = D\cos\phi + E\,\text{sen}\,\phi$$
$$E' = -D\,\text{sen}\,\phi + E\cos\phi$$
$$F' = F$$

Para eliminar el término XY, se elegiría ϕ de modo que $B' = 0$, es decir,

Fórmulas del doble de un ángulo

$\text{sen}\,2\phi = 2\,\text{sen}\,\phi\cos\phi$

$\cos 2\phi = \cos^2\phi - \text{sen}^2\phi$

$$2(C - A)\,\text{sen}\,\phi\cos\phi + B(\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi) = 0$$
$$(C - A)\,\text{sen}\,2\phi + B\cos 2\phi = 0 \qquad \text{Fórmula del doble de un ángulo para seno y coseno}$$

$$B\cos 2\phi = (A - C)\,\text{sen}\,2\phi$$
$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} \qquad \text{Divida entre } B\,\text{sen}\,2\phi$$

El cálculo precedente prueba el siguiente teorema.

Simplificación de la ecuación cónica general

Para eliminar el término xy en la ecuación cónica general

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

gire los ejes por un ángulo agudo ϕ que satisface

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

Ejemplo 3 Eliminar el término *xy*

Use una rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación

$$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$$

Identifique y bosqueje la curva.

Solución Para eliminar el término xy, se hacen girar los ejes por un ángulo ϕ que satisface

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{6\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Así, $2\phi = 60°$ y, por lo tanto, $\phi = 30°$. Con este valor de ϕ, se obtiene

$$x = X\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - Y\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{Fórmulas de rotación de ejes}$$
$$y = X\left(\frac{1}{2}\right) + Y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{sen}\,\phi = \tfrac{1}{2}$$

La sustitución de estos valores por x y y en la ecuación conduce a

$$6\sqrt{3}\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{X\sqrt{3}}{2} - \frac{Y}{2}\right)\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right) + 4\sqrt{3}\left(\frac{X}{2} + \frac{Y\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 21\sqrt{3}$$

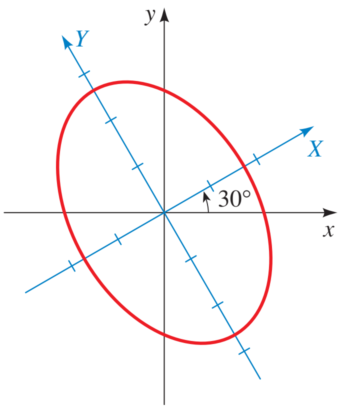


Figura 4
$6\sqrt{3}x^2 + 6xy + 4\sqrt{3}y^2 = 21\sqrt{3}$

Al desarrollar y reunir términos semejantes, se obtiene

$$7\sqrt{3}X^2 + 3\sqrt{3}Y^2 = 21\sqrt{3}$$

$$\frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{7} = 1 \qquad \text{Divida entre } 21\sqrt{3}$$

Ésta es la ecuación de una elipse en el sistema coordenado XY. Los focos se encuentran sobre el eje Y. Debido a que $a^2 = 7$ y $b^2 = 3$, la longitud del eje mayor es $2\sqrt{7}$ y la longitud del eje menor es $2\sqrt{3}$. La elipse se bosqueja en la figura 4. ■

En el ejemplo precedente se pudo determinar ϕ sin dificultad, puesto que se recordó que $\cot 60° = \sqrt{3}/3$. En general, hallar ϕ no es tan fácil. En el ejemplo siguiente se ilustra cómo las siguientes fórmulas de la mitad de un ángulo, que son válidas para $0 < \phi < \pi/2$, son útiles para determinar ϕ (véase la sección 7.3):

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} \qquad \operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}}$$

Ejemplo 4 Graficar una cónica rotada

Una cónica tiene la ecuación

$$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$$

a) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy.

b) Identifique y bosqueje la gráfica.

c) Dibuje la gráfica por medio de una calculadora.

Solución

a) Para eliminar el término xy, se hacen girar los ejes por un ángulo ϕ que satisface

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B} = \frac{64 - 36}{96} = \frac{7}{24}$$

En la figura 5 se bosqueja un triángulo con $\cot 2\phi = \frac{7}{24}$. Se ve que

$$\cos 2\phi = \tfrac{7}{25}$$

por lo tanto, con las fórmulas de la mitad de un ángulo, se obtiene

$$\cos \phi = \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{sen} \phi = \sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

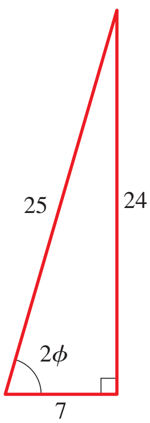


Figura 5

Así, las fórmulas de rotación de ejes dan

$$x = \tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y \qquad \text{y} \qquad y = \tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y$$

Al sustituir en la ecuación dada, se obtiene

$$64\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)^2 + 96\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right)\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)$$
$$+ 36\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right)^2 - 15\left(\tfrac{4}{5}X - \tfrac{3}{5}Y\right) + 20\left(\tfrac{3}{5}X + \tfrac{4}{5}Y\right) - 25 = 0$$

Al desarrollar y reunir términos semejantes, se obtiene

$$100X^2 + 25Y - 25 = 0$$

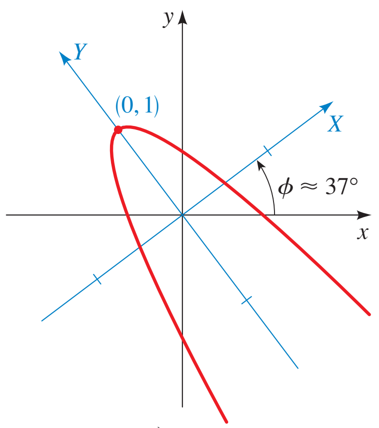
$$-4X^2 = Y - 1 \qquad \text{Simplifique}$$

$$X^2 = -\tfrac{1}{4}(Y - 1) \qquad \text{Divida entre 4}$$

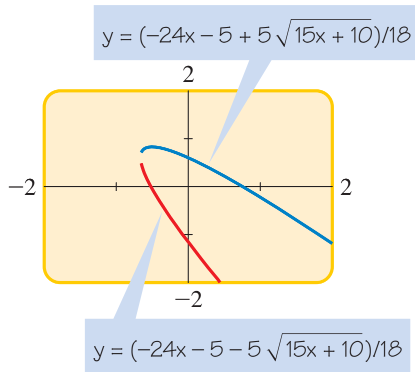
b) Se reconoce a ésta como la ecuación de la parábola que abre a lo largo del eje Y negativo y tiene vértice (0, 1) en las coordenadas XY. Puesto que $4p = -\frac{1}{4}$, se tiene $p = -\frac{1}{16}$, de modo que el foco es $\left(0, \frac{15}{16}\right)$ y la directriz es $Y = \frac{17}{16}$. Con

$$\phi = \cos^{-1}\tfrac{4}{5} \approx 37°$$

se bosqueja la gráfica de la figura 6a).



a)



b)

Figura 6

$64x^2 + 96xy + 36y^2 - 15x + 20y - 25 = 0$

c) Para dibujar una gráfica por medio de una calculadora, se necesita despejar y. La ecuación dada es cuadrática en y, por lo tanto se puede usar la fórmula cuadrática para despejar y. Al escribir la ecuación en la forma

$$36y^2 + (96x + 20)y + (64x^2 - 15x - 25) = 0$$

se obtiene

$$y = \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{(96x + 20)^2 - 4(36)(64x^2 - 15x - 25)}}{2(36)} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$= \frac{-(96x + 20) \pm \sqrt{6000x + 4000}}{72} \qquad \text{Desarrolle}$$

$$= \frac{-96x - 20 \pm 20\sqrt{15x + 10}}{72} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{-24x - 5 \pm 5\sqrt{15x + 10}}{18} \qquad \text{Simplifique}$$

Para obtener la gráfica de la parábola, se grafican las funciones

$$y = \left(-24x - 5 + 5\sqrt{15x + 10}\right)/18 \qquad \text{y} \qquad y = \left(-24x - 5 - 5\sqrt{15x + 10}\right)/18$$

como se muestra en la figura 6b). ■

Discriminante

En los ejemplos 3 y 4 se pudo identificar el tipo de cónica al rotar los ejes. El siguiente teorema da las reglas para identificar el tipo de cónica directamente de la ecuación, sin rotar los ejes.

Identificación de cónicas mediante el discriminante

La gráfica de la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es una cónica o cónica degenerada. En los casos no degenerados, la gráfica es

1. una parábola si $B^2 - 4AC = 0$

2. una elipse si $B^2 - 4AC < 0$

3. una hipérbola si $B^2 - 4AC > 0$

La cantidad $B^2 - 4AC$ se llama **discriminante** de la ecuación.

■ **Demostración** Si se hacen girar los ejes por un ángulo ϕ, se obtiene una ecuación de la forma

$$A'X^2 + B'XY + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

donde A', B', C', . . . están dadas por las fórmulas de las páginas 785-786. Un cálculo directo muestra que

$$(B')^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

Así, la expresión $B^2 - 4AC$ permanece sin cambio para cualquier rotación. En particular, si se elige una rotación que elimina el término xy ($B' = 0$), se obtiene

$$A'X^2 + C'Y^2 + D'X + E'Y + F' = 0$$

En este caso, $B^2 - 4AC = -4A'C'$. Por lo tanto $B^2 - 4AC = 0$ si A' o C' es cero; $B^2 - 4AC < 0$ si A' y C' tienen el mismo signo; y $B^2 - 4AC > 0$ si A' y C' tienen signos opuestos. De acuerdo con el cuadro de la página 780, estos casos corresponden a la gráfica de la última ecuación mostrada como una parábola, una elipse o una hipérbola, respectivamente. ■

En la demostración se indica que ninguna rotación cambia el discriminante; por esta razón, se dice que el discriminante es **invariante** bajo rotación.

Ejemplo 5 Identificar una cónica mediante el discriminante

Una cónica tiene la ecuación

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + x - y + 4 = 0$$

a) Use el discriminante para identificar la cónica.

b) Confirme su respuesta del inciso a) graficando la cónica con una calculadora.

Solución

a) Puesto que $A = 3$, $B = 5$ y $C = -2$, el discriminante es

$$B^2 - 4AC = 5^2 - 4(3)(-2) = 49 > 0$$

Por lo tanto la cónica es una hipérbola.

b) Con la fórmula cuadrática el valor de y es

$$y = \frac{5x - 1 \pm \sqrt{49x^2 - 2x + 33}}{4}$$

Se grafican estas funciones en la figura 7. La gráfica confirma que se trata de una hipérbola. ■

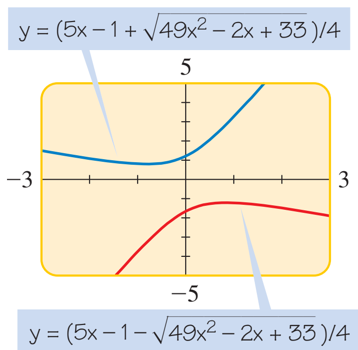


Figura 7

10.5 Ejercicios

1–6 ■ Determine las coordenadas XY del punto dado si los ejes coordenados se hacen girar por el ángulo indicado.

1. $(1, 1)$, $\phi = 45°$

2. $(-2, 1)$, $\phi = 30°$

3. $(3, -\sqrt{3})$, $\phi = 60°$

4. $(2, 0)$, $\phi = 15°$

5. $(0, 2)$, $\phi = 55°$

6. $(\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$, $\phi = 45°$

7–12 ■ Determine la ecuación de la cónica dada en coordenadas XY cuando los ejes coordenados se hacen girar por el ángulo indicado.

7. $x^2 - 3y^2 = 4$, $\phi = 60°$

8. $y = (x - 1)^2$, $\phi = 45°$

9. $x^2 - y^2 = 2y$, $\phi = \cos^{-1}\frac{3}{5}$

10. $x^2 + 2y^2 = 16$, $\phi = \operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{5}$

11. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 = 4$, $\phi = 30°$

12. $xy = x + y$, $\phi = \pi/4$

13–26 ■ **a)** Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola.
b) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy.
c) Bosqueje la gráfica.

13. $xy = 8$

14. $xy + 4 = 0$

15. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

16. $13x^2 + 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 16$

17. $x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 + 2 = 0$

18. $21x^2 + 10\sqrt{3}xy + 31y^2 = 144$

19. $11x^2 - 24xy + 4y^2 + 20 = 0$

20. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 156x - 65y = 0$

21. $\sqrt{3}x^2 + 3xy = 3$

22. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$

23. $2\sqrt{3}x^2 - 6xy + \sqrt{3}x + 3y = 0$

24. $9x^2 - 24xy + 16y^2 = 100(x - y - 1)$

25. $52x^2 + 72xy + 73y^2 = 40x - 30y + 75$

26. $(7x + 24y)^2 = 600x - 175y + 25$

27–30 ■ **a)** Use el discriminante para identificar la cónica.
b) Confirme su respuesta graficando la cónica con un dispositivo de graficación.

27. $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 5x - 5 = 0$

28. $x^2 - 2xy + 3y^2 = 8$

29. $6x^2 + 10xy + 3y^2 - 6y = 36$

30. $9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y = 0$

31. **a)** Use la rotación de ejes para mostrar que la siguiente ecuación representa una hipérbola:

$$7x^2 + 48xy - 7y^2 - 200x - 150y + 600 = 0$$

b) Encuentre las coordenadas XY y xy del centro, vértices y focos.

c) Halle las ecuaciones de las asíntotas en coordenadas XY y xy.

32. **a)** Use la rotación de ejes para mostrar que la siguiente ecuación representa una parábola:

$$2\sqrt{2}(x + y)^2 = 7x + 9y$$

b) Encuentre las coordenadas XY y xy del vértice y el foco.

c) Halle la ecuación de la directriz en coordenadas XY y xy.

33. Resuelva las ecuaciones:

$$x = X\cos\phi - Y\,\text{sen}\,\phi$$

$$y = X\,\text{sen}\,\phi + Y\cos\phi$$

para X y Y en términos de x y y. [*Sugerencia*: para empezar, multiplique la primera ecuación por $\cos\phi$ y la segunda por $\text{sen}\,\phi$, y luego sume las dos ecuaciones para poder despejar X.]

34. Muestre que la gráfica de la ecuación

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

es parte de una parábola al rotar los ejes por un ángulo de 45°. [*Sugerencia*: primero convierte la ecuación a una que no tenga radicales.]

Descubrimiento • Debate

35. Forma matricial de las fórmulas de rotación de ejes Sean Z, Z' y R las matrices

$$Z = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad Z' = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Muestre que las fórmulas de rotación de ejes se pueden escribir como

$$Z = RZ' \qquad \text{y} \qquad Z' = R^{-1}Z$$

36. Invariantes algebraicas Una cantidad es invariante bajo rotación si no cambia cuando se hacen girar los ejes. Se expresó en el texto que para la ecuación general de una cónica, la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación.

a) Use las fórmulas para A', B' y C' de la página 785 para probar que la cantidad $B^2 - 4AC$ es invariante bajo rotación; es decir, muestre que

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C'$$

b) Pruebe que $A + C$ es invariante bajo rotación.

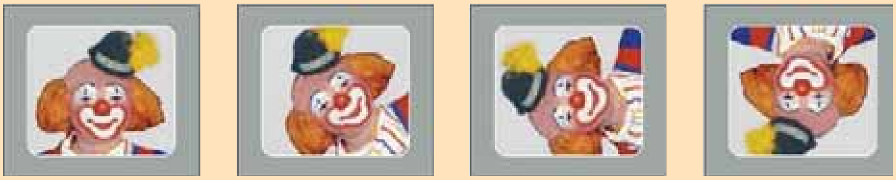
c) ¿La cantidad F es invariante bajo rotación?

37. Invariantes geométricas ¿Espera que la distancia entre dos puntos sea invariante bajo rotación? Pruebe su respuesta comparando la distancia $d(P, Q)$ y $d(P', Q')$ donde P' y Q' son las imágenes de P y Q bajo una rotación de ejes.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Gráficas de computadora II

En el *Proyecto de descubrimiento* de la página 700 se vio cómo se emplea la multiplicación de matrices en las gráficas de computadora. Se encontraron matrices que reflejan, desarrollan o cortan una imagen. Ahora considere matrices que rotan una imagen, como en las gráficas mostradas aquí.



Puntos rotatorios en el plano

Recuerde que un punto (x, y) en el plano se representa mediante la matriz de 2×1 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. La matriz que hace girar este punto respecto al origen por un ángulo ϕ es

$$R = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \qquad \textit{Matriz de rotación}$$

Compare esta matriz con la matriz de rotación de ejes del ejercicio 35, sección 10.5. Observe que rotar un punto en sentido contrario a las manecillas del reloj corresponde a rotar los ejes en el sentido del reloj.

Cuando se hace girar al punto $P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en el sentido de las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo ϕ, se mueve a un nuevo lugar $P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ dado por el producto matricial $P' = RP$, como se muestra en la figura 1.

$$P' = RP = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\,\phi \\ \text{sen}\,\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\,\text{sen}\,\phi \\ x\,\text{sen}\,\phi + y\cos\phi \end{bmatrix}$$

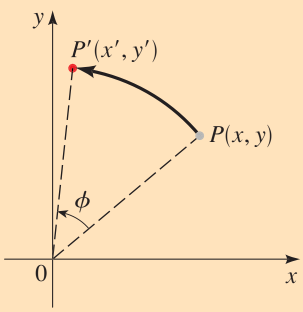


Figura 1

Por ejemplo, si $\phi = 90°$, la matriz de rotación es

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\text{sen}\,90° \\ \text{sen}\,90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \textit{Matriz de rotación } (\phi = 90°)$$

Al aplicar una rotación de 90° al punto $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se mueve al punto

$$P' = RP = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Véase la figura 2.

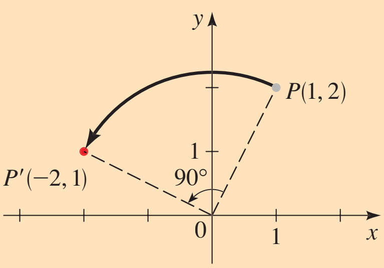


Figura 2

Rotación de imágenes en el plano

Si la matriz de rotación se aplica a todo punto de una imagen, entonces gira toda la imagen. Para rotar la casa de la figura 3a) por un ángulo de 30° respecto al ori-

gen, se multiplica su matriz de datos (descrita en la página 701) por la matriz de rotación que tiene $\phi = 30°$.

$$RD = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 3 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\approx \begin{bmatrix} 1.73 & 0 & -1.50 & -0.77 & 1.96 & 3.46 & 2.60 & 1.60 & 0.73 & 1.73 & 2.60 \\ 1 & 0 & 2.60 & 5.33 & 4.60 & 2 & 1.50 & 3.23 & 2.73 & 1 & 1.50 \end{bmatrix}$$

La nueva matriz de datos RD representa la casa girada en la figura 3b).

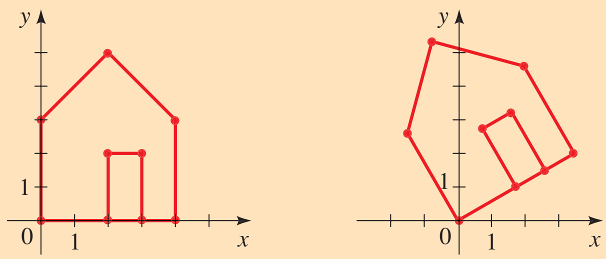
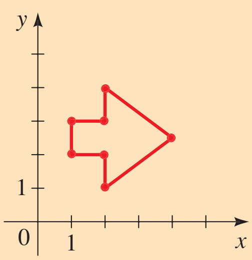


Figura 3 a) b)

En el *Proyecto de descubrimiento* de la página 702 se describe un programa de la graficadora TI-83 que traza la imagen correspondiente a una determinada matriz de datos. Podría hallar conveniente usar este programa en algunas de las actividades siguientes.

1. Use una matriz de rotación para hallar las nuevas coordenadas del punto dado cuando se hace girar por el ángulo dado.

a) $(1, 4)$, $\phi = 90°$ b) $(-2, 1)$, $\phi = 60°$
c) $(-2, -2)$, $\phi = 135°$ d) $(7, 3)$, $\phi = -60°$



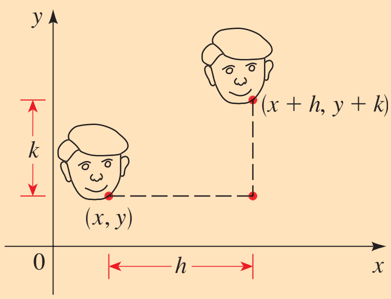
2. Encuentre una matriz de datos para el dibujo de líneas de la figura mostrada en el margen. Multiplique la matriz de datos por una matriz de rotación adecuada para girar la imagen respecto al origen por $\phi = 120°$. Bosqueje la imagen rotada dada mediante la nueva matriz de datos.

3. Bosqueje la imagen representada por la matriz de datos D.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz de rotación R que corresponde a una rotación de 45°, y la matriz de transformación T que corresponde a un desarrollo por un factor de 2 en la dirección x (véase la página 701). ¿Cómo al multiplicar la matriz de datos por RT cambia la imagen? ¿Qué pasa si se multiplica por TR? Calcule los productos RTD y TRD y bosqueje las imágenes correspondientes para confirmar sus respuestas.

4. Sea R la matriz de rotación para el ángulo ϕ. Muestre que R^{-1} es la matriz de rotación para el ángulo $-\phi$.



5. Para **trasladar** una imagen por (h, k), se suma h a cada coordenada x y k a cada coordenada y de cada punto en la imagen (véase la figura al margen). Esto se puede hacer sumando una matriz apropiada M a D, pero la dimensión de M cambiaría dependiendo de la dimensión de D. En la práctica, la traslación se lleva a cabo mediante multiplicación de matrices. Para ver cómo se hace esto, se introducen **coordenadas homogéneas**; es decir, se representa el punto (x, y) por una matriz de 3×1:

$$(x, y) \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Sea T la matriz

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que T traslada el punto (x, y) al punto $(x + h, y + h)$ comprobando la siguiente multiplicación matricial.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + h \\ y + k \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) Encuentre T^{-1} y describa cómo T^{-1} traslada puntos.

c) Compruebe que multiplicar las siguientes matrices tiene los efectos indicados en un punto (x, y) representado por sus coordenadas homogéneas $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexión en el eje x — Expansión (o contracción) en la dirección x — Corte en la dirección x — Rotación respecto al origen por el ángulo ϕ

d) Bosqueje la imagen representada (en coordenadas homogéneas) mediante esta matriz de datos:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 7 & 7 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 5 & 5 & 7 & 7 & 9 & 9 & 11 & 11 & 9 & 9 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz T que traslada la imagen por $(-6, -8)$ y una matriz R que gira la imagen en 45°. Bosqueje las imágenes representadas por las matrices de datos TD, RTD y $T^{-1}RTD$. Describa cómo se cambia una imagen cuando su matriz de datos se multiplica por T, por RT y por $T^{-1}RT$.

10.6 Ecuaciones polares de cónicas

Al comienzo de este capítulo se definió una parábola en términos de un foco y una directriz, pero se definió a la elipse y la hipérbola en términos de dos focos. En esta sección se da un tratamiento más unificado de los tres tipos de cónicas en términos de un foco y directriz. Si se coloca el foco en el origen, entonces una sección cónica tiene una ecuación polar simple. Además, en forma polar, la rotación de cónicas es un asunto más simple. Las ecuaciones polares de las elipses son cruciales en la derivación de las leyes de Kepler (véase la página 780).

Descripción equivalente de cónicas

Sea F un punto fijo (el **foco**), ℓ una línea fija (la **directriz**) y e un número positivo fijo (la **excentricidad**). El conjunto de los puntos P tales que la relación de la distancia de P a F a la distancia de P a ℓ es la constante e es una cónica. Es decir, el conjunto de los puntos P tales que

$$\frac{d(P, F)}{d(P, \ell)} = e$$

es una cónica. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $e < 1$ o una hipérbola si $e > 1$.

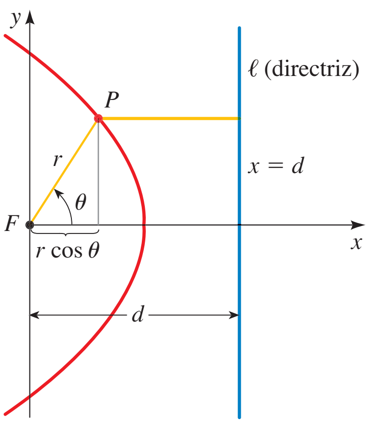


Figura 1

■ **Demostración** Si $e = 1$, entonces $d(P, F) = d(P, \ell)$, y por lo tanto, la condición dada es la definición de una parábola como se da en la sección 10.1.

Ahora, suponga que $e \neq 1$. Colóquese el foco F en el origen y la directriz paralela al eje y y d unidades a la derecha. En este caso la directriz tiene ecuación $x = d$ y es perpendicular al eje polar. Si el punto P tiene coordenadas polares (r, θ), se puede observar de la figura 1 que $d(P, F) = r$ y $d(P, \ell) = d - r \cos \theta$. Así, la condición $d(P, F)/d(P, \ell) = e$, o bien, $d(P, F) = e \cdot d(P, \ell)$, se convierte en

$$r = e(d - r \cos \theta)$$

Si ambos lados de esta ecuación polar se elevan al cuadrado y se convierten a coordenadas rectangulares, se obtiene

$$x^2 + y^2 = e^2(d - x)^2$$

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2 \qquad \text{Desarrolle y simplfique}$$

$$\left(x + \frac{e^2d}{1 - e^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad \text{Divida entre } 1 - e^2 \text{ y complete el cuadrado}$$

Si $e < 1$, entonces al dividir ambos lados de esta ecuación entre $e^2d^2/(1 - e^2)^2$ se obtiene una ecuación de la forma

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde

$$h = \frac{-e^2d}{1 - e^2} \qquad a^2 = \frac{e^2d^2}{(1 - e^2)^2} \qquad b^2 = \frac{e^2d^2}{1 - e^2}$$

Esta es la ecuación de una elipse con centro $(h, 0)$. En la sección 10.2 se encontró que los focos de una elipse están a una distancia c del centro, donde $c^2 = a^2 - b^2$. Para el presente caso

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^4 d^2}{(1 - e^2)^2}$$

Por lo tanto, $c = e^2 d/(1 - e^2) = -h$, lo que confirma que el foco definido en el teorema es el mismo que el foco definido en la sección 10.2. También se deduce que

$$e = \frac{c}{a}$$

Si $e > 1$, una demostración similar muestra que la cónica es una hipérbola con $e = c/a$, donde $c^2 = a^2 + b^2$. ■

En la demostración se vio que la ecuación polar de la cónica de la figura 1 es $r = e(d - r\cos\theta)$. El despeje de r da

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

Si se elige que la directriz esté a la *izquierda* del foco ($x = -d$), entonces se obtiene la ecuación $r = ed/(1 - e\cos\theta)$. Si la directriz es *paralela* al eje polar ($y = d$ o $y = -d$), entonces se obtiene sen θ en lugar de $\cos\theta$ en la ecuación. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente y en la figura 2.

Ecuaciones polares de cónicas

Una ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \qquad \text{o} \qquad r = \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

representa una cónica con un foco en el origen y con excentricidad e. La cónica es

1. una parábola si $e = 1$
2. una elipse si $0 < e < 1$
3. una hipérbola si $e > 1$

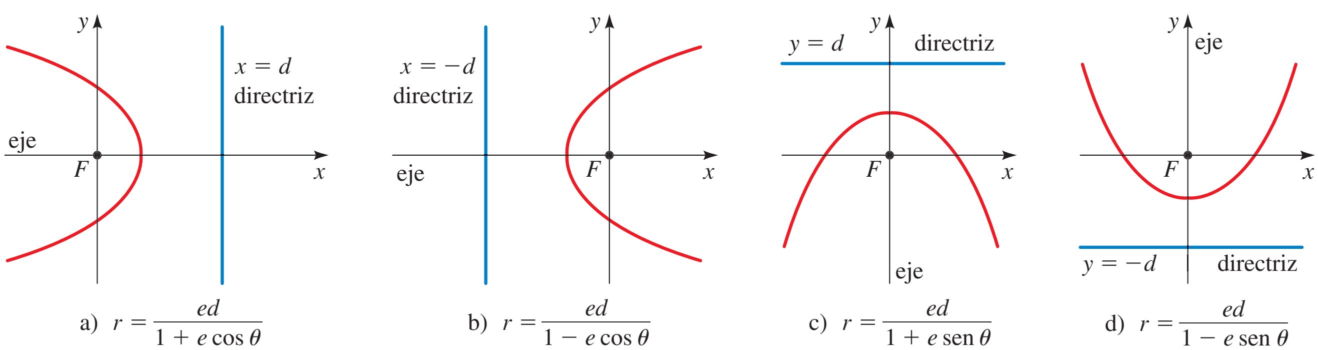


Figura 2
La forma de la ecuación polar de una cónica indica la ubicación de la directriz.

Para graficar la ecuación polar de una cónica, primero se determina la ubicación de la directriz a partir de la forma de la ecuación. Los cuatro casos que surgen se muestran en la figura 2. (La figura muestra sólo las partes de las gráficas que están cerca del foco en el origen. La forma del resto de la gráfica depende de si la ecuación representa una parábola, una elipse o una hipérbola.) El eje de una cónica es perpendicular a la directriz, en particular se tiene lo siguiente:

1. Para una parábola, el eje de simetría es perpendicular a la directriz.

2. Para una elipse, el eje mayor es perpendicular a la directriz.

3. Para una hipérbola, el eje transversal es perpendicular a la directriz.

Ejemplo 1 Hallar una ecuación polar para una cónica

Determine una ecuación polar para la parábola que tiene su foco en el origen y cuya directriz es la recta $y = -6$.

Solución Con $e = 1$, $d = 6$ y el inciso d) de la figura 2, se puede observar que la ecuación polar de la parábola es

$$r = \frac{6}{1 - \operatorname{sen}\theta}$$

■

Para graficar una cónica polar, es útil trazar los puntos para los que $\theta = 0, \pi/2, \pi$ y $3\pi/2$. Con estos puntos y conociendo el tipo de cónica (que se obtiene de la excentricidad), se puede obtener fácilmente una idea de la forma y ubicación de la gráfica.

Ejemplo 2 Identificar y bosquejar una cónica

Una cónica se determina por la ecuación polar

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

a) Muestre que la cónica es una elipse y bosqueje la gráfica.

b) Encuentre el centro de la elipse y las longitudes de los ejes mayor y menor.

Solución

a) Al dividir numerador y denominador entre 3, se tiene

$$r = \frac{\frac{10}{3}}{1 - \frac{2}{3}\cos\theta}$$

Puesto que $e = \frac{2}{3} < 1$, la ecuación representa una elipse. Para una gráfica aproximada se trazan los puntos para los cuales $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (véase la figura 3 en la siguiente página).

b) Al comparar la ecuación con las de la figura 2, se puede observar que el eje mayor es horizontal. Así, los puntos finales del eje mayor son $V_1(10, 0)$ y $V_2(2, \pi)$.

Por lo tanto, el centro de la elipse está en $C(4, 0)$, el punto medio de V_1V_2.

θ	r
0	10
$\pi/2$	$\frac{10}{3}$
π	2
$3\pi/2$	$\frac{10}{3}$

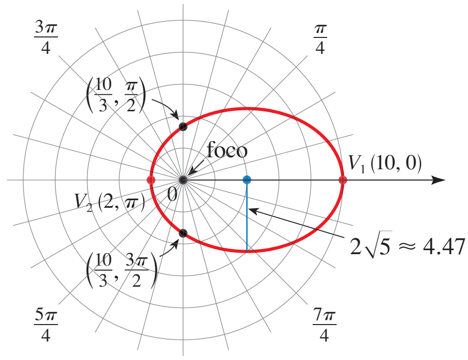


Figura 3

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos\theta}$$

La distancia entre los vértices V_1 y V_2 es 12; así, la longitud del eje mayor es $2a = 12$ y, por lo tanto, $a = 6$. Para determinar la longitud del eje mayor, se necesita hallar b. De la página 796 se tiene $c = ae = 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4$, por consiguiente

$$b^2 = a^2 - c^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

Así, $b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$, y la longitud del eje menor es $2b = 4\sqrt{5} \approx 8.94$. ■

Ejemplo 3 Identificar y bosquejar una cónica

Una cónica está dada por la ecuación polar

$$r = \frac{12}{2 + 4\,\text{sen}\,\theta}$$

a) Muestre que la cónica es una hipérbola y bosquéjela en la gráfica.

b) Encuentre el centro de la hipérbola y bosqueje las asíntotas.

Solución

a) Al dividir numerador y denominador entre 2, se tiene

$$r = \frac{6}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$$

Puesto que $e = 2 > 1$, la ecuación representa una hipérbola. Para una gráfica aproximada se trazan los puntos para los que $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ (véase la figura 4).

θ	r
0	6
$\pi/2$	2
π	6
$3\pi/2$	-6

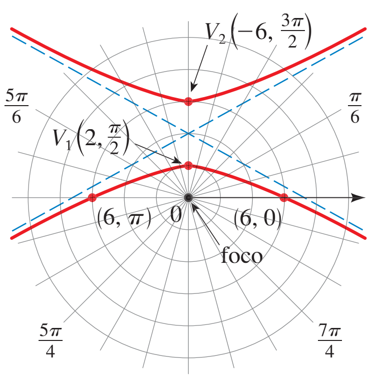


Figura 4

$$r = \frac{12}{2 + 4\,\text{sen}\,\theta}$$

b) Al comparar la ecuación con las de la figura 2, se puede observar que el eje transversal es vertical. Así, los puntos finales del eje transversal (los vértices de la hipérbola) son $V_1(2, \pi/2)$ y $V_2(-6, 3\pi/2) = V_2(6, \pi/2)$. Por lo tanto el centro de la hipérbola es $C(4, \pi/2)$, el punto medio de V_1V_2.

Para bosquejar las asíntotas, se necesita hallar a y b. La distancia entre V_1 y V_2 es 4; así, la longitud del eje transversal es $2a = 4$ y, por lo tanto, $a = 2$. Para hallar b, primero se encuentra c. De la página 796 se tiene $c = ae = 2 \cdot 2 = 4$, por consiguiente

$$b^2 = c^2 - a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

Así que, $b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$. Conocer a y b permite dibujar el cuadro central, del cual se obtienen las asíntotas mostradas en la figura 4. ■

Cuando se hacen girar las cónicas, es mucho más conveniente usar ecuaciones polares que ecuaciones cartesianas. Se usa el hecho de que la gráfica de $r = f(\theta - \alpha)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en sentido contrario a las manecillas del reloj respecto al origen por un ángulo α (véase el ejercicio 55 en la sección 8.2).

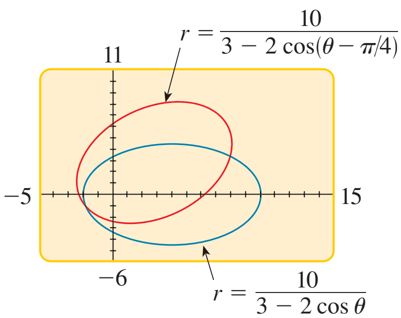


Figura 5

Ejemplo 4 Rotar una elipse

Suponga que la elipse del ejemplo 2 se hace girar por un ángulo $\pi/4$ respecto al origen. Encuentre una ecuación polar para la elipse resultante y dibuje su gráfica.

Solución Se obtiene la ecuación de la elipse rotada reemplazando θ con $\theta - \pi/4$ en la ecuación dada en el ejemplo 2. Así que la nueva ecuación es

$$r = \frac{10}{3 - 2\cos(\theta - \pi/4)}$$

Se usa esta ecuación para graficar la elipse rotada de la figura 5. Observe que la elipse ha sido rotada respecto al foco en el origen. ■

En la figura 6 se usa una computadora para bosquejar varias cónicas con el fin de demostrar el efecto de variar la excentricidad e. Observe que cuando e está cerca de 0, la elipse es casi circular y se vuelve más alargada cuando se incrementa e. Cuando $e = 1$, por supuesto, la cónica es una parábola. Cuando e se incrementa más allá de 1, la cónica es una hipérbola más inclinada.

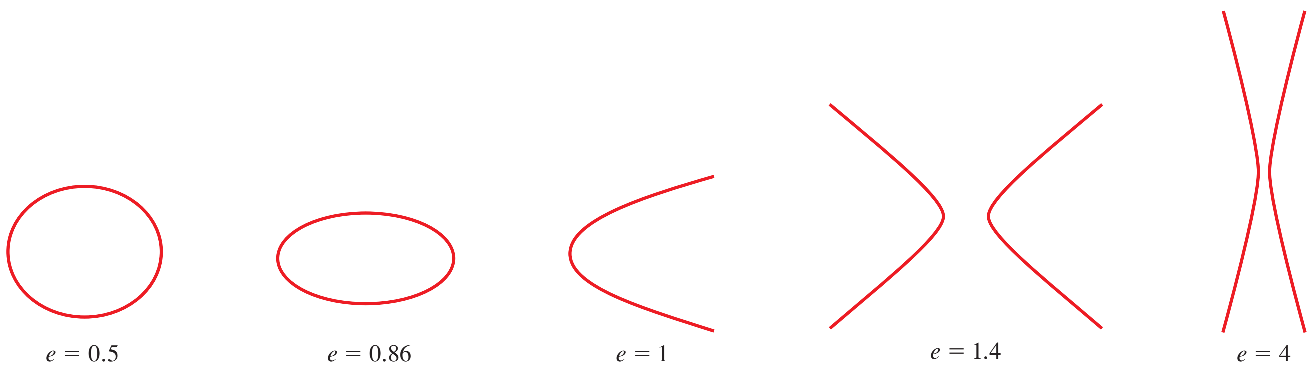


Figura 6

10.6 Ejercicios

1–8 ■ Escriba una ecuación polar de una cónica que tiene su foco en el origen y satisface las condiciones dadas.

1. Elipse, excentricidad $\frac{2}{3}$, directriz $x = 3$
2. Hipérbola, excentricidad $\frac{4}{3}$, directriz $x = -3$
3. Parábola, directriz $y = 2$
4. Elipse, excentricidad $\frac{1}{2}$, directriz $y = -4$
5. Hipérbola, excentricidad 4, directriz $r = 5\sec\theta$
6. Elipse, excentricidad 0.6, directriz $r = 2\csc\theta$
7. Parábola, vértice en $(5, \pi/2)$
8. Elipse, excentricidad 0.4, vértice en $(2, 0)$

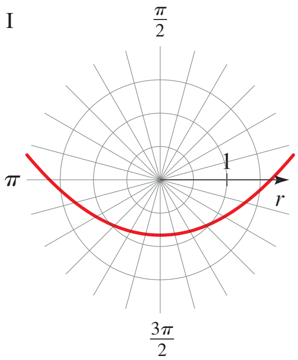
9–14 ■ Compare las ecuaciones polares con las gráficas marcadas I-VI. Dé razones para su respuesta.

9. $r = \dfrac{6}{1 + \cos\theta}$ **10.** $r = \dfrac{2}{2 - \cos\theta}$

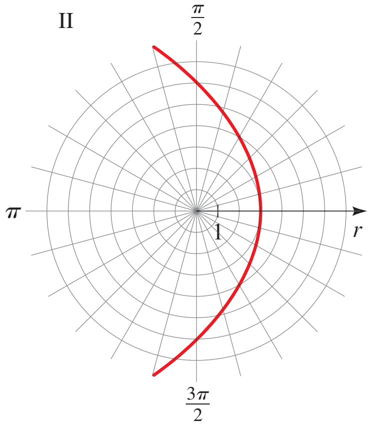
11. $r = \dfrac{3}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **12.** $r = \dfrac{5}{3 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

13. $r = \dfrac{12}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$ **14.** $r = \dfrac{12}{2 + 3\cos\theta}$

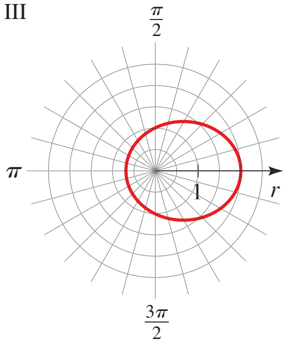
I



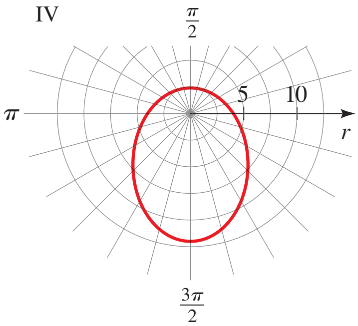
II



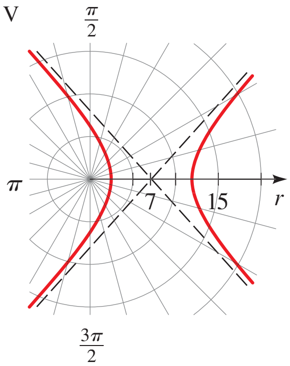
III



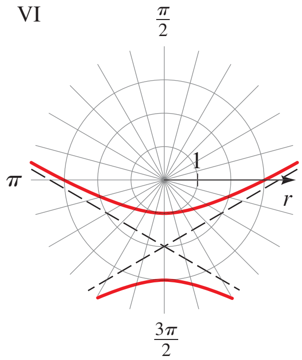
IV



V



VI



15–22 ■ **a)** Encuentre la excentricidad e identifique la cónica. **b)** Bosqueje la cónica y marque los vértices.

15. $r = \dfrac{4}{1 + 3\cos\theta}$ **16.** $r = \dfrac{8}{3 + 3\cos\theta}$

17. $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$ **18.** $r = \dfrac{10}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{6}{2 + \text{sen}\,\theta}$ **20.** $r = \dfrac{5}{2 - 3\,\text{sen}\,\theta}$

21. $r = \dfrac{7}{2 - 5\,\text{sen}\,\theta}$ **22.** $r = \dfrac{8}{3 + \cos\theta}$

23. **a)** Encuentre la excentricidad y la directriz de la cónica $r = 1/(4 - 3\cos\theta)$ y grafique la cónica y su directriz.

b) Si esta cónica se hace girar respecto al origen por un ángulo $\pi/3$, escriba la ecuación resultante y dibuje su gráfica.

24. Grafique la parábola $r = 5/(2 + 2\,\text{sen}\,\theta)$ y su directriz. También grafique la curva obtenida al girar esta parábola respecto a su foco por un ángulo $\pi/6$.

25. Grafique las cónicas $r = e/(1 - e\cos\theta)$ con $e = 0.4, 0.6, 0.8$ y 1.0 en una pantalla común. ¿De qué manera el valor de e afecta la forma de la curva?

26. **a)** Grafique las cónicas

$$r = \frac{ed}{(1 + e\,\text{sen}\,\theta)}$$

para $e = 1$ y varios valores de d. ¿Cómo afecta el valor de d la forma de la curva?

b) Grafique estas cónicas para $d = 1$ y varios valores de e. ¿Cómo afecta el valor de e a la forma de la gráfica?

Aplicaciones

27. Órbita de la Tierra La ecuación polar de una elipse se puede expresar en términos de su excentricidad e y la longitud a de su eje mayor.

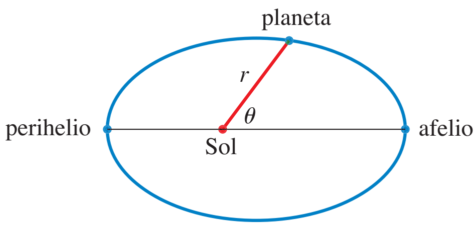
a) Muestre que la ecuación polar de una elipse con directriz $x = -d$ se puede escribir en la forma

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e\cos\theta}$$

[*Sugerencia*: use la relación $a^2 = e^2d^2/(1 - e^2)^2$ dada en la demostración de la página 795.]

b) Halle una ecuación polar aproximada para la órbita elíptica de la Tierra alrededor del Sol (en un foco) dado que la excentricidad es aproximadamente 0.017 y la longitud del eje mayor es casi 2.99×10^8 km.

28. Perihelio y afelio Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas con el Sol en un foco. Las posiciones de un planeta más próxima y más alejada del Sol se llaman **perihelio** y **afelio**, respectivamente.



a) Use el ejercicio 27a) para mostrar que la distancia del perihelio desde un planeta al Sol es $a(1 - e)$ y la distancia del afelio es $a(1 + e)$.

b) Use los datos del ejercicio 27b) para hallar las distancias de la Tierra al Sol en el perihelio y el afelio.

29. Órbita de Plutón La distancia del planeta Plutón al Sol es de 4.43×10^9 km en el perihelio y 7.37×10^9 km en el afelio. Use el ejercicio 28 para hallar la excentricidad de la órbita de Plutón.

Descubrimiento • Debate

30. Distancia a un foco Cuando se encuentran las ecuaciones polares para las cónicas, se coloca un foco en el polo. Es fácil hallar la distancia desde ese foco a cualquier punto en la cónica. Explique cómo mediante la ecuación polar se determina esta distancia.

31. Ecuaciones polares de órbitas Cuando un satélite orbita la Tierra, su trayectoria es una elipse con un foco en el centro de la Tierra. ¿Por qué los científicos usan coordenadas polares (en vez de rectangulares) para rastrear la posición de satélites? [*Sugerencia*: su respuesta al ejercicio 30 es importante aquí.]

10.7 Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Hasta el momento se ha descrito una curva dando una ecuación (en coordenadas rectangulares o polares) que deben satisfacer las coordenadas de todos los puntos sobre la curva. Pero no todas las curvas en el plano se pueden describir de esta manera. En esta sección se estudian ecuaciones paramétricas, que son un método general para describir una curva.

Curvas planas

Se puede considerar a una curva como la trayectoria de un punto que se mueve en el plano; las coordenadas x y y del punto son entonces funciones del tiempo. Esta idea conduce a la siguiente definición.

Curvas planas y ecuaciones paramétricas

Si f y g son funciones en un intervalo I, entonces el conjunto de puntos $(f(t), g(t))$ es una **curva plana**. Las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad y = g(t)$$

donde $t \in I$, son **ecuaciones paramétricas** para la curva, con **parámetro** t.

Bettmann/Corbis

María Gaetana Agnesi (1718-1799) es famosa por haber escrito *Instituzioni Analitiche*, considerado como el primer libro de cálculo.

María nació en una familia rica en Milán, Italia, y fue la mayor de 21 niños. Ella fue una niña prodigio, ya que tuvo un domino de muchos idiomas a temprana edad, incluso latín, griego y hebreo. A la edad de 20 años publicó una serie de ensayos sobre filosofía y ciencias naturales. Después de la muerte de su madre, se hizo cargo de educar a sus hermanos. En 1748 Agnesi publicó su famoso libro, que ella escribió originalmente como un texto para enseñar a sus hermanos. En el libro se compilaba y explicaba el conocimiento matemático de la época. Contiene muchos ejemplos elegidos de manera cuidadosa, uno de los cuales es la curva conocida en la actualidad como "bruja" de Agnesi (véase la página 809). Una revisión llamó a su libro una "exposición por ejemplos en vez de teoría". El libro dio a Agnesi reconocimiento inmediato. El papa Benedicto XIV le concedió un puesto en la Universidad de Bolonia, y le escribió "hemos acordado que se te debe otorgar la bien conocida cátedra de matemáticas, por la que no debes agradecernos, si no nosotros a ti". Este nombramiento era un honor considerablemente alto para una mujer, puesto que a muy pocas de ellas se les permitía asistir a la universidad en ese

(*continúa*)

Ejemplo 1 Ejemplo de una curva paramétrica

Bosqueje la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 - 3t \qquad y = t - 1$$

Solución Para todo valor de t, se obtiene un punto sobre la curva. Por ejemplo, si $t = 0$, entonces $x = 0$ y $y = -1$, de modo que el punto correspondiente es $(0, -1)$. En la figura 1 se grafican los puntos (x, y) determinados por los valores de t mostrados en la siguiente tabla.

t	x	y
−2	10	−3
−1	4	−2
0	0	−1
1	−2	0
2	−2	1
3	0	2
4	4	3
5	10	4

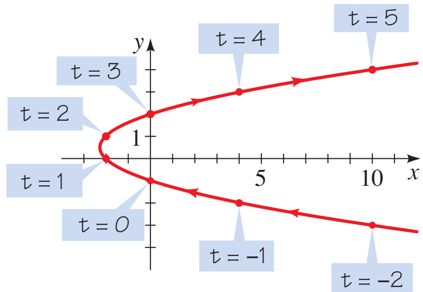


Figura 1

Cuando se incrementa t, una partícula cuya posición está dada por las ecuaciones paramétricas se mueve a lo largo de la curva en la dirección de las flechas. ■

Si se reemplaza t por $-t$ en el ejemplo 1, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2 + 3t \qquad y = -t - 1$$

La gráfica de estas ecuaciones paramétricas (véase la figura 2) es la misma que la de la curva de la figura 1, pero trazada en dirección opuesta. Por otro lado, si se reemplaza t por $2t$ en el ejemplo 1, se obtienen las ecuaciones paramétricas

$$x = 4t^2 - 6t \qquad y = 2t - 1$$

La gráfica de estas ecuaciones paramétricas (véase la figura 3) es de nuevo la misma, pero se traza el "doble de rápido". *Así, una parametrización contiene más información que sólo la forma de la curva; también indica* cómo *está siendo trazada la curva.*

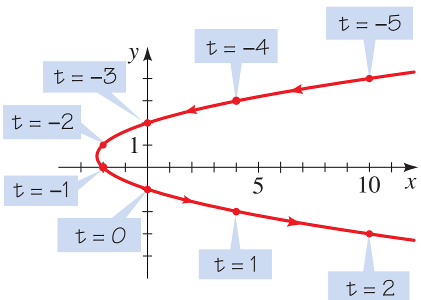


Figura 2
$x = t^2 + 3t$, $y = -t - 1$

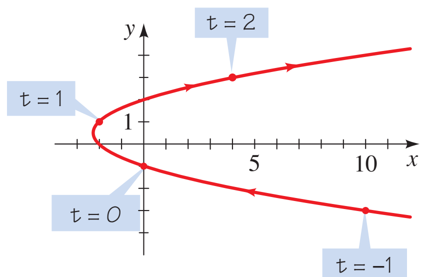


Figura 3
$x = 4t^2 - 6t$, $y = 2t - 1$

entonces. Sólo dos años después murió el padre de Agnesi y ella dejó las matemáticas por completo. Decidió volverse monja y dedicó el resto de su vida y riqueza al cuidado de los enfermos y mujeres moribundas. Murió en la pobreza en una casa humilde de la cual había sido directora alguna vez.

Eliminación del parámetro

Con frecuencia una curva dada por ecuaciones paramétricas se puede representar también mediante una sola ecuación rectangular en x y y. El proceso de hallar esta ecuación se llama *eliminación del parámetro*. Una manera de hacer esto es despejar t en una ecuación, luego sustituir en la otra.

Ejemplo 2 Eliminar el parámetro

Elimine el parámetro en las ecuaciones paramétricas del ejemplo 1.

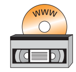
Solución Primero se despeja t en la ecuación más simple, luego se sustituye en la otra ecuación. De la ecuación $y = t - 1$, se obtiene $t = y + 1$. Al sustituir en la ecuación para x, se obtiene

$$x = t^2 - 3t = (y + 1)^2 - 3(y + 1) = y^2 - y - 2$$

Así, la curva del ejemplo 1 tiene ecuación rectangular $x = y^2 - y - 2$, por lo tanto es una parábola. ■

Eliminar el parámetro ayuda con frecuencia a identificar la forma de la curva, como se puede observar en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 3 Eliminar el parámetro



Describa y grafique la curva representada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \cos t \qquad y = \operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Solución Para identificar la curva, se elimina el parámetro. Puesto que $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$ y puesto que $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ para todo punto (x, y) sobre la curva, se tiene

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\operatorname{sen} t)^2 = 1$$

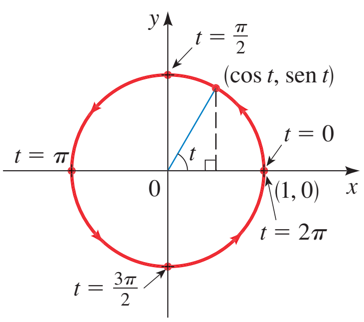


Figura 4

Esto significa que los puntos sobre la curva satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = 1$, de modo que la gráfica es un círculo de radio 1 centrado en el origen. Cuando t se incrementa de 0 a 2π, el punto dado por las ecuaciones paramétricas comienza en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj una vez alrededor del círculo, como se muestra en la figura 4. Observe que el parámetro t se puede interpretar como el ángulo mostrado en la figura. ■

Ejemplo 4 Bosquejar una curva paramétrica

Elimine el parámetro y bosqueje la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = 2 - \cos^2 t$$

Solución Para eliminar el parámetro, se emplea primero la identidad trigonométrica $\cos^2 t = 1 - \operatorname{sen}^2 t$ para cambiar la segunda ecuación:

$$y = 2 - \cos^2 t = 2 - (1 - \operatorname{sen}^2 t) = 1 + \operatorname{sen}^2 t$$

Ahora se puede sustituir $\operatorname{sen} t = x$ de la primera ecuación para obtener

$$y = 1 + x^2$$

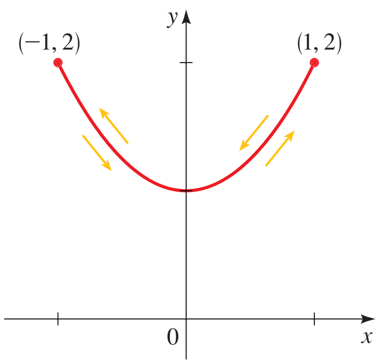


Figura 5

y, por lo tanto, el punto (x, y) se mueve a lo largo de la parábola $y = 1 + x^2$. Sin embargo, puesto que $-1 \leq \text{sen } t \leq 1$, se tiene $-1 \leq x \leq 1$, de modo que las ecuaciones representan sólo la parte de la parábola entre $x = -1$ y $x = 1$. Puesto que sen t es periódica, el punto $(x, y) = (\text{sen } t, 2 - \cos^2 t)$ se mueve en vaivén de manera infinita con frecuencia a lo largo de la parábola entre los puntos $(-1, 2)$ y $(1, 2)$ como se muestra en la figura 5. ■

Hallar las ecuaciones paramétricas para una curva

A menudo es posible hallar las ecuaciones paramétricas para una curva por medio de algunas propiedades geométricas que definen la curva, como en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 5 Hallar las ecuaciones paramétricas para una gráfica

Encuentre las ecuaciones paramétricas para la línea de pendiente 3 que pasa por el punto (2, 6).

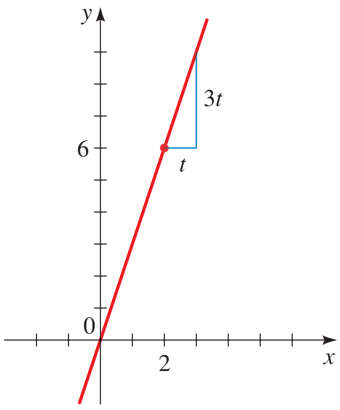


Figura 6

Solución Se inicia en el punto (2, 6) y se va hacia arriba y a la derecha a lo largo de esta línea. Debido a que la línea tiene pendiente 3, por cada unidad que se mueve a la derecha, se deben mover tres unidades hacia arriba. En otras palabras, si se incrementa la coordenada x en t unidades, se debe incrementar de manera correspondiente la coordenada y en $3t$ unidades. Esto conduce a las ecuaciones paramétricas

$$x = 2 + t \qquad y = 6 + 3t$$

Para confirmar que estas ecuaciones dan la línea deseada, se elimina el parámetro. Se despeja t en la primera ecuación y se sustituye en la segunda para obtener

$$y = 6 + 3(x - 2) = 3x$$

Así, la forma pendiente-ordenada al origen de la ecuación de esta recta es $y = 3x$, que es la recta de pendiente 3 que pasa por (2, 6) como se requiere. La gráfica se muestra en la figura 6. ■

Ejemplo 6 Ecuaciones paramétricas para la cicloide

Cuando un círculo rueda a lo largo de una recta, la curva que traza un punto fijo P sobre la circunferencia del círculo se llama **cicloide** (véase la figura 7). Si el círculo tiene radio a y rueda a lo largo del eje x, con una posición del punto P en el origen, encuentre las ecuaciones paramétricas para la cicloide.

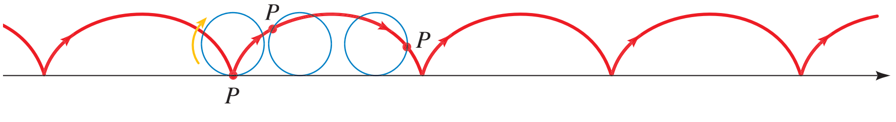


Figura 7

Solución La figura 8 muestra el círculo y el punto P después que el círculo ha rodado por un ángulo θ (en radianes). La distancia $d(O, T)$ que ha rodado el círculo debe ser la misma que la longitud del arco PT, el cual, por la fórmula de la longitud del arco, es $a\theta$ (véase la sección 6.1). Esto significa que el centro del círculo es $C(a\theta, a)$.

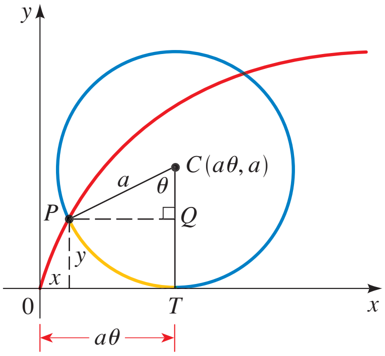


Figura 8

Sean (x, y) las coordenadas de P. Entonces de la figura 8 (que ilustra el caso $0 < \theta < \pi/2$), se ve que

$$x = d(O, T) - d(P, Q) = a\theta - a \operatorname{sen} \theta = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

$$y = d(T, C) - d(Q, C) = a - a \cos \theta = a(1 - \cos \theta)$$

por lo tanto las ecuaciones para la cicloide son

$$x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta) \qquad y = a(1 - \cos \theta)$$

■

La cicloide tiene varias propiedades físicas interesantes. Es la "curva del descenso más rápido" en el siguiente sentido. Elíjanse dos puntos P y Q que no están directamente arriba entre sí, y únalos con un alambre. Suponga que se permite que una cuenta se deslice por el alambre bajo la influencia de la gravedad (sin considerar la fricción). De todas las formas posibles en las que se puede doblar el alambre, la cuenta se deslizará de P a Q lo más rápido posible cuando la forma sea la mitad de un arco de una cicloide invertida (véase la figura 9). La cicloide es también la "curva de igual descenso" en el sentido de que sin importar dónde se coloque una cuenta B sobre un alambre en forma de cicloide, le toma el mismo tiempo deslizarse hasta el fondo (véase la figura 10). Estas propiedades bastante sorprendentes de la cicloide fueron probadas (por medio de cálculo) en el siglo XVII por varios matemáticos y físicos, inclusive Johann Bernoulli, Blaise Pascal y Christiaan Huygens.

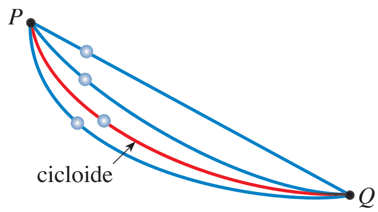


Figura 9

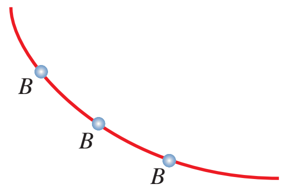


Figura 10

Uso de dispositivos de graficación para trazar curvas paramétricas

La mayor parte de las calculadoras y programas de graficación de computadoras se pueden usar para trazar ecuaciones paramétricas. Esta clase de dispositivos son particularmente útiles cuando se trazan curvas complicadas como la mostrada en la figura 11.

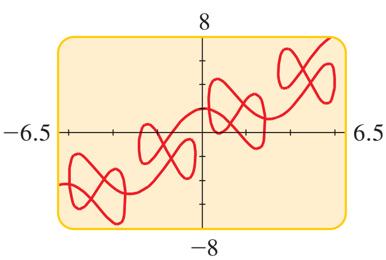


Figura 11

$x = t + 2 \operatorname{sen} 2t$, $y = t + 2 \cos 5t$

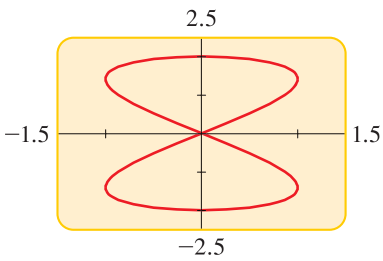
Ejemplo 7 Graficación de curvas paramétricas

Utilice un dispositivo de graficación para dibujar las siguientes curvas paramétricas. Explique las similitudes y diferencias.

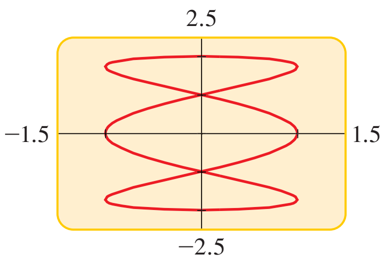
a) $x = \operatorname{sen} 2t$
$y = 2 \cos t$

b) $x = \operatorname{sen} 3t$
$y = 2 \cos t$

Solución En ambos incisos a) y b), la gráfica quedará dentro de un rectángulo dado por $-1 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$, puesto que tanto el seno como el coseno de cualquier número estarán entre -1 y 1. Así, se podría usar el rectángulo de visión $[-1.5, 1.5]$ por $[-2.5, 2.5]$.



a) $x = \text{sen}\, 2t,\ y = 2\cos t$



b) $x = \text{sen}\, 3t,\ y = 2\cos t$

Figura 12

a) Puesto que $2 \cos t$ es periódica con periodo 2π (véase la sección 5.3) y puesto que sen $2t$ tiene periodo π, si se permite que t varíe en el intervalo $0 \le t \le 2\pi$ se obtiene la gráfica completa, que se muestra en la figura 12a).

b) De nuevo, si t toma valores entre 0 y 2π se obtiene la gráfica completa mostrada en la figura 12b).

Ambas gráficas son *curvas cerradas*, lo que significa que forman bucles con el mismo inicio y punto final; también, ambas gráficas se cruzan a sí mismas. Sin embargo, la gráfica de la figura 12a) tiene dos bucles, como un ocho, mientras que la gráfica de la figura 12b) tiene tres bucles. ■

Las curvas graficadas en el ejemplo 7 se llaman figuras de Lissajous. Una **figura de Lissajous** es la gráfica de un par de ecuaciones paramétricas de la forma

$$x = A\,\text{sen}\,\omega_1 t \qquad y = B\cos\omega_2 t$$

donde A, B, ω_1 y ω_2 son constantes reales. Puesto que sen $\omega_1 t$ y $\cos \omega_2 t$ están entre -1 y 1, una figura de Lissajous estará dentro del rectángulo determinado por $-A \le x \le A$, $-B \le y \le B$. Este hecho se puede usar para elegir un rectángulo de visión al graficar una figura de Lissajous, como en el ejemplo 7.

Recuerde de la sección 8.1 que las coordenadas rectangulares (x, y) y las coordenadas polares (r, θ) están relacionadas por las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$. En consecuencia, se puede graficar la ecuación polar $r = f(\theta)$ cambiándola a la forma paramétrica como sigue:

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \qquad \text{Puesto que } r = f(\theta)$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$$

Al reemplazar θ con la variable estándar paramétrica t, se tiene el siguiente resultado.

Ecuaciones polares en forma paramétrica

La gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ es la misma que la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t)\cos t \qquad y = f(t)\,\text{sen}\,t$$

Ejemplo 8 Forma paramétrica de una ecuación polar

Considere la ecuación polar $r = \theta$, $1 \le \theta \le 10\pi$.

a) Exprese la ecuación en forma paramétrica.

b) Dibuje una gráfica de las ecuaciones paramétricas del inciso a).

Solución

a) La ecuación polar dada es equivalente a las ecuaciones paramétricas

$$x = t\cos t \qquad y = t\,\text{sen}\,t$$

b) Puesto que $10\pi \approx 31.42$, se usa el rectángulo de visión $[-32, 32]$ por $[-32, 32]$ y se permite que t varíe de 1 a 10π. La gráfica resultante mostrada en la figura 13 es una *espiral*. ■

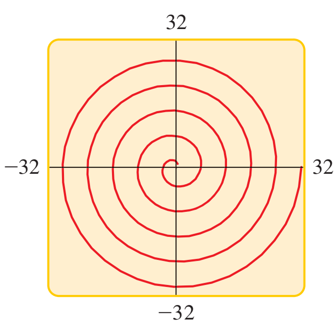


Figura 13

$x = t\cos t,\ y = t\,\text{sen}\,t$

10.7 Ejercicios

1–22 ■ Se da un par de ecuaciones paramétricas.

a) Bosqueje la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

b) Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares para la curva eliminando el parámetro.

1. $x = 2t, \quad y = t + 6$

2. $x = 6t - 4, \quad y = 3t, \quad t \geq 0$

3. $x = t^2, \quad y = t - 2, \quad 2 \leq t \leq 4$

4. $x = 2t + 1, \quad y = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2$

5. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

6. $x = t^2, \quad y = t^4 + 1$

7. $x = \dfrac{1}{t}, \quad y = t + 1$

8. $x = t + 1, \quad y = \dfrac{t}{t + 1}$

9. $x = 4t^2, \quad y = 8t^3$

10. $x = |t|, \quad y = |1 - |t||$

11. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

12. $x = 2 \cos t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

13. $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^4 t$ **14.** $x = \operatorname{sen}^2 t, \quad y = \cos t$

15. $x = \cos t, \quad y = \cos 2t$

16. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

17 $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad 0 \leq t < \pi/2$

18 $x = \cot t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi$

19 $x = \tan t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi/2$

20. $x = \sec t, \quad y = \tan^2 t, \quad 0 \leq t < \pi/2$

21. $x = \cos^2 t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$

22. $x = \cos^3 t, \quad y = \operatorname{sen}^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

23–26 ■ Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta con las propiedades dadas.

23. Pendiente $\frac{1}{2}$, pasa por $(4, -1)$

24. Pendiente -2, pasa por $(-10, -20)$

25. Pasa por $(6, 7)$ y $(7, 8)$

26. Pasa por $(12, 7)$ y el origen

27. Encuentre ecuaciones paramétricas para el círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

28. Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

29. Muestre eliminando el parámetro θ que las siguientes ecuaciones paramétricas representan una hipérbola:

$$x = a \tan \theta \qquad y = b \sec \theta$$

30. Muestre que las siguientes ecuaciones paramétricas representan una parte de la hipérbola del ejercicio 29.

$$x = a\sqrt{t} \qquad y = b\sqrt{t + 1}$$

31–34 ■ Bosqueje la curva dada por las ecuaciones paramétricas.

31. $x = t \cos t, \quad y = t \operatorname{sen} t, \quad t \geq 0$

32. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} 2t$

33. $x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \quad y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}$

34. $x = \cot t, \quad y = 2 \operatorname{sen}^2 t, \quad 0 < t < \pi$

35. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 pies/s a un ángulo α arriba de la horizontal, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - 16t^2$$

(donde x y y se miden en pies). Muestre que la trayectoria del proyectil es una parábola eliminando el parámetro t.

36. Con referencia al ejercicio 35, suponga que una pistola dispara una bala al aire con una velocidad inicial de 2048 pies/s a un ángulo de 30° respecto a la horizontal.

a) ¿Después de cuántos segundos la bala tocará el suelo?

b) ¿A qué distancia de la pistola la bala chocará contra el suelo?

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bala?

37–42 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

37. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = 2 \cos 3t$

38. $x = 2 \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 4t$

39. $x = 3 \operatorname{sen} 5t, \quad y = 5 \cos 3t$

40. $x = \operatorname{sen} 4t, \quad y = \cos 3t$

41. $x = \operatorname{sen}(\cos t), \quad y = \cos(t^{3/2}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

42. $x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t$

43–46 ■ Se da una ecuación polar.

a) Exprese la ecuación polar en forma paramétrica.

b) Use un dispositivo de graficación para trazar las ecuaciones paramétricas que halló en el inciso a).

43. $r = 2^{\theta/12}, \quad 0 \leq \theta \leq 4\pi$ **44.** $r = \operatorname{sen} \theta + 2 \cos \theta$

45. $r = \dfrac{4}{2 - \cos \theta}$ **46.** $r = 2^{\operatorname{sen} \theta}$

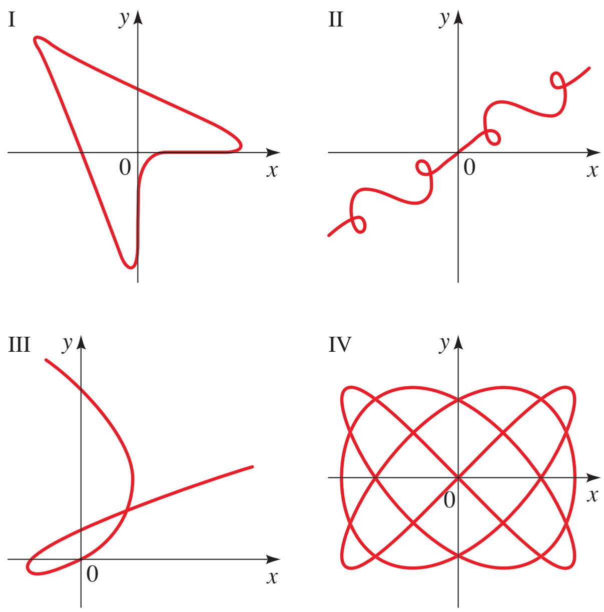
47–50 ■ Compare las ecuaciones paramétricas con las gráficas marcadas I-IV. Dé razones para sus respuestas.

47. $x = t^3 - 2t, \quad y = t^2 - t$

48. $x = \text{sen } 3t, \quad y = \text{sen } 4t$

49. $x = t + \text{sen } 2t, \quad y = t + \text{sen } 3t$

50. $x = \text{sen}(t + \text{sen } t), \quad y = \cos(t + \cos t)$



51. **a)** En el ejemplo 6 suponga que el punto P que traza la curva no está sobre el borde del círculo, sino en un punto fijo dentro del borde, a una distancia b del centro (con $b < a$). La curva trazada por P se llama **epicicloide** (o **trocoide acortada**). Muestre que las ecuaciones paramétricas para la epicicloide son

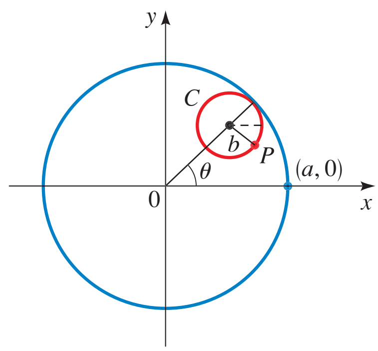
$$x = a\theta - b \text{ sen } \theta \qquad y = a - b \cos \theta$$

b) Bosqueje la gráfica con $a = 3$ y $b = 2$.

52. **a)** En el ejercicio 51 si el punto P se localiza *fuera* del círculo a una distancia b del centro (con $b > a$), entonces la curva trazada por P se llama **cicloide alargada**. Muestre que las ecuaciones paramétricas para la cicloide alargada son las mismas que las ecuaciones para la epicicloide.

b) Bosqueje la gráfica para el caso donde $a = 1$ y $b = 2$.

53. Un círculo C de radio b rueda en el interior de un círculo más grande de radio a centrado en el origen. Sea P un punto fijo en el círculo más pequeño, con posición inicial en el punto $(a, 0)$ como se muestra en la figura. La curva trazada por P se llama **hipocicloide**.



a) Muestre que las ecuaciones paramétricas para la hipocicloide son

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos\left(\frac{a - b}{b}\theta\right)$$

$$y = (a - b) \text{ sen } \theta - b \text{ sen}\left(\frac{a - b}{b}\theta\right)$$

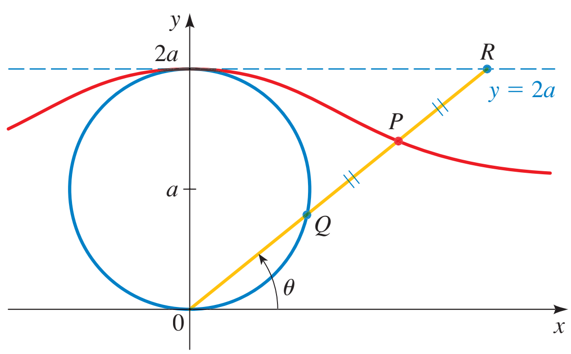
b) Si $a = 4b$, la hipocicloide se llama **astroide**. Muestre que en este caso las ecuaciones paramétricas se pueden reducir a

$$x = a \cos^3\theta \qquad y = a \text{ sen}^3\theta$$

Bosqueje la curva. Elimine el parámetro para obtener una ecuación para el astroide en coordenadas rectangulares.

54. Si el círculo C del ejercicio 53 rueda en el *exterior* del círculo más grande, la curva trazada por P se llama **epicicloide**. Encuentre ecuaciones paramétricas para el epicicloide.

55. En la figura, el círculo de radio a es estacionario y, por cada θ, el punto P es el punto medio del segmento QR. La curva trazada por P para $0 < \theta < \pi$ se llama **curva de arco**. Encuentre ecuaciones paramétricas para esta curva.

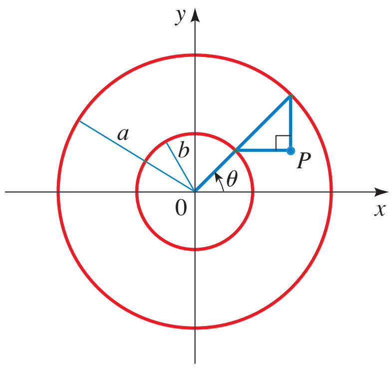


56. Dos círculos de radio a y b están centrados en el origen, como se muestra en la figura. Cuando el ángulo θ crece, el punto P traza una curva que se ubica entre los círculos.

a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva, usando a θ como parámetro.

b) Grafique la curva por medio de un dispositivo de graficación, con $a = 3$ y $b = 2$.

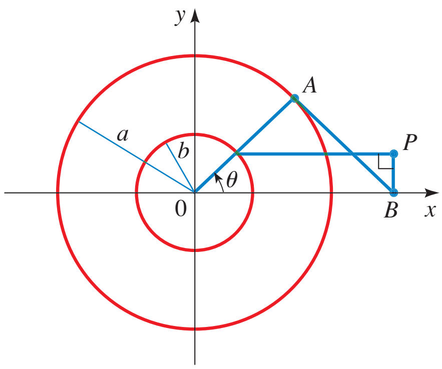
c) Elimine el parámetro e identifique la curva.



57. Dos círculos de radio a y b están centrados en el origen, como se muestra en la figura.

a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la curva trazada por el punto P, usando el ángulo θ como parámetro. (Nota: hay que observar que el segmento de recta AB siempre es tangente al círculo más grande.)

b) Grafique la curva por medio de un dispositivo de graficación, con $a = 3$ y $b = 2$.

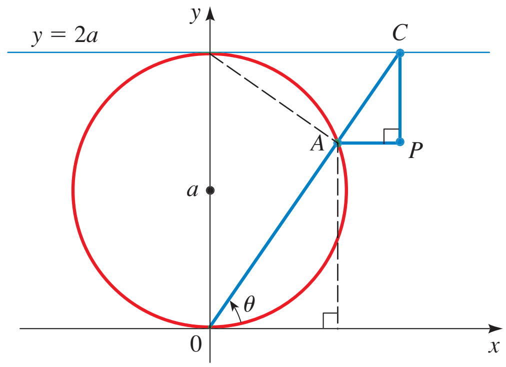


58. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste en los puntos P determinados como se muestra en la figura.

a) Muestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva se pueden escribir como

$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2\theta$$

b) Grafique la curva por medio de un dispositivo de graficación, con $a = 3$.



59. Elimine el parámetro θ en las ecuaciones paramétricas para la cicloide (ejemplo 6) para obtener una ecuación en coordenadas rectangulares para la sección de la curva dada por $0 \le \theta \le \pi$.

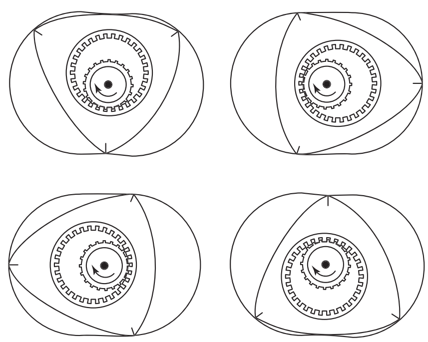
Aplicaciones

60. La máquina rotatoria El Mazda RX-8 utiliza un motor poco común (inventado por Felix Wankel en 1954) en el que los pistones se reemplazan por un rotor triangular que gira en una carcasa especial como se muestra en la figura. Los vértices del rotor mantienen contacto con la carcasa todo el tiempo, mientras que el centro del triángulo traza un círculo de radio r, que hace girar al árbol motor. La forma de la carcasa está dada por las ecuaciones paramétricas siguientes (donde R es la distancia entre los vértices y el centro del rotor).

$$x = r \cos 3\theta + R \cos \theta \qquad y = r \operatorname{sen} 3\theta + R \operatorname{sen} \theta$$

a) Suponga que el árbol rotor tiene radio $r = 1$. Grafique la curva dada por las ecuaciones paramétricas para los siguientes valores de R: 0.5, 1, 3, 5.

b) ¿Cuál de los cuatro valores de R dados en el inciso a) al parecer modela mejor a la carcasa del motor ilustrada en la figura?



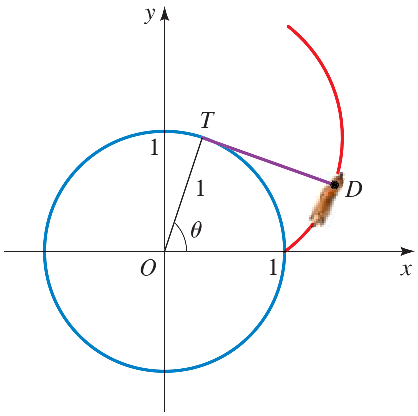
61. Trayectoria en espiral de un perro Un perro está amarrado a un tronco de árbol circular de radio 1 pie mediante una correa larga. El perro logra enredar toda la correa alrededor del árbol mientras jugaba en el patio, y se encuentra en el punto (1, 0) en la figura. Al ver una ardilla corre alrededor del árbol en sentido contrario a las manecillas del reloj, manteniendo tensa la cuerda mientras persigue al intruso.

a) Muestre que las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del perro (conocida como **envolvente de un círculo**) son

$$x = \cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta \qquad y = \operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta$$

[*Sugerencia:* observe que la correa siempre es tangente al árbol, por lo tanto *OT* es perpendicular a *TD*.]

b) Grafique la trayectoria del perro para $0 \leq \theta \leq 4\pi$.



Descubrimiento • Debate

62. Más información de ecuaciones paramétricas En esta sección se expresa que las ecuaciones paramétricas contienen más información que sólo la forma de una curva. Escriba un párrafo corto que explique este enunciado. Use el siguiente ejemplo y sus respuestas a los incisos a) y b) en su explicación.

La posición de una partícula está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t \qquad y = \cos t$$

donde t representa el tiempo. Se sabe que la forma de la trayectoria de una partícula es un círculo.

a) ¿Cuánto tarda la partícula en ir una vez alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve el doble de rápido alrededor del círculo.

b) ¿La partícula viaja en el sentido de las manecillas del reloj o en sentido contrario alrededor del círculo? Encuentre ecuaciones paramétricas si la partícula se mueve en la dirección opuesta alrededor del círculo.

63. Formas diferentes de trazar una curva Las curvas C, D, E y F se definen de forma paramétrica como sigue, donde el parámetro t toma todos los valores reales a menos que se indique lo contrario:

$$C: \quad x = t, \quad y = t^2$$

$$D: \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$$

$$E: \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen}^2 t$$

$$F: \quad x = 3^t, \quad y = 3^{2t}$$

a) Muestre que los puntos en las cuatro curvas satisfacen la misma ecuación en coordenadas rectangulares.

b) Dibuje la gráfica de cada curva y explique cómo difieren entre sí las curvas.

10 Repaso

Revisión de conceptos

1. a) Dé la definición geométrica de una parábola. ¿Cuáles son el foco y la directriz de la parábola?

b) Bosqueje la parábola $x^2 = 4py$ para el caso $p > 0$. Identifique en su diagrama el vértice, foco y directriz. ¿Qué sucede si $p < 0$?

c) Bosqueje la parábola $y^2 = 4px$, junto con su vértice, foco y directriz, para el caso $p > 0$. ¿Qué sucede si $p < 0$?

2. a) Dé la definición geométrica de una elipse. ¿Cuáles son los focos de la elipse?

b) Para la elipse con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde $a > b > 0$, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? ¿Cuáles son los ejes mayor y menor? Ilustre con una gráfica.

c) Dé una expresión para excentricidad de la elipse en el inciso b).

d) Exprese la ecuación de una elipse con focos en el eje y.

3. **a)** Dé la definición geométrica de una hipérbola. ¿Cuáles son los focos de la hipérbola?
   b) Para la hipérbola con ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

   ¿cuáles son las coordenadas de los vértices y los focos? ¿Cuáles son las ecuaciones de las asíntotas? ¿Cuál es el eje transversal de las asíntotas? ¿Cuál es el eje transversal? Ilustre con una gráfica.
   c) Exprese la ecuación de una hipérbola con focos en el eje y.
   d) ¿Qué pasos emprendería para bosquejar una hipérbola con una ecuación dada?

4. Suponga que h y k son números positivos. ¿Cuál es el efecto en la gráfica de una ecuación en x y y si
   a) x se reemplaza por $x - h$? ¿Por $x + h$?
   b) y se reemplaza por $y - k$? ¿Por $y + k$?

5. ¿Cómo puede decir si la siguiente cónica no degenerada es una parábola, una elipse o una hipérbola?

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

6. Suponga que los ejes x y y se hacen girar por un ángulo agudo ϕ para producir los ejes X y Y. Escriba las ecuaciones que relacionan las coordenadas (x, y) y (X, Y) de un punto en el plano xy y el plano XY, respectivamente.

7. **a)** ¿Cómo eliminaría el término xy en esta ecuación?

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

   b) ¿Cuál es el discriminante de la cónica del inciso a)? ¿Cómo puede usar el discriminante para determinar si la cónica es una parábola, una elipse o una hipérbola?

8. **a)** Escriba ecuaciones polares que representen una cónica con excentricidad e.
   b) ¿Para qué valores de e la cónica es una elipse? ¿Una hipérbola? ¿Una parábola?

9. Una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$.
   a) ¿Cómo bosqueja la curva?
   b) ¿Cómo elimina el parámetro?

Ejercicios

1–8 ■ Encuentre el vértice, foco y directriz de la parábola y bosqueje la gráfica.

1. $y^2 = 4x$
2. $x = \frac{1}{12}y^2$
3. $x^2 + 8y = 0$
4. $2x - y^2 = 0$
5. $x - y^2 + 4y - 2 = 0$
6. $2x^2 + 6x + 5y + 10 = 0$
7. $\frac{1}{2}x^2 + 2x = 2y + 4$
8. $x^2 = 3(x + y)$

9–16 ■ Encuentre el centro, vértices, focos y las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, y bosqueje la gráfica.

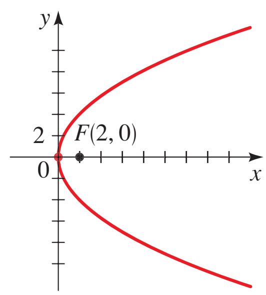
9. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$
10. $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
11. $x^2 + 4y^2 = 16$
12. $9x^2 + 4y^2 = 1$
13. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
14. $\dfrac{(x-2)^2}{25} + \dfrac{(y+3)^2}{16} = 1$
15. $4x^2 + 9y^2 = 36y$
16. $2x^2 + y^2 = 2 + 4(x - y)$

17–24 ■ Encuentre el centro, vértices, focos y las asíntotas de la hipérbola y trace la gráfica.

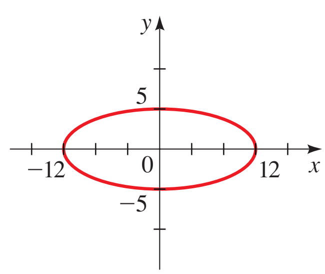
17. $-\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$
18. $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{32} = 1$
19. $x^2 - 2y^2 = 16$
20. $x^2 - 4y^2 + 16 = 0$
21. $\dfrac{(x+4)^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$
22. $\dfrac{(x-2)^2}{8} - \dfrac{(y+2)^2}{8} = 1$
23. $9y^2 + 18y = x^2 + 6x + 18$
24. $y^2 = x^2 + 6y$

25–30 ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

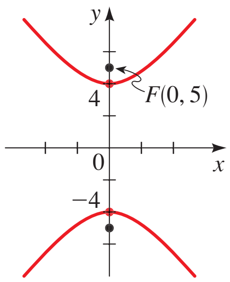
25.



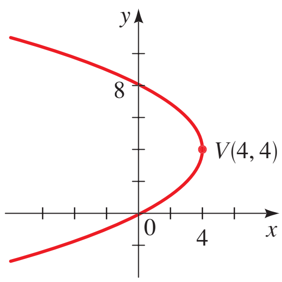
26.



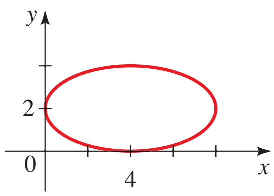
27.



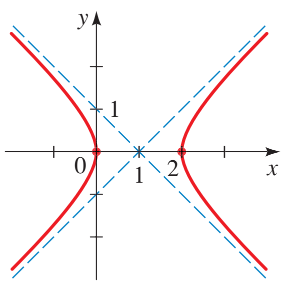
28.



29.



30.



31–42 ■ Determine el tipo de curva representada por la ecuación. Encuentre los focos y vértices (si existen) y bosqueje la gráfica.

31. $\dfrac{x^2}{12} + y = 1$

32. $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{144} = \dfrac{y}{12}$

33. $x^2 - y^2 + 144 = 0$

34. $x^2 + 6x = 9y^2$

35. $4x^2 + y^2 = 8(x + y)$

36. $3x^2 - 6(x + y) = 10$

37. $x = y^2 - 16y$

38. $2x^2 + 4 = 4x + y^2$

39. $2x^2 - 12x + y^2 + 6y + 26 = 0$

40. $36x^2 - 4y^2 - 36x - 8y = 31$

41. $9x^2 + 8y^2 - 15x + 8y + 27 = 0$

42. $x^2 + 4y^2 = 4x + 8$

43–50 ■ Encuentre una ecuación para la sección cónica con las propiedades dadas.

43. La parábola con foco $F(0, 1)$ y directriz $y = -1$

44. La elipse con centro $C(0, 4)$, focos $F_1(0, 0)$ y $F_2(0, 8)$ y eje mayor de longitud 10

45. La hipérbola con vértices $V(0, \pm 2)$ y asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}x$

46. La hipérbola con centro $C(2, 4)$, focos $F_1(2, 1)$ y $F_2(2, 7)$ y vértices $V_1(2, 6)$ y $V_2(2, 2)$

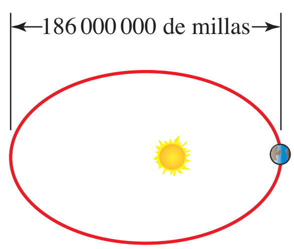
47. La elipse con focos $F_1(1, 1)$ y $F_2(1, 3)$ y con un vértice en el eje x

48. La parábola con vértice $V(5, 5)$ y el eje y como directriz

49. La elipse con vértices $V_1(7, 12)$ y $V_2(7, -8)$ y que pasa por el punto $P(1, 8)$

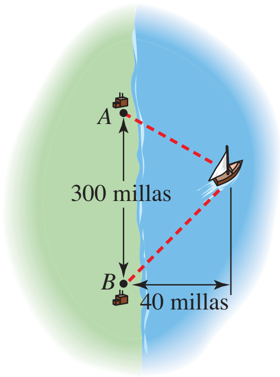
50. La parábola con vértice $V(-1, 0)$ y eje horizontal de simetría, y que cruza el eje y en $y = 2$.

51. La trayectoria de la Tierra alrededor del Sol es una elipse con el Sol en un foco. La elipse tiene eje mayor 186 000 000 de millas y excentricidad 0.017. Encuentre la distancia entre la Tierra y el Sol cuando la Tierra está **a)** más cerca del Sol y **b)** más lejos del Sol.



52. Una nave se localiza a 40 millas de una orilla recta. Las estaciones LORAN A y B se localizan en la orilla, separadas 300 millas. A partir de las señales LORAN, el capitán determina que su nave está 80 millas más cerca a A que a B. Encuentre la ubicación de la nave. (Coloque a A y B sobre el

eje y con el eje x en medio. Encuentre las coordenadas x y y de la nave.)



53. a) Dibuje las gráficas de la siguiente familia de elipses para $k = 1, 2, 4$ y 8.

$$\frac{x^2}{16 + k^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$$

b) Pruebe que las elipses del inciso a) tienen los mismos focos.

54. a) Dibuje gráficas de la siguiente familia de parábolas para $k = \frac{1}{2}, 1, 2$ y 4.

$$y = kx^2$$

b) Encuentre los focos de las parábolas del inciso a).

c) ¿Cómo cambia la ubicación del foco cuando aumenta k?

55–58 ■ Se da la ecuación de una cónica.

a) Use el discriminante para determinar si la gráfica de la ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola.

b) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy.

c) Bosqueje la gráfica.

55. $x^2 + 4xy + y^2 = 1$

56. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8x + 8y - 8 = 0$

57. $7x^2 - 6\sqrt{3}xy + 13y^2 - 4\sqrt{3}x - 4y = 0$

58. $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

59–62 ■ Por medio de un dispositivo de graficación trace la cónica. Identifique el tipo de cónica a partir de la gráfica.

59. $5x^2 + 3y^2 = 60$

60. $9x^2 - 12y^2 + 36 = 0$

61. $6x + y^2 - 12y = 30$

62. $52x^2 - 72xy + 73y^2 = 100$

63–66 ■ Se da la ecuación polar de una cónica.

a) Encuentre la excentricidad e identifique la cónica.

b) Bosqueje la cónica y marque los vértices.

63. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

64. $r = \dfrac{2}{3 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

65. $r = \dfrac{4}{1 + 2\,\text{sen}\,\theta}$

66. $r = \dfrac{12}{1 - 4\cos\theta}$

67–70 ■ Se da un par de ecuaciones paramétricas.

a) Bosqueje la curva representada por las ecuaciones paramétricas.

b) Encuentre una ecuación en coordenadas rectangulares para la curva al eliminar el parámetro.

67. $x = 1 - t^2, \quad y = 1 + t$

68. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1$

69. $x = 1 + \cos t, \quad y = 1 - \text{sen}\,t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

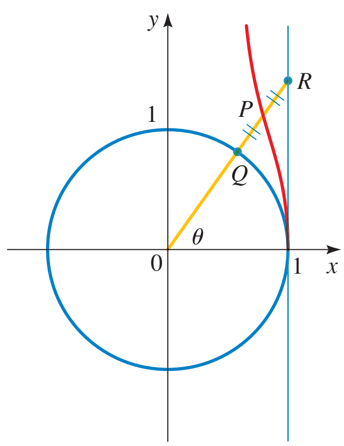
70. $x = \dfrac{1}{t} + 2, \quad y = \dfrac{2}{t^2}, \quad 0 < t \le 2$

71–72 ■ Use un dispositivo de graficación para trazar la curva paramétrica.

71. $x = \cos 2t, \quad y = \text{sen}\,3t$

72. $x = \text{sen}(t + \cos 2t), \quad y = \cos(t + \text{sen}\,3t)$

73. En la figura el punto P es el punto medio del segmento QR y $0 \le \theta < \pi/2$. Con θ como parámetro, encuentre una representación paramétrica para la curva trazada por P.



10 Evaluación

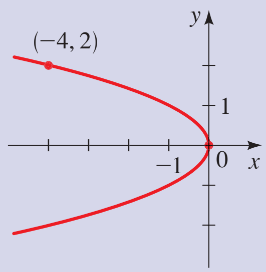
1. Encuentre el foco y la directriz de la parábola $x^2 = -12y$, y bosqueje su gráfica.

2. Halle los vértices, focos y las longitudes de los ejes mayor y menor para la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Luego bosqueje su gráfica.

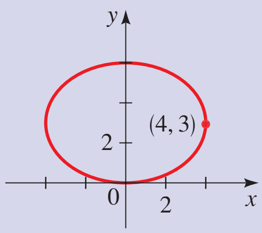
3. Encuentre los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$. A continuación bosqueje su gráfica.

4–6 ■ Encuentre una ecuación para la cónica cuya gráfica se muestra.

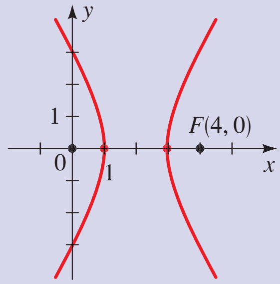
4.



5.



6.



7–9 ■ Bosqueje la gráfica de la ecuación.

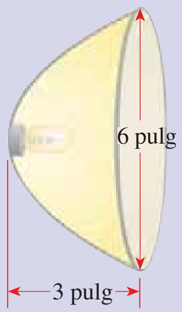
7. $16x^2 + 36y^2 - 96x + 36y + 9 = 0$

8. $9x^2 - 8y^2 + 36x + 64y = 164$

9. $2x + y^2 + 8y + 8 = 0$

10. Encuentre una ecuación para la hipérbola con focos $(0, \pm 5)$ y con asíntotas $y = \pm\frac{3}{4}x$.

11. Encuentre una ecuación para la parábola con foco $(2, 4)$ y el eje x como directriz.



12. Un reflector parabólico para un faro de un automóvil forma un tazón de 6 pulg de ancho en su abertura y 3 pulg de profundidad, como se muestra en la figura a la izquierda. ¿A qué distancia del vértice se debe colocar el filamento de la bombilla si se tiene que ubicar en el foco?

13. a) Use el discriminante para determinar si la gráfica de esta ecuación es una parábola, una elipse o una hipérbola:

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 = 18$$

b) Use la rotación de ejes para eliminar el término xy en la ecuación.

c) Bosqueje la gráfica de la ecuación.

d) Encuentre las coordenadas de los vértices de esta cónica (en el sistema de coordenadas xy).

14. a) Encuentre la ecuación polar de la cónica que tiene foco en el origen, excentricidad $e = \frac{1}{2}$, y directriz $x = 2$. Bosqueje la gráfica.

b) ¿Qué tipo de cónica representa la siguiente ecuación? Bosqueje su gráfica.

$$r = \frac{3}{2 - \operatorname{sen}\theta}$$

15. a) Bosqueje la gráfica de la curva paramétrica

$$x = 3\operatorname{sen}\theta + 3 \qquad y = 2\cos\theta \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

b) Elimine el parámetro θ en el inciso a) para obtener una ecuación para esta curva en coordenadas rectangulares.

Enfoque en el modelado

Trayectoria de un proyectil

Modelar el movimiento es una de las ideas más importantes en física clásica y moderna. Gran parte del trabajo de Isaac Newton tiene que ver con crear un modelo matemático para el movimiento e interacción de los objetos; esta fue la razón principal para que inventara el cálculo. Albert Einstein desarrolló su teoría especial de la relatividad a principios de 1900 para refinar las leyes del movimiento de Newton.

En esta sección se emplea geometría analítica para modelar el movimiento de un proyectil, como una bala lanzada hacia arriba en el aire, una bala disparada desde una pistola o cualquier otra clase de misil. Galileo creó un modelo similar, pero se tiene la ventaja de usar la notación matemática moderna para hacer mucho más fácil la descripción del modelo de lo que fue para Galileo.

Ecuaciones paramétricas para la trayectoria de un proyectil

Suponga que se dispara un proyectil al aire desde el nivel del suelo, con una velocidad inicial v_0 y a un ángulo θ hacia arriba desde el suelo. La *velocidad* inicial del proyectil es un vector (véase la sección 8.4) con componente horizontal $v_0 \cos \theta$ y componente vertical $v_0 \operatorname{sen} \theta$, como se muestra en la figura 1.

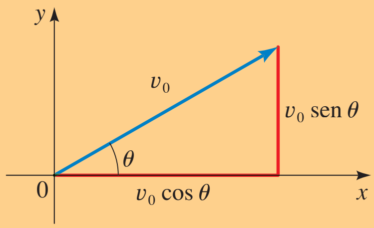


Figura 1

Si no hubiera gravedad (ni resistencia del aire), el proyectil se mantendría en movimiento indefinidamente a la misma velocidad y en la misma dirección. Puesto que distancia = velocidad × tiempo, la posición del proyectil en el tiempo t estaría dada por las siguientes ecuaciones paramétricas (suponiendo que el origen del sistema de coordenadas se coloca en la ubicación inicial del proyectil):

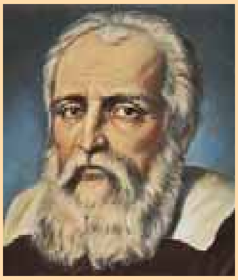
$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t \qquad \text{Sin gravedad}$$

Pero, por supuesto, se sabe que la gravedad jalará de nuevo al proyectil al nivel del suelo. Por medio del cálculo, se puede demostrar que el efecto de la gravedad se puede considerar al restar $\frac{1}{2}gt^2$ de la posición vertical del proyectil. En esta expresión, g es la aceleración de la gravedad: $g \approx 32 \text{ pies/s}^2 \approx 9.8 \text{ m/s}^2$. Así, se tienen las siguientes ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil:

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Con gravedad}$$

Ejemplo Trayectoria de una bala de cañón

Encuentre las ecuaciones paramétricas que modelan la trayectoria de una bala de cañón disparada al aire con una velocidad inicial de 150.0 m/s a un ángulo de elevación de 30°. Bosqueje la trayectoria de la bala de cañón.


The Granger Collection

Galileo Galilei (1564-1642) nació en Pisa, Italia. Estudió medicina, pero después abandonó esto a favor de la ciencia y las matemáticas. A la edad de 25 años demostró que los objetos ligeros caen a la misma velocidad que los más pesados, lanzando balas de cañón de varios tamaños desde la torre inclinada de Pisa. Esto contradijo el entonces aceptado punto de vista de Aristóteles de que los objetos más pesados caen más rápido. También demostró que la distancia a la que cae un objeto es proporcional al cuadrado del tiempo que ha estado cayendo, y de esto pudo demostrar que la trayectoria de un proyectil es una parábola.

Galileo construyó el primer telescopio y, con él, descubrió las lunas de Júpiter. Su defensa del punto de vista de Copérnico de que la Tierra gira alrededor del Sol (en vez de estar estacionaria) lo condujo ante la Inquisición. En ese entonces un hombre viejo, fue obligado a retractarse de sus puntos de vista, pero se dice que murmuró en voz baja "sin embargo la Tierra se mueve". Galileo revolucionó la ciencia al expresar principios científicos en el lenguaje de las matemáticas. Dijo, "El gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos".

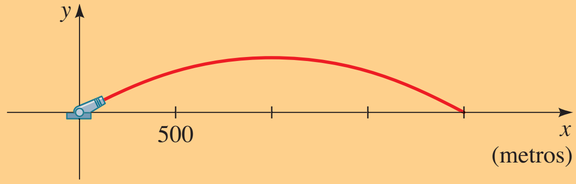
Solución Al sustituir la velocidad inicial dada y el ángulo en las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un proyectil, se obtiene

$$x = (150.0 \cos 30°)t \qquad y = (150.0 \operatorname{sen} 30°)t - \tfrac{1}{2}(9.8)t^2 \qquad \text{Sustituya } v_0 = 150.0,\ \theta = 30°$$

$$x = 129.9t \qquad y = 75.0t - 4.9t^2 \qquad \text{Simplifique}$$

Esta trayectoria se grafica en la figura 2.

Figura 2
Trayectoria de una bala de cañón



■

Alcance de un proyectil

¿Cómo se puede decir dónde y cuándo la bala de cañón del ejemplo anterior choca contra el suelo? Puesto que el nivel del suelo corresponde a $y = 0$, se sustituye este valor para y y se despeja para t.

$$0 = 75.0t - 4.9t^2 \qquad \text{Establezca } y = 0$$

$$0 = t(75.0 - 4.9t) \qquad \text{Factorice}$$

$$t = 0 \quad \text{o} \quad t = \frac{75.0}{4.9} \approx 15.3 \qquad \text{Despeje } t$$

La primera solución, $t = 0$, es el tiempo cuando se disparó la bala de cañón; la segunda solución significa que la bala de cañón golpea el suelo después de 15.3 s de vuelo. Para ver *dónde* sucede esto, se sustituye este valor en la ecuación para x, la ubicación horizontal de la bala de cañón.

$$x = 129.9(15.3) \approx 1987.5 \text{ m}$$

La bala de cañón viaja casi 2 km antes de golpear el suelo.

La figura 3 muestra las trayectorias de varios proyectiles, todos disparados con la misma velocidad inicial pero a diferentes ángulos. De las gráficas se puede observar que si el ángulo de disparo es demasiado alto o demasiado bajo, el proyectil no viaja muy lejos.

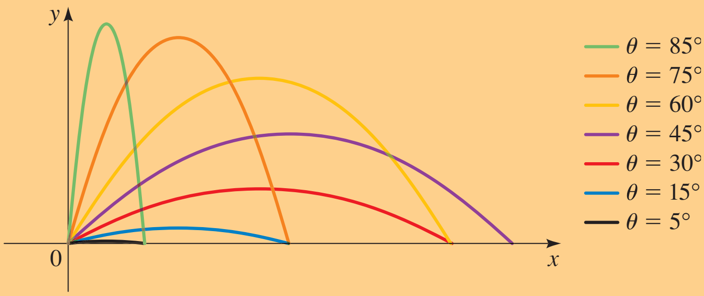


Figura 3
Trayectorias de proyectiles

Se intentará hallar el ángulo óptimo de disparo, el ángulo que dispara al proyectil lo más lejos posible. Utilizaremos los mismos pasos del ejemplo anterior, pero en

cambio se usarán las ecuaciones paramétricas. Primero se determina el tiempo cuando el proyectil choca contra el suelo al sustituir $y = 0$.

$$0 = (v_0 \operatorname{sen} \theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad \text{Sustituya } y = 0$$

$$0 = t(v_0 \operatorname{sen} \theta - \tfrac{1}{2}gt) \qquad \text{Factorice}$$

$$0 = v_0 \operatorname{sen} \theta - \tfrac{1}{2}gt \qquad \text{Iguale a cero el segundo factor}$$

$$t = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g} \qquad \text{Despeje } t$$

Ahora se sustituye esto en la ecuación para x a fin de ver qué tan lejos ha viajado horizontalmente el proyectil cuando choca contra el suelo.

$$x = (v_0 \cos \theta)t \qquad \text{Ecuación paramétrica para } x$$

$$= (v_0 \cos \theta)\left(\frac{2v_0 \operatorname{sen} \theta}{g}\right) \qquad \text{Sustituya } t = (2v_0 \operatorname{sen} \theta)/g$$

$$= \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta}{g} \qquad \text{Simplifique}$$

$$= \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\theta}{g} \qquad \text{Use la identidad sen } 2\theta = 2 \text{ sen } \theta \cos \theta$$

Se desea elegir θ de modo que x sea tan grande como sea posible. El valor más grande que puede tener el seno de cualquier ángulo es 1, el seno de 90°. Así, se desea que $2\theta = 90°$ o $\theta = 45°$. Por lo tanto, para enviar el proyectil lo más lejos posible, se debe disparar a un ángulo de 45°. De la última ecuación en la presentación precedente, se puede ver que el proyectil viajará una distancia $x = v_0^2/g$.

Problemas

1. **Las trayectorias son parábolas** De las gráficas de la figura 3 las trayectorias de los proyectiles al parecer son parábolas que abren hacia abajo. Elimine el parámetro t de las ecuaciones paramétricas generales para comprobar que éstas de hecho son parábolas.

2. **Trayectoria de una pelota de béisbol** Suponga que una pelota de béisbol es lanzada a 30 pies/s a un ángulo de 60° respecto de la horizontal, desde una altura de 4 pies sobre el suelo.

   a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para la trayectoria de la pelota y bosqueje su gráfica.

   b) ¿Qué tan lejos viaja la pelota y cuándo toca el suelo?

3. **Trayectoria de un cohete** Suponga que un cohete es lanzado a un ángulo de 5° desde la vertical, con una velocidad inicial de 1000 pies/s.

   a) Determine el tiempo que el cohete está en el aire.

   b) Calcule la máxima altura que alcanza.

   c) Halle la distancia horizontal que ha recorrido cuando choca contra el suelo.

   d) Grafique la trayectoria del cohete.

4. **Disparo de un misil** La velocidad inicial de un misil es de 330 m/s.

   a) ¿A qué ángulo se debe disparar el misil para que toque tierra a 10 km? (Se debe encontrar que hay dos ángulos posibles.) Grafique las trayectorias del misil para ambos ángulos.

   b) ¿Para qué ángulo el objetivo es alcanzado más rápidamente?

5. **Altura máxima** Muestre que la altura máxima que alcanza un proyectil en función de su velocidad inicial v_0 y su ángulo de disparo θ es

$$y = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$

6. **Disparo al viento** Suponga que se dispara un proyectil hacia un viento contrario que lo empuja hacia atrás de modo que se reduce su velocidad horizontal por una cantidad constante w. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil.

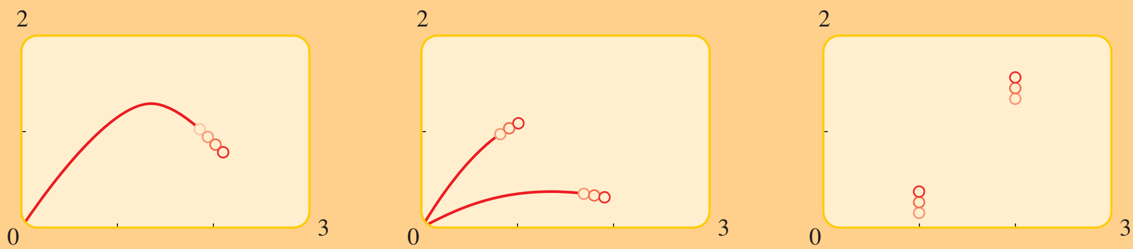
7. **Disparo al viento** Con las ecuaciones paramétricas que derivó en el problema 6, dibuje gráficas de la trayectoria de un proyectil con velocidad inicial $v_0 = 32$ pies/s, disparado hacia un viento contrario de $w = 24$ pies/s, para los ángulos $\theta = 5°, 15°, 30°, 40°, 45°, 55°, 60°$ y $75°$. ¿Aún es cierto que el máximo alcance se logra al disparar a 45°? Dibuje algunas gráficas adicionales para ángulos distintos y use estas gráficas para estimar el ángulo óptimo de disparo.

8. **Simular la trayectoria de un proyectil** La trayectoria de un proyectil se puede simular en una calculadora para gráficas. En la graficadora TI-83 use el estilo de gráfica "Path" para graficar las ecuaciones paramétricas generales para la trayectoria de un proyectil y observe cuando se mueve el cursor circular, que simula el movimiento del proyectil. Elija el tamaño del `Tstep` y determine la velocidad del "proyectil".

   a) Simule la trayectoria de un proyectil. Experimente con varios ángulos de θ. Use $v_0 = 10$ pies/s y `Tstep` $= 0.02$. En el inciso a) de la figura siguiente se muestra una trayectoria.

   b) Simule la trayectoria de dos proyectiles disparados al mismo tiempo, uno a $\theta = 30°$ y el otro a $\theta = 60°$. Esto se puede hacer en la calculadora gráfica TI-83 con el modo `Simul` (modo "simultáneo"). Use $v_0 = 10$ pies/s y `Tstep` $= 0.02$. Véase el inciso b) de la figura. ¿Dónde aterrizan los proyectiles? ¿Cuál aterriza primero?

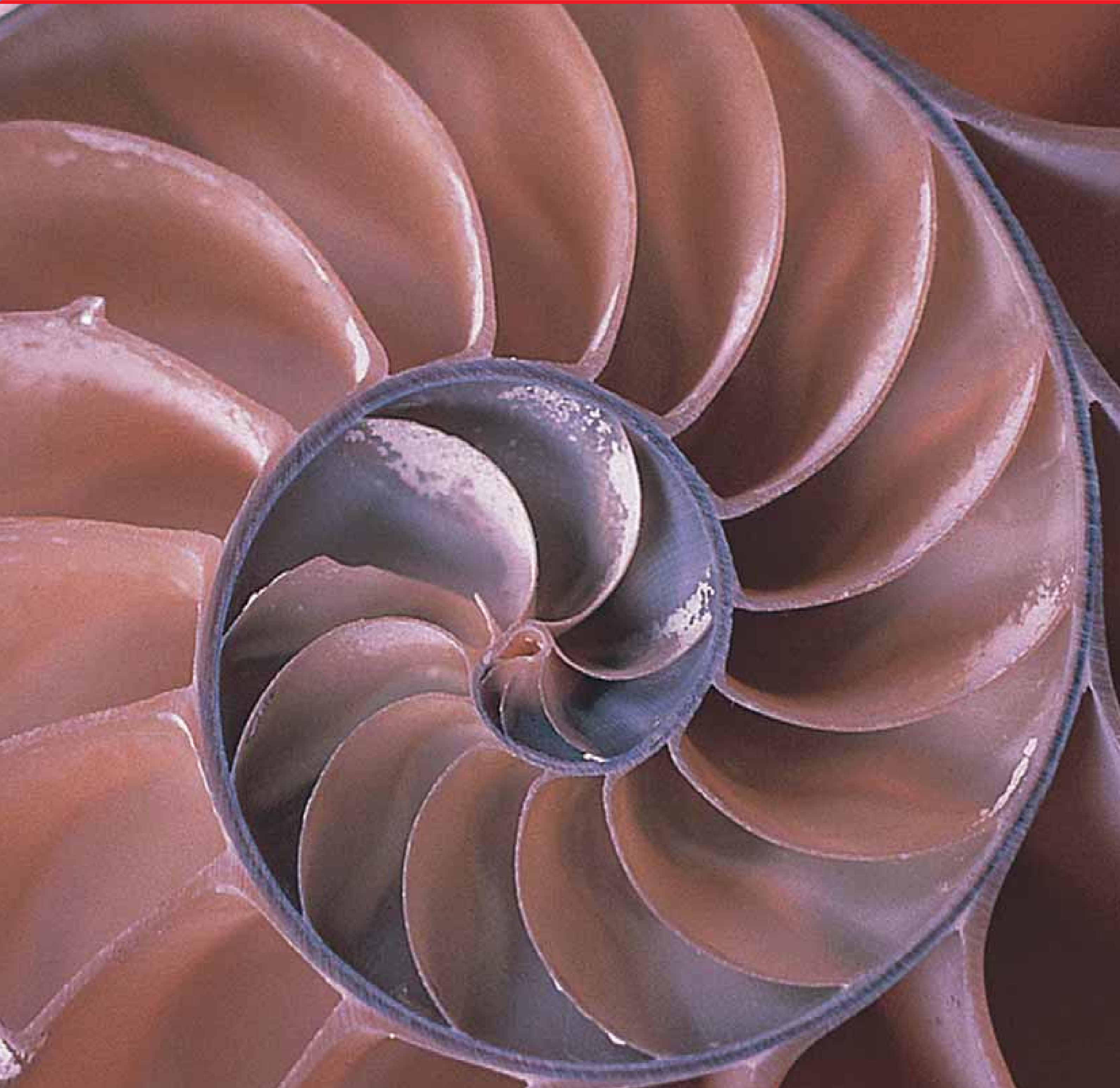
   c) Simule la trayectoria de una bala lanzada hacia arriba ($\theta = 90°$). Experimente con valores de v_0 entre 5 y 20 pies/s. Use el estilo de gráfica "Animate" y `Tstep` $= 0.02$. Simule la trayectoria de dos balas lanzadas de forma simultánea a distintas velocidades. Para distinguir mejor las dos balas, colóquelas en diferentes coordenadas x (por ejemplo, $x = 1$ y $x = 2$). Véase el inciso c) de la figura. ¿Cómo cambia la altura máxima que alcanza la bala al duplicar v_0?



a) b) c)

11

Sucesiones y series

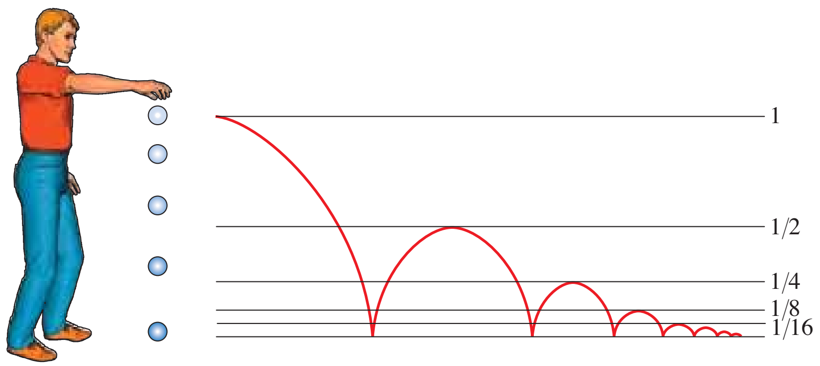


Esquema del capítulo

En este capítulo estudiamos las sucesiones y series de números. En pocas palabras, una sucesión es una lista de números escritos en un orden específico. Los números de la sucesión se escriben con frecuencia como $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Los puntos significan que la lista continúa por siempre. Un ejemplo sencillo es la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 5, & 10, & 15, & 20, & 25, \ldots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \ldots \end{array}$$

Las sucesiones se presentan en muchas situaciones del mundo cotidiano. Por ejemplo, si usted deposita una cantidad de dinero en una cuenta que genera intereses, el interés ganado cada mes genera una sucesión. Si usted lanza una pelota y la deja rebotar, la altura que alcanza la pelota en cada rebote sucesivo es una sucesión. Una sucesión interesante está oculta en la estructura interna de la concha de un nautilo.



Podemos describir el patrón de la sucesión mostrada mediante la *fórmula*:

$$a_n = 5n$$

Usted podría haber pensado una manera distinta de describir el patrón, como, "pasa de un número al otro sumando 5". Esta manera natural de describir la sucesión se expresa mediante la *fórmula recursiva*:

$$a_n = a_{n-1} + 5$$

empezando con $a_1 = 5$. Trate de sustituir $n = 1, 2, 3, \ldots$ en cada una de estas fórmulas para poder observar la manera en que se generan los números en la sucesión.

Con frecuencia, usamos sucesiones para modelar fenómenos del mundo real, por ejemplo, los pagos mensuales sobre la hipoteca es una sucesión. Exploramos muchas otras aplicaciones de las sucesiones en este capítulo y en el *Enfoque en el modelado* de la página 874.

11.1 Sucesiones y notación de suma

Muchos procesos del mundo cotidiano generan listas de números. Por ejemplo, el balance en una cuenta bancaria al final de cada mes forma una lista de números cuando se rastrea en el tiempo. Los matemáticos llaman a estas listas *sucesiones*. En esta sección estudiamos las sucesiones y sus aplicaciones.

Sucesiones

Una *sucesión* es un conjunto de números escritos en un orden específico:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

El número a_1 se llama *primer término*, a_2 es el *segundo término* y, en general, a_n es el *n-ésimo término*. Puesto que para cada número natural n hay un número correspondiente a_n, podemos definir a una sucesión como una función.

Definición de una sucesión

Una **sucesión** es una función f cuyo dominio es el conjunto de números naturales. Los valores $f(1), f(2), f(3), \ldots$ son los **términos** de la sucesión.

Por lo regular se escribe a_n en lugar de la notación de función $f(n)$ para el valor de la función en el número n.

He aquí un ejemplo sencillo de una sucesión:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

Los puntos indican que la sucesión continúa indefinidamente. Se puede escribir una sucesión en esta manera cuando es evidente cuáles son los términos siguientes. Esta sucesión está formada por números pares. Para ser más exactos, es necesario especificar un procedimiento para hallar *todos* los términos de la sucesión. Esto se puede efectuar dando una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión. En este caso,

Otra manera de expresar esta sucesión es usar la notación de función:

$$a(n) = 2n$$

de modo que $a(1) = 2$, $a(2) = 4$, $a(3) = 6, \ldots$

$$a_n = 2n$$

y la sucesión se puede expresar como

2,	4,	6,	8,	. . . ,	$2n$,	. . .
1er. término	2o. término	3er. término	4o. término		n-ésimo término	

Observe cómo la fórmula $a_n = 2n$ da todos los términos de la sucesión. Por ejemplo, al sustituir 1, 2, 3 y 4 en n tenemos los primeros cuatro términos:

$$a_1 = 2 \cdot 1 = 2 \qquad a_2 = 2 \cdot 2 = 4$$
$$a_3 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad a_4 = 2 \cdot 4 = 8$$

Para encontrar el 103o. término de esta sucesión, usamos $n = 103$ para obtener

$$a_{103} = 2 \cdot 103 = 206$$

Ejemplo 1 Cálculo de los términos de una sucesión

Calcular los primeros cinco términos y el centésimo término de la sucesión definida por cada fórmula.

a) $a_n = 2n - 1$ b) $c_n = n^2 - 1$

c) $t_n = \dfrac{n}{n+1}$ d) $r_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n}$

Solución Para determinar los primeros cinco términos se sustituye $n = 1, 2, 3, 4$ y 5 en la fórmula en el lugar del n-ésimo término. Para determinar el centésimo término, se sustituye $n = 100$. Así se obtiene lo siguiente:

n-ésimo término	Primeros cinco términos	Centésimo término
a) $2n - 1$	$1, 3, 5, 7, 9$	199
b) $n^2 - 1$	$0, 3, 8, 15, 24$	9999
c) $\dfrac{n}{n+1}$	$\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}$	$\dfrac{100}{101}$
d) $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$	$-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, -\dfrac{1}{32}$	$\dfrac{1}{2^{100}}$

■

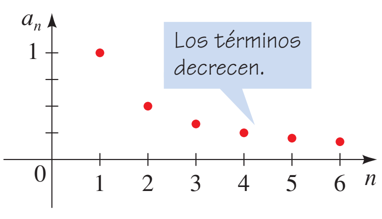


Figura 1

En el ejemplo 1d) la presencia de $(-1)^n$ en la sucesión tiene el efecto de hacer que los términos sucesivos sean alternadamente negativos y positivos.

Con frecuencia es útil esbozar una sucesión dibujando una gráfica. Puesto que una sucesión es una función cuyo dominio son los números naturales, podemos dibujar la gráfica en el plano cartesiano. Por ejemplo, la gráfica de la sucesión

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

se muestra en la figura 1. Compárela con la gráfica de

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots$$

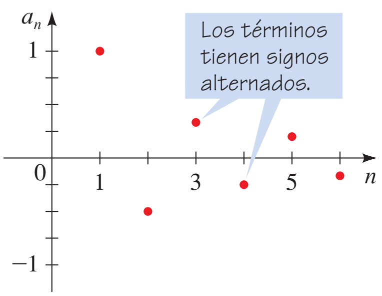


Figura 2

mostrada en la figura 2. La gráfica de cada una de las sucesiones consiste en puntos aislados que *no* están unidos.

Las calculadoras que grafican son útiles para analizar las sucesiones. Para trabajar con sucesiones en la TI-83, es necesario poner la calculadora en modo `Seq` como en

la figura 3a). Si se ingresa la sucesión $u(n) = n/(n + 1)$ del ejemplo 1c), podemos ver los términos usando el comando TABLE como se muestra en la figura 3b). También se pueden graficar las sucesiones como se ilustra en la figura 3c).

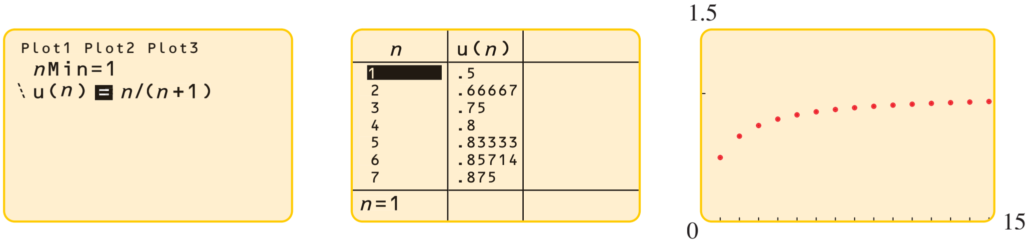


Figura 3
$u(n) = n/(n + 1)$

a) b) c)

Encontrar patrones es una parte importante de las matemáticas. Considere una sucesión que empieza

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

¿Puede detectar un patrón en estos números? En otras palabras, ¿puede definir una sucesión cuyos primeros cuatro términos sean estos números? La respuesta a esta pregunta parece fácil; estos números son los cuadrados de los números 1, 2, 3, 4. Por consiguiente, la sucesión que estamos buscando se define mediante $a_n = n^2$. No obstante, esta no es la *única* sucesión cuyos primeros cuatro términos son 1, 4, 9, 16. En otras palabras, la respuesta a nuestro problema no es única (véase el ejercicio 78). En el ejemplo siguiente interesa encontrar una sucesión *obvia* cuyos primeros términos concuerden con los términos dados.

No todas las sucesiones se pueden definir mediante una fórmula. Por ejemplo, no hay fórmula conocida para la sucesión de números primos:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, \ldots$$

Números primos grandes

La búsqueda de números primos grandes fascina a muchas personas. En el momento en que esto se escribió, el número primo más grande conocido era

$$2^{25\,964\,951} - 1$$

Fue descubierto en 2005 por Martin Nowak, un cirujano oftalmólogo y aficionado a las matemáticas, de Michelfeld, Alemania. Utilizó para ello una computadora Pentium 4 de 2.4 GHz. En la notación decimal este número contiene 7 816 230 dígitos. Si se escribiera completo ocuparía casi el doble de páginas de este libro. Nowak estuvo trabajando con un grupo de Internet grande conocido como GIMPS (la Great Internet Mersenne Prime Search, la Gran Búsqueda por Internet de los primos Mersenne). Los números de la forma $2^p - 1$, donde p es primo, se llaman números Mersenne, y en ellos se comprueba con más facilidad su calidad de primos que en otros. Ésta es la razón por la cual los primos conocidos más grandes son de esta forma.

Ejemplo 2 Determinación del n-ésimo término de una sucesión

Determine el n-ésimo término de una sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

a) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \ldots$ b) $-2, 4, -8, 16, -32, \ldots$

Solución

a) Se puede observar que los numeradores de estas fracciones son los números impares y los denominadores son los números pares. Los números pares son de la forma $2n$, y los números impares son de la forma $2n - 1$ (un número impar difiere de un número par en 1). Entonces, la sucesión que tienen estos números en sus primeros cuatro términos está representada por

$$a_n = \frac{2n - 1}{2n}$$

b) Estos números son potencias de 2 y se alternan de signo, por lo que una sucesión que concuerda con estos términos es

$$a_n = (-1)^n 2^n$$

Debe comprobar que estas fórmulas generan en verdad los términos dados. ■

Sucesiones definidas recursivamente

Algunas sucesiones carecen de fórmulas que se definen tan fácilmente como las del ejemplo anterior. El n-ésimo término de una sucesión podría depender de algunos o de todos los términos que lo preceden. Una sucesión definida de esta manera se llama **recursiva**. He aquí dos ejemplos.

Eratóstenes (alrededor de 276 a 195 a.C.) fue un geógrafo, matemático y astrónomo griego muy reconocido. Calculó exactamente la circunferencia de la Tierra mediante un método muy ingenioso (véase el ejercicio 72, página 476). Sin embargo, es más famoso por su método para encontrar números primos, conocido en la actualidad como la *criba de Eratóstenes*. El método consiste en hacer una lista de enteros, empezando por el 2, el primer número primo, y luego tachar todos los múltiplos de 2, los cuales no son primos. El siguiente número que queda en la lista es el 3, el segundo primo, de modo que de nuevo se tachan todos los múltiplos de éste. El siguiente número es el 5, el tercer número primo, y se tachan todos sus múltiplos, y así sucesivamente. De esta manera, todos los números que no son primos están tachados, y los números que quedan son los primos.

Ejemplo 3 Determinación de los términos de una sucesión definida recursivamente

Determine los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente por $a_1 = 1$ y

$$a_n = 3(a_{n-1} + 2)$$

Solución La fórmula que define esta sucesión es recursiva. Permite encontrar el n-ésimo término a_n si se conoce el término precedente a_{n-1}. Por lo tanto, se puede calcular el segundo término a partir del primero, el tercero a partir del segundo, el cuarto término a partir del tercero y así sucesivamente. Puesto que ya tenemos el primer término $a_1 = 1$, se puede continuar como sigue

$$a_2 = 3(a_1 + 2) = 3(1 + 2) = 9$$

$$a_3 = 3(a_2 + 2) = 3(9 + 2) = 33$$

$$a_4 = 3(a_3 + 2) = 3(33 + 2) = 105$$

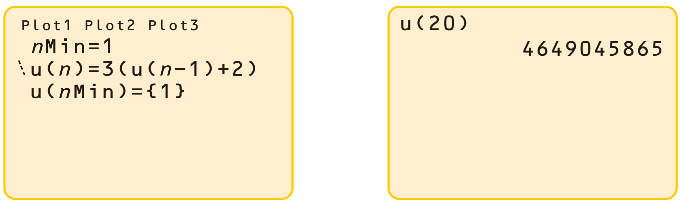
$$a_5 = 3(a_4 + 2) = 3(105 + 2) = 321$$

Por lo tanto, los primeros cinco términos de esta sucesión son

$$1, 9, 33, 105, 321, \ldots$$

■

Hay que observar que con objeto de determinar el vigésimo término de la sucesión del ejemplo 3, es necesario primero encontrar los 19 anteriores. Esto se efectúa con más facilidad mediante una calculadora para graficar. En la figura 4a) se ilustra cómo introducir los datos de esta sucesión en la calculadora TI-83. A partir de la figura 4b) se puede observar que el vigésimo término de la sucesión es $a_{20} = 4\,649\,045\,865$.



a) b)

Figura 4

$u(n) = 3(u(n-1) + 2),\ u(1) = 1$

Ejemplo 4 La sucesión de Fibonacci

Calcule los primeros 11 términos de la sucesión definida recursivamente por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

Solución Para calcular F_n necesitamos encontrar los dos términos precedentes F_{n-1} y F_{n-2}. Puesto que ya conocemos F_1 y F_2, continuamos como sigue.

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

Es evidente lo que sucede aquí. Cada término es simplemente la suma de los dos términos que lo preceden, por lo que con toda facilidad se pueden escribir tantos términos como queramos. He aquí los primeros 11 términos.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

La sucesión del ejemplo 4 se denomina **sucesión de Fibonacci**, nombrada así en honor del matemático italiano del siglo XIII que la utilizó para resolver un problema relacionado con la reproducción de los conejos (véase el ejercicio 77). La sucesión también se presenta en numerosas situaciones en la naturaleza (véanse las figuras 5 y 6). En efecto, tantos fenómenos se comportan según la sucesión de Fibonacci que una revista sobre matemáticas, el *Fibonacci Quarterly* sólo se dedica a las propiedades de esta sucesión.

Fibonacci (1175-1250) nació en Pisa, Italia, y se educó en el norte de África. Viajó por toda la zona del Mediterráneo y aprendió varios métodos que se usaban entonces para escribir números. Cuando regresó a Pisa en 1202, Fibonacci se declaró en favor del uso del sistema decimal hindú-arábigo, el que usamos en la actualidad, en lugar del sistema numérico romano que se usaba en Europa en esa época. Su obra más famosa, *Liber Abaci*, explica en detalle las ventajas de los números hindú-arábigos. En efecto, la multiplicación y la división eran tan complicadas usando los números romanos que se requería un grado universitario para alcanzar esas habilidades. Es interesante hacer notar que en 1299 la ciudad de Florencia declaró fuera de la ley el uso del sistema decimal para comerciantes y negocios, y pedía que los números se escribieran en caracteres romanos o en palabras. Uno sólo puede especular acerca de la razón de esta ley.

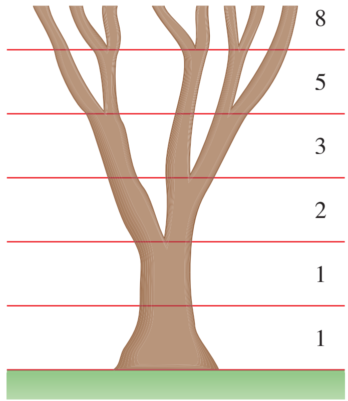
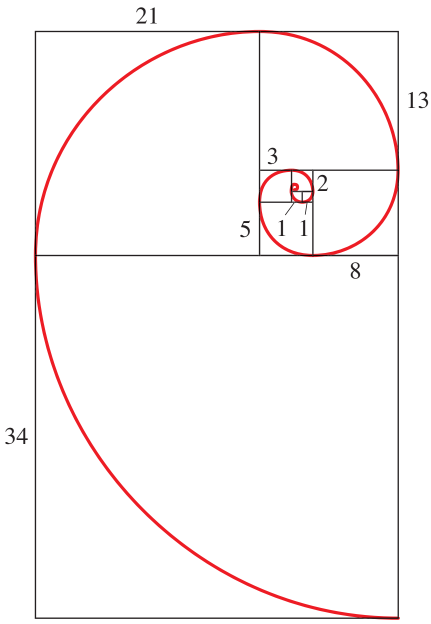


Figura 5
La sucesión de Fibonacci en el crecimiento de las ramas de un árbol



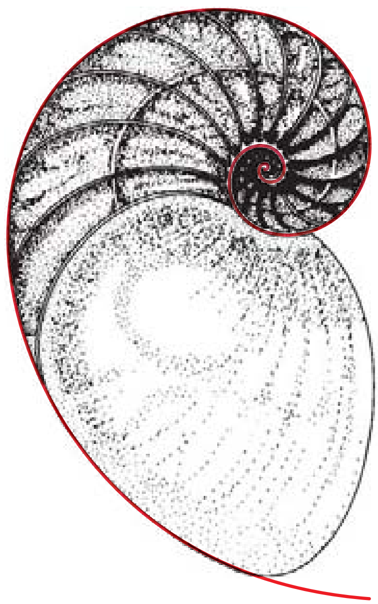


Figura 6

Espiral de Fibonacci

Concha de nautilo

Sumas parciales de una sucesión

En el cálculo infinitesimal, con frecuencia nos interesamos en la suma de los términos de una sucesión. Esto da origen a la definición siguiente.

Sumas parciales de una sucesión

En el caso de la sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$$

las **sumas parciales** son

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

S_1 se llama **primera suma parcial**, S_2 es la **segunda suma parcial** y así sucesivamente. S_n se denomina ***n*-ésima suma parcial**. La sucesión S_1, S_2, S_3, . . . , S_n, . . . se denomina **sucesión de sumas parciales**.

Ejemplo 5 Cálculo de las sumas parciales de una sucesión

Calcule las primeras cuatro sumas parciales y la *n*-ésima suma parcial de la sucesión dada por $a_n = 1/2^n$.

Solución Los términos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$$

Las primeras cuatro sumas parciales son

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\ S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} &&= \frac{3}{4} \\ S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} &&= \frac{7}{8} \\ S_4 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} &&= \frac{15}{16} \end{aligned}$$

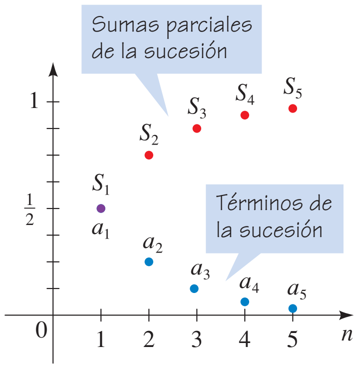


Figura 7
Gráfica de la sucesión a_n y la sucesión de las sumas parciales S_n

Hay que observar que en el valor de cada suma parcial el denominador es una potencia de 2 y el numerador una unidad menor que el denominador. En general, la n-ésima suma parcial es

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Los primeros cinco términos de a_n y S_n se grafican en la figura 7. ■

Ejemplo 6 Cálculo de las sumas parciales de una sucesión

Determine las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

Solución Las primeras cuatro sumas parciales son

$$\begin{aligned}
S_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) & &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) & &= 1 - \frac{1}{3} \\
S_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) & &= 1 - \frac{1}{4} \\
S_4 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) & &= 1 - \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

¿Detecta un patrón aquí? Claro. La n-ésima suma parcial es

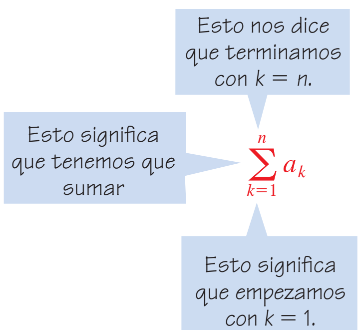
$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$ ■

Notación sigma

Dada una sucesión

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$$

se puede escribir la suma de los primeros n términos usando la **notación de suma** o **notación sigma**. Esta notación toma su nombre de la letra griega mayúscula Σ, que equivale a la S de "suma". La notación sigma se usa como sigue:



$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$$

El lado izquierdo de la expresión quiere decir "La suma de a_k desde que $k = 1$ hasta $k = n$". La letra k se llama **índice de suma** o **variable de la suma**, y la idea es reemplazar k de la expresión después de sigma por los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$, y sumar las expresiones resultantes, para llegar a obtener el lado derecho de la ecuación.

Los antiguos griegos consideraban que un segmento de recta se dividiría en una **razón áurea** si la proporción entre la parte más corta y la parte más grande es la misma que la proporción entre la parte más grande y el segmento completo.

Por lo tanto, el segmento ilustrado está dividido según la razón áurea si

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1 + x}$$

Esto origina una ecuación cuadrática cuya solución positiva es

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

Esta proporción se presenta en muchas situaciones. Por ejemplo, los experimentos psicológicos señalan que la forma más placentera de rectángulo es una cuyos lados guardan la razón áurea. Los antiguos griegos concordaban con esto, y por eso construían sus templos apegados a esta razón.

La razón áurea se relaciona con la sucesión de Fibonacci. En efecto, se puede demostrar, usando el cálculo* infinitesimal, que la razón entre dos números sucesivos de Fibonacci

$$\frac{F_{n+1}}{F_n}$$

se aproxima más a la razón áurea a medida que aumenta el valor de n. Trate de encontrar esta razón para $n = 10$.

Corbis

*James Stewart, *Calculus,* 5a. ed. (Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 2003) p. 748.

Ejemplo 7 Notación sigma

Calcule las sumas.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2$ b) $\displaystyle\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j}$ c) $\displaystyle\sum_{i=5}^{10} i$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2$

Solución

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

b) $\displaystyle\sum_{j=3}^{5} \frac{1}{j} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$

c) $\displaystyle\sum_{i=5}^{10} i = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$

d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{6} 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$ ■

Se puede utilizar una calculadora de gráficas para efectuar las sumas. Por ejemplo, en la figura 8 se muestra cómo la calculadora TI-83 se puede usar para efectuar las sumas de los incisos a) y b) del ejemplo 7.

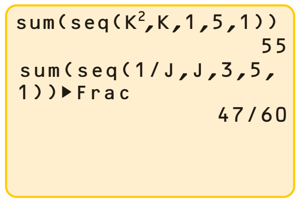


Figura 8

Ejemplo 8 Sumas expresadas con la notación sigma

Exprese las sumas usando la notación sigma.

a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3$

b) $\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77}$

Solución

a) Se puede escribir

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + 7^3 = \sum_{k=1}^{7} k^3$$

b) Una manera natural de escribir esta suma es

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=3}^{77} \sqrt{k}$$

No obstante, no hay una sola manera de escribir una suma con la notación sigma. También podríamos escribir esta suma como

$$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=0}^{74} \sqrt{k + 3}$$

o bien, $$\sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \cdots + \sqrt{77} = \sum_{k=1}^{75} \sqrt{k + 2}$$ ■

Las siguientes propiedades de las sumas son consecuencias naturales de las propiedades de los números reales.

Propiedades de las sumas

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ sucesiones. Entonces para todo entero positivo n y cualquier número real c, se cumplen las siguientes propiedades.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$

■ **Demostración** Para demostrar la propiedad 1, escribimos el primer miembro de la ecuación como

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)$$

Puesto que la adición es conmutativa y asociativa, podemos reacomodar los términos en el segundo miembro para tener

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n)$$

Al volver a escribir el segundo miembro aplicando la notación sigma obtenemos la propiedad 1. La propiedad 2 se demuestra de manera similar. Para demostrar la propiedad 3, usamos la propiedad distributiva:

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = ca_1 + ca_2 + ca_3 + \cdots + ca_n$$

$$= c(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$ ■

11.1 Ejercicios

1–10 ■ Determine los primeros cuatro términos y el centésimo término de la sucesión.

1. $a_n = n + 1$

2. $a_n = 2n + 3$

3. $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

4. $a_n = n^2 + 1$

5. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

6. $a_n = \dfrac{1}{n^2}$

7. $a_n = 1 + (-1)^n$

8. $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$

9. $a_n = n^n$

10. $a_n = 3$

11–16 ■ Calcule los primeros cinco términos de la sucesión definida recursivamente.

11. $a_n = 2(a_{n-1} - 2)$ y $a_1 = 3$

12. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2}$ y $a_1 = -8$

13. $a_n = 2a_{n-1} + 1$ y $a_1 = 1$

14. $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$ y $a_1 = 1$

15. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 2$

16. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ y $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

17–22 ■ Por medio de una calculadora para graficar ejecute lo siguiente.

a) Determine el décimo término de la sucesión.

b) Grafique los primeros 10 términos de la sucesión.

17. $a_n = 4n + 3$ **18.** $a_n = n^2 + n$

19. $a_n = \dfrac{12}{n}$ **20.** $a_n = 4 - 2(-1)^n$

21. $a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}}$ y $a_1 = 2$

22. $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ y $a_1 = 1, a_2 = 3$

23–30 ■ Determine el n-ésimo término de la sucesión cuyos primeros términos se proporcionan.

23. 2, 4, 8, 16, . . . **24.** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$

25. 1, 4, 7, 10, . . . **26.** 5, −25, 125, −625, . . .

27. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$ **28.** $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$

29. 0, 2, 0, 2, 0, 2, . . . **30.** $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$

31–34 ■ Calcule las primeras seis sumas parciales $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ de la sucesión.

31. 1, 3, 5, 7, . . . **32.** $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \ldots$

33. $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{3^4}, \ldots$ **34.** −1, 1, −1, 1, . . .

35–38 ■ Calcule las primeras cuatro sumas parciales y la n-ésima suma parcial de la sucesión a_n.

35. $a_n = \dfrac{2}{3^n}$ **36.** $a_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$

37. $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

38. $a_n = \log\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ [*Sugerencia*: aplique una propiedad de los logaritmos para expresar el n-ésimo término como una diferencia.]

39–46 ■ Calcule la suma.

39. $\sum_{k=1}^{4} k$ **40.** $\sum_{k=1}^{4} k^2$

41. $\sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k}$ **42.** $\sum_{j=1}^{100} (-1)^j$

43. $\sum_{i=1}^{8} [1 + (-1)^i]$ **44.** $\sum_{i=4}^{12} 10$

45. $\sum_{k=1}^{5} 2^{k-1}$ **46.** $\sum_{i=1}^{3} i2^i$

47–52 ■ Mediante una calculadora para graficar evalúe las sumas.

47. $\sum_{k=1}^{10} k^2$ **48.** $\sum_{k=1}^{100} (3k + 4)$

49. $\sum_{j=7}^{20} j^2(1 + j)$ **50.** $\sum_{j=5}^{15} \frac{1}{j^2 + 1}$

51. $\sum_{n=0}^{22} (-1)^n 2n$ **52.** $\sum_{n=1}^{100} \frac{(-1)^n}{n}$

53–58 ■ Escriba la suma sin usar la notación sigma.

53. $\sum_{k=1}^{5} \sqrt{k}$ **54.** $\sum_{i=0}^{4} \frac{2i - 1}{2i + 1}$

55. $\sum_{k=0}^{6} \sqrt{k + 4}$ **56.** $\sum_{k=6}^{9} k(k + 3)$

57. $\sum_{k=3}^{100} x^k$ **58.** $\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} x^j$

59–66 ■ Escriba la suma mediante la notación sigma.

59. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 100$

60. $2 + 4 + 6 + \cdots + 20$ **61.** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$

62. $\dfrac{1}{2 \ln 2} - \dfrac{1}{3 \ln 3} + \dfrac{1}{4 \ln 4} - \dfrac{1}{5 \ln 5} + \cdots + \dfrac{1}{100 \ln 100}$

63. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{999 \cdot 1000}$

64. $\dfrac{\sqrt{1}}{1^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2^2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3^2} + \cdots + \dfrac{\sqrt{n}}{n^2}$

65. $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{100}$

66. $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + \cdots - 100x^{99}$

67. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término de la sucesión

$$\sqrt{2},\quad \sqrt{2\sqrt{2}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}, \ldots$$

[*Sugerencia*: escriba cada uno de los términos como una potencia de 2.]

68. Defina la sucesión

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}\right)$$

Utilice el comando TABLE de una calculadora para graficar con el fin de determinar los primeros 10 términos de esta sucesión. Compare con la sucesión de Fibonacci F_n.

Aplicaciones

69. Interés compuesto Julio deposita 2000 dólares en una cuenta de ahorros que paga un interés de 2.4% al año, com-

puesto mensualmente. La cantidad en la cuenta después de n meses se determina mediante la sucesión.

$$A_n = 2000\left(1 + \frac{0.024}{12}\right)^n$$

a) Determine los primeros seis términos de la sucesión.

b) Calcule la cantidad en la cuenta después de tres años.

70. Interés compuesto Helen deposita 100 dólares al final de cada mes en una cuenta que da el 6% de interés anual compuesto mensualmente. La cantidad de intereses que acumuló después de n meses se representa mediante la sucesión

$$I_n = 100\left(\frac{1.005^n - 1}{0.005} - n\right)$$

a) Calcule los primeros seis términos de la sucesión.

b) Calcule la cantidad de intereses que acumuló después de cinco años.

71. Población de una ciudad Una ciudad con una población de 35 000 fue incorporada en 2004. Se espera que la población crezca a una tasa de 2% anual. La población n años después de 2004 se representa mediante la sucesión

$$P_n = 35\,000(1.02)^n$$

a) Calcule los primeros cinco términos de la sucesión.

b) Determine cuál será la población en 2014.

72. Pago de una deuda Margarita pide prestados 10 000 dólares a su tío y queda de acuerdo en pagar parcialidades de 200 dólares. Su tío carga un interés de 0.5% por mes en el balance

a) Muestre que el balance A_n en el n-ésimo mes está dado recursivamente por $A_0 = 10\,000$ y

$$A_n = 1.005A_{n-1} - 200$$

b) Determine el balance después de seis meses.

73. Granja piscícola Un piscicultor tiene 5000 bagres en su estanque. La cantidad de bagres aumenta 8% cada mes, y el piscicultor cosecha 300 bagres todos los meses.

a) Demuestre que la población de bagres P_n después de n meses está dada recursivamente por $P_0 = 5000$ y

$$P_n = 1.08P_{n-1} - 300$$

b) ¿Cuántos bagres hay en el estanque después de 12 meses?

74. Precio de una casa El precio medio de una casa en el condado de Orange se incrementa en alrededor de 6% al año. En 2002, el precio medio era de 240 000 dólares. Sea P_n el precio medio n años después de 2002.

a) Plantee una fórmula para la sucesión de P_n.

b) Determine el precio medio esperado en 2010.

75. Incrementos al salario A un vendedor recién contratado se le prometió un salario inicial de 30 000 dólares al año con un aumento de 2000 dólares cada año. Sea S_n su salario en su n-ésimo año de empleo.

a) Encuentre una definición recursiva para S_n.

b) Determine el salario del vendedor en el quinto año de empleo.

76. Concentración de una solución Una bióloga está tratando de encontrar la concentración de sal óptima para el crecimiento de cierta especie de molusco. Empezó con una salmuera que contiene 4 g/L de sal y aumenta la concentración 10% todos los días. Sea C_0 la concentración inicial y C_n la concentración después de n días.

a) Encuentre una definición recursiva de C_n.

b) Calcule la concentración de sal después de 8 días.

77. Conejos de Fibonacci Fibonacci planteó el siguiente problema: suponga que los conejos viven por siempre y que cada mes cada pareja produce un nuevo par, el cual ya es productivo a los dos meses. Si se empieza con un par de conejos recién nacidos, ¿cuántos pares de conejos habrá en el n-ésimo mes? Demuestre que la respuesta es F_n, donde F_n es el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci.

Descubrimiento • Debate

78. Sucesiones distintas que empiezan igual

a) Demuestre que los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2$ son

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

b) Demuestre que los primeros cuatro términos de la sucesión $a_n = n^2 + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ también son

$$1, 4, 9, 16, \ldots$$

c) Encuentre una sucesión cuyos primeros seis términos sean iguales a los de $a_n = n^2$, pero cuyos términos siguientes sean distintos de los de esta sucesión.

d) Encuentre dos secuencias diferentes que empiecen con

$$2, 4, 8, 16, \ldots$$

79. Una sucesión definida recursivamente Calcule los primeros 40 términos de la sucesión definida por

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & \text{si } a_n \text{ es un número par} \\ 3a_n + 1 & \text{si } a_n \text{ es un número impar} \end{cases}$$

y $a_1 = 11$. Haga lo mismo con $a_1 = 25$. Plantee una conjetura con respecto a este tipo de sucesión. Trate varios otros valores para a_1 con el fin de probar su conjetura.

80. Un tipo diferente de recursión Encuentre los primeros 10 términos de la sucesión definida por

$$a_n = a_{n-a_{n-1}} + a_{n-a_{n-2}}$$

con

$$a_1 = 1 \qquad \text{y} \qquad a_2 = 1$$

¿Cuál es la diferencia entre esta sucesión recursiva y las otras de esta sección?

11.2 Sucesiones aritméticas

En esta sección se trata un tipo especial de sucesión, llamada sucesión aritmética.

Sucesiones aritméticas

Quizá la manera más sencilla de generar una sucesión es empezar con un número a y añadirle una constante fija d, una y otra vez.

Definición de una sucesión aritmética

Una sucesión aritmética es una sucesión de la forma

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$$

El número a es el **primer término**, y d es la **diferencia común** de la sucesión. El ***n*-ésimo término** de una sucesión aritmética está dado por

$$a_n = a + (n - 1)d$$

El número d se llama diferencia común porque cualquier par de términos consecutivos de una sucesión aritmética tiene una diferencia de d.

Ejemplo 1 Sucesiones aritméticas

a) Si $a = 2$ y $d = 3$, entonces tenemos la sucesión aritmética

$$2, 2 + 3, 2 + 6, 2 + 9, \ldots$$

o bien,

$$2, 5, 8, 11, \ldots$$

La diferencia de dos términos consecutivos cualquiera de esta sucesión es $d = 3$. El n-ésimo término es $a_n = 2 + 3(n - 1)$.

b) Considere la sucesión aritmética

$$9, 4, -1, -6, -11, \ldots$$

En este caso, la diferencia común es $d = -5$. Los términos de una sucesión aritmética disminuyen si la diferencia común es negativa. El n-ésimo término es $a_n = 9 - 5(n - 1)$.

c) La gráfica de la sucesión aritmética $a_n = 1 + 2(n - 1)$ se muestra en la figura 1. Observe que los puntos de la gráfica quedan en la recta de pendiente $d = 2$.

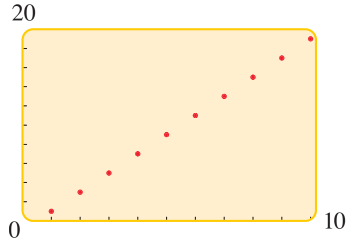


Figura 1

■

Matemáticas en el mundo moderno

División justa de bienes

Dividir un bien en forma justa entre una cierta cantidad de personas es de gran interés para los matemáticos. Entre los problemas de esta naturaleza se encuentran dividir el presupuesto nacional, tierras en disputa o los bienes en los casos de divorcio. En 1994, Brams y Taylor encontraron un camino matemático para dividir en forma justa las cosas. Su solución se ha aplicado a los problemas de división en la ciencia política, procedimientos legales y otras áreas. Para entender el problema, considere el ejemplo siguiente. Suponga que las personas A y B quieren dividir justamente una propiedad entre ellos. Dividir *justamente* significa que tanto A como B deben quedar satisfechos con el resultado de la división. Solución: A tiene que llegar a dividir la propiedad en dos partes, y luego B tiene que llegar a elegir la parte que quiere. Puesto que A y B tomaron parte en el proceso de división, cada uno debe estar satisfecho. La situación se vuelve más complicada cuando son tres o más personas, y es aquí donde entran los matemáticos. Dividir las cosas en forma justa requiere mucho más que sólo cortar las cosas a la mitad; se tiene que tomar en cuenta el *valor relativo* que cada persona da a la cosa que va a ser dividida. Una de las historias que aparecen en la Biblia ilustra con claridad estas situaciones: dos mujeres se presentan ante el rey Salomón. Cada una afirmaba ser la madre de un niño recién nacido. La solución del rey Salomón fue ¡dividir el niño a la mitad! La madre real, quien valoraba al niño más que nadie, inmediatamente desistió de sus afirmaciones con el fin de salvar la vida del niño.

Las soluciones matemáticas para los problemas de la división justa se han aplicado recientemente en un tratado internacional, la Convention on the Law of the Sea. Si un país quiere sacar provecho de una parte del fondo del mar,

(*continúa*)

Una sucesión aritmética está definida por completo con el primer término a y la diferencia común d. Por lo tanto, si conocemos los dos primeros términos de una sucesión aritmética, entonces podemos encontrar una fórmula para el n-ésimo término, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2 Determinación de términos de una sucesión aritmética

Determine los primeros seis términos y el término número 300 de la sucesión aritmética.

$$13, 7, \ldots$$

Solución Puesto que el primer término es 13, tenemos que $a = 13$. La diferencia común es $d = 7 - 13 = -6$. Por lo tanto, el n-ésimo término de la sucesión es

$$a_n = 13 - 6(n - 1)$$

A partir de lo anterior encontramos los primeros seis términos:

$$13, 7, 1, -5, -11, -17, \ldots$$

El tricentésimo término es $a_{300} = 13 - 6(299) = -1781$. ■

En el ejemplo siguiente se muestra que una sucesión aritmética queda definida del todo por *dos* términos *cualesquiera*.

Ejemplo 3 Determinación de los términos de una sucesión aritmética

El término décimoprimero de una sucesión aritmética es 52, y el término décimonoveno es 92. Calcule el término milésimo.

Solución Para determinar el n-ésimo término de esta sucesión es necesario encontrar a y d de la fórmula

$$a_n = a + (n - 1)d$$

A partir de esta fórmula tenemos

$$a_{11} = a + (11 - 1)d = a + 10d$$
$$a_{19} = a + (19 - 1)d = a + 18d$$

Puesto que $a_{11} = 52$ y $a_{19} = 92$, planteamos las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} 52 = a + 10d \\ 92 = a + 18d \end{cases}$$

Al resolver el sistema y determinar a y d, obtenemos $a = 2$ y $d = 5$. (Compruébelo.) Por lo tanto, el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 2 + 5(n - 1)$$

El milésimo término es $a_{1000} = 2 + 5(999) = 4997$. ■

Sumas parciales de sucesiones aritméticas

Suponga que queremos hallar la suma de los números 1, 2, 3, 4, . . . , 100, es decir,

$$\sum_{k=1}^{100} k$$

Cuando el famoso matemático C. F. Gauss era un escolar, su maestro planteó este problema a la clase, con lo cual esperaba que los mantendría ocupados un buen tiempo. Pero Gauss respondió casi de inmediato. Su idea fue la siguiente: puesto que

tiene que dividir la zona en dos partes: una parte la usará el mismo país y la otra la tendrá un consorcio que la preservará para que la use después un país menos desarrollado. El consorcio es el que primero la aprovecha.

estamos sumando números producidos de acuerdo con un patrón fijo, también debe haber un patrón o una fórmula para determinar la suma. Empezó por escribir los números del 1 al 100 y abajo de ellos los mismos números pero en orden inverso. Si S es la suma y si sumamos los términos correspondientes tenemos

$$\begin{array}{rcl} S &=& 1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100 \\ S &=& 100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2S &=& 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 + 101 + 101 \end{array}$$

Se infiere que $2S = 100(101) = 10\,100$ de modo que $S = 5050$.

Naturalmente, la sucesión de números naturales 1, 2, 3, . . . es una sucesión aritmética, en donde $a = 1$ y $d = 1$, y el método para sumar los primeros 100 términos de esta sucesión se puede utilizar para encontrar una fórmula de la n-ésima suma parcial de cualquier sucesión aritmética. Queremos calcular la suma de los primeros n términos de la sucesión aritmética cuyos términos son $a_k = a + (k - 1)d$, es decir, deseamos hallar

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} [a + (k - 1)d] \\ &= a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Al aplicar el método de Gauss, podemos escribir

$$\begin{array}{rcl} S_n &=& a + (a + d) + \cdots + [a + (n - 2)d] + [a + (n - 1)d] \\ S_n &=& [a + (n - 1)d] + [a + (n - 2)d] + \cdots + (a + d) + a \\ \hline 2S_n &=& [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] + \cdots + [2a + (n - 1)d] + [2a + (n - 1)d] \end{array}$$

Hay n términos idénticos en el segundo miembro de esta ecuación, de modo que

$$\begin{aligned} 2S_n &= n[2a + (n - 1)d] \\ S_n &= \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] \end{aligned}$$

Obsérvese que $a_n = a + (n - 1)d$ es el n-ésimo término de esta sucesión. Entonces, podemos escribir

$$S_n = \frac{n}{2}[a + a + (n - 1)d] = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$$

Esta última fórmula establece que la suma de los primeros n términos de una sucesión aritmética es el promedio del primero y del n-ésimo término multiplicado por n, el número de términos en la suma. En seguida resumimos este resultado.

Sumas parciales de una sucesión aritmética

En el caso de la sucesión aritmética $a_n = a + (n - 1)d$, la **n-ésima suma parcial**

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) + \cdots + [a + (n - 1)d]$$

está dada por cualquiera de las fórmulas siguientes.

1. $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

2. $S_n = n\left(\dfrac{a + a_n}{2}\right)$

Ejemplo 4 Determinación de una suma parcial de una sucesión aritmética

Calcule la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética

$$3, 7, 11, 15, \ldots$$

Solución Por lo que se refiere a esta sucesión aritmética, $a = 3$ y $d = 4$. Si aplicamos la fórmula 1 para la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

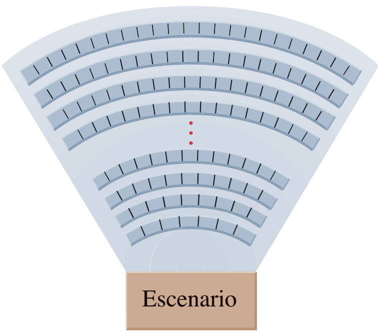
$$S_{40} = \tfrac{40}{2}[2(3) + (40 - 1)4] = 20(6 + 156) = 3240$$ ■

Ejemplo 5 Determinación de una suma parcial de una sucesión aritmética

Encuentre la suma de los primeros 50 números impares.

Solución Los números impares forman una sucesión aritmética con $a = 1$ y $d = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 1 + 2(n - 1) = 2n - 1$, de modo que el quincuagésimo número impar es $a_{50} = 2(50) - 1 = 99$. Al sustituir en la fórmula 2 de la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$S_{50} = 50\left(\frac{a + a_{50}}{2}\right) = 50\left(\frac{1 + 99}{2}\right) = 50 \cdot 50 = 2500$$ ■



Ejemplo 6 Determinación de la capacidad de asientos en un auditorio

Un auditorio tiene 50 filas de asientos con 30 lugares en la primera fila, 32 en la segunda, 34 en la tercera, y así sucesivamente. Calcule la cantidad total de asientos.

Solución La cantidad de asientos en las filas forman una sucesión aritmética con $a = 30$ y $d = 2$. Puesto que hay 50 filas, la cantidad total de asientos es la suma

$$S_{50} = \tfrac{50}{2}[2(30) + 49(2)] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$= 3950$$

Por lo tanto, el auditorio tiene 3950 asientos. ■

Ejemplo 7 Determinación del número de términos en una suma parcial

¿Cuántos términos de la sucesión aritmética 5, 7, 9, . . . se tienen que sumar para tener 572?

Solución Se nos pide encontrar n cuando $S_n = 572$. Al sustituir $a = 5$, $d = 2$ y $S_n = 572$ en la fórmula 1 de la suma parcial de una sucesión aritmética, obtenemos

$$572 = \frac{n}{2}[2 \cdot 5 + (n - 1)2] \qquad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

$$572 = 5n + n(n - 1)$$

$$0 = n^2 + 4n - 572$$

$$0 = (n - 22)(n + 26)$$

Esto da $n = 22$ o $n = -26$. Pero como n es el *número* de términos en la suma parcial, debemos tener entonces $n = 22$. ■

11.2 Ejercicios

1–4 ■ Se proporciona una sucesión.

a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión.

b) ¿Cuál es la diferencia común d?

c) Grafique los términos que encontró en a).

1. $a_n = 5 + 2(n - 1)$ **2.** $a_n = 3 - 4(n - 1)$

3. $a_n = \frac{5}{2} - (n - 1)$ **4.** $a_n = \frac{1}{2}(n - 1)$

5–8 ■ Encuentre el n-ésimo término de la sucesión aritmética dados el primer término a y la diferencia común d. ¿Cuál es el décimo término?

5. $a = 3, d = 5$ **6.** $a = -6, d = 3$

7. $a = \frac{5}{2}, d = -\frac{1}{2}$ **8.** $a = \sqrt{3}, d = \sqrt{3}$

9–16 ■ Determine si la sucesión es aritmética. Si es aritmética, encuentre la diferencia común.

9. $5, 8, 11, 14, \ldots$ **10.** $3, 6, 9, 13, \ldots$

11. $2, 4, 8, 16, \ldots$ **12.** $2, 4, 6, 8, \ldots$

13. $3, \frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}, \ldots$ **14.** $\ln 2, \ln 4, \ln 8, \ln 16, \ldots$

15. $2.6, 4.3, 6.0, 7.7, \ldots$ **16.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

17–22 ■ Calcule los primeros cinco términos de la sucesión y determine si es aritmética. Si así es, determine la diferencia común y exprese el n-ésimo término de la sucesión en la forma estándar $a_n = a + (n - 1)d$.

17. $a_n = 4 + 7n$ **18.** $a_n = 4 + 2^n$

19. $a_n = \dfrac{1}{1 + 2n}$ **20.** $a_n = 1 + \dfrac{n}{2}$

21. $a_n = 6n - 10$ **22.** $a_n = 3 + (-1)^n n$

23–32 ■ Encuentre la diferencia común, el quinto término, el n-ésimo término y el centésimo término de la sucesión aritmética.

23. $2, 5, 8, 11, \ldots$ **24.** $1, 5, 9, 13, \ldots$

25. $4, 9, 14, 19, \ldots$ **26.** $11, 8, 5, 2, \ldots$

27. $-12, -8, -4, 0, \ldots$ **28.** $\frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}, \ldots$

29. $25, 26.5, 28, 29.5, \ldots$ **30.** $15, 12.3, 9.6, 6.9, \ldots$

31. $2, 2 + s, 2 + 2s, 2 + 3s, \ldots$

32. $-t, -t + 3, -t + 6, -t + 9, \ldots$

33. El décimo término de una sucesión aritmética es $\frac{55}{2}$, y el segundo término es $\frac{7}{2}$. Encuentre el primer término.

34. El término decimosegundo de una sucesión aritmética es 32 y el quinto término es 18. Calcule el vigésimo término.

35. El término centésimo de una sucesión aritmética es 98 y la diferencia común es 2. Encuentre los tres primeros términos.

36. El término vigésimo de una sucesión aritmética es 101 y la diferencia común es 3. Encuentre una fórmula para el n-ésimo término.

37. ¿Qué término de la sucesión aritmética 1, 4, 7, . . . es 88?

38. El primer término de una sucesión aritmética es 1 y la diferencia común es 4. ¿El número 11 937 pertenece a la sucesión? Si es así, ¿qué término es?

39–44 ■ Encuentre la suma parcial S_n de la sucesión aritmética que cumple con las condiciones dadas.

39. $a = 1, d = 2, n = 10$ **40.** $a = 3, d = 2, n = 12$

41. $a = 4, d = 2, n = 20$ **42.** $a = 100, d = -5, n = 8$

43. $a_1 = 55, d = 12, n = 10$ **44.** $a_2 = 8, a_5 = 9.5, n = 15$

45–50 ■ Se proporciona una suma parcial de una sucesión aritmética. Calcule la suma.

45. $1 + 5 + 9 + \cdots + 401$

46. $-3 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 0 + \frac{3}{2} + 3 + \cdots + 30$

47. $0.7 + 2.7 + 4.7 + \cdots + 56.7$

48. $-10 - 9.9 - 9.8 - \cdots - 0.1$

49. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} (3 + 0.25k)$ **50.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{20} (1 - 2n)$

51. Demuestre que un triángulo rectángulo cuyos lados están en progresión aritmética es semejante al triángulo 3-4-5.

52. Encuentre el producto de los números

$$10^{1/10}, 10^{2/10}, 10^{3/10}, 10^{4/10}, \ldots, 10^{19/10}$$

53. Una sucesión es **armónica** si los recíprocos de los términos de la sucesión forman una sucesión aritmética. Determine si la siguiente sucesión es armónica.

$$1, \tfrac{3}{5}, \tfrac{3}{7}, \tfrac{1}{3}, \ldots$$

54. La **media armónica** de dos números es el recíproco del promedio de los recíprocos de los dos números. Encuentre la media armónica de 3 y 5.

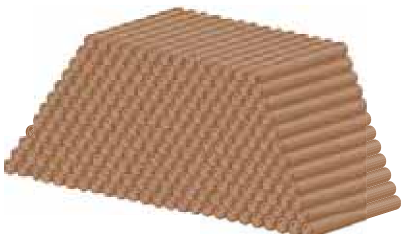
55. Una sucesión aritmética tiene como primer término $a = 5$ y como diferencia común $d = 2$. ¿Cuántos términos de esta sucesión se deben añadir para llegar a 2700?

56. El primer término de una sucesión aritmética es $a_1 = 1$ y el cuarto término es $a_4 = 16$. ¿Cuántos términos de esta sucesión se deben añadir para obtener 2356?

Aplicaciones

57. Depreciación El valor de compra de una computadora de oficina es 12 500 dólares. Su depreciación anual es 1875 dólares. Encuentre el valor de la computadora después de 6 años.

58. Postes apilados Los postes para teléfono se almacenan apilados con 25 postes en la primera capa, 24 en la segunda y así sucesivamente. Si hay doce capas, ¿cuantos postes para teléfono hay apilados?



59. Incrementos al salario Un hombre obtiene un empleo con un salario de 30 000 dólares al año. Le prometieron 2300 dólares de aumento anual en los años siguientes. Calcule el total de lo ganado en un periodo de 10 años.

60. Autocinema Un autocinema tiene espacio para 20 automóviles en la primera fila de estacionamiento, para 22 en la segunda, para 24 en la tercera y así sucesivamente. Si hay 21 filas en el autocinema, calcule la cantidad de automóviles que pueden estacionarse.

61. Lugares en el teatro Un arquitecto diseña un teatro con 15 asientos en la primera fila, 18 en la segunda, 21 en la tercera y así sucesivamente. Si el teatro va a tener una capacidad de 870, ¿cuántas filas debe considerar el arquitecto en su diseño?

62. Caída de una pelota Cuando se deja caer libremente un objeto cerca de la superficie terrestre, la fuerza de la gravedad es tal que el objeto cae a 16 pies en el primer segundo, a 48 pies en el siguiente segundo, a 80 pies en el siguiente segundo y así sucesivamente.

a) Encuentre la distancia total que la pelota recorre en 6 s.

b) Determine una fórmula de la distancia total que la pelota recorre en n segundos.

63. Los doce días de la época de Navidad En la tan bien conocida canción "The Twelve Days of Christmas", una persona le da a su amada k regalos en el k-ésimo día durante cada uno de los doce días de la época de Navidad. Asimismo, la persona da otra vez regalos idénticos a los ya entregados en cada día posterior. Por lo tanto, en el día 12, la amada recibe un regalo por el primer día, dos regalos por el segundo día, tres regalos por el tercer día y así sucesivamente. Demuestre que la cantidad de regalos recibida en el decimosegundo día es una suma parcial de una sucesión aritmética. Calcule la suma.

Descubrimiento • Debate

64. Media aritmética La **media aritmética** o promedio de dos números a y b es

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Observe que m es la misma distancia desde a como desde b, de modo que a, m, b es una sucesión aritmética. En general, si $m_1, m_2, \ldots, m_k$ están igualmente separadas entre a y b de modo que

$$a, m_1, m_2, \ldots, m_k, b$$

es una sucesión aritmética, entonces $m_1, m_2, \ldots, m_k$ se llaman k medias aritméticas entre a y b.

a) Inserte dos medias aritméticas entre 10 y 18.

b) Inserte tres medias aritméticas entre 10 y 18

c) Suponga que un médico necesita incrementar la dosis de un cierto medicamento para un paciente. Necesita pasar de 100 mg a 300 mg por día, repartidos en cinco pasos iguales. ¿Cuántas medias aritméticas tiene que insertar entre 100 y 300 para obtener la progresión de dosis diaria, y cuáles son esas medias?

11.3 Sucesiones geométricas

En esta sección estudiamos las sucesiones geométricas. Este tipo de sucesiones se presenta a menudo en aplicaciones de finanzas, crecimiento de la población y otros campos.

Sucesiones geométricas

Recuerde que una sucesión aritmética se genera cuando añadimos repetidamente un número d a un término inicial a. Una sucesión *geométrica* se genera cuando empezamos con un número a y *multiplicamos* en forma repetida por una constante r, no cero y fija.

Definición de sucesión geométrica

Una **sucesión geométrica** es una sucesión de la forma

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$$

El número a es el **primer término** y r es la **razón común** de la sucesión. El ***n*-ésimo término** de una sucesión geométrica lo da

$$a_n = ar^{n-1}$$

El número r se llama razón común porque la proporción de dos términos consecutivos cualquiera de la sucesión es r.

Ejemplo 1 Sucesiones geométricas

a) Si $a = 3$ y $r = 2$, entonces tenemos la sucesión geométrica

$$3, \quad 3 \cdot 2, \quad 3 \cdot 2^2, \quad 3 \cdot 2^3, \quad 3 \cdot 2^4, \quad \ldots$$

o bien $$3, 6, 12, 24, 48, \ldots$$

Observe que la razón de dos términos consecutivos cualquiera es $r = 2$. El n-ésimo término es $a_n = 3(2)^{n-1}$.

b) La sucesión

$$2, -10, 50, -250, 1250, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 2$ y $r = -5$. Cuando r es negativa, los términos de la sucesión tienen signos alternados. El n-ésimo término es $a_n = 2(-5)^{n-1}$.

c) La sucesión

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$$

es una sucesión geométrica con $a = 1$ y $r = \frac{1}{3}$. El n-ésimo término es $a_n = 1\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

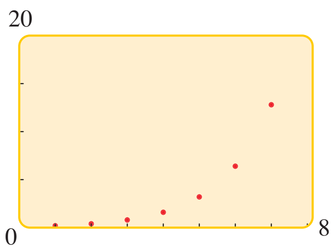


Figura 1

d) La gráfica de la sucesión geométrica $a_n = \frac{1}{5} \cdot 2^{n-1}$ se muestra en la figura 1. Obsérvese que los puntos de la gráfica quedan en la gráfica de la función exponencial $y = \frac{1}{5} \cdot 2^{x-1}$.

Si $0 < r < 1$, entonces los términos de la sucesión geométrica ar^{n-1} disminuye, pero si $r > 1$, entonces los términos se incrementan. (¿Qué sucede si $r = 1$?) ■

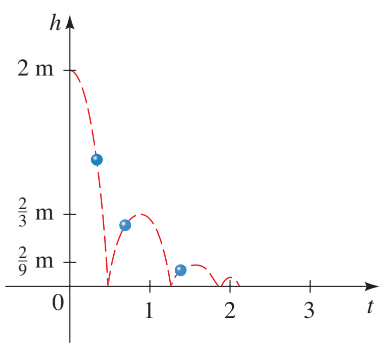


Figura 2

Las sucesiones geométricas se presentan en forma natural. He aquí un ejemplo simple. Suponga que una pelota es tan elástica que cuando se deja caer rebota un tercio de la distancia desde donde cayó. Si esta pelota se deja caer desde una altura de 2 m, entonces rebota a una altura de $2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ m. En un segundo rebote, llega a una altura de $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}$ m, y así sucesivamente (véase la figura 2). Por lo tanto, la altura h_n que la pelota alcanza en su n-ésimo rebote está dada por la sucesión geométrica

$$h_n = \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{n-1} = 2\left(\tfrac{1}{3}\right)^n$$

Se puede determinar el n-ésimo término de una sucesión geométrica si conocemos dos términos cualquiera, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Srinivasa Ramanujan (1887-1920) nació en el seno de una familia humilde en el pequeño poblado de Kumbakonam, en la India. Aprendió matemáticas en forma autodidacta, y trabajó aislado virtualmente de los otros matemáticos. A la edad de 25 años escribió una carta a G. H. Hardy, el principal matemático británico de esa época, en donde le daba una lista de sus descubrimientos. Hardy reconoció de manera inmediata el genio de Ramanujan, y durante los siguientes seis años trabajaron juntos en Londres. Ramanujan enfermó y regresó a su hogar en la India, en donde murió un año después. Ramanujan fue un genio con una habilidad impresionante para ver patrones ocultos en las propiedades de los números. La mayor parte de sus descubrimientos está escrita en la forma de complicadas series infinitas, la importancia de las cuales se reconoció sólo muchos años después de su muerte. Durante el último año de vida escribió 130 páginas de fórmulas misteriosas, muchas de las cuales todavía desafían a las demostraciones. Hardy cuenta la historia de que cuando visitó a Ramanujan en un hospital, llegó en taxi, y remarcó a Ramanujan que el número del taxi, 1729, no era interesante. Ramanujan replicó: "No, es un número muy interesante. Es el número más pequeño que se puede expresar como la suma de dos cubos en dos maneras diferentes." (Véase problema 23 de la página 144.)

Ejemplo 2 Determinación de los términos de una sucesión geométrica

Encuentre el octavo término de la sucesión geométrica 5, 15, 45, . . .

Solución Para calcular una fórmula para el n-ésimo término de esta sucesión, se necesita determinar a y r. Evidentemente, $a = 5$. Para encontrar r, se calcula la razón de dos términos consecutivos cualquiera. Por ejemplo, $r = \frac{45}{15} = 3$. Por lo tanto,

$$a_n = 5(3)^{n-1}$$

El octavo término es $a_8 = 5(3)^{8-1} = 5(3)^7 = 10\,935$. ■

Ejemplo 3 Determinación de una sucesión geométrica

El tercer término de una sucesión geométrica es $\frac{63}{4}$, y el sexto término es $\frac{1701}{32}$. Determine el quinto término.

Solución Puesto que esta sucesión es geométrica, el n-ésimo término se obtiene mediante la fórmula $a_n = ar^{n-1}$. Por lo tanto,

$$a_3 = ar^{3-1} = ar^2$$
$$a_6 = ar^{6-1} = ar^5$$

A partir de los valores que conocemos para estos dos términos, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{63}{4} = ar^2 \\ \frac{1701}{32} = ar^5 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema dividiendo.

$$\frac{ar^5}{ar^2} = \frac{\frac{1701}{32}}{\frac{63}{4}}$$

$$r^3 = \frac{27}{8} \qquad \text{Simplificación}$$

$$r = \frac{3}{2} \qquad \text{Obtención de la raíz cúbica de ambos miembros}$$

Al sustituir r en la primera ecuación, $\frac{63}{4} = ar^2$, obtenemos

$$\frac{63}{4} = a\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$a = 7 \qquad \text{Determinación de } a$$

Se infiere que el n-ésimo término de esta sucesión es

$$a_n = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

Por lo tanto, el quinto término es

$$a_5 = 7\left(\frac{3}{2}\right)^{5-1} = 7\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{567}{16}$$ ■

Sumas parciales de las sucesiones geométricas

En el caso de la sucesión geométrica $a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots, ar^{n-1}, \ldots$, la suma parcial n-ésima es

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1}$$

Para encontrar una fórmula para S_n, multiplicamos S_n por r y restamos de S_n:

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \\ rS_n &= \phantom{a + {}} ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline S_n - rS_n &= a - ar^n \end{aligned}$$

Entonces,

$$S_n(1 - r) = a(1 - r^n)$$

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

Este resultado se resume en el siguiente recuadro.

Sumas parciales de una sucesión geométrica

En el caso de la sucesión geométrica $a_n = ar^{n-1}$, la ***n*-ésima suma parcial**

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} \qquad (r \neq 1)$$

se obtiene mediante

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

Ejemplo 4 Determinación de una suma parcial de una sucesión geométrica

Calcule la suma de los primeros cinco términos de la sucesión geométrica

$$1, 0.7, 0.49, 0.343, \ldots$$

Solución La suma requerida es la suma de los primeros cinco términos de una sucesión geométrica en la que $a = 1$ y $r = 0.7$. Si usamos la fórmula de S_n con $n = 5$, obtenemos

$$S_5 = 1 \cdot \frac{1 - (0.7)^5}{1 - 0.7} = 2.7731$$

Por lo tanto, la suma de los primeros cinco términos de esta sucesión es 2.7731 ■

Ejemplo 5 Determinación de una suma parcial de una sucesión geométrica

Calcule la suma $\sum_{k=1}^{5} 7\left(-\frac{2}{3}\right)^k$.

Solución La suma dada es la quinta suma parcial de una sucesión geométrica en donde $a = 7\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{3}$ y razón común $r = -\frac{2}{3}$. Por consiguiente, de acuerdo con la fórmula de S_n, tenemos

$$S_5 = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = -\frac{14}{3} \cdot \frac{1 + \frac{32}{243}}{\frac{5}{3}} = -\frac{770}{243}$$ ■

¿Qué es una serie infinita?

Una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

recibe el nombre de **serie infinita**. Los puntos quieren decir que la suma continúa de manera indefinida. ¿Qué significado podemos dar a la suma de una cantidad infinita de números? Primero, parece que es imposible sumar infinitamente números y llegar a un número finito. Pero consideremos el problema siguiente. Usted tiene un pastel y quiere comer primero la mitad del pastel, luego comerá la mitad de lo que reste, luego comerá otra vez la mitad del resto. Este proceso puede continuar de manera indefinida porque en cada etapa queda algo de pastel.

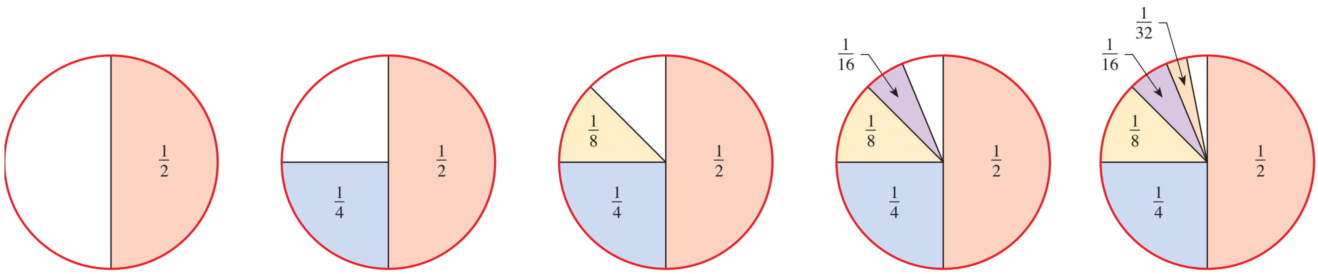


Figura 3

¿Esto significa que es imposible comer todo el pastel? Claro que no. Escribamos lo que usted ha comido de este pastel:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Esta es una serie infinita, y observamos dos cosas acerca de ella. Primero, a partir de la figura 3, es evidente que no importa cuántos términos de esta serie sumemos, el total nunca será mayor que 1. Segundo, entre más términos de esta serie sumemos, la suma será más cercana a 1 (véase la figura 3). Esto lleva a pensar que el número 1 se puede expresar como una suma infinita de números pequeños:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Para precisar más, examinemos las sumas parciales de esta serie:

$$S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

y, en general (véase el ejemplo 5 de la sección 11.1),

$$S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Cuando n se vuelve más y más grande, estamos sumando más y más términos de esta serie. Intuitivamente, cuando n se vuelve más grande, S_n está más cerca de la suma de la serie. Ahora observe que cuando n se vuelve grande, $1/2^n$ se acerca más y más a 0. Por lo tanto, S_n se acerca a $1 - 0 = 1$. Con la notación de la sección 3.6, podemos escribir

$$S_n \to 1 \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty$$

En general, si S_n se acerca más a un número infinito S cuando n se vuelve grande, decimos que S es la **suma de la serie infinita**.

Serie geométrica infinita

Una **serie geométrica infinita** es una serie de la forma

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

Podemos seguir el razonamiento efectuado antes para encontrar la suma de una serie geométrica infinita. La n-ésima suma parcial de tal serie se obtiene mediante la fórmula

$$S_n = a\frac{1 - r^n}{1 - r} \qquad (r \neq 1)$$

Se puede demostrar que si $|r| < 1$, entonces r^n se acerca a 0 cuando n se vuelve más grande (usted mismo se puede convencer fácilmente de esto usando una calculadora). Se infiere que S_n llega a estar más cerca de $a/(1 - r)$ cuando n se vuelve más grande, o bien,

$$S_n \to \frac{a}{1 - r} \qquad \text{cuando} \qquad n \to \infty$$

Por lo tanto, la suma de esta serie geométrica infinita es $a/(1 - r)$.

Aquí está otra manera de llegar a la fórmula de la suma de una serie geométrica infinita:

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots \\ &= a + r(a + ar + ar^2 + \cdots) \\ &= a + rS \end{aligned}$$

Resuelva la ecuación $S = a + rS$ y determine S para llegar a

$$\begin{aligned} S - rS &= a \\ (1 - r)S &= a \\ S &= \frac{a}{1 - r} \end{aligned}$$

Suma de una serie geométrica infinita

Si $|r| < 1$, entonces la serie geométrica infinita

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

tiene la suma

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

Ejemplo 6 Determinación de la suma de una serie geométrica infinita

Calcule la suma de la serie geométrica infinita

$$2 + \frac{2}{5} + \frac{2}{25} + \frac{2}{125} + \cdots + \frac{2}{5^n} + \cdots$$

Solución Aplicamos la fórmula para la suma de una serie geométrica infinita. En este caso, $a = 2$ y $r = \frac{1}{5}$. Por lo tanto, la suma de esta serie infinita es

$$S = \frac{2}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}$$

■

Ejemplo 7 Expresión de un número periódico en la forma de una fracción

Determine la fracción que representa el número racional $2.3\overline{51}$.

Solución Este decimal periódico se puede escribir en la forma de una serie:

$$\frac{23}{10} + \frac{51}{1000} + \frac{51}{100\,000} + \frac{51}{10\,000\,000} + \frac{51}{1\,000\,000\,000} + \cdots$$

Después del primer término, los términos de esta serie forman una serie geométrica infinita en donde

$$a = \frac{51}{1000} \qquad \text{y} \qquad r = \frac{1}{100}$$

Por lo tanto, la suma de esta parte de la serie es

$$S = \frac{\frac{51}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{1000} \cdot \frac{100}{99} = \frac{51}{990}$$

De modo que $$2.3\overline{51} = \frac{23}{10} + \frac{51}{990} = \frac{2328}{990} = \frac{388}{165}$$ ■

11.3 Ejercicios

1–4 ■ Se proporciona el n-ésimo término de una sucesión.

a) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión.

b) ¿Cuál es la razón común r?

c) Grafique los términos que calculó en el inciso a).

1. $a_n = 5(2)^{n-1}$ **2.** $a_n = 3(-4)^{n-1}$

3. $a_n = \frac{5}{2}(-\frac{1}{2})^{n-1}$ **4.** $a_n = 3^{n-1}$

5–8 ■ Calcule el n-ésimo término de la sucesión geométrica dados el primer término a y la razón común r. ¿Cuál es el cuarto término?

5. $a = 3, \quad r = 5$ **6.** $a = -6, \quad r = 3$

7. $a = \frac{5}{2}, \quad r = -\frac{1}{2}$ **8.** $a = \sqrt{3}, \quad r = \sqrt{3}$

9–16 ■ Determine si la sucesión es geométrica. Si es así, calcule la razón común.

9. $2, 4, 8, 16, \ldots$ **10.** $2, 6, 18, 36, \ldots$

11. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ **12.** $27, -9, 3, -1, \ldots$

13. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ **14.** $e^2, e^4, e^6, e^8, \ldots$

15. $1.0, 1.1, 1.21, 1.331, \ldots$ **16.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$

17–22 ■ Calcule los primeros cinco términos de la sucesión, y determine si es geométrica. Si es así, determine la razón común y exprese el n-ésimo término de la sucesión en la forma estándar $a_n = ar^{n-1}$.

17. $a_n = 2(3)^n$ **18.** $a_n = 4 + 3^n$

19. $a_n = \dfrac{1}{4^n}$ **20.** $a_n = (-1)^n 2^n$

21. $a_n = \ln(5^{n-1})$ **22.** $a_n = n^n$

23–32 ■ Determine la razón común, el quinto término y el n-ésimo término de la sucesión geométrica.

23. $2, 6, 18, 54, \ldots$ **24.** $7, \frac{14}{3}, \frac{28}{9}, \frac{56}{27}, \ldots$

25. $0.3, -0.09, 0.027, -0.0081, \ldots$

26. $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, \ldots$

27. $144, -12, 1, -\frac{1}{12}, \ldots$ **28.** $-8, -2, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \ldots$

29. $3, 3^{5/3}, 3^{7/3}, 27, \ldots$ **30.** $t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{4}, \dfrac{t^4}{8}, \ldots$

31. $1, s^{2/7}, s^{4/7}, s^{6/7}, \ldots$ **32.** $5, 5^{c+1}, 5^{2c+1}, 5^{3c+1}, \ldots$

33. El primer término de una sucesión geométrica es 8 y el segundo término es 4. Determine el quinto término.

34. El primer término de una sucesión geométrica es 3 y el tercer término es $\frac{4}{3}$. Determine el quinto término.

35. La razón común de una sucesión geométrica es $\frac{2}{5}$ y el quinto término es $\frac{5}{2}$. Determine el tercer término.

36. La razón común de una sucesión geométrica es $\frac{3}{2}$ y el quinto término es 1. Determine los primeros tres términos.

37. ¿Qué término de la sucesión geométrica 2, 6, 18, . . . es 118 098?

38. El segundo y el quinto términos de una sucesión geométrica son 10 y 1250, respectivamente. ¿Es 31 250 un término de esta sucesión? Si es así, ¿qué término es?

39–42 ■ Calcule la suma parcial S_n de la sucesión geométrica que cumple con las condiciones dadas.

39. $a = 5, \quad r = 2, \quad n = 6$ **40.** $a = \frac{2}{3}, \quad r = \frac{1}{3}, \quad n = 4$

41. $a_3 = 28, \quad a_6 = 224, \quad n = 6$

42. $a_2 = 0.12, \quad a_5 = 0.00096, \quad n = 4$

43–46 ■ Calcule la suma.

43. $1 + 3 + 9 + \cdots + 2187$

44. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots - \frac{1}{512}$

45. $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} 3\left(\tfrac{1}{2}\right)^k$ **46.** $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} 7\left(\tfrac{3}{2}\right)^j$

47–54 ■ Calcule la suma de la serie geométrica infinita.

47. $1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{27} + \cdots$ **48.** $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \cdots$

49. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$ **50.** $\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \cdots$

51. $\frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{3^{12}} + \cdots$

52. $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \cdots$

53. $-\frac{100}{9} + \frac{10}{3} - 1 + \frac{3}{10} - \cdots$

54. $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \cdots$

55–60 ■ Exprese el número decimal periódico en la forma de una fracción.

55. $0.777\ldots$ **56.** $0.2\overline{53}$

57. $0.030303\ldots$ **58.** $2.11\overline{25}$

59. $0.\overline{112}$ **60.** $0.123123123\ldots$

61. Si los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ forman una sucesión geométrica, entonces $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ son **medias geométricas** entre a_1 y a_n. Inserte tres medias geométricas entre 5 y 80.

62. Determine la suma de los primeros 10 términos de la sucesión

$$a + b, a^2 + 2b, a^3 + 3b, a^4 + 4b, \ldots$$

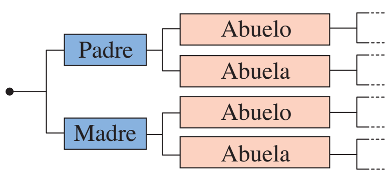
Aplicaciones

63. Depreciación Una constructora compra una pala mecánica por 160 000 dólares. El valor de la pala se deprecia cada año 20% de su valor del año anterior. Sea V_n el valor de la pala mecánica en el n-ésimo año. (Sea $n = 1$ el año en que se compró la pala.)

a) Determine una fórmula para V_n.

b) ¿En qué año el valor de la pala mecánica será menor de 100 000 dólares?

64. Árbol genealógico Una persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos y así sucesivamente. ¿Cuántos ancestros tiene una persona que pertenece a la 15a. generación?

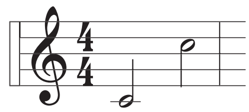


65. Rebote de una pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 80 pies. La elasticidad de esta pelota es tal que rebota tres cuartas partes de la distancia desde donde cayó. ¿Qué tan alto rebota la pelota en el quinto rebote? Determine una fórmula para la altura que alcanza la pelota en el n-ésimo rebote.

66. Cultivo de bacterias Una cultivo tiene al principio 5000 bacterias, su tamaño aumenta 8% cada hora. ¿Cuántas bacterias hay al final de 5 h? Determine una fórmula que dé la cantidad de bacterias después de n horas.

67. Mezcla de refrigerantes Un radiador de un camión tiene una capacidad de 5 galones y se llena con agua. Se extrae un galón de agua del radiador y se reemplaza con un galón de anticongelante; luego se extrae un galón de la mezcla y se reemplaza con un galón de anticongelante. Este proceso se repite indefinidamente. ¿Cuánta agua queda en el radiador después de que este proceso se repite tres veces? ¿Cinco veces? ¿n veces?

68. Frecuencias musicales Las frecuencias de las notas musicales, medidas en ciclos por segundo, forman una sucesión geométrica. Do mayor tiene una frecuencia de 256, y Do, que es una octava más alta, tiene una frecuencia de 512. Encuentre la frecuencia de Do dos octavas abajo de Do mayor.



69. Rebote de pelota Una pelota se deja caer desde una altura de 9 pies. La elasticidad de la pelota es tal que siempre rebota un tercio de la distancia desde donde cayó.

a) Determine la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que golpea el suelo por quinta vez.

b) Determine una fórmula para la distancia total que la pelota ha recorrido en el instante en que golpea el suelo por n-ésima vez.

70. Plan de ahorro geométrico Una mujer muy paciente desea volverse millonaria. Decide seguir un simple esquema: aparta un centavo el primer día, 2 centavos el segundo, 4 centavos el tercero y así sucesivamente, duplicando la cantidad de centavos cada día. ¿Cuánto dinero tendrá a los 30 días? ¿Cuántos días necesitará esta mujer para volver su deseo realidad?

71. St. Ives La siguiente es una canción infantil muy bien conocida:

Voy hacia St. Ives
Me encontré a un hombre y sus siete esposas;
Cada esposa llevaba siete sacos;
Cada saco contenía siete gatos;
Cada gato tenía siete gatitos:
Gatitos, gatos, sacos y esposas,
¿Cuántos iban hacia St. Ives?

Si suponemos que el grupo completo en realidad iban para St. Ives, demuestre que la respuesta a la pregunta de la cancioncilla es una suma parcial de una sucesión geométrica, y determine la suma.

72. Concentración de medicamentos Un cierto medicamento se administra una vez al día. La concentración del medicamento en el torrente sanguíneo del paciente se incrementa primero con rapidez, pero cada dosis sucesiva tiene menos efecto que la anterior. La cantidad total del medicamento, en mg, en el torrente sanguíneo después de la n-ésima dosis se obtiene con

$$\sum_{k=1}^{n} 50\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}$$

a) Determine la cantidad de medicamento en el torrente sanguíneo después de $n = 10$ días.

b) Si el paciente tomara el medicamento durante un largo periodo, la cantidad en el torrente sanguíneo es aproximadamente el valor de la serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} 50\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Determine la suma de esta serie.

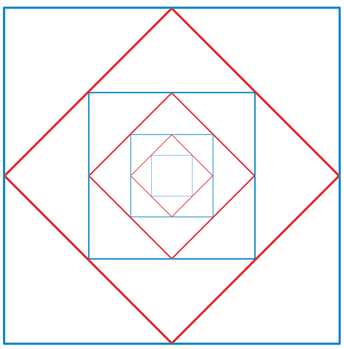
73. Rebote de una pelota Una cierta pelota rebota a la mitad de la altura desde donde cayó. Utilice una serie geométrica infinita para obtener un valor aproximado de la distancia total que recorre la pelota después de ser dejada caer desde 1 m por arriba del suelo, hasta que llega al reposo.

74. Rebote de una pelota Si la pelota del ejercicio 73 se deja caer de una altura de 8 pies, entonces se requiere 1 s para su primer rebote completo —desde el instante que toca por primera vez el suelo hasta que lo vuelve a tocar—. Cada rebote completo posterior requiere $1/\sqrt{2}$ tanto como el rebote precedente completo. Utilice una serie geométrica infinita para estimar el tiempo desde el instante en que la pelota toca por primera vez el suelo hasta que deja de rebotar.

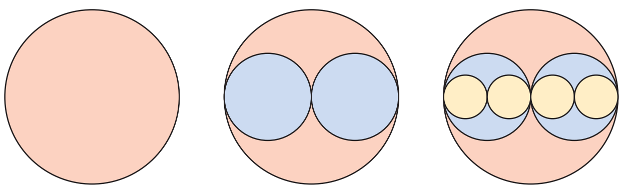
75. Geometría Los puntos medios de los lados de un cuadrado de lado 1 se unen para formar un nuevo cuadrado. Este procedimiento se repite para cada nuevo cuadrado. (Véase la figura.)

a) Determine la suma de las áreas de todos los cuadrados.

b) Calcule la suma de los perímetros de todos los cuadrados.

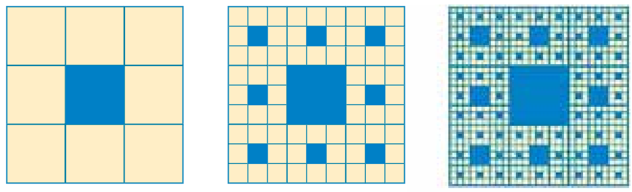


76. Geometría Se recorta un disco circular de radio R de un papel, como se muestra en la figura a). Se recortan otros dos discos de radio $\frac{1}{2}R$ de otro papel, y se colocan sobre el primer disco, según la figura b), y luego se colocan otros cuatro discos de radio igual a $\frac{1}{4}R$ se colocan sobre los dos discos anteriores (figura c). Si suponemos que este proceso se puede repetir de manera indefinida, calcule el área total de todos los discos.



a) b) c)

77. Geometría Un cuadrado amarillo de lado 1 se divide en nueve cuadritos, y el cuadro del centro se colorea de azul como se ilustra en la figura. Cada uno de los cuadritos amarillos se divide a su vez en otros nueve cuadritos, y cada cuadrito del centro se colorea de azul. Si este proceso continúa indefinidamente, ¿cuál es el total del área coloreada de azul?



Descubrimiento • Debate

78. ¿Aritmética o geométrica? Se proporcionan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si estos términos pueden ser términos de una sucesión aritmética, de una sucesión geométrica o de ninguna de las dos. Determine el siguiente término si la sucesión es aritmética o geométrica.

a) $5, -3, 5, -3, \ldots$ **b)** $\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \ldots$

c) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$ **d)** $1, -1, 1, -1, \ldots$

e) $2, -1, \frac{1}{2}, 2, \ldots$ **f)** $x - 1, x, x + 1, x + 2, \ldots$

g) $-3, -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, \ldots$ **h)** $\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[6]{5}, 1, \ldots$

79. Recíprocos de una sucesión geométrica Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común r, demuestre que la sucesión

$$\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots$$

es también una sucesión geométrica y calcule la razón común.

80. Logaritmos de una sucesión geométrica Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común $r > 0$ y $a_1 > 0$, demuestre que la sucesión

$$\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots$$

es una sucesión aritmética y determine la diferencia común.

81. Exponenciales de una sucesión aritmética Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética con diferencia común d, demuestre que la sucesión

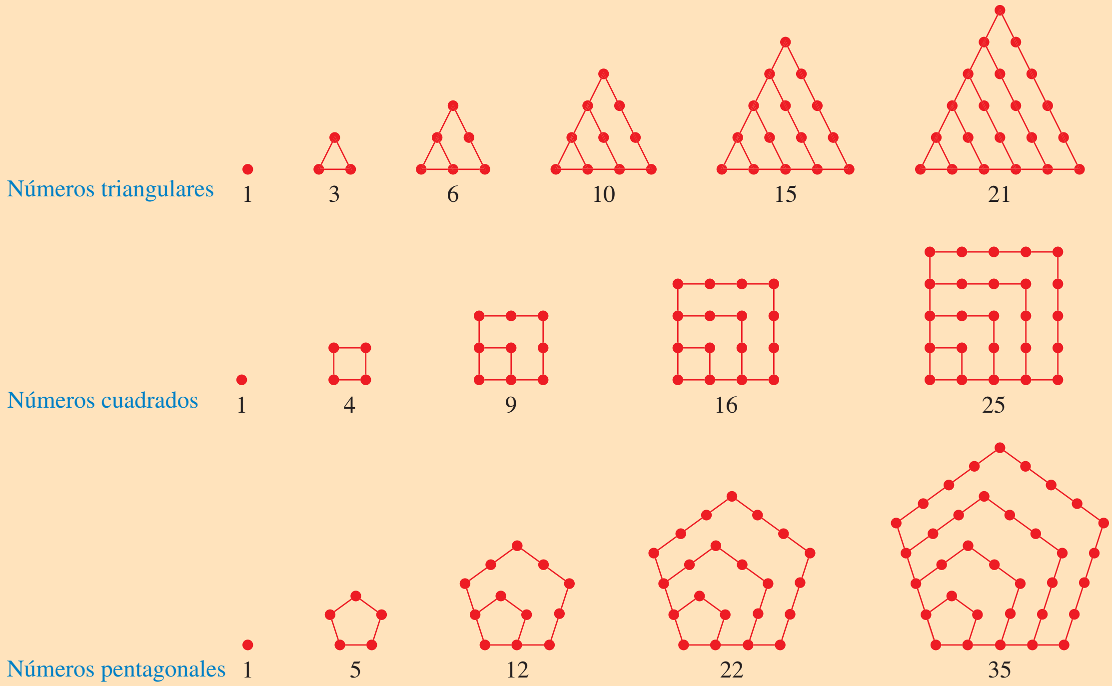
$$10^{a_1}, 10^{a_2}, 10^{a_3}, \ldots$$

es una sucesión geométrica y determine la razón común.

PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

Determinación de patrones

Los antiguos griegos estudiaron los números triangulares, los números cuadrados, los números pentagonales y otros **números poligonales**, como los que se ilustran en las figuras.



Con el fin de encontrar tales números, se construye una **sucesión de primeras diferencias** obteniendo las diferencias de términos sucesivos; se repite el proceso para obtener una **sucesión de segundas diferencias**, una **sucesión de terceras diferencias** y así sucesivamente. Por lo que se refiere a la sucesión de los números triangulares T_n se obtiene la siguiente **tabla de diferencias**:

Números triangulares	1		3		6		10		15		21
Primeras diferencias		2		3		4		5		6	
Segundas diferencias			1		1		1		1		

Nos detenemos en la sucesión de segundas diferencias porque es una sucesión constante. Si suponemos que esta sucesión continuará hasta tener un valor constante 1, podemos trabajar hacia atrás desde el renglón inferior para encontrar más términos de la sucesión de primeras diferencias, y, a partir de éstos, más números triangulares.

Si una sucesión está dada por una función polinomial y si calculamos las primeras diferencias, las segundas diferencias, las terceras diferencias y así sucesivamente, entonces obtenemos con el tiempo una sucesión constante. Por ejemplo, los números triangulares se obtienen por medio del polinomio $T_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ (véase la nota al margen de la página siguiente); la sucesión de las segundas diferencias es la sucesión constante 1, 1, 1, . . .

La fórmula para el número triangular n-ésimo se puede determinar aplicando la fórmula de la suma de los primeros n números enteros (ejemplo 2, sección 11.5). A partir de la definición de T_n tenemos

$$\begin{aligned} T_n &= 1 + 2 + \cdots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \end{aligned}$$

1. Construya una tabla de diferencias para los números cuadrados y los números pentagonales. Utilice la tabla para determinar el décimo número pentagonal.

2. De acuerdo con los patrones que ha observado antes, ¿cuál según usted sería la segunda diferencia para los *números hexagonales*? Aplique esto junto con el hecho de que los primeros dos números hexagonales son 1 y 6 para determinar los primeros ocho números hexagonales.

3. Construya tablas de diferencias para $C_n = n^3$. ¿Qué sucesión de diferencias es constante? Haga lo mismo para $F_n = n^4$.

4. Forme un polinomio de grado 5 y construya una tabla de diferencias. ¿Cuál sucesión de diferencias es constante?

5. Unos de los primeros términos de una sucesión polinomial son 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, ... Construya una tabla de diferencias y utilícela para determinar cuatro términos más de esta sucesión.

11.4 Matemáticas financieras

Muchas transacciones financieras se relacionan con pagos que se efectúan a intervalos regulares. Por ejemplo, si usted deposita 100 dólares cada mes en una cuenta que genera intereses, ¿cuál será el valor de su cuenta a los cinco años? Si pide prestados 100 000 dólares para comprar una casa, ¿cuánto debe pagar al mes con el fin de liquidar el préstamo en 30 años? Cada una de estas cuestiones se relaciona con la suma de una sucesión de números. Usamos los resultados de la sección anterior para responder aquí a dichas cuestiones.

La cantidad de una anualidad o pago parcial

Una **anualidad** es una cantidad de dinero que se entrega en pagos regulares iguales. Aunque la palabra anualidad sugiera pagos anuales, los pagos pueden ser semestrales, trimestrales, mensuales o seguir algún otro intervalo regular. Los pagos se efectúan por lo regular al final del intervalo de pago. La **cantidad de una anualidad o parcialidad** es la suma de todos los pagos individuales desde el momento del primer pago hasta que se efectúa el último pago, junto con todos los intereses. Denotamos esta suma con A_f (el subíndice f que se usa es para denotar la cantidad *final*).

Ejemplo 1 Cálculo de la cantidad de un pago

Un inversionista deposita 400 dólares cada 15 de diciembre y 15 de junio durante 10 años en una cuenta que gana intereses de 8% al año, compuesto semestralmente. ¿Cuánto habrá en la cuenta inmediatamente después del último pago?

Cuando use tasa de interés en una calculadora, recuerde convertir los porcentajes en decimales. Por ejemplo, 8% es 0.08.

Solución Es necesario determinar la cantidad que consiste en 20 pagos semestrales de 400 dólares cada uno. Puesto que la tasa de interés es de 8% al año, compuesto semestralmente, la tasa de interés por periodo es $i = 0.08/2 = 0.04$. El primer pago está en la cuenta durante 19 periodos, el segundo durante 18 periodos, etcétera.

El último pago no recibe interés. La situación se ilustra mediante una línea de tiempo en la figura 1.

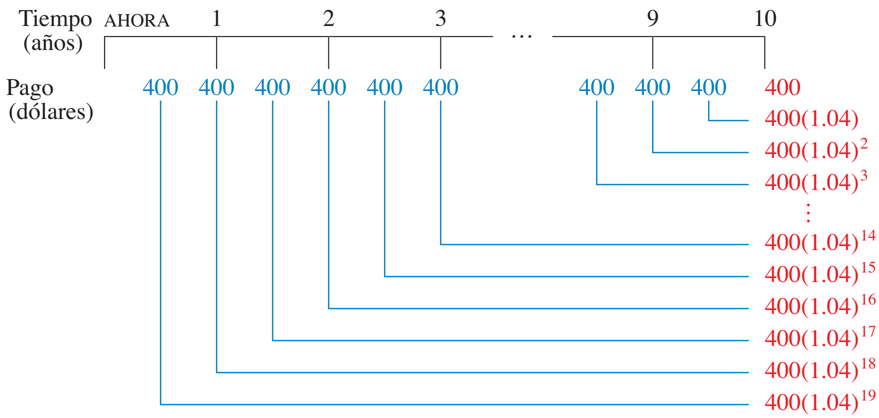


Figura 1

La cantidad A_f es la suma de estas 20 cantidades. Por lo tanto,

$$A_f = 400 + 400(1.04) + 400(1.04)^2 + \cdots + 400(1.04)^{19}$$

Pero esta es una serie geométrica donde $a = 400$, $r = 1.04$ y $n = 20$, de modo que

$$A_f = 400\,\frac{1 - (1.04)^{20}}{1 - 1.04} \approx 11\,911.23$$

Por lo tanto, la cantidad que hay en la cuenta después del último pago es de 11 911.23 dólares. ■

En general, el pago regular se llama **renta periódica**, y se denota con R. Asimismo, con i denotamos la tasa de interés por periodo y n el número de pagos. *Siempre suponemos que el periodo en el cual el interés está compuesto es igual al tiempo entre pagos.* De acuerdo con el mismo razonamiento del ejemplo 1, vemos que la cantidad A_f de una anualidad es

$$A_f = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

Puesto que ésta es la n-ésima suma parcial de una sucesión geométrica donde $a = R$ y $r = 1 + i$, la fórmula de la suma parcial da

$$A_f = R\,\frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = R\,\frac{1 - (1 + i)^n}{-i} = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Cantidad de una anualidad

La cantidad A_f de una anualidad que consiste de n pagos regulares iguales de magnitud R con tasa de interés i por periodo está dada por

$$A_f = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Matemáticas en el mundo moderno

Economía matemática

Factores interrelacionados, como abasto, demanda, producción, consumo, precios, distribución y miles de otros factores determinan la salud de la economía global. A su vez, decisiones económicas (como por ejemplo, si usted compra o no una marca de pasta dental), que toman todos los días miles de millones de personas determinan dichos factores. ¿Cómo afectan la producción y distribución de bienes de hoy la economía de mañana? A estas preguntas dan respuesta los matemáticos que trabajan en modelos matemáticos relacionados con la economía. En la década de 1940, Wassily Leontiev, uno de los pioneros en este campo, ideó un modelo que consta de miles de ecuaciones, que describen la manera cómo interactúan distintos sectores de la economía, como la industria del petróleo, el transporte y las comunicaciones. Un enfoque diferente a los modelos económicos, uno que trata con sectores individuales en la economía en contraposición con los grandes sectores, fue abordado por primera vez por John Nash en la década de 1950. De acuerdo con su modelo, en el cual aplica la *Teoría de juegos*, la economía es un juego en el cual jugadores individuales toman decisiones que con frecuencia llevan a una ganancia mutua. Leontiev y Nash recibieron el Premio Nobel de Economía en 1973 y 1994, respectivamente. La teoría económica será un campo primordial de la investigación matemática.

Ejemplo 2 Cálculo de la cantidad de un pago

¿Cuánto dinero debe ser invertido cada mes al 12% anual, compuesto mensualmente, para tener 4000 dólares en 18 meses?

Solución En este problema $i = 0.12/12 = 0.01$, $A_f = 4000$ y $n = 18$. Es necesario determinar la cantidad R de cada mensualidad. Mediante la fórmula de la cantidad de una anualidad,

$$4000 = R\,\frac{(1 + 0.01)^{18} - 1}{0.01}$$

Si despejamos R, tenemos

$$R = \frac{4000(0.01)}{(1 + 0.01)^{18} - 1} \approx 203.928$$

Por lo tanto, la inversión mensual debe ser de 203.93 dólares. ■

Valor actual de una anualidad

Si usted fuera a recibir 10 000 dólares dentro de cinco años, valdrían menos que 10 000 dólares de hoy. Esto se debe al interés que usted podría acumular durante los siguientes cinco años si invierte el dinero ahora. ¿Qué cantidad menor estaría dispuesto a aceptar *ahora* en lugar de recibir 10 000 dentro de cinco años? Esta es la cantidad de dinero que, junto con los intereses, valdría 10 000 dólares dentro de cinco años. La cantidad que estamos buscando es *el valor descontado* o *valor actual.* Si la tasa de interés es 8% anual, compuesto trimestralmente, entonces el interés por periodo es $i = 0.08/4 = 0.02$, y son $4 \times 5 = 20$ periodos. Si PV es el valor actual, entonces de acuerdo con la fórmula de interés compuesto (sección 4.1) tenemos

$$10\,000 = PV(1 + i)^n = PV(1 + 0.02)^{20}$$

de modo que

$$PV = 10\,000(1 + 0.02)^{-20} \approx 6729.713$$

Por lo tanto, en esta situación, el valor actual de 10 000 dólares es 6729.71 dólares. Este razonamiento origina la fórmula general para el valor actual:

$$PV = A(1 + i)^{-n}$$

De igual manera, el **valor actual** de una anualidad es la cantidad A_p que se debe invertir ahora a una tasa de interés i por periodo con objeto de proporcionar n pagos, cada uno de una cantidad R. Evidentemente, A_p es la suma de los valores actuales o presentes de cada pago individual (véase el ejercicio 22). Otra manera de determinar A_p es observar que A_p es el valor actual de A_f:

$$A_p = A_f(1 + i)^{-n} = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}(1 + i)^{-n} = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Valor actual de una anualidad

El **valor actual** de A_p de una anualidad que consiste en n pagos regulares de magnitud R y tasa de interés i por periodo está dado por

$$A_p = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Ejemplo 3 Cálculo del valor actual de una anualidad

Una persona gana 10 000 000 de dólares en la lotería de California, pero la cantidad se paga en pagos parciales anuales de medio millón de dólares durante 20 años. ¿Cuál es el valor actual de su premio? Suponga que esta persona puede ganar 10% de interés, compuesto anualmente.

Solución Puesto que la cantidad ganada se paga en parcialidades, es necesario determinar el valor actual. En este caso, $i = 0.1$, $R = 500\,000$ y $n = 20$. Por lo tanto,

$$A_p = 500\,000\,\frac{1 - (1 + 0.1)^{-20}}{0.1} \approx 4\,256\,781.859$$

Esto quiere decir que el ganador realmente gana sólo 4 256 781.86 dólares si se le entregan en forma inmediata. ■

Compras a plazos

Cuando compra una casa o un automóvil a plazos, los pagos que efectúa son un pago parcial cuyo valor actual es la cantidad del préstamo.

Ejemplo 4 Cantidad de un préstamo

Un estudiante desea comprar un automóvil. Él puede pagar 200 dólares por mes, pero no tiene dinero para pagar al contado. Si puede efectuar estos pagos durante cuatro años y la tasa de interés es 12%, ¿qué precio de compra puede pagar?

Solución Los pagos que el estudiante puede efectuar constituyen una parcialidad cuyo valor actual o presente es el precio del automóvil (que es también la cantidad del préstamo, en este caso). Por tanto, $i = 0.12/12 = 0.01$, $R = 200$, $n = 12 \times 4 = 48$, de modo que

$$A_p = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = 200\,\frac{1 - (1 + 0.01)^{-48}}{0.01} \approx 7594.792$$

Por consiguiente, el estudiante puede comprar un automóvil a 7594.79 dólares. ■

Cuando un banco hace un préstamo que se tendrá que devolver con pagos regulares iguales R, entonces los pagos constituyen una "anualidad" o parcialidad cuyo valor actual A_p es la cantidad del préstamo. Entonces, para calcular la magnitud de los pagos, despejamos R de la fórmula para la cantidad de una parcialidad. Esto da la fórmula siguiente para R.

Compras a plazos

Si un préstamo A_p se va a liquidar en n pagos regulares e iguales con un interés i por periodo, entonces la magnitud de R de cada pago es

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Ejemplo 5 Cálculo de los pagos mensuales de una hipoteca

Una pareja pide prestados 100 000 dólares al 9% de interés como hipoteca sobre una casa. Espera hacer pagos mensuales durante 30 años para liquidar el préstamo. ¿Cuál es la cantidad de cada pago?

Solución Los pagos de la hipoteca forman una parcialidad cuyo valor presente es $A_p = 100\,000$ dólares. Además, $i = 0.09/12 = 0.0075$ y $n = 12 \times 30 = 360$. Estamos buscando la cantidad R de cada pago. De acuerdo con la fórmula para comprar a plazos tenemos

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

$$= \frac{(0.0075)(100\,000)}{1 - (1 + 0.0075)^{-360}} \approx 804.623$$

Por lo tanto, los pagos mensuales son de 804.62 dólares. ■

Ahora se ilustra el uso de las calculadoras que grafican para la resolución de problemas relacionados con las compras a plazos.

Ejemplo 6 Cálculo de la tasa de interés a partir de la magnitud de los pagos mensuales

Un comerciante de automóviles vende un vehículo nuevo por 18 000 dólares. Ofrece al comprador pagos de 405 dólares por mes durante 5 años. ¿Qué tasa de interés está cargando el comerciante?

Solución Los pagos forman una cantidad con valor actual $A_p = \$18\,000$, $R = 405$ y $n = 12 \times 5 = 60$. Para calcular la tasa de interés, debemos determinar i en la ecuación

$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Un poco de experimentación lo convencerá de que es imposible resolver esta ecuación algebraicamente para determinar i. Entonces, para determinar i recurrimos a una calculadora que grafique R en función de la tasa de interés x, y luego usamos la gráfica para encontrar la tasa de interés que corresponde al valor de R que queremos (405 dólares en este caso). Puesto que $i = x/12$, graficamos la función

$$R(x) = \frac{\frac{x}{12}(18\,000)}{1 - \left(1 + \frac{x}{12}\right)^{-60}}$$

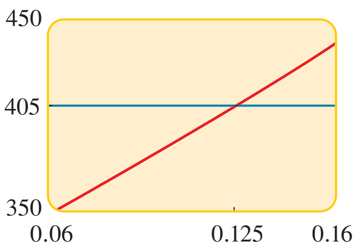


Figura 2

en el rectángulo de visión $[0.06, 0.16] \times [350, 450]$, como se muestra en la figura 2. Asimismo, graficamos la recta horizontal $R(x) = 405$ en el mismo rectángulo de visión. Luego desplazamos el cursor hasta el punto de intersección de las dos gráficas, y encontramos que el valor de x correspondiente es de casi 0.125. Por lo tanto, la tasa de interés es casi $12\frac{1}{2}\%$. ■

11.4 Ejercicios

1. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 10 pagos anuales de 1000 dólares cada uno en una cuenta que ofrece 6% de interés al año.
2. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 24 pagos mensuales de 500 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés al año, compuesto mensualmente.
3. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 20 pagos anuales de 5000 dólares cada uno en una cuenta que da 12% de interés al año.
4. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 20 pagos semestrales de 500 dólares cada uno en una cuenta que ofrece 6% de interés al año, compuesto semestralmente.
5. **Anualidad** Determine la cantidad de una anualidad que consiste en 16 pagos trimestrales de 300 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés al año, compuesto trimestralmente.
6. **Ahorros** ¿Cuánto dinero se tiene que invertir cada trimestre al 10% anual, compuesto trimestralmente, con objeto de reunir 5000 dólares en dos años?
7. **Ahorros** ¿Cuánto dinero se tiene que invertir cada mes al 6% anual, compuesto mensualmente, con objeto de reunir 2000 dólares en ocho meses?
8. **Anualidad** ¿Cual es el valor actual de una anualidad que consiste en 20 pagos semestrales de 1000 dólares a una tasa de interés de 9% al año, compuesto semestralmente?
9. **Garantía de una anualidad** ¿Cuánto dinero se tiene que invertir ahora a 9% anual, compuesto semestralmente, para garantizar una anualidad de 20 pagos de 200 dólares cada uno, entregados cada seis meses, en donde el primer pago se dará dentro de 6 meses a partir de ahora?
10. **Garantía de una anualidad** Un hombre de 55 años deposita 50 000 dólares para garantizar una anualidad con una compañía de seguros. El dinero se invertirá a 8% anual, compuesto semestralmente. El hombre retirará pagos semestrales hasta que llegue a la edad de 65 años. ¿Cuál es la magnitud de cada retiro?
11. **Financiamiento de un automóvil** Una mujer quiere pedir prestados 12 000 dólares con el fin de comprar un automóvil. Quiere liquidar el préstamo con pagos parciales mensuales durante 4 años. Si la tasa de interés sobre este préstamo es de $10\frac{1}{2}\%$ al año, compuesto mensualmente, ¿cuál es la cantidad que tendrá que pagar cada vez?
12. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 30 años de 80 000 dólares al 9% de interés? ¿Cuál es el pago mensual para la misma hipoteca si se tiene que liquidar en un periodo de 15 años?
13. **Hipoteca** ¿Cuál es el pago mensual sobre una hipoteca de 30 años de 100 000 dólares al 8% de interés anual, compuesto mensualmente? ¿Cuál es la cantidad total pagada sobre este préstamo en el periodo de 30 años?
14. **Hipoteca** Una pareja puede pagar mensualmente 650 dólares por una hipoteca. Si la tasa de interés de la hipoteca es de 9% y la pareja pretende garantizar una hipoteca de 30 años, ¿cuánto dinero pueden pedir prestado?
15. **Hipoteca** Una pareja obtiene un préstamo a 30 años de 100 000 dólares a $9\frac{3}{4}\%$ anual, compuesto mensualmente, para comprar una casa.
    a) ¿Cuánto tiene que pagar cada mes?
    b) ¿Cuál será la cantidad total pagada en el periodo de 30 años?
    c) Si en lugar de pedir prestado la pareja deposita cada mes en una cuenta que ofrece el $9\frac{3}{4}\%$ de interés al año, compuesto mensualmente, ¿cuánto habrá en la cuenta al final del periodo de 30 años?
16. **Financiamiento de un automóvil** Jane está de acuerdo en comprar un vehículo mediante un pago inmediato de 2000 dólares y pagos mensuales de 220 dólares durante 3 años. Si la tasa de interés es de 8% al año, compuesto mensualmente, ¿cuál es el precio de compra real del automóvil?
17. **Financiamiento de un anillo** Mike compra un anillo para su prometida mediante pagos de 30 dólares mensuales durante un año. Si la tasa de interés es de 10% anual, compuesto mensualmente, ¿cuál es el precio del anillo?
18. **Tasa de interés** Los pagos de Jane sobre su automóvil de 12 500 dólares son de 420 dólares al mes durante tres años. Suponga que el interés está compuesto mensualmente, ¿qué tasa de interés está pagando en el préstamo de su vehículo?
19. **Tasa de interés** John compra un equipo estereofónico de 640 dólares. Está de acuerdo en pagar 32 dólares cada mes durante dos años. Si suponemos que el interés está compuesto mensualmente, ¿qué tasa de interés está pagando?
20. **Tasa de interés** Un hombre compra un anillo de diamantes de 2000 dólares mediante un pago al contado de 200 dólares y parcialidades mensuales de 88 dólares durante 2 años. Suponga que el interés está compuesto mensualmente, entonces ¿qué tasa de interés está pagando?
21. **Tasa de interés** Un artículo en una tienda tiene el precio de 189.99 dólares y se puede comprar efectuando 20 pagos de 10.50 dólares. Determine la tasa de interés, suponiendo que el interés está compuesto mensualmente.

Descubrimiento • Debate

22. **Valor actual de una anualidad** **a)** Dibuje una línea de tiempo como en el ejemplo 1 para ilustrar que el valor presente de una anualidad es la suma de los valores presentes de cada pago, es decir,

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n}$$

    b) Mediante el inciso a) deduzca la fórmula para A_p que se proporciona en el texto..
23. **Una anualidad que dura por siempre** Una anualidad a perpetuidad es aquella que continúa por siempre. Estas anualidades son útiles para establecer fondos para becas con el fin de asegurar que el beneficio continúa.

a) Trace una línea de tiempo como la del ejemplo 1 para mostrar que para establecer una anualidad a perpetuidad de una cantidad R por periodo, la cantidad que se tiene que invertir ahora es

$$A_p = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{R}{(1+i)^n} + \cdots$$

donde i es la tasa de interés por periodo.

b) Calcule la suma de la serie infinita del inciso a) para demostrar que

$$A_p = \frac{R}{i}$$

c) ¿Cuánto dinero se tiene que invertir ahora al 10% anual, compuesto anualmente, para proporcionar una anualidad a perpetuidad de 5000 dólares por año? El primer pago se tiene que hacer en un año.

d) ¿Cuánto dinero se tiene que invertir ahora al 8% anual, compuesto trimestralmente, para que proporcione una anualidad a perpetuidad de 3000 dólares al año? El primer pago se tiene que hacer en un año.

24. Amortización de una hipoteca Cuando compraron su casa, John y Mary tomaron una hipoteca de 90 000 dólares al 9% de interés, con pagos mensuales durante 30 años. Su pago es de 724.17 dólares por mes (compruébelo mediante la fórmula del texto). El banco les proporcionó un **calendario de amortización**, que es una tabla en la que se muestra cuánto del pago es interés, cuánto va hacia el principal y el principal restante después de cada pago. En la tabla siguiente se muestran los primeros pagos en el calendario de la amortización.

Número de pago	Pago total	Pago de intereses	Pago del principal	Principal restante
1	724.17	675.00	49.17	89,950.83
2	724.17	674.63	49.54	89,901.29
3	724.17	674.26	49.91	89,851.38
4	724.17	673.89	50.28	89,801.10

Después de 10 años, han efectuado 120 pagos y se preguntan cuánto deben todavía, pues ya perdieron el calendario de amortización.

a) ¿Cuánto deben todavía John y Mary de su hipoteca? [*Sugerencia*: el balance restante es el valor actual de los pagos 240 restantes.]

b) ¿Cuánto de su siguiente pago es interés y cuánto va al principal? [*Sugerencia*: puesto que $9\% \div 12 = 0.75\%$, tienen que pagar 0.75% del principal restante en interés cada mes.]

11.5 Inducción matemática

Hay dos aspectos relacionados con las matemáticas: descubrimiento y demostración, y ambos tienen igual importancia. Se tiene que descubrir algo antes de intentar probarlo, y sólo es posible tener la certidumbre de su verdad una vez que se haya demostrado. En esta sección examinamos con mayor profundidad la relación entre estos dos componentes clave de las matemáticas.

Conjeturas y demostraciones

Hagamos un experimento sencillo. Sumemos más y más de los números impares como sigue:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1 + 3 &= 4 \\ 1 + 3 + 5 &= 9 \\ 1 + 3 + 5 + 7 &= 16 \\ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 &= 25 \end{aligned}$$

¿Qué observa con respecto a los números en el segundo miembro de estas ecuaciones? En efecto, todos son cuadrados perfectos. Estas ecuaciones establecen lo siguiente:

La suma del primer número impar 1 es 1^2.
La suma de los primeros 2 números impares es 2^2.
La suma de los primeros 3 números impares es 3^2.
La suma de los primeros 4 números impares es 4^2.
La suma de los primeros 5 números impares es 5^2.

Considere el polinomio

$$p(n) = n^2 - n + 41$$

He aquí algunos valores de $p(n)$:

$$p(1) = 41 \quad p(2) = 43$$
$$p(3) = 47 \quad p(4) = 53$$
$$p(5) = 61 \quad p(6) = 71$$
$$p(7) = 83 \quad p(8) = 97$$

Todos los valores hasta este momento son números primos. En efecto, si se continúa, encontrará que $p(n)$ es primo para todos los números naturales hasta $n = 40$. Parece razonable en este punto conjeturar que $p(n)$ es primo para *todo* número natural n. Pero sacar conclusiones sería demasiado prematuro porque es fácil ver que $p(41)$ no es primo. Esto ilustra que no se puede tener la certeza de la verdad de un enunciado sin importar cuántos casos especiales se verifiquen. Se necesita un argumento convincente, es decir, una demostración, para determinar la verdad del enunciado.

Esto da origen a la siguiente pregunta: ¿es cierto que para todo número natural n, la suma de los primeros n números impares es n^2? ¿Podría ser cierta esta notable propiedad? Podríamos intentar con otros números más y encontrar que el patrón se mantiene para los primeros 6, 7, 8, 9 y 10 números impares. En este punto nos sentimos seguros de que siempre es cierto, así que podemos plantear una *conjetura*:

La suma de los primeros n números impares es n^2.

Puesto que sabemos que el n-ésimo número impar es $2n - 1$, podemos escribir este enunciado más precisamente como

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Es importante percatarse de que esto todavía es una conjetura. No se puede concluir mediante verificación de un número finito de casos que una propiedad es válida para todos los números (hay una cantidad infinita). Para entenderlo con más claridad, suponga que alguien dice que ha sumado hasta el primer millón de millones de números y encontró que *no* suman un millón de millones al cuadrado. ¿Qué le diría a esta persona? Sería absurdo decir que usted está seguro que es cierto porque ya verificó los primeros cinco casos. Lo que sí puede hacer es tomar papel y lápiz y empezar a verificar por sí mismo, pero esta tarea quizá le llevará el resto de su vida. La tragedia sería que después de terminar esta tarea ¡usted no estaría seguro todavía de la validez de la conjetura! ¿Se da cuenta por qué?

En esto radica el poder de la demostración matemática. Una **demostración** es un razonamiento claro que demuestra la verdad de una proposición sin dejar duda.

Inducción matemática

Consideremos una clase especial de demostración llamada **inducción matemática**. Aquí está la manera como funciona. Suponga que hay una proposición que dice algo con respecto a todos los números naturales n. Llamémosle proposición P. Por ejemplo, podríamos considerar el enunciado

P: Para todo número natural n, la suma de los primeros n números impares es n^2.

Puesto que esta proposición habla de *todos* los números naturales, contiene una cantidad infinita de proposiciones, que llamaremos $P(1)$, $P(2)$, ...

$P(1)$: La suma del primer número impar 1 es 1^2.
$P(2)$: La suma de los primeros dos números impares es 2^2.
$P(2)$: La suma de los primeros tres números impares es 3^2.
⋮ ⋮

¿Cómo podemos demostrar todas estas proposiciones a la vez? La inducción matemática es una manera ingeniosa de hacerlo.

El quid de la cuestión es éste: suponga que se puede demostrar que siempre que una de estas proposiciones sea verdadera, entonces la siguiente en la lista también es verdadera. En otras palabras.

Para toda k, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k + 1)$ es verdadera.

Esto se llama **etapa de inducción** porque nos lleva de la validez de una proposición a la siguiente. Ahora, supongamos que también podemos demostrar que

$P(1)$ es verdadera.

La etapa de inducción nos guía por la siguiente cadena de estas proposiciones:

Si $P(1)$ es verdadera, entonces $P(2)$ es verdadera.
Si $P(2)$ es verdadera, entonces $P(3)$ es verdadera.
Si $P(3)$ es verdadera, entonces $P(4)$ es verdadera.
$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

Entonces vemos que si ambas etapas de inducción y $P(1)$ se demuestran, entonces P queda demostrada para todo n. En seguida hay un resumen de este importante método de demostración.

Principio de la inducción matemática

Para todo número natural n, sea $P(n)$ una proposición que depende de n. Suponga que se cumplen las dos condiciones siguientes.

1. $P(1)$ es verdadera.
2. Para todo número natural k, si $P(k)$ es verdadera entonces $P(k + 1)$ es verdadera.

Luego, $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n.

Para aplicar este principio, hay dos pasos:

Paso 1 Demostrar que $P(1)$ es verdadera.

Paso 2 Suponer que $P(k)$ es verdadera y utilizar esta hipótesis para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera.

Observe que en el paso 2 no se ha demostrado que $P(k)$ es verdadera. Sólo se ha mostrado que si $P(k)$ es verdadera, *entonces* $P(k + 1)$ también lo será. Esta suposición de que $P(k)$ es verdadera se llama **hipótesis de inducción.**

A continuación se aplica la inducción matemática para demostrar que la conjetura planteada al principio de esta sección es cierta.

Ejemplo 1 Demostración aplicando la inducción matemática

Demuestre que para todo número natural n,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Solución Sea $P(n)$ la proposición $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

Paso 1 Se necesita demostrar que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ es simplemente la proposición $1 = 1^2$, lo cual es naturalmente cierto.

Paso 2 Se supone que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$$

Queremos utilizar esta proposición para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera, es decir,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

[Observe que se obtiene $P(k + 1)$ al sustituir $k + 1$ por cada n en la proposición $P(n)$.] Se empieza con el primer miembro y se usa la hipótesis de inducción para obtener el segundo miembro de la ecuación:

$$\begin{aligned}
&1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1] \\
&\quad = [1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)] + [2(k + 1) - 1] && \text{Agrupación de los primeros } k \text{ términos} \\
&\quad = k^2 + [2(k + 1) - 1] && \text{Hipótesis de inducción} \\
&\quad = k^2 + [2k + 2 - 1] && \text{Propiedad distributiva} \\
&\quad = k^2 + 2k + 1 && \text{Simplificación} \\
&\quad = (k + 1)^2 && \text{Factorización}
\end{aligned}$$

Esto es igual a k^2 de acuerdo con la hipótesis de inducción.

Por lo tanto, $P(k + 1)$ se infiere a partir de $P(k)$, y esto completa el paso de inducción..

Luego de haber demostrado los pasos 1 y 2, se puede concluir por el principio de inducción matemática que $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n. ■

Ejemplo 2 Una demostración por inducción matemática

Demuestre que para todo número natural n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Solución Sea $P(n)$ la proposición $1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$. Se quiere demostrar que $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n.

Paso 1 Es necesario demostrar que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ establece que

$$1 = \frac{1(1 + 1)}{2}$$

y este enunciado es evidentemente verdadero.

Archivo Inconograpico, S.A./Corbis

Blaise Pascal (1623-1662) es considerado como una de las mentes más versátiles de la historia moderna. Fue escritor y filósofo, así como matemático y físico dotado. Entre las contribuciones que aparecen en este libro se encuentran el triángulo de Pascal y el principio de la inducción matemática.

El padre de Pascal, también matemático, pensaba que su hijo estudiaría matemáticas, hasta cuando tuviera 15 o 16 años, pero a los 12 años, Blaise insistió en estudiar geometría, y demostró él mismo la mayor parte de los teoremas elementales. Cuando tenía 19 años inventó la primera sumadora mecánica. En 1647, después de escribir un tratado sobre las secciones cónicas, abandonó en forma repentina sus estudios de matemáticas porque sintió que su intensa dedicación contribuía a su mala salud. Se dedicó entonces a actividades frívolas, como el juego, pero esto sólo sirvió para que se despertara su interés en la probabilidad. En 1654 sobrevivió milagrosamente al accidente de un carruaje en el cual los caballos cayeron de un puente. Tomó esto como una señal divina, así que ingresó a un monasterio, donde se entregó con afán a la teología y la filosofía, y escribió sus famosos *Pensées*. También prosiguió con la investigación matemática. Para él, la fe y la intuición eran más valiosas que la razón como fuente de la verdad, por lo que afirmó que "el corazón tiene sus propias razones, qué razones, no lo podemos saber".

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Queremos usarla para demostrar que $P(k+1)$ es verdadera, es decir,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

Entonces, se empieza con el primer miembro y se aplica la hipótesis de inducción para obtener el segundo miembro:

$$\begin{aligned}
&1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) \\
&= [1 + 2 + 3 + \cdots + k] + (k+1) && \text{Agrupación de los primeros } k \text{ términos} \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) && \text{Hipótesis de inducción} \\
&= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right) && \text{Se toma como factor } k+1 \\
&= (k+1)\left(\frac{k+2}{2}\right) && \text{Denominador común} \\
&= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2} && \text{Escriba } k+2 \text{ como } k+1+1
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$ y con esto termina el paso de inducción.

Después de demostrar los pasos 1 y 2, concluimos que de acuerdo con el principio de la inducción matemática $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales n. ■

Las fórmulas para las sumas de las potencias de los primeros n números naturales son importantes en el cálculo infinitesimal. La fórmula 1 del recuadro siguiente se demostró en el ejemplo 2. Las otras fórmulas también se demuestran aplicando la inducción matemática (véanse los ejercicios 4 y 7).

Sumas de potencias

0. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Podría suceder que una proposición $P(n)$ sea falsa para los primeros números naturales, pero verdadera a partir de algún número en adelante. Por ejemplo, se podría querer demostrar que $P(n)$ es verdadera para $n \geq 5$. Obsérvese que si se demuestra que $P(5)$ es verdadera, entonces de este hecho, junto con el paso de inducción, se puede inferir que son verdaderas $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$, ... El ejemplo siguiente ilustra este aspecto.

Ejemplo 3 Demostración de una desigualdad por inducción matemática

Demuestre que $4n < 2^n$ para toda $n \geq 5$.

Solución Denotemos con $P(n)$ la proposición $4n < 2^n$.

Paso 1 $P(5)$ es la proposición $4 \cdot 5 < 2^5$, o bien, $20 < 32$, lo cual es cierto.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$4k < 2^k$$

Queremos usarla para demostrar que $P(k + 1)$ es verdadera, es decir,

Obtenemos $P(k + 1)$ al reemplazar k por $k + 1$ en la proposición $P(k)$.

$$4(k + 1) < 2^{k+1}$$

Entonces, se empieza con el primer miembro de la desigualdad y se utiliza la hipótesis de inducción para demostrar que es menor que el segundo miembro. Para $k \geq 5$, tenemos

$$\begin{aligned} 4(k + 1) &= 4k + 4 \\ &< 2^k + 4 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &< 2^k + 4k && \text{Porque } 4 < 4k \\ &< 2^k + 2^k && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 2 \cdot 2^k \\ &= 2^{k+1} && \text{Propiedad de los exponentes} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$, y con esto termina el paso de inducción.

Luego de haber demostrado los pasos 1 y 2, se puede concluir que de acuerdo con el principio de la inducción matemática $P(n)$ es verdadera para todos los números naturales $n \geq 5$. ■

11.5 Ejercicios

1–12 ■ Aplique la inducción matemática para demostrar que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n.

1. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

2. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

3. $5 + 8 + 11 + \cdots + (3n + 2) = \dfrac{n(3n + 7)}{2}$

4. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

5. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n + 1) = \dfrac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$

6. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \cdots + n(n + 2) = \dfrac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}$

7. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n + 1)^2}{4}$

8. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n - 1)^3 = n^2(2n^2 - 1)$

9. $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2$

10. $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n + 1)} = \dfrac{n}{(n + 1)}$

11. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^4 + \cdots + n \cdot 2^n = 2[1 + (n - 1)2^n]$

12. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

13. Demuestre que $n^2 + n$ es divisible entre 2 para todos los números naturales n.

14. Demuestre que $5^n - 1$ es divisible entre 4 para todos los números naturales n.

15. Demuestre que $n^2 - n + 41$ es impar para todos los números naturales n.

16. Demuestre que $n^3 - n + 3$ es divisible entre 3 para todos los números naturales n.

17. Demuestre que $8^n - 3^n$ es divisible entre 5 para todos los números naturales n.

18. Demuestre que $3^{2n} - 1$ es divisible entre 8 para todos los números naturales n.

19. Demuestre que $n < 2^n$ para todos los números naturales n.

20. Demuestre que $(n + 1)^2 < 2n^2$ para todos los números naturales $n \geq 3$.

21. Demuestre que si $x > -1$, entonces $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todos los números naturales n.

22. Demuestre que $100n \leq n^2$ para todo $n \geq 100$.

23. Sean $a_{n+1} = 3a_n$ y $a_1 = 5$. Demuestre que $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$ para todos los números naturales n.

24. Una sucesión está definida recursivamente por medio de $a_{n+1} = 3a_n - 8$ y $a_1 = 4$. Plantee una fórmula explícita para a_n y, luego, aplique la inducción matemática para demostrar que la fórmula que plantea es cierta.

25. Demuestre que $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$ para todos los números naturales n.

$$\left[\textit{Sugerencia}: x^{k+1} - y^{k+1} = x^k(x - y) + (x^k - y^k)y\right]$$

26. Demuestre que $x + y$ es un factor de $x^{2n-1} + y^{2n-1}$ para todos los números naturales n.

27–31 ■ El símbolo F_n denota el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci tratada en el sección 11.1. Aplique la inducción matemática para demostrar el enunciado.

27. F_{3n} es par para todos los números naturales n.

28. $F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$

29. $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_nF_{n+1}$

30. $F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$

31. Para todo $n \geq 2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

32. Sea a_n el n-ésimo término de la sucesión definida en forma recursiva por

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$$

y $a_1 = 1$. Determine una fórmula para a_n en términos de los números de Fibonacci. Demuestre que la fórmula que determinó es válida para todos los números naturales.

33. Sea F_n el n-ésimo término de la sucesión de Fibonacci. Determine y demuestre una desigualdad que relaciona n y F_n para los números naturales n.

34. Determine y demuestre una desigualdad que relacione $100n$ y n^3.

Descubrimiento • Debate

35. ¿Verdadero o falso? Determine si las proposiciones son verdaderas o falsas. Si piensa que la proposición es verdadera, demuéstrelo. Si piensa que es falsa, proporcione un ejemplo de dónde falla.

a) $p(n) = n^2 - n + 11$ es primo para todo n.

b) $n^2 > n$ para todo $n \geq 2$.

c) $2^{2n+1} + 1$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 1$.

d) $n^3 \geq (n + 1)^2$ para todo $n \geq 2$.

e) $n^3 - n$ es divisible entre 3 para todo $n \geq 2$.

f) $n^3 - 6n^2 + 11n$ es divisible entre 6 para todo $n \geq 1$.

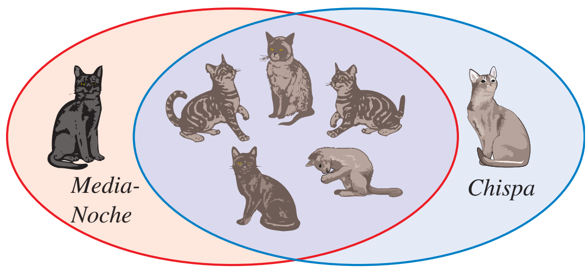
36. ¿Todos los gatos son negros? ¿Qué es lo que está mal en la siguiente "demostración" mediante inducción matemática de que todos los gatos son negros? Sea $P(n)$ el enunciado: en cualquier grupo de n gatos, si uno es negro, entonces todos ellos son negros.

Paso 1 La proposición es evidentemente cierta para $n = 1$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Demostremos que $P(k + 1)$ es verdadera.

Suponga que tenemos un grupo de $k + 1$ gatos, uno de los cuales es negro; llamémosle *Medianoche*. Quitemos a un gato del grupo, a *Chispa*. Nos quedamos con k gatos, uno de los cuales (*Medianoche*) es negro, entonces, según la hipótesis de inducción, todos los k gatos del grupo son negros. Ahora regresemos a *Chispa* al grupo y saquemos a *Medianoche*. De nuevo tenemos un grupo de k gatos, todos los cuales, excepto posiblemente *Chispa*, son negros. Luego, de acuerdo con la hipótesis de inducción, *Chispa* debe ser también negro. Entonces, todos los $k + 1$ gatos del grupo original son negros.

Por lo tanto, por inducción $P(n)$ es verdadera para todo n. Puesto que todos han visto por lo menos un gato negro, se infiere que todos los gatos son negros.



11.6 Teorema del binomio

Una expresión de la forma $a + b$ se llama binomio. Aunque en principio es fácil elevar a $a + b$ a cualquier potencia, elevarla a una potencia muy alta sería tedioso. En esta sección se determina una fórmula que indica el desarrollo de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n y luego se demuestra mediante inducción matemática.

Desarrollo de $(a + b)^n$

Para encontrar un patrón en el desarrollo de $(a + b)^n$, primero examinamos unos casos especiales:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Los siguientes patrones simples surgen del desarrollo de $(a + b)^n$:

1. Hay $n + 1$ términos, el primero es a^n y el último es b^n.
2. Los exponentes de a disminuyen una unidad de término a término, en tanto los exponentes de b aumentan una unidad.
3. La suma de los exponentes de a y b en cada término es n.

Por ejemplo, observe cómo se comportan los exponentes a y b es en el desarrollo de $(a + b)^5$.

Los exponentes de *a* disminuyen:

$$(a + b)^5 = a^{⑤} + 5a^{④}b^1 + 10a^{③}b^2 + 10a^{②}b^3 + 5a^{①}b^4 + b^5$$

Los exponentes de *b* incrementan:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b^{①} + 10a^3b^{②} + 10a^2b^{③} + 5a^1b^{④} + b^{⑤}$$

A partir de estas observaciones podemos escribir la forma del desarrollo de $(a + b)^n$ para cualquier número natural n. Por ejemplo, si escribimos un signo de interrogación en donde falte un coeficiente, tenemos

$$(a + b)^8 = a^8 + \,?\,a^7b + \,?\,a^6b^2 + \,?\,a^5b^3 + \,?\,a^4b^4 + \,?\,a^3b^5 + \,?\,a^2b^6 + \,?\,ab^7 + b^8$$

Para terminar el desarrollo, es necesario determinar estos coeficientes. Para encontrar un patrón, se escriben los coeficientes en el desarrollo de $(a + b)^n$ para los primeros valores de n en un acomodo triangular como el mostrado en la siguiente figura, que se llama **triángulo de Pascal.**

$(a + b)^0$						1					
$(a + b)^1$					1		1				
$(a + b)^2$				1		2		1			
$(a + b)^3$			1		3		3		1		
$(a + b)^4$		1		4		6		4		1	
$(a + b)^5$	1		5		10		10		5		1

El **triángulo de Pascal** aparece en este documento chino de Chu Shi-kie, de fecha 1303. En el título se lee *La gráfica del método antiguo de los siete cuadrados multiplicadores*. Pascal redescubrió el triángulo (véase la página 858).

El renglón correspondiente a $(a + b)^0$ se llama renglón cero y se incluye para mostrar la simetría del acomodo. La observación clave con respecto al triángulo de Pascal es la propiedad siguiente.

Propiedad clave del triángulo de Pascal

Todo elemento, diferente de 1, es la suma de las dos cantidades que se encuentran diagonalmente por arriba de él.

Según esta propiedad es fácil determinar cualquier renglón del triángulo de Pascal a partir del renglón que se encuentra arriba. Por ejemplo, encontramos los renglones sexto y séptimo, iniciando con el quinto renglón:

$(a+b)^5$			1		5		10		10		5		1		
$(a+b)^6$		1		6		15		20		15		6		1	
$(a+b)^7$	1		7		21		35		35		21		7		1

Para ver por qué se cumple esta propiedad, consideremos los desarrollos siguientes:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Llegamos al desarrollo de $(a + b)^6$ multiplicando $(a + b)^5$ por $(a + b)$. Por ejemplo, observe que el término encerrado en un círculo en el desarrollo $(a + b)^6$ se obtiene por medio de esta multiplicación a partir de los dos términos encerrados en círculos arriba de él. Obtenemos este término cuando los dos términos que se encuentran arriba se multiplican por b y a, respectivamente. Por lo tanto, su coeficiente es la suma de los coeficientes de estos dos términos. Utilizaremos esta observación al final de esta sección cuando demostremos el teorema del binomio.

Luego de hallar estos patrones ya se puede obtener con facilidad el desarrollo de cualquier binomio, por lo menos de potencias relativamente pequeñas.

Ejemplo 1 Desarrollo de un binomio aplicando el triángulo de Pascal

Desarrolle $(a + b)^7$ mediante el triángulo de Pascal.

Solución El primer término en el desarrollo es a^7, y el último término es b^7. De acuerdo con el hecho de que el exponente de a disminuye una unidad de término a término, y que el de b se incrementa una unidad de término a término, tenemos

$$(a + b)^7 = a^7 + ?\,a^6b + ?\,a^5b^2 + ?\,a^4b^3 + ?\,a^3b^4 + ?\,a^2b^5 + ?\,ab^6 + b^7$$

Los coeficientes adecuados aparecen en el séptimo renglón del triángulo de Pascal. Por lo tanto,

$$(a + b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7 \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2 Desarrollo de un binomio aplicando el triángulo de Pascal

Utilice el triángulo de Pascal para desarrollar $(2 - 3x)^5$.

Solución Encontramos el desarrollo de $(a + b)^5$ y escribimos 2 en lugar de a y $-3x$ en lugar de b. Mediante el triángulo de Pascal para los coeficientes obtenemos

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Al sustituir $a = 2$ y $b = -3x$ tenemos

$$(2 - 3x)^5 = (2)^5 + 5(2)^4(-3x) + 10(2)^3(-3x)^2 + 10(2)^2(-3x)^3 + 5(2)(-3x)^4 + (-3x)^5$$
$$= 32 - 240x + 720x^2 - 1080x^3 + 810x^4 - 243x^5$$ ■

Los coeficientes del binomio

El triángulo de Pascal es útil para determinar el desarrollo de un binomio para valores razonablemente pequeños de n, pero no es práctico para determinar $(a + b)^n$ en el caso de valores grandes de n. La razón es que el método que usamos para encontrar los renglones sucesivos del triángulo de Pascal es recursivo. Por lo tanto, para encontrar el renglón centésimo, necesitamos determinar los 99 renglones precedentes.

Es necesario examinar con más cuidado el patrón de los coeficientes para desarrollar una fórmula que permita calcular en forma directa cualquier coeficiente en el desarrollo binomial. Tal fórmula existe, y el resto de esta sección se dedica a encontrarla y a demostrarla. Pero antes de establecer la fórmula necesitamos una notación.

El producto de los primeros n números naturales se denota mediante $\boldsymbol{n!}$ y se llama ***n* factorial**:

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$

$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$
$= 3\,628\,800$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

También definimos a 0! como sigue:

$$0! = 1$$

Esta definición de 0! permite que muchas fórmulas que contienen factoriales sean más cortas y más fáciles de escribir.

El coeficiente del binomio

Sean n y r enteros no negativos en donde $r \leq n$. El **coeficiente del binomio** se denota con $\binom{n}{r}$ y se define como sigue

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Ejemplo 3 Cálculo de los coeficientes del binomio

a) $$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4!(9-4)!} = \frac{9!}{4!5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)}$$
$$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$$

b) $$\binom{100}{3} = \frac{100!}{3!(100-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97 \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 97)}$$
$$= \frac{98 \cdot 99 \cdot 100}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700$$

c) $$\binom{100}{97} = \frac{100!}{97!(100-97)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 97}\cdot 98\cdot 99\cdot 100}{(\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot 97})(1\cdot 2\cdot 3)}$$

$$= \frac{98\cdot 99\cdot 100}{1\cdot 2\cdot 3} = 161\ 700$$ ■

Aunque el coeficiente del binomio $\binom{n}{r}$ se define en términos de una fracción, todos los resultados del ejemplo 3 son números naturales. En efecto, $\binom{n}{r}$ es siempre un número natural (véase el ejercicio 50). Observe que los coeficientes del binomio en los incisos b) y c) del ejemplo 3 son iguales. Este es un caso especial de la siguiente relación, la cual se pide demostrar en el ejercicio 48.

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Para observar la relación entre los coeficientes binomiales y el desarrollo del binomio $(a+b)^n$, calculemos los siguientes coeficientes binomiales:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

$$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$$

Son precisamente los elementos del quinto renglón del triángulo de Pascal. En efecto, se puede escribir el triángulo de Pascal como sigue.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

Para demostrar que este patrón se conserva, es necesario mostrar que cualquier elemento en esta versión del triángulo de Pascal es la suma de los dos elementos diagonales que están situados arriba de él. En otras palabras, se debe demostrar que cada elemento cumple la propiedad clave del triángulo de Pascal. Ahora establecemos esta propiedad en términos de los coeficientes del binomio.

Propiedad clave de los coeficientes binomiales

Para enteros no negativos cualquiera r y k, donde $r \leq k$,

$$\binom{k}{r-1} + \binom{k}{r} = \binom{k+1}{r}$$

Observe que los dos términos del lado izquierdo de esta ecuación son elementos adyacentes en el k-ésimo renglón del triángulo de Pascal y el término del segundo miembro es el elemento ubicado en diagonal abajo de ellos, en el $(k+1)$ renglón. Por lo tanto, esta ecuación es un replanteamiento de la propiedad clave del triángulo de Pascal en términos de los coeficientes del binomio. Una demostración de esta fórmula se esboza en el ejercicio 49.

Teorema del binomio

Ya estamos listos para establecer el teorema del binomio.

Teorema del binomio

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Demostramos el teorema al final de esta sección. Primero examinemos algunas de sus aplicaciones.

Ejemplo 4 Desarrollo de un binomio aplicando el teorema del binomio

Aplique el teorema del binomio para desarrollar $(x+y)^4$.

Solución De acuerdo con el teorema del binomio,

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4$$

Verifique que

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

Se infiere que

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

■

Ejemplo 5 Desarrollo de un binomio aplicando el teorema del binomio

Por medio del teorema del binomio desarrolle $(\sqrt{x} - 1)^8$.

Solución Primero desarrollemos $(a + b)^8$ y luego escribimos $\sqrt{x}$ en lugar de a y -1 en lugar de b. Según el teorema del binomio, tenemos

$$(a + b)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8$$

Verifique que

$$\binom{8}{0} = 1 \quad \binom{8}{1} = 8 \quad \binom{8}{2} = 28 \quad \binom{8}{3} = 56 \quad \binom{8}{4} = 70$$
$$\binom{8}{5} = 56 \quad \binom{8}{6} = 28 \quad \binom{8}{7} = 8 \quad \binom{8}{8} = 1$$

Entonces

$$(a + b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Al efectuar las sustituciones $a = x^{1/2}$ y $b = -1$ obtenemos

$$(\sqrt{x} - 1)^8 = (x^{1/2})^8 + 8(x^{1/2})^7(-1) + 28(x^{1/2})^6(-1)^2 + 56(x^{1/2})^5(-1)^3 + 70(x^{1/2})^4(-1)^4 + 56(x^{1/2})^3(-1)^5 + 28(x^{1/2})^2(-1)^6 + 8(x^{1/2})(-1)^7 + (-1)^8$$

Lo cual al simplificarlo da

$$(\sqrt{x} - 1)^8 = x^4 - 8x^{7/2} + 28x^3 - 56x^{5/2} + 70x^2 - 56x^{3/2} + 28x - 8x^{1/2} + 1 \quad ■$$

El teorema del binomio se puede aplicar para encontrar un determinado término de un desarrollo binomial sin tener que efectuar todo el desarrollo.

Término general del desarrollo binomial

El término que contiene a^r en el desarrollo de $(a + b)^n$ es

$$\binom{n}{n - r}a^rb^{n-r}$$

Ejemplo 6 Determinación de un término particular en un desarrollo binomial

Determine el término que contiene x^5 en el desarrollo de $(2x + y)^{20}$.

Solución El término que contiene x^5 lo da la fórmula para el término general donde $a = 2x$, $b = y$, $n = 20$ y $r = 5$. Entonces, este término es

$$\binom{20}{15}a^5b^{15} = \frac{20!}{15!(20-15)!}(2x)^5y^{15} = \frac{20!}{15!5!}32x^5y^{15} = 496\,128x^5y^{15}$$ ■

Ejemplo 7 Determinación de un término particular en un desarrollo binomial

Encuentre el coeficiente de x^8 en el desarrollo de $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

Solución Tanto x^2 como $1/x$ son potencias de x, de modo que ambos términos del binomio determinan la potencia de x en cada término del desarrollo. Para encontrar el coeficiente deseado, primero se determina el término general en el desarrollo. Según la fórmula tenemos $a = x^2$, $b = 1/x$ y $n = 10$, por lo que el término general es

$$\binom{10}{10-r}(x^2)^r\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{2r}(x^{-1})^{10-r} = \binom{10}{10-r}x^{3r-10}$$

Por lo tanto, el término que contiene x^8 es el término en el cual

$$\begin{aligned} 3r - 10 &= 8 \\ r &= 6 \end{aligned}$$

De modo que el coeficiente buscado es

$$\binom{10}{10-6} = \binom{10}{4} = 210$$ ■

Demostración del teorema del binomio

En seguida se muestra una demostración del teorema del binomio mediante inducción matemática.

■ **Demostración** Sea $P(n)$ la proposición

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Paso 1 Demostramos que $P(1)$ es verdadera. Pero $P(1)$ es justo la proposición

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = 1a + 1b = a + b$$

la cual es ciertamente verdadera.

Paso 2 Supongamos que $P(k)$ es verdadera. Por lo tanto, la hipótesis de inducción es

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

Podemos usar esta hipótesis para demostrar que $P(k+1)$ es verdadera.

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)[(a+b)^k] \\
&= (a+b)\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\
&= a\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \\
&\quad + b\left[\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right] \qquad \text{Propiedad distributiva} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^kb + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k \\
&\quad + \binom{k}{0}a^kb + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \qquad \text{Propiedad distributiva} \\
&= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]a^kb + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]a^{k-1}b^2 \\
&\quad + \cdots + \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1} \qquad \text{Agrupación por términos semejantes}
\end{aligned}
$$

Al utilizar la propiedad clave de los coeficientes binomiales podemos escribir cada una de las expresiones en paréntesis cuadrados como un simple coeficiente de un binomio. Asimismo, al escribir el primero y el último coeficientes como $\binom{k+1}{0}$ y $\binom{k+1}{k+1}$ (son iguales a 1 según el ejercicio 46) tenemos

$$
(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^kb + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}
$$

Pero esta última expresión es precisamente $P(k+1)$, y esto completa el paso de inducción.

Después de demostrar los pasos 1 y 2, concluimos de acuerdo con el principio de inducción matemática que el teorema se cumple para todos los números naturales n. ■

11.6 Ejercicios

1–12 ■ Aplique el triángulo de Pascal para el desarrollo de la expresión.

1. $(x+y)^6$ **2.** $(2x+1)^4$ **3.** $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^4$

4. $(x-y)^5$ **5.** $(x-1)^5$ **6.** $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^6$

7. $(x^2y-1)^5$ **8.** $(1+\sqrt{2})^6$ **9.** $(2x-3y)^3$

10. $(1+x^3)^3$ **11.** $\left(\dfrac{1}{x}-\sqrt{x}\right)^5$ **12.** $\left(2+\dfrac{x}{2}\right)^5$

13–20 ■ Evalúe la expresión.

13. $\binom{6}{4}$ **14.** $\binom{8}{3}$ **15.** $\binom{100}{98}$

16. $\binom{10}{5}$ **17.** $\binom{3}{1}\binom{4}{2}$ **18.** $\binom{5}{2}\binom{5}{3}$

19. $\binom{5}{0}+\binom{5}{1}+\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}$

20. $\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5}$

21–24 ■ Por medio del teorema de binomio desarrolle la expresión

21. $(x + 2y)^4$

22. $(1 - x)^5$

23. $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^6$

24. $(2A + B^2)^4$

25. Calcule los primeros tres términos del desarrollo de $(x + 2y)^{20}$

26. Determine los primeros cuatro términos del desarrollo de $(x^{1/2} + 1)^{30}$.

27. Encuentre los últimos dos términos del desarrollo de $(a^{2/3} + a^{1/3})^{25}$.

28. Encuentre los primeros tres términos del desarrollo de

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{40}$$

29. Calcule el término medio del desarrollo de $(x^2 + 1)^{18}$.

30. Determine el quinto término del desarrollo de $(ab - 1)^{20}$.

31. Calcule el vigésimocuarto término del desarrollo de $(a + b)^{25}$.

32. Encuentre el vigésimooctavo del desarrollo de $(A - B)^{30}$.

33. Encuentre el centésimo término del desarrollo de $(1 + y)^{100}$.

34. Calcule el segundo término del desarrollo de

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{25}$$

35. Encuentre el término que contiene x^4 en el desarrollo de $(x + 2y)^{10}$.

36. Encuentre el término que contiene y^3 en el desarrollo de $(\sqrt{2} + y)^{12}$.

37. Determine el término que contiene b^8 en el desarrollo de $(a + b^2)^{12}$.

38. Calcule el término que no contiene x en el desarrollo de

$$\left(8x + \frac{1}{2x}\right)^8$$

39–42 ■ Factorice aplicando el teorema del binomio.

39. $x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

40. $(x - 1)^5 + 5(x - 1)^4 + 10(x - 1)^3 + 10(x - 1)^2 + 5(x - 1) + 1$

41. $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

42. $x^8 + 4x^6y + 6x^4y^2 + 4x^2y^3 + y^4$

43–44 ■ Simplifique usando el teorema del binomio.

43. $\dfrac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

44. $\dfrac{(x + h)^4 - x^4}{h}$

45. Demuestre que $(1.01)^{100} > 2$.

[*Sugerencia*: Observe que $(1.01)^{100} = (1 + 0.01)^{100}$ y aplique el teorema del binomio para demostrar que la suma de los primeros dos términos del desarrollo es mayor que 2.]

46. Demuestre que $\binom{n}{0} = 1$ y $\binom{n}{n} = 1$.

47. Demuestre que $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

48. Demuestre que $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ para $0 \le r \le n$.

49. En este ejercicio demostramos la identidad

$$\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$$

a) Escriba el primer miembro de esta ecuación como la suma de dos fracciones.

b) Demuestre que un común denominador de la expresión que encontró en el inciso a) es $r!(n - r + 1)!$

c) Sume las dos fracciones usando el común denominador del inciso b), simplifique el numerador y observe que la expresión que resulta es igual al segundo miembro de la ecuación.

50. Demuestre que $\binom{n}{r}$ es un entero para toda n y para $0 \le r \le n$. [*Sugerencia*: aplique la inducción para demostrar que la proposición es verdadera para toda n, y use el ejercicio 49 para el paso de inducción.]

Descubrimiento • Debate

51. Potencias de factoriales ¿Qué es más grande $(100!)^{101}$ o $(101!)^{100}$? [*Sugerencia*: trate de factorizar las expresiones. ¿Tienen algunos factores comunes?]

52. Sumas de coeficientes binomiales Sume cada uno de los cinco primeros renglones del triángulo de Pascal, como se indica. ¿Observa usted algún patrón?

$$1 + 1 = ?$$

$$1 + 2 + 1 = ?$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = ?$$

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = ?$$

$$1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = ?$$

Con base en el patrón que ha encontrado, determine la suma del n-ésimo renglón:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Demuestre que su resultado al desarrollar $(1 + 1)^n$ usando el teorema del binomio.

53. Sumas alternas de coeficientes binomiales Determine la suma

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}$$

determinando un patrón como en el ejercicio 52. Demuestre su resultado desarrollando $(1 + 1)^n$ mediante el teorema del binomio.

11 Repaso

Revisión de conceptos

1. **a)** ¿Qué es una sucesión?
   b) ¿Qué es una sucesión aritmética? Escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión aritmética.
   c) ¿Qué es una sucesión geométrica? Escriba una expresión para el n-ésimo término de la sucesión geométrica.
2. **a)** ¿Qué es una sucesión definida recursivamente?
   b) ¿Cuál es la sucesión de Fibonacci?
3. **a)** ¿Cuál es el significado de las sumas parciales de una sucesión?
   b) Si una sucesión aritmética tiene como primer término a y diferencia común d, escriba una expresión para la suma de los primeros n términos.
   c) Si una sucesión geométrica tiene como primer término a y razón común r, escriba una expresión para la suma de sus primeros n términos.
   d) Escriba una expresión para la suma de una serie geométrica infinita cuyo primer término es a y su razón común r. ¿Para qué valores de r la fórmula es válida?
4. **a)** Escriba la suma $\sum_{k=1}^{n} a_k$ sin usar la notación Σ.
   b) Escriba $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$ usando la notación Σ.
5. Escriba una expresión para la cantidad A_f de una anualidad que consta de n pagos regulares iguales de magnitud R con tasa de interés i por periodo..
6. Explique el principio de la inducción matemática.
7. Escriba los primeros cinco renglones del triángulo de Pascal. ¿De qué manera están interrelacionados los elementos?
8. **a)** ¿Qué significa el símbolo $n!$?
   b) Escriba una expresión para el coeficiente binomial $\binom{n}{r}$.
   c) Enuncie el teorema del binomio.
   d) Escriba el término que contiene a^r en el desarrollo de $(a + b)^n$.

Ejercicios

1–6 ■ Determine los primeros cuatro términos así como el décimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término se da.

1. $a_n = \dfrac{n^2}{n + 1}$ **2.** $a_n = (-1)^n\dfrac{2^n}{n}$

3. $a_n = \dfrac{(-1)^n + 1}{n^3}$ **4.** $a_n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

5. $a_n = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$ **6.** $a_n = \dbinom{n + 1}{2}$

7–10 ■ Una sucesión está definida recursivamente. Encuentre los primeros siete términos de la sucesión.

7. $a_n = a_{n-1} + 2n - 1, \quad a_1 = 1$

8. $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, \quad a_1 = 1$

9. $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \quad a_1 = 1, a_2 = 3$

10. $a_n = \sqrt{3a_{n-1}}, \quad a_1 = \sqrt{3}$

11–14 ■ Se proporciona el n-ésimo término de una sucesión.
a) Determine los primeros cinco términos de la sucesión.
b) Grafique los términos que encontró en el inciso a).
c) Determine si la serie es aritmética o geométrica. Calcule la diferencia común o la razón común.

11. $a_n = 2n + 5$ **12.** $a_n = \dfrac{5}{2^n}$

13. $a_n = \dfrac{3^n}{2^{n+1}}$ **14.** $a_n = 4 - \dfrac{n}{2}$

15–22 ■ Se proporcionan los primeros cuatro términos de una sucesión. Determine si son términos de una sucesión aritmética, de una sucesión geométrica o de ninguno de los dos tipos. Si la sucesión es aritmética o geométrica, determine el quinto término.

15. $5, 5.5, 6, 6.5, \ldots$

16. $1, -\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}, \ldots$

17. $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$

18. $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$

19. $t - 3, t - 2, t - 1, t, \ldots$

20. $t^3, t^2, t, 1, \ldots$

21. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \ldots$

22. $a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots$

23. Demuestre que $3, 6i, -12, -24i, \ldots$ es una sucesión geométrica y encuentre la razón común. (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

24. Calcule en n-ésimo término de la sucesión geométrica $2, 2 + 2i, 4i, -4 + 4i, -8, \ldots$ (Aquí $i = \sqrt{-1}$.)

25. El sexto término de una sucesión aritmética es 17, y el cuarto término es 11. Calcule el segundo término.

26. El vigésimo término de una sucesión aritmética es 96, y la diferencia común es 5. Calcule el n-ésimo término.

27. El tercer término de una sucesión geométrica es 9 y la razón común es $\frac{3}{2}$. Determine el quinto término.

28. El segundo término de una sucesión geométrica es 10, y el quinto término es $\frac{1250}{27}$. Determine el n-ésimo término.

29. Un maestro gana 32 000 dólares en su primer año en la escuela Lakeside, y obtiene un aumento de 5% anual.

a) Plantee una fórmula para su salario A_n en su n-ésimo año en esta escuela.

b) Proporcione una lista de sus salarios de los primeros 8 años en esta escuela.

30. Una colega del maestro del ejercicio 29, contratada al mismo tiempo, ganó 35 000 dólares en el primer año, y obtuvo un aumento de 1200 dólares cada año.

a) ¿Cuál es su salario A_n en su n-ésimo año en esta escuela?

b) Calcule su salario en el octavo año en esta escuela, y compárelo con el salario del maestro del ejercicio 29 en el octavo año.

31. Un cierto tipo de bacteria se divide cada 5 s. Si tres de estas bacterias se colocan en una caja de Petri, ¿cuántas bacterias hay en el recipiente al final de un minuto?

32. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones aritméticas, demuestre que $a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots$ también es una sucesión aritmética.

33. Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ son sucesiones geométricas, demuestre que $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \ldots$ también es una sucesión geométrica.

34. a) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una sucesión aritmética, ¿la sucesión $a_1 + 2, a_2 + 2, a_3 + 2, \ldots$ es aritmética?

b) Si $a_1, a_2, a_3, \ldots$ es una secuencia geométrica, ¿la secuencia $5a_1, 5a_2, 5a_3, \ldots$ es geométrica?

35. Calcule los valores de x para los que la sucesión $6, x, 12, \ldots$ es

a) aritmética **b)** geométrica

36. Calcule los valores de x y de y para los cuales la sucesión $2, x, y, 17, \ldots$ es

a) aritmética **b)** geométrica

37–40 ■ Calcule la suma.

37. $\sum_{k=3}^{6} (k + 1)^2$

38. $\sum_{i=1}^{4} \frac{2i}{2i - 1}$

39. $\sum_{k=1}^{6} (k + 1)2^{k-1}$

40. $\sum_{m=1}^{5} 3^{m-2}$

41–44 ■ Escriba la suma sin usar la notación sigma. No dé el valor.

41. $\sum_{k=1}^{10} (k - 1)^2$

42. $\sum_{j=2}^{100} \frac{1}{j - 1}$

43. $\sum_{k=1}^{50} \frac{3^k}{2^{k+1}}$

44. $\sum_{n=1}^{10} n^2 2^n$

45–48 ■ Escriba la suma por medio de la notación sigma. No dé el valor.

45. $3 + 6 + 9 + 12 + \cdots + 99$

46. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 100^2$

47. $1 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^4 + 3 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^6 + \cdots + 100 \cdot 2^{102}$

48. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$

49–54 ■ Determine si la expresión es una suma parcial de una sucesión aritmética o geométrica. Luego calcule la suma.

49. $1 + 0.9 + (0.9)^2 + \cdots + (0.9)^5$

50. $3 + 3.7 + 4.4 + \cdots + 10$

51. $\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + \cdots + 100\sqrt{5}$

52. $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1 + \frac{4}{3} + \cdots + 33$

53. $\sum_{n=0}^{6} 3(-4)^n$

54. $\sum_{k=0}^{8} 7(5)^{k/2}$

55. El primer término de una sucesión aritmética es $a = 7$ y la diferencia común es $d = 3$. ¿Cuántos términos de esta sucesión se tienen que sumar para obtener 325?

56. La suma de los primeros tres términos de una serie geométrica es 52, y la razón común es $r = 3$. Calcule el primer término.

57. Una persona tiene dos padres, cuatro abuelos, ocho bisabuelos, etcétera. ¿Cuántos ancestros tiene en 15 generaciones?

58. Calcule la cantidad de una anualidad que consta de 16 pagos anuales de 1000 dólares cada uno en una cuenta que paga 8% de interés anual, compuesto anualmente.

59. ¿Cuánto dinero se tiene que invertir cada trimestre al 12% anual, compuesto trimestralmente, con el fin de tener 10 000 en un año?

60. ¿De cuánto son los pagos mensuales de una hipoteca de 60 000 dólares al 9% de interés si el préstamo se tiene que liquidar en

a) 30 años? **b)** 15 años?

61–64 ■ Calcule la suma de la serie geométrica infinita.

61. $1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{25} - \frac{8}{125} + \cdots$

62. $0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 + \cdots$

63. $1 + \dfrac{1}{3^{1/2}} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3^{3/2}} + \cdots$

64. $a + ab^2 + ab^4 + ab^6 + \cdots$

65–67 ■ Mediante inducción matemática demuestre que la fórmula es verdadera para todos los números naturales n.

65. $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$

66. $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \dfrac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \dfrac{n}{2n + 1}$

67. $\left(1 + \dfrac{1}{1}\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)\left(1 + \dfrac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = n + 1$

68. Demuestre que $7^n - 1$ es divisible entre 6 para todos los números naturales n.

69. Sean $a_{n+1} = 3a_n + 4$ y $a_1 = 4$. Demuestre que $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$ para todos los números naturales.

70. Demuestre que el número de Fibonacci F_{4n} es divisible entre 3 para todos los números naturales n.

71. Determine y demuestre una desigualdad que relaciona 2^n y $n!$

72–75 ■ Evalúe las expresiones.

72. $\dbinom{5}{2}\dbinom{5}{3}$ **73.** $\dbinom{10}{2} + \dbinom{10}{6}$

74. $\displaystyle\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k}$ **75.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}\binom{8}{8 - k}$

76–77 ■ Desarrolle la expresión.

76. $(1 - x^2)^6$ **77.** $(2x + y)^4$

78. Encuentre el vigésimo término del desarrollo de $(a + b)^{22}$.

79. Calcule los primeros tres términos del desarrollo de $(b^{-2/3} + b^{1/3})^{20}$.

80. Calcule el término que contiene A^6 en el desarrollo de $(A + 3B)^{10}$.

11 Evaluación

1. Determine los primeros cuatro términos y el décimo término de la sucesión cuyo n-ésimo término es $a_n = n^2 - 1$.

2. Una sucesión está definida recursivamente por $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$, donde $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$. Calcule a_5.

3. Una sucesión aritmética inicia con 2, 5, 8, 11, 14, ...

a) Encuentre la diferencia común d para esta sucesión.

b) Determine una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión.

c) Halle el trigésimoquinto término de la sucesión.

4. Una sucesión geométrica inicia con 12, 3, 3/4, 3/16, 3/64, ...

a) Determine la razón común r de esta sucesión.

b) Encuentre una fórmula para el n-ésimo término a_n de la sucesión.

c) Calcule el décimo término de la sucesión.

5. El primer término de una sucesión geométrica es 25, y el cuarto término es $\frac{1}{5}$.

a) Determine la razón común r y el quinto término.

b) Calcule la suma parcial de los primeros ocho términos.

6. El primer término de una sucesión aritmética es 10 y el décimo término es 2.

a) Encuentre la diferencia común y el centésimo término de la sucesión.

b) Calcule la suma parcial de los primeros diez términos.

7. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una sucesión geométrica con término inicial a y razón común r. Demuestre que $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots$ es también una sucesión geométrica encontrando su razón común.

8. Escriba la expresión sin usar la notación sigma y, luego, calcule la suma.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{5}(1 - n^2)$ b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{6}(-1)^n 2^{n-2}$

9. Calcule la suma.

a) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \dfrac{2^2}{3^3} + \dfrac{2^3}{3^4} + \cdots + \dfrac{2^9}{3^{10}}$

b) $1 + \dfrac{1}{2^{1/2}} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^{3/2}} + \cdots$

10. Mediante inducción matemática demuestre que, para todos los números naturales n,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

11. Desarrolle $(2x + y^2)^5$.

12. Encuentre el término que contiene x^3 en el desarrollo del binomio $(3x - 2)^{10}$.

13. Un cachorro pesa 0.85 lb al nacer, y cada semana gana 24% de peso. Sea a_n su peso en libras al final de la n-ésima semana de vida.

a) Encuentre una fórmula para a_n.

b) ¿Cuánto pesa el cachorro cuando tiene seis semanas de vida?

c) ¿Es la sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aritmética, geométrica o de ninguno de los dos tipos?

Enfoque en el modelado

Modelado con sucesiones recursivas

Muchos procesos del mundo real se presentan por etapas. El crecimiento de la población se puede considerar que es uno de ellos: cada nueva generación representa una nueva etapa en el crecimiento de la población. El interés compuesto se paga por etapas: cada pago de interés crea un nuevo balance contable. Muchas cosas que cambian en forma continua se miden con mayor facilidad en etapas discretas. Por ejemplo, podemos medir a intervalos de una hora la temperatura de un objeto que se está enfriando en forma continua. En esta sección aprenderemos a usar las sucesiones recursivas en el modelado de tales situaciones. En algunos casos, es posible plantear una fórmula explícita para una sucesión a partir de la relación de recursión que la define, buscando un patrón en los términos de la sucesión.

Sucesiones recursivas como modelos

Suponga que usted deposita una cantidad en una cuenta que da 6% de interés compuesto mensualmente. El banco tiene una regla definida para pagar el interés: al final de cada mes el banco suma a la cuenta $\frac{1}{2}$% (es decir, 0.005) de la cantidad que hay en su cuenta en ese momento. Expresamos esta regla como sigue:

$$\boxed{\text{cantidad al final de este mes}} = \boxed{\text{cantidad al final del último mes}} + 0.005 \times \boxed{\text{cantidad al final del último mes}}$$

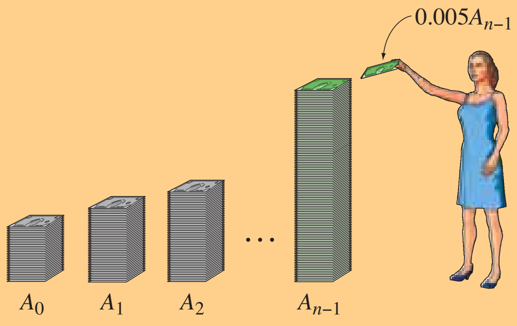
Si se aplica la propiedad distributiva se puede escribir esto como

$$\boxed{\text{cantidad al final de este mes}} = 1.005 \times \boxed{\text{cantidad al final del último mes}}$$

Para modelar esta proposición por medio del álgebra, sea A_0 la cantidad del depósito original, A_1 la cantidad al final del primer mes, A_2 la cantidad al final del segundo mes y así sucesivamente. Entonces, A_n es la cantidad al final del n-ésimo mes. Por lo tanto,

$$A_n = 1.005A_{n-1}$$

Identificamos ésta como una sucesión definida recursivamente, es decir, da la cantidad en cada etapa en términos de la cantidad que había en la etapa anterior.



Con el fin de encontrar una fórmula para A_n, calculemos los primeros términos de la sucesión y busquemos un patrón.

$$\begin{aligned} A_1 &= 1.005A_0 \\ A_2 &= 1.005A_1 = (1.005)^2 A_0 \\ A_3 &= 1.005A_2 = (1.005)^3 A_0 \\ A_4 &= 1.005A_3 = (1.005)^4 A_0 \end{aligned}$$

Vemos que, en general, $A_n = (1.005)^n A_0$.

Ejemplo 1 Crecimiento de la población

Una cierta población de animales crece 2% cada año. La población inicial es de 5000 individuos.

a) Determine una sucesión recursiva que modele la población P_n al final del n-ésimo año.

b) Calcule los primeros cinco términos de la sucesión P_n.

c) Plantee una fórmula para P_n.

Solución

a) Podemos modelar la población usando la regla siguiente:

población al final de este año = 1.02 × población al final del último año

Si aplicamos el álgebra podemos escribir esto como una relación recursiva

$$P_n = 1.02P_{n-1}$$

b) Puesto que la población inicial es de 5000 individuos, tenemos

$$\begin{aligned} P_0 &= 5000 \\ P_1 &= 1.02P_0 = (1.02)5000 \\ P_2 &= 1.02P_1 = (1.02)^2 5000 \\ P_3 &= 1.02P_2 = (1.02)^3 5000 \\ P_4 &= 1.02P_3 = (1.02)^4 5000 \end{aligned}$$

c) Vemos a partir del patrón mostrado en el inciso b) que $P_n = (1.02)^n 5000$. (Observe que P_n es una sucesión geométrica con razón común $r = 1.02$.) ■

Ejemplo 2 Dosis diaria de un medicamento

Un paciente tiene que tomar todas las mañanas una píldora de 50 mg de un cierto medicamento. Se sabe que el organismo elimina el 40% del medicamento cada 24 horas.

a) Determine una sucesión recursiva que modele la cantidad A_n del medicamento en el organismo del paciente después de que toma cada píldora.

b) Calcule los primeros cuatro términos de la sucesión A_n.

c) Encuentre una fórmula para A_n.

d) ¿Cuánto del medicamento permanece en el cuerpo del paciente después de cinco días? ¿Cuánto se acumulará en su sistema después del uso prolongado?

Solución

a) Cada mañana 60% del medicamento se queda en el organismo y toma 50 mg adicionales, que es su dosis diaria.

$$\boxed{\text{cantidad del medicamento esta mañana}} = 0.6 \times \boxed{\text{cantidad del medicamento ayer en la mañana}} + 50 \text{ mg}$$

Se puede expresar esto como una relación de recursión

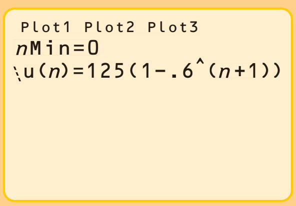
$$A_n = 0.6A_{n-1} + 50$$

b) Puesto que la dosis inicial es 50 mg, tenemos

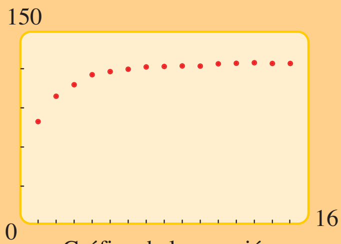
$$\begin{aligned}
A_0 &= 50 \\
A_1 &= 0.6A_0 + 50 = 0.6(50) + 50 \\
A_2 &= 0.6A_1 + 50 = 0.6[0.6(50) + 50] + 50 \\
&= 0.6^2(50) + 0.6(50) + 50 \\
&= 50(0.6^2 + 0.6 + 1) \\
A_3 &= 0.6A_2 + 50 = 0.6[0.6^2(50) + 0.6(50) + 50] + 50 \\
&= 0.6^3(50) + 0.6^2(50) + 0.6(50) + 50 \\
&= 50(0.6^3 + 0.6^2 + 0.6 + 1)
\end{aligned}$$

c) A partir del patrón del inciso b), vemos que

$$\begin{aligned}
A_n &= 50(1 + 0.6 + 0.6^2 + \cdots + 0.6^n) \\
&= 50\left(\frac{1 - 0.6^{n+1}}{1 - 0.6}\right) && \text{Suma de una sucesión geométrica: } S_n = a\left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\right) \\
&= 125(1 - 0.6^{n+1}) && \text{Simplificación}
\end{aligned}$$



Introducción de la sucesión



Gráfica de la sucesión

Figura 1

d) Para determinar la cantidad restante después de 5 días, sustituimos $n = 5$ y obtenemos $A_5 = 125(1 - 0.6^{5+1}) \approx 119$ mg.

Para calcular la cantidad restante después del uso prolongado, dejamos que n aumente. Cuando n se incrementa, 0.6^n se aproxima a cero. Es decir, $0.6^n \to 0$ cuando $n \to \infty$ (véase la sección 4.1). Entonces, cuando $n \to \infty$,

$$A_n = 125(1 - 0.6^{n+1}) \to 125(1 - 0) = 125$$

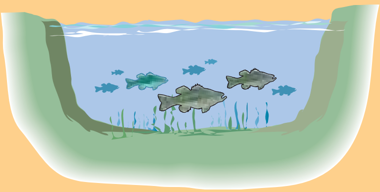
Por lo tanto, después de un uso prolongado la cantidad de medicamento en el sistema del paciente se aproxima a 125 mg (véase la figura 1, donde hemos usado una calculadora para graficar la sucesión). ■

Problemas

1. **Cuentas para el retiro** Muchos profesores tienen sus ahorros para el retiro en TIAA, el programa más grande de anualidades en el mundo. El interés de estas cuentas está compuesto y acreditado *diariamente*. El maestro Brown tiene 275 000 dólares depositados en TIAA al iniciar 2006, y recibe 3.65% por año en su cuenta.
   a) Determine una sucesión recursiva que modele la cantidad A_n en su cuenta al final del n-ésimo día de 2006.
   b) Determine los primeros ocho términos de la sucesión A_n, redondeados al centésimo más cercano.
   c) Determine una fórmula para A_n.

2. **Programa para mantener buena condición física** Sheila decide iniciar un programa de natación como la mejor manera de mantener un buen estado cardiovascular. Empieza por nadar 5 min el primer día, y luego añade minuto y medio cada día.
   a) Encuentre una fórmula recursiva para la cantidad de minutos T_n que ella nada en el n-ésimo día de su programa.
   b) Determine los primeros seis términos de la sucesión T_n.
   c) Determine una fórmula para T_n. ¿Qué tipo de sucesión es ésta?
   d) ¿En qué día Sheila alcanzará su objetivo de nadar por lo menos 65 min al día?
   e) ¿Cuál es la cantidad total de tiempo que habrá nadado después de 30 días?

3. **Programa de ahorros mensuales** Alice abre una cuenta de ahorros que ofrece 3% de interés anual, compuesto mensualmente. Inicia con un depósito de 100 dólares al principio del primer mes y añade otros 100 dólares al final de cada mes, cuando el interés ya está acreditado.
   a) Encuentre una fórmula recursiva para la cantidad A_n en su cuenta al final del n-ésimo mes. (Incluye el interés acreditado para ese mes y su depósito mensual.)
   b) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión A_n.
   c) Apóyese en el patrón que observó en el inciso b) para encontrar una fórmula para A_n. [*Sugerencia*: para encontrar el patrón con más facilidad, es mejor *no* simplificar *demasiado* los términos.]
   d) ¿Cuánto habrá ahorrado en cinco años?



4. **Suministro de peces para un estanque** Se siembran en un estanque 4000 truchas, y, mediante la reproducción, la población aumenta 20% al año. Encuentre una sucesión recursiva que modele la población de truchas P_n al final del n-ésimo año en cada una de las circunstancias siguientes. Determine cuál es la población de truchas al final del quinto año en cada caso.
   a) La población de truchas cambia sólo debido a la reproducción.
   b) Cada año se cosechan 600 truchas.
   c) Cada año se echan al estanque 250 truchas más.
   d) Cada año 10% de las truchas se cosecha y se introducen 300 truchas adicionales al estanque.

5. **Contaminación** Una planta química desecha cada año 2400 toneladas de contaminantes en un lago adyacente. A causa del escurrimiento natural, 70% de los contaminantes contenidos en el lago al inicio del año son expelidos al final del mismo.
   a) Explique por qué la sucesión siguiente modela la cantidad A_n de los contaminantes en el lago al final del n-ésimo año en que la planta está funcionando.

$$A_n = 0.30A_{n-1} + 2400$$

b) Determine los primeros cinco términos de la sucesión A_n.

c) Encuentre una fórmula para A_n.

d) ¿Qué cantidad de los contaminantes se queda en el lago después de seis años? ¿Qué cantidad se quedará después de que la planta ha estado funcionando un largo periodo?

e) Verifique su respuesta del inciso d) mediante la gráfica de A_n en una calculadora, para $n = 1$ hasta $n = 20$.

6. Programa de ahorro anual Úrsula abre un certificado de depósito de un año que da 5% de interés al año. Inicia con un depósito de 5000 dólares. Al final de cada año, cuando el certificado se vence, ella reinvierte a la misma tasa de interés, y añade también 10% al valor del certificado de depósito de otros de sus ahorros. (Por ejemplo, después del primer año su certificado de depósito ganó 5% de 5000 dólares de interés, para un valor de 5250 dólares al vencimiento. Entonces añade 10%, es decir, 525 dólares, lo cual hace que el valor total de su certificado de depósito renovado sea de 5775 dólares.)

a) Encuentre una fórmula recursiva de la cantidad U_n en su certificado de depósito cuando ella reinvierte al final del n-ésimo año.

b) Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión U_n. ¿Se parece a una sucesión geométrica?

c) Utilice el patrón observado en el inciso b) para determinar una fórmula para U_n.

d) ¿Cuánto ha ahorrado después de 10 años?

```
Plot1 Plot2 Plot3
\u(n) = 1.05 u(n − 1)
 +0 .1 u(n − 1)
 u(nMin) = {5000}
\v(n) = 1.05 v(n − 1)
 +500 n
 v(nMin) = {5000}
```

Introducción de la sucesión

n	u(n)	v(n)
0	5000	5000
1	5750	5750
2	6612.5	7037.5
3	7604.4	8889.4
4	8745	11334
5	10057	14401
6	11565	18121
n=0		

Tabla de los valores de las sucesiones

7. Programa de ahorro anual Victoria abre un certificado de depósito de un año con 5% de rendimiento anual al mismo tiempo que su amiga Úrsula del problema 6. También empieza con un depósito inicial de 5000 dólares. Sin embargo, Victoria decide añadir 500 dólares a su certificado de depósito cuando reinvierte al final del primer año, 1000 dólares al final del segundo año, 1500 dólares al final del tercero y así sucesivamente.

a) Explique por qué la fórmula recursiva que se muestra a continuación da la cantidad V_n en su certificado de depósito cuando ella reinvierte al final del n-ésimo año.

$$V_n = 1.05V_{n-1} + 500n$$

b) Ponga su calculadora para graficar en modo `Seq` introduzca las sucesiones U_n y V_n, como se muestra en la figura de la izquierda. Luego use el comando `TABLE` para comparar las dos sucesiones. En los primeros años, Victoria parece haber acumulado más ahorros que Úrsula. Verifique por abajo de la tabla para verificar que Úrsula con el tiempo se adelanta a Victoria en esta carrera de ahorros. ¿En qué año sucede esto?

8. Ley de Newton del enfriamiento Una sopera a 170°F se coloca en la mesa del comedor cuyo termostato está a 70°F. La sopa se enfría según la siguiente regla, un caso especial de la ley de Newton del enfriamiento: cada minuto, la temperatura de la sopa desciende 3% de la diferencia entre la temperatura de la sopa y la temperatura del comedor.

a) Encuentre una sucesión recursiva que modele la temperatura de la sopa T_n en el n-ésimo minuto.

b) Introduzca la sucesión T_n en su calculadora y aplique el comando `TABLE` para determinar la temperatura a incrementos de 10 min desde $n = 0$ hasta $n = 60$. (Véase el problema 7 b).

c) Grafique la sucesión T_n. ¿A qué temperatura estará la sopa después de mucho tiempo?

9. Crecimiento logístico de la población Los modelos exponenciales simples para el crecimiento poblacional no toman en cuenta el hecho de que cuando la población se incrementa, la supervivencia se vuelve más difícil para cada individuo debido a que la competencia es mayor por el alimento y otros recursos. Podemos lograr un modelo más

exacto si suponemos que la tasa de natalidad es proporcional a la dimensión de la población, pero la tasa de mortalidad es proporcional al cuadrado de la población. Con esta idea, los investigadores observan que la cantidad de mapaches R_n en una cierta isla está modelada por medio de la siguiente sucesión recursiva:

Población al final del año — Cantidad de nacimientos

$$R_n = R_{n-1} + 0.08R_{n-1} - 0.0004(R_{n-1})^2, \qquad R_0 = 100$$

Población al inicio del año — Cantidad de muertes

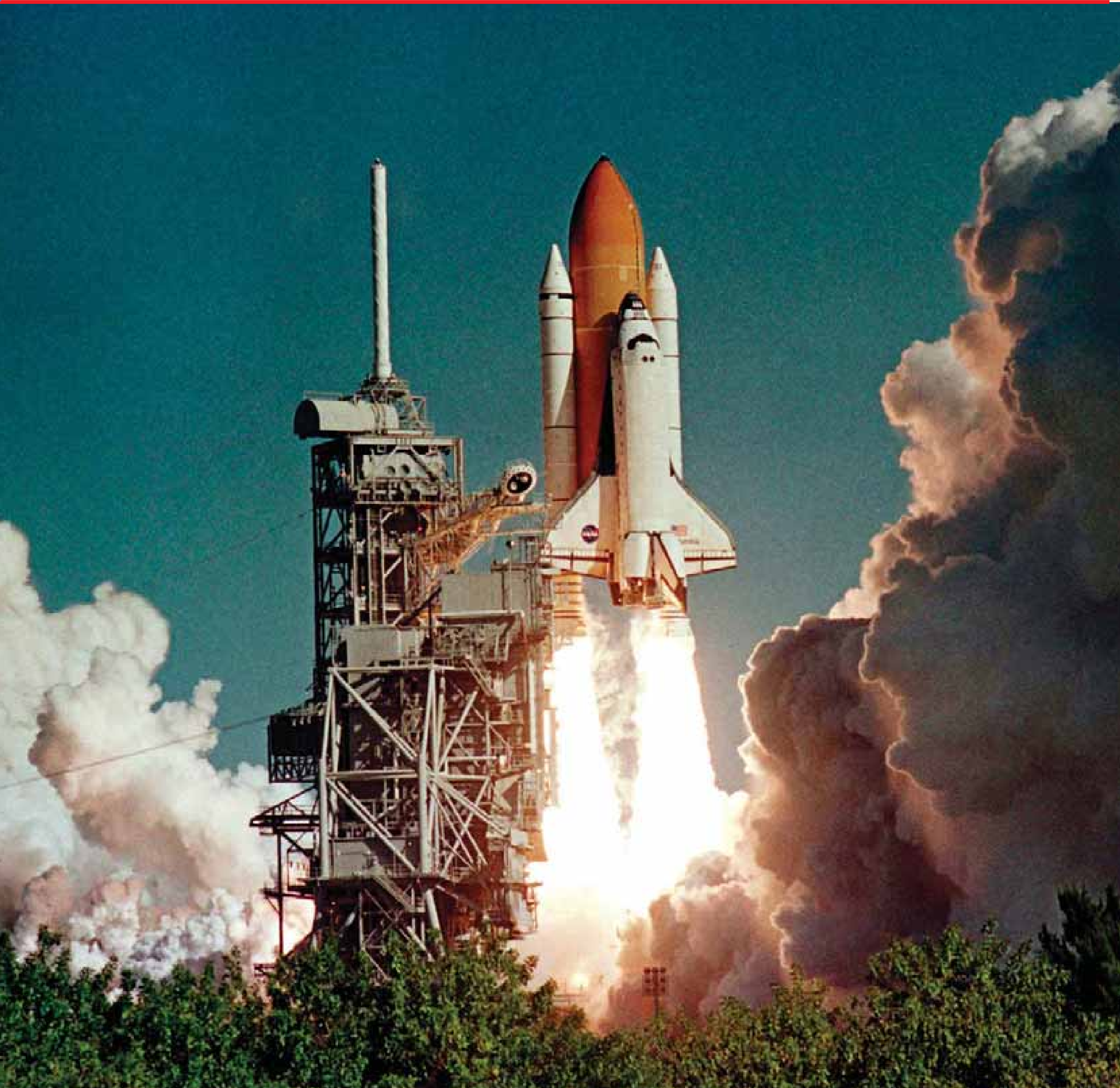
En este caso n representa en número de años desde que empezaron las observaciones, R_0 es la población inicial, 0.08 es la tasa de natalidad anual, y 0.0004 es una constante que se relaciona con la tasa de mortalidad.

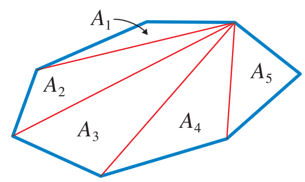
a) Utilice el comando TABLE en su calculadora para determinar la población de mapaches para cada año desde $n = 1$ hasta $n = 7$.

b) Grafique la sucesión R_n. ¿Qué sucede con la población de mapaches cuando n aumenta?

12

Límites: presentación preliminar de cálculo



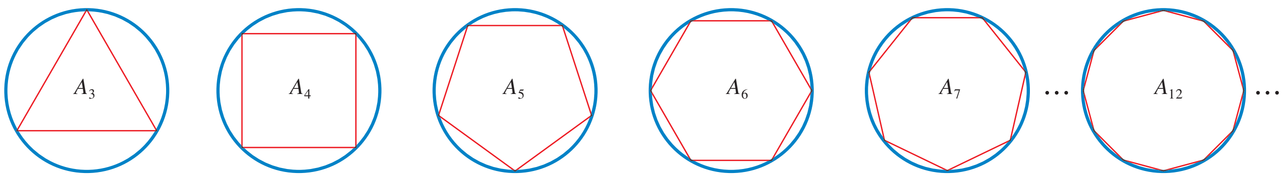


$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$

Esquema del capítulo

En este capítulo se estudia la idea central subyacente al cálculo, el concepto de *límite*. El cálculo se emplea para modelar numerosos fenómenos de la vida real, en particular situaciones relacionadas con cambio o movimiento. Para entender la idea básica de límites considérense dos ejemplos fundamentales.

Para hallar el área de una figura poligonal simplemente se divide en triángulos y se suman sus áreas, como se muestra en la figura que se encuentra a la izquierda. Sin embargo, es mucho más difícil hallar el área de una región con lados curvos. Una manera es aproximar el área inscribiendo polígonos en la región. En la figura se ilustra cómo se hace esto para un círculo.



Si A_n es el área del polígono regular inscrito con n lados, entonces se puede observar que cuando n aumenta, A_n se aproxima cada vez más al área del círculo. Se dice que el área A del círculo es el *límite* de las áreas A_n y se escribe

$$\text{área} = \lim_{n\to\infty} A_n$$

En caso de hallar un patrón para las áreas A_n, entonces se podría determinar el límite A de manera exacta. En este capítulo se usa una idea similar para hallar las áreas de regiones acotadas por gráficas de funciones.

En el capítulo 2 se aprendió cómo hallar la tasa de cambio promedio* de una función. Por ejemplo, para hallar la velocidad promedio se divide la distancia total recorrida entre el tiempo total. Pero, ¿cómo se puede encontrar la velocidad *instantánea*; es decir, la velocidad en un determinado instante? No se puede dividir la distancia total recorrida entre el tiempo total, ¡porque en un instante la distancia total recorrida es cero y el tiempo total empleado en el recorrido es cero! Pero se puede hallar la tasa de cambio *promedio* en intervalos cada vez más pequeños mediante una ampliación en el instante deseado. Por ejemplo, suponga que $f(t)$ proporciona la distancia que un automóvil ha recorrido en el tiempo t. Para determinar la velocidad del automóvil exactamente a las 2:00 P.M., se halla primero la velocidad promedio en un intervalo de 2 y un poco después de 2, es decir, en el intervalo $[2, 2 + h]$. Se sabe que la velocidad promedio en este intervalo es $[f(2 + h) - f(2)]/h$. Al determinar esta velocidad promedio para valores cada vez más pequeños de h (permitiendo

* A la tasa de cambio también se le llama razón de cambio, y puede ser promedio o instantánea.

que h se acerque a cero), se realiza una amplificación del instante deseado. Se puede escribir

$$\text{velocidad instantánea} = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Si se encuentra un patrón para la velocidad promedio, se puede evaluar este límite de manera exacta.

Las ideas en este capítulo tienen aplicaciones de amplio alcance. El concepto de "tasa de cambio instantánea" se aplica a cualquier cantidad variante, no sólo la velocidad. El concepto de "área bajo la gráfica de una función" es muy versátil. De hecho, numerosos fenómenos, en apariencia no relacionados con el área, se pueden interpretar como el área bajo la gráfica de una función. Algunos de éstos se exploran en *Enfoque en el modelado*, página 929.

12.1 Determinación de límites en forma numérica y gráfica

En esta sección se emplean tablas de valores y gráficas de funciones para responder la pregunta, ¿qué sucede con los valores $f(x)$ de una función f cuando la variable x se aproxima a un número a?

Definición de límite

Se comienza por investigar el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

para valores de x cercanos a 2. En la tabla siguiente se dan los valores de $f(x)$ para valores de x cercanos a 2 pero no iguales a 2.

x	$f(x)$
1.0	2.000000
1.5	2.750000
1.8	3.440000
1.9	3.710000
1.95	3.852500
1.99	3.970100
1.995	3.985025
1.999	3.997001

x	$f(x)$
3.0	8.000000
2.5	5.750000
2.2	4.640000
2.1	4.310000
2.05	4.152500
2.01	4.030100
2.005	4.015025
2.001	4.003001

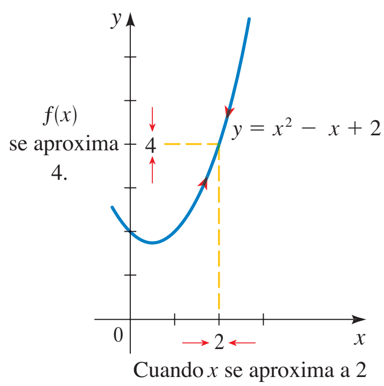


Figura 1

De la tabla y la gráfica de f (una parábola) mostrada en la figura 1, se puede observar que cuando x está cerca de 2 (en cualquier lado de 2), $f(x)$ está cerca de 4. De hecho, parece que se puede lograr que los valores de $f(x)$ se aproximen a 4 tanto como se desee al tomar x suficientemente cercana a 2. Esto se expresa diciendo "el límite de la función $f(x) = x^2 - x + 2$ cuando x se aproxima a 2 es igual a 4". La notación para esto es

$$\lim_{x \to 2} (x^2 - x + 2) = 4$$

En general, se usa la siguiente notación.

Definición del límite de una función

Se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y se dice

"el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L"

si es posible hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen de manera arbitraria a L (tan cerca de L como se quiera) al tomar x suficientemente próxima a a, pero no igual a a.

En términos generales, esto dice que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más al número L cuando x se acerca cada vez más al número a (desde cualquier lado de a) pero $x \neq a$.

Otra notación para $\lim_{x \to a} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to a$$

lo que normalmente se lee "$f(x)$ tiende a L cuando x tiende a a". Esta es la notación que se usó en la sección 3.6 en la explicación de asíntotas de funciones racionales.

Observe la frase "pero $x \neq a$" en la definición de límite. Esto significa que al hallar el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a, nunca se considera $x = a$. De hecho, incluso $f(x)$ no necesita estar definida cuando $x = a$. Lo único que importa es cómo f está definida *cerca de a*.

En la figura 2 se muestran las gráficas de tres funciones. Hay que observar que en el inciso c), $f(a)$ no está definida, y en el inciso b), $f(a) \neq L$. Pero en cada caso, sin importar lo que sucede en a, $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

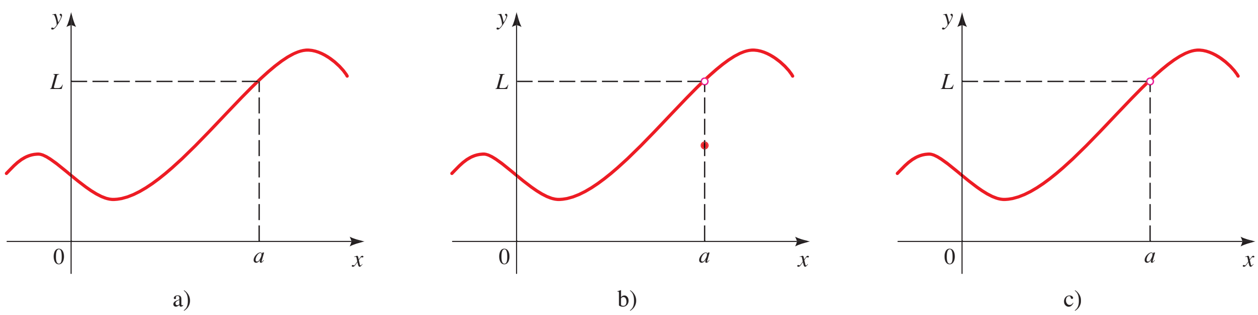


Figura 2
$\lim_{x \to a} f(x) = L$ en los tres casos

Estimación de límites en forma numérica y gráfica

En la sección 12.2 se desarrollarán técnicas para hallar valores exactos de límites. Por ahora, se usan tablas y gráficas para estimar límites de funciones.

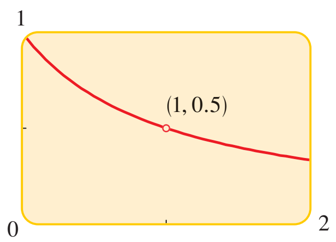


Figura 3

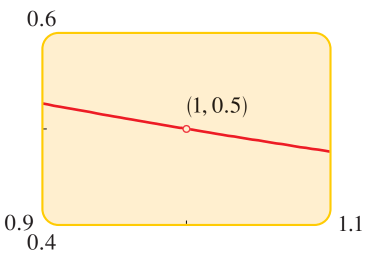


Figura 4

Ejemplo 1 Estimar un límite en forma numérica y gráfica

Deduzca el valor de $\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$. Compruebe con una gráfica.

Solución Observe que la función $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ no está definida cuando $x = 1$, pero esto no importa porque la definición de $\lim_{x\to a} f(x)$ dice que se consideran valores de x próximos a a pero diferentes de a. Las siguientes tablas proporcionan valores de $f(x)$ (correctos hasta seis decimales) para valores de x que se aproximan a 1 (pero que son distintos de 1).

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.4000000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

Sobre la base de valores en las dos tablas, se infiere que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

Como comprobación gráfica se usa un dispositivo de graficación para producir la figura 3. Se puede observar que cuando x se aproxima a 1, y se acerca a 0.5. Si se usan las características ZOOM y TRACE para tener una vista más amplia, como en la figura 4, se puede observar que cuando x se acerca cada vez más a 1, y se aproxima más y más a 0.5. Esto refuerza la conclusión. ■

Ejemplo 2 Hallar un límite a partir de una tabla

Encuentre $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

Solución En la tabla del margen se listan valores de la función para varios valores de t cerca de 0. Cuando t se aproxima a 0, los valores de la función al parecer tienden a 0.1666666 . . . , y por lo tanto, se infiere que

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2} = \frac{1}{6}$$ ■

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
±1.0	0.16228
±0.5	0.16553
±0.1	0.16662
±0.05	0.16666
±0.01	0.16667

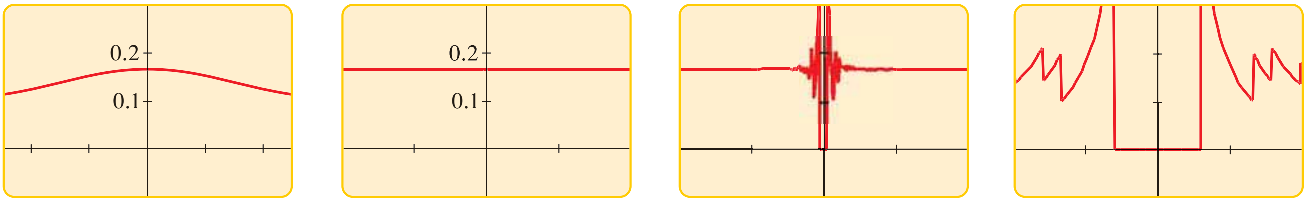
t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
±0.0005	0.16800
±0.0001	0.20000
±0.00005	0.00000
±0.00001	0.00000

¿Qué sucedería en el ejemplo 2 si se hubieran tomado incluso valores cada vez más pequeños de t? En la tabla del margen se muestran los resultados que proporciona una calculadora; se puede observar que al parecer algo extraño está sucediendo.

Si prueba estos cálculos en su calculadora, podría obtener valores distintos, pero en algún momento se obtendría el valor 0 si se hace a t suficientemente pequeña. ¿Esto significa que en realidad la respuesta es 0 en lugar de $\frac{1}{6}$? No, el valor del límite es $\frac{1}{6}$, como se mostrará en la siguiente sección. El problema es que la calculadora dio valores falsos porque $\sqrt{t^2+9}$ es muy cercano a 3 cuando t es pequeña. (De hecho, cuando t es suficientemente pequeña, un valor de calculadora para $\sqrt{t^2+9}$ es 3.000 . . . hasta los dígitos que la calculadora pueda llevar.)

Algo similar sucede cuando se intenta graficar la función del ejemplo 2 en un dispositivo de graficación. Los incisos a) y b) de la figura 5 muestran gráficas bastante

exactas de esta función, y cuando se usa la característica TRACE, se puede estimar con facilidad que el límite está cercano a $\frac{1}{6}$. Pero al amplificar demasiado, como en los incisos c) y d), se obtienen entonces gráficas inexactas, de nuevo como resultado de problemas con la resta.



a) $[-5, 5]$ por $[-0.1, 0.3]$ b) $[-0.1, 0.1]$ por $[-0.1, 0.3]$ c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ por $[-0.1, 0.3]$ d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ por $[-0.1, 0.3]$

Figura 5

Límites que no existen

Las funciones no necesariamente se aproximan a un valor infinito en todo punto. En otras palabras, es posible que un límite no exista. En los tres ejemplos siguientes se ilustran formas en las que esto puede suceder.

Ejemplo 3 Un límite que no existe (una función con un salto)

La función de Heaviside H se define como

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

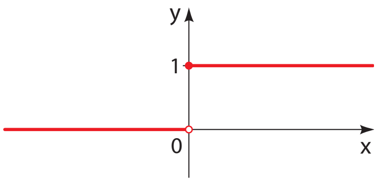


Figura 6

[Esta función es llamada así en honor al ingeniero eléctrico Oliver Heaviside (1850-1925) y se puede usar para describir una corriente eléctrica que se activa en el tiempo $t = 0$.] Su gráfica se muestra en la figura 6. Observe el "salto" en la gráfica en $x = 0$.

Cuando t tiende a 0 por la izquierda, $H(t)$ se aproxima a 0. Cuando t se aproxima a 0 por la derecha, $H(t)$ tiende a 1. No hay un solo número al que se aproxime $H(t)$ cuando t se aproxima a 0. Por lo tanto, $\lim_{t \to a} H(x)$ no existe. ■

Ejemplo 4 Límite que no existe (una función que oscila)

Encuentre $\displaystyle\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$.

Solución La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi/x)$ no está definida en 0. La evaluación de la función para algunos valores pequeños de x da

$$\begin{array}{ll} f(1) = \operatorname{sen} \pi = 0 & f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \operatorname{sen} 2\pi = 0 \\ f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \operatorname{sen} 3\pi = 0 & f\left(\tfrac{1}{4}\right) = \operatorname{sen} 4\pi = 0 \\ f(0.1) = \operatorname{sen} 10\pi = 0 & f(0.01) = \operatorname{sen} 100\pi = 0 \end{array}$$

De manera similar, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$. Con base en esta información se podría inferir que

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} \stackrel{?}{=} 0$$

pero esta vez la inferencia es errónea. Observe que aunque $f(1/n) = \text{sen}\, n\pi = 0$ para cualquier entero n, también es cierto que $f(x) = 1$ para una infinidad de valores de x que se aproximan a 0. (Véase la gráfica de la figura 7.)

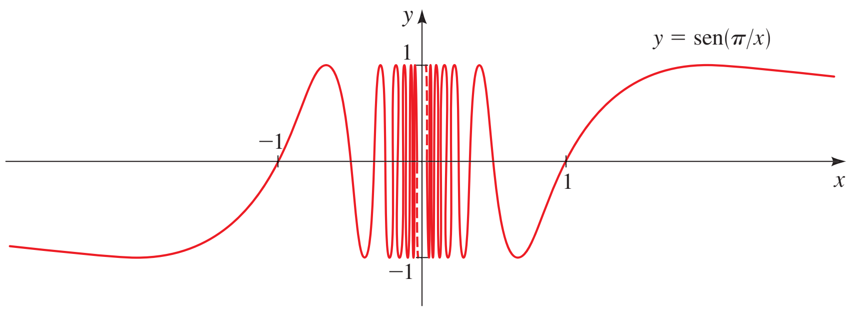


Figura 7

Las líneas discontinuas indican que los valores de sen (π/x) oscilan entre 1 y -1 infinitamente cuando x se aproxima a 0. Puesto que los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número fijo cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x\to 0} \text{sen}\,\frac{\pi}{x} \quad \text{no existe}$$

■

En el ejemplo 4 se ilustran algunas de las dificultades para inferir el valor de un límite. Es fácil inferir el valor erróneo si se usan valores inapropiados de x, pero es difícil saber cuándo dejar de calcular valores. Y, como muestra la explicación después del ejemplo 2, algunas veces las calculadoras y computadoras dan valores incorrectos. Sin embargo, en las dos secciones siguientes, se desarrollarán métodos infalibles para calcular límites.

Ejemplo 5 Un límite que no existe (una función con una asíntota vertical)

Hallar $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si existe.

x	$\dfrac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10 000
± 0.001	1 000 000

Solución Cuando x se aproxima a 0, x^2 también se acerca a 0 y $1/x^2$ se vuelve muy grande. (Véase la tabla al margen.) De hecho, resulta evidente de la gráfica de la función $f(x) = 1/x^2$ mostrada en la figura 8 que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente grandes al tomar x lo bastante cerca a 0. Así, los valores de $f(x)$ no se aproximan a un número, de modo que $\lim_{x\to 0}(1/x^2)$ no existe.

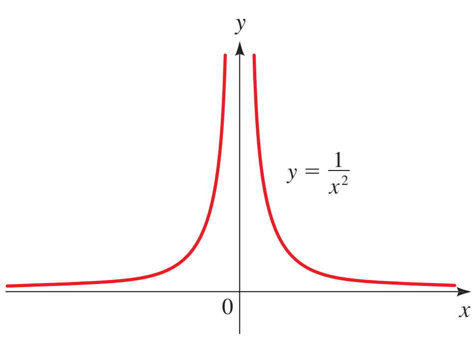


Figura 8

■

Para indicar la clase de comportamiento exhibido en el ejemplo 5, se usa la notación

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Esto no significa que se esté considerando a ∞ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en la que el límite no existe: $1/x^2$ se puede hacer tan grande como se quiera al tomar el valor de x suficientemente cerca de 0. Observe que la línea $x = 0$ (el eje y) es un asíntota vertical en el sentido que se describió en la sección 3.6.

Límites unilaterales

Se observa en el ejemplo 3 que $H(t)$ tiende a 0 cuando t se aproxima a 0 por la izquierda y $H(t)$ tiende a 1 cuando t se aproxima a 0 por la derecha. Esta situación se indica con símbolos escribiendo

$$\lim_{t \to 0^-} H(t) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{t \to 0^+} H(t) = 1$$

El símbolo "$t \to 0^-$" indica que se consideran sólo valores de t que son menores que 0. De igual manera, "$t \to 0^+$" indica que se consideran sólo valores de t que son mayores que 0.

Definición de un límite unilateral

Se escribe

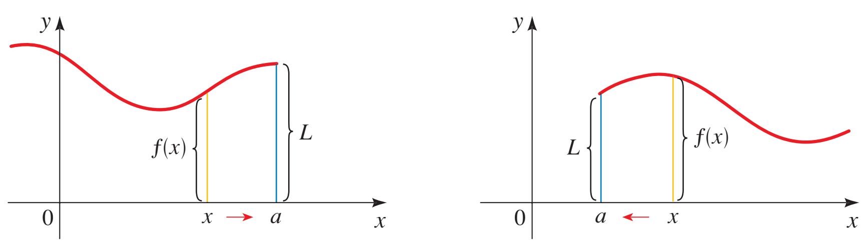
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

y se lee el "límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a" [o el "límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a por la izquierda"] es igual a L si es posible hacer los valores de $f(x)$ arbitrariamente cercanos a L al tomar x suficientemente cercana a a y x menor que a.

Hay que observar que esta definición difiere de la definición de un límite bilateral sólo en que se requiere que x sea menor que a. De manera similar, si se requiere que x sea mayor que a, se obtiene "el **límite derecho de $f(x)$ cuando x se aproxima a a** es igual a L" y se escribe

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Por lo tanto, el símbolo "$x \to a^+$" significa que sólo se considera $x > a$. Estas definiciones se ilustran en la figura 9.



a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Figura 9

Al comparar las definiciones de límites bilaterales y unilaterales, se puede observar que la siguiente regla es cierta.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Por lo tanto, si los límites por la izquierda y por la derecha son diferentes, el límite (bilateral) no existe. Se usa este hecho en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 6 Límites de una gráfica

La gráfica de una función g se muestra en la figura 10. Utilícela para expresar los valores (si existen) de lo siguiente:

a) $\lim_{x \to 2^-} g(x)$, $\lim_{x \to 2^+} g(x)$, $\lim_{x \to 2} g(x)$

b) $\lim_{x \to 5^-} g(x)$, $\lim_{x \to 5^+} g(x)$, $\lim_{x \to 5} g(x)$

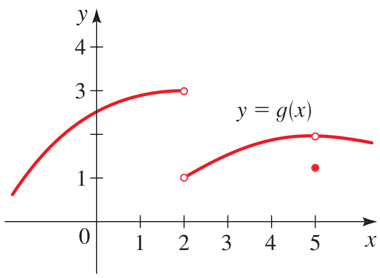


Figura 10

Solución

a) De la gráfica se puede observar que los valores de $g(x)$ se aproximan a 3 cuando x se aproxima a 2 por la izquierda, pero se aproximan a 1 cuando x se aproxima a 2 por la derecha. Por lo tanto

$$\lim_{x \to 2^-} g(x) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^+} g(x) = 1$$

Puesto que los límites izquierdo y derecho son diferentes, se concluye que $\lim_{x \to 2} g(x)$ no existe.

b) La gráfica muestra también que

$$\lim_{x \to 5^-} g(x) = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 5^+} g(x) = 2$$

Esta vez los límites izquierdo y derecho son los mismos y, por lo tanto, se tiene

$$\lim_{x \to 5} g(x) = 2$$

A pesar de este hecho, observe que $g(5) \neq 2$. ■

Ejemplo 7 Función definida por partes

Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Grafique f y emplee la gráfica para hallar lo siguiente:

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 1} f(x)$

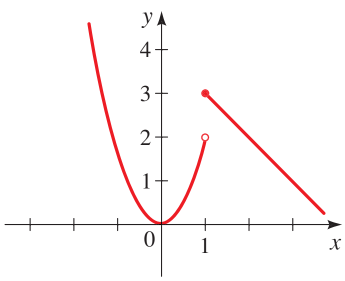


Figura 11

Solución La gráfica de f se muestra en la figura 11. De la gráfica se puede observar que los valores de $f(x)$ tienden a 2 cuando x tiende a 1 por la izquierda, pero tienden a 3 cuando x tiende a 1 por la derecha. Así, los límites izquierdo y derecho no son iguales. Por lo tanto se tiene

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$ **b)** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$ **c)** $\lim_{x \to 1} f(x)$ no existe. ■

12.1 Ejercicios

1–6 ■ Complete la tabla de valores (hasta cinco decimales) y empléela para estimar el valor del límite.

1. $\lim_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

x	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1
$f(x)$						

2. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 + x - 6}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$						

3. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{x^3 - 1}$

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$						

4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

x	± 1	± 0.5	± 0.1	± 0.05	± 0.01
$f(x)$					

6. $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

x	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001
$f(x)$					

7–12 ■ Use una tabla de valores para estimar el valor del límite. Después use un dispositivo de graficación para confirmar su resultado en forma gráfica.

7. $\lim_{x \to -4} \dfrac{x + 4}{x^2 + 7x + 12}$

8. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

9. $\lim_{x \to 0} \dfrac{5^x - 3^x}{x}$

10. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 9} - 3}{x}$

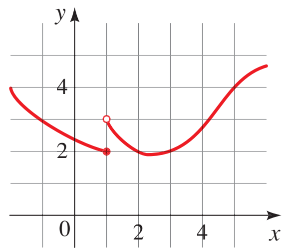
11. $\lim_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x - 1} \right)$

12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan 3x}$

13. Para la función f cuya gráfica se da, exprese el valor de la cantidad dada, si existe. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 1} f(x)$

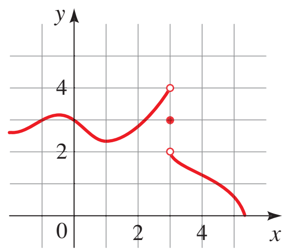
d) $\lim_{x \to 5} f(x)$ **e)** $f(5)$



14. Para la función f cuya gráfica se da, exprese el valor de la cantidad dada, si existe. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x \to 0} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ **c)** $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

d) $\lim_{x \to 3} f(x)$ **e)** $f(3)$

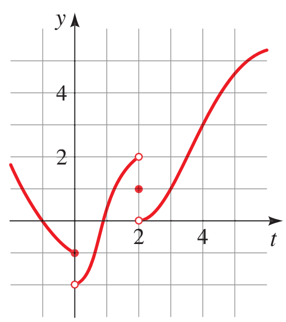


15. Para la función g cuya gráfica se da, exprese el valor de la cantidad dada, si existe. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{t \to 0^-} g(t)$ **b)** $\lim_{t \to 0^+} g(t)$ **c)** $\lim_{t \to 0} g(t)$

d) $\lim_{t \to 2^-} g(t)$ **e)** $\lim_{t \to 2^+} g(t)$ **f)** $\lim_{t \to 2} g(t)$

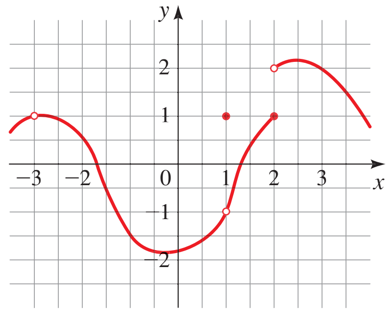
g) $g(2)$ **h)** $\lim_{t \to 4} g(t)$



16. Exprese el valor del límite, si existe, de la gráfica dada de f. Si no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x\to3} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to1} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to-3} f(x)$

d) $\lim_{x\to2^-} f(x)$ **e)** $\lim_{x\to2^+} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to2} f(x)$



17–22 ■ Use un dispositivo de graficación para determinar si existe el límite. Si existe, estime su valor hasta dos decimales.

17. $\lim_{x\to1} \dfrac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 5x + 3}$

18. $\lim_{x\to2} \dfrac{x^3 + 6x^2 - 5x + 1}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$

19. $\lim_{x\to0} \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

20. $\lim_{x\to0} \dfrac{x^2}{\cos 5x - \cos 4x}$

21. $\lim_{x\to0} \cos \dfrac{1}{x}$

22. $\lim_{x\to0} \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$

23–26 ■ Grafique la función definida por partes y emplee su gráfica para hallar los valores de los límites, si existen.

23. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 2 \\ 6 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to2^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to2^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to2} f(x)$

24. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to0^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to0} f(x)$

25. $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to-1} f(x)$

26. $f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & \text{si } x \le -2 \\ -x + 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ **c)** $\lim_{x\to-2} f(x)$

Descubrimiento • Debate

27. Una función con límites especificados Bosqueje la gráfica de un ejemplo de una función f que satisface las siguientes condiciones.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to2} f(x) = 1 \qquad f(0) = 2 \qquad f(2) = 3$$

¿Cuántas funciones hay?

28. Dificultades con las calculadoras para gráficas

a) Evalúe $h(x) = (\tan x - x)/x^3$ para $x = 1, 0.5, 0.1, 0.05, 0.01$ y 0.005.

b) Infiera el valor de $\lim_{x\to0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

c) Evalúe $h(x)$ para valores sucesivamente más pequeños de x hasta que por último llegue a valores 0 para $h(x)$. ¿Tiene la seguridad de que su inferencia del inciso b) es correcta? Explique por qué en algún momento obtuvo valores 0.

d) Grafique la función h en el rectángulo de visión $[-1, 1]$ por $[0, 1]$. Luego amplíe el punto donde la gráfica cruza el eje y para estimar el límite de $h(x)$ cuando x se aproxima a 0. Continúe con la amplificación hasta que observe distorsiones en la gráfica de h. Compare con sus resultados del inciso c).

12.2 Determinación algebraica de límites

En la sección 12.1 se emplearon calculadoras y gráficas para inferir los valores de límites, pero se vio que tales métodos no siempre conducen a la respuesta correcta. En esta sección, se usan métodos algebraicos para hallar límites de manera exacta.

Leyes de límites

Se usan las siguientes propiedades de límites, llamadas *leyes de límites*, para calcular los límites.

Leyes de límites

Suponga que c es una constante y que los siguientes límites existen:

$$\lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to a} g(x)$$

Entonces

1. $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de una suma
2. $\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de una diferencia
3. $\lim_{x \to a} [cf(x)] = c \lim_{x \to a} f(x)$ — Límite de un múltiplo constante
4. $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$ — Límite de un producto
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ si $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$ — Límite de un cociente

Estas cinco leyes se pueden expresar verbalmente como sigue:

1. El límite de una suma es la suma de los límites. (Límite de una suma)
2. El límite de una diferencia es la diferencia de los límites. (Límite de una diferencia)
3. El límite de una constante por una función es la constante multiplicada por el límite de la función. (Límite de un múltiplo constante)
4. El límite de un producto es el producto de los límites. (Límite de un producto)
5. El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0). (Límite de un cociente)

Es fácil pensar que estas propiedades son ciertas. Por ejemplo, si $f(x)$ es cercana a L y $g(x)$ es cercana a M, es razonable concluir que $f(x) + g(x)$ es cercana a $L + M$. Esto da una base intuitiva para creer que la ley 1 es cierta.

Si se usa la ley 4 (límite de un producto) de manera repetida con $g(x) = f(x)$, se obtiene la siguiente ley 6 para el límite de una potencia. Una ley similar se cumple para las raíces.

Leyes de límites

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ donde n es un entero positivo — Límite de una potencia
7. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ donde n es un entero positivo — Límite de una raíz

   [Si n es par, se supone que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

En palabras, estás leyes dicen

6. El límite de una potencia es la potencia del límite. (Límite de una potencia)
7. El límite de una raíz es la raíz del límite. (Límite de una raíz)

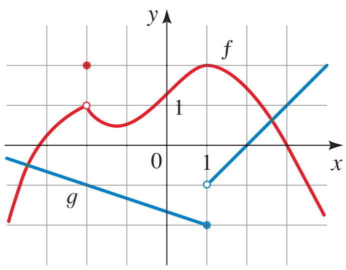


Figura 1

Ejemplo 1 Uso de leyes de límites

Use las leyes de límites y las gráficas de f y g en la figura 1 para evaluar los siguientes límites, si existen.

a) $\lim\limits_{x\to-2}[f(x)+5g(x)]$ b) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)]$

c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ d) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]^3$

Solución

a) De las gráficas de f y g se puede observar que

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-2} g(x) = -1$$

Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}[f(x)+5g(x)] &= \lim_{x\to-2} f(x) + \lim_{x\to-2}[5g(x)] && \text{Límite de una suma}\\ &= \lim_{x\to-2} f(x) + 5\lim_{x\to-2} g(x) && \text{Límite de un múltiplo constante}\\ &= 1 + 5(-1) = -4\end{aligned}$$

b) Se puede observar que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Pero $\lim_{x\to 1} g(x)$ no existe porque los límites izquierdo y derecho son diferentes:

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = -2 \qquad \lim_{x\to 1^+} g(x) = -1$$

Por lo tanto no se puede usar la ley 4 (límite de un producto). El límite dado no existe, puesto que el límite izquierdo no es igual al límite derecho.

c) Las gráficas muestran que

$$\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.4 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2} g(x) = 0$$

Debido a que el límite del denominador es 0, no se puede usar la ley 5 (límite de un cociente). El límite dado no existe porque el denominador se aproxima a 0 mientras el numerador se aproxima a un número no cero.

d) Puesto que $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$, se usa la ley 6 para obtener

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[f(x)]^3 &= [\lim_{x\to 1} f(x)]^3 && \text{Límite de una potencia}\\ &= 2^3 = 8\end{aligned}$$

■

Aplicación de las leyes de límites

Al aplicar las leyes de límites, se requiere usar cuatro límites especiales.

Algunas unidades especiales

1. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$ donde n es un entero positivo

4. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ donde n es un entero positivo y $a > 0$

Los límites especiales 1 y 2 son intuitivamente obvios, un vistazo a las gráficas de $y = c$ y $y = x$ lo convencerán de su validez. Los límites 3 y 4 son casos especiales de las leyes de límites 6 y 7 (límites de una potencia y una raíz).

Ejemplo 2 Uso de las leyes de límites

Evalúe los siguientes límites y justifique cada paso.

a) $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4)$ b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Solución

a)

$$\lim_{x\to 5}(2x^2 - 3x + 4) = \lim_{x\to 5}(2x^2) - \lim_{x\to 5}(3x) + \lim_{x\to 5}4$$

Límites de una diferencia y suma

$$= 2\lim_{x\to 5}x^2 - 3\lim_{x\to 5}x + \lim_{x\to 5}4$$

Límite de un múltiplo constante

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4$$

Límites especiales 3, 2 y 1

$$= 39$$

b) Se empieza con la ley 5, pero su uso se justifica por completo sólo en la etapa final cuando se ve que los límites del numerador y el denominador existen y el límite del denominador no es 0.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x} = \frac{\lim\limits_{x\to -2}(x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim\limits_{x\to -2}(5 - 3x)}$$

Límite de un cociente

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -2}x^3 + 2\lim\limits_{x\to -2}x^2 - \lim\limits_{x\to -2}1}{\lim\limits_{x\to -2}5 - 3\lim\limits_{x\to -2}x}$$

Límites de sumas, diferencias y múltiplos constantes

$$= \frac{(-2)^3 + 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)}$$

Límites especiales 3, 2 y 1

$$= -\frac{1}{11}$$

■

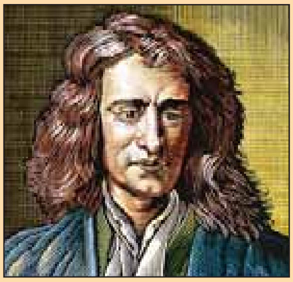
Si $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, entonces $f(5) = 39$. En el ejemplo 2a), se encuentra que $\lim_{x\to 5} f(x) = 39$. En otras palabras, se habría obtenido la respuesta correcta al sustituir x por 5. De manera similar, la sustitución directa proporciona la respuesta correcta en el inciso b). Las funciones del ejemplo 2 son una función polinomial y una función racional, respectivamente, y el uso similar de leyes de límites prueba que la sustitución directa funciona siempre para tales funciones. Este hecho se expresa como sigue:

Límites por sustitución directa

Si f es una función polinomial o racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman **continuas en** a. Aprenderá más acerca de las funciones continuas cuando estudie cálculo.



Bill Sanederson/SPL/Photo Researchers, Inc.

Sir Isaac Newton (1642-1727) es considerado universalmente como uno de los gigantes de la física y las matemáticas. Es bien conocido por descubrir las leyes del movimiento y la gravedad y por inventar el cálculo, pero también demostró el teorema del binomio y las leyes de la óptica, y desarrolló métodos para resolver ecuaciones polinomiales hasta cualquier exactitud deseada. Nació el día de Navidad, pocos meses después de la muerte de su padre. Después de una infancia infeliz, entró a la Universidad de Cambridge, donde aprendió matemáticas estudiando los escritos de Euclides y Descartes.

Durante los años de la peste de 1665 y 1666, cuando se cerró la universidad, Newton pensó y escribió acerca de ideas que, una vez publicadas, revolucionaron a las ciencias de manera instantánea. Presa de un temor patológico a la crítica, publicó estos escritos sólo después de muchos años de insistencia por parte de Edmund Halley (quien descubrió el ahora famoso cometa) y otros colegas.

Los trabajos de Newton le dieron enorme fama y prestigio. Incluso algunos poetas lo elogiaron; Alexander Pope escribió:

La Naturaleza y sus leyes
yacían ocultas en
la noche; dijo Dios
"que nazca Newton"
y todo se hizo luz.

(*continúa*)

Ejemplo 3 Determinación de límites por sustitución directa

Evalúe los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 3}(2x^3 - 10x - 8)$ b) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x}{x^4+2}$

Solución

a) La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 12$ es un polinomio, de modo que se puede hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x\to 3}(2x^3 - 10x - 12) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

b) La función $f(x) = (x^2 + 5x)/(x^4 + 2)$ es una función racional y $x = -1$ está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x = -1$). Así, se puede hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x}{x^4+2} = \frac{(-1)^2+5(-1)}{(-1)^4+2} = -\frac{4}{3}$$

■

Determinación de límites por medio de álgebra y leyes de límites

Como se pudo observar en el ejemplo 3, evaluar los límites por sustitución directa es fácil. Pero no todos los límites pueden ser evaluados de esta manera. De hecho, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles requiere un trabajo más arduo para evaluar el límite. En los tres ejemplos siguientes se ilustra cómo usar el álgebra para hallar límites.

Ejemplo 4 Hallar un límite mediante cancelación de un factor común

Encuentre $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}$.

Solución Sea $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$. No se puede hallar el límite sustituyendo $x = 1$ porque $f(1)$ no está definido. En cambio, es necesario realizar antes algunas operaciones algebraicas. Se factoriza el denominador como una diferencia de cuadrados:

$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x - 1$. Al tomar el límite cuando x tiende a 1, se tiene $x \neq 1$ y, por lo tanto, $x - 1 \neq 0$. En consecuencia, se puede cancelar el factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)} && \text{Factorice}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1} && \text{Cancele}\\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} && \text{Sea } x\to 1\end{aligned}$$

Este cálculo confirma algebraicamente la respuesta obtenida en forma numérica y gráfica en el ejemplo 1 de la sección 12.1. ■

Newton fue bastante más modesto respecto a sus logros. Él dijo, “me parece haber sido sólo como un niño jugando en la playa . . . mientras el gran océano de la verdad . . . yace sin descubrir ante mí”. Newton fue nombrado caballero por la reina Ana en 1705 y fue enterrado con grandes honores en la abadía de Westminster.

Ejemplo 5 Hallar un límite mediante simplificación

Evalúe $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$.

Solución No se puede usar sustitución directa para evaluar este límite porque el límite del denominador es 0. Así que primero se simplifica algebraicamente el límite.

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 9}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(9 + 6h + h^2) - 9}{h} && \text{Desarrolle} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h + h^2}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h\to 0} (6 + h) && \text{Cancele } h \\
&= 6 && \text{Sea } h \to 0
\end{aligned}
$$

■

Ejemplo 6 Hallar el límite mediante racionalización

Encuentre $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2}$.

Solución No se puede aplicar la ley 5 (límite de un cociente) de manera inmediata, puesto que el límite del denominador es 0. Aquí el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador.

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2+9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2+9} + 3}{\sqrt{t^2+9} + 3} && \text{Racionalice el numerador} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(t^2+9) - 9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9} + 3\right)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t^2+9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{t\to 0}(t^2+9)} + 3} = \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Este cálculo confirma la inferencia que se hizo en el ejemplo 2 en la sección 12.1. ■

Uso de límites izquierdo y derecho

Algunos límites se calculan mejor si se determinan primero los límites izquierdo y derecho. El siguiente teorema es un recordatorio de lo que se descubrió en la sección 12.1. Establece que *un límite bilateral existe si y sólo si ambos límites unilaterales existen y son iguales.*

$$
\lim_{x\to a} f(x) = L \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)
$$

Al calcular los límites unilaterales se emplea el hecho de que las leyes de los límites se cumplen también para límites unilaterales.

Ejemplo 7 Comparar los límites derecho e izquierdo

Muestre que $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

Solución Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Puesto que $|x| = x$ para $x > 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Para $x < 0$, se tiene $|x| = -x$, así que

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0$$

Por consiguiente

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0$$

■

El resultado del ejemplo 7 parece plausible a partir de la figura 2.

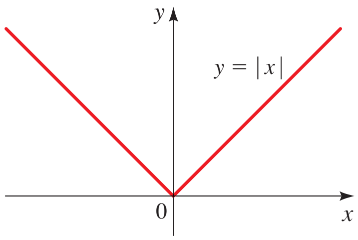


Figura 2

Ejemplo 8 Comparación de los límites derecho e izquierdo

Pruebe que $\lim_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ no existe.

Solución Puesto que $|x| = x$ para $x > 0$ y $|x| = -x$ para $x < 0$, se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

Puesto que los límites derecho e izquierdo existen y son diferentes, se deduce que $\lim_{x\to 0} |x|/x$ no existe. La gráfica de la función $f(x) = |x|/x$ se muestra en la figura 3 y corrobora los límites que se determinaron. ■

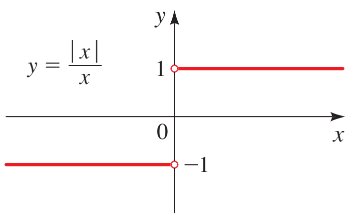


Figura 3

Ejemplo 9 Límite de una función definida por partes

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{si } x > 4 \\ 8 - 2x & \text{si } x < 4 \end{cases}$$

Determine si $\lim_{x\to 4} f(x)$ existe.

Solución Puesto que $f(x) = \sqrt{x-4}$ para $x > 4$, se tiene

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} \sqrt{x-4} = \sqrt{4-4} = 0$$

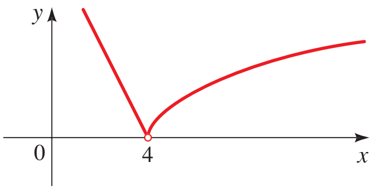


Figura 4

Puesto que $f(x) = 8 - 2x$ para $x < 4$, se tiene

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}(8 - 2x) = 8 - 2\cdot 4 = 0$$

Los límites derecho e izquierdo son iguales. Así, el límite existe y

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 0$$

La gráfica de f se muestra en la figura 4. ■

12.2 Ejercicios

1. Suponga que

$$\lim_{x\to a} f(x) = -3 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} h(x) = 8$$

Encuentre el valor del límite dado. Si el límite no existe, explique por qué.

a) $\lim_{x\to a} [f(x) + h(x)]$ **b)** $\lim_{x\to a} [f(x)]^2$

c) $\lim_{x\to a} \sqrt[3]{h(x)}$ **d)** $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)}$

e) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)}$ **f)** $\lim_{x\to a} \dfrac{g(x)}{f(x)}$

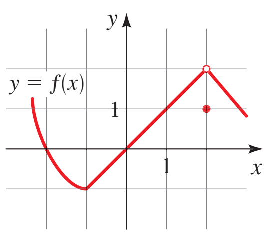
g) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **h)** $\lim_{x\to a} \dfrac{2f(x)}{h(x) - f(x)}$

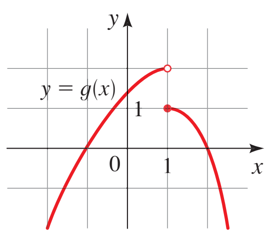
2. Se dan las gráficas de f y g. Empléelas para evaluar cada límite, si existe. Si el límite no existe explique por qué.

a) $\lim_{x\to 2} [f(x) + g(x)]$ **b)** $\lim_{x\to 1} [f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x\to 0} [f(x)g(x)]$ **d)** $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

e) $\lim_{x\to 2} x^3 f(x)$ **f)** $\lim_{x\to 1} \sqrt{3 + f(x)}$





3–8 ■ Evalúe el límite y justifique cada paso indicando la ley o leyes de límites apropiadas.

3. $\lim_{x\to 4} (5x^2 - 2x + 3)$ **4.** $\lim_{x\to 3} (x^3 + 2)(x^2 - 5x)$

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x - 2}{x^2 + 4x - 3}$ **6.** $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3}\right)^2$

7. $\lim_{t\to -2} (t + 1)^9(t^2 - 1)$ **8.** $\lim_{u\to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

9–20 ■ Evalúe el límite, si existe.

9. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ **10.** $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

11. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x + 6}{x + 2}$ **12.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

13. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$ **14.** $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

15. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$ **16.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

17. $\lim_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$ **18.** $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

19. $\lim_{x\to -4} \dfrac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$ **20.** $\lim_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2 + t}\right)$

21–24 ■ Encuentre el límite y use un dispositivo de graficación para confirmar su resultado en forma gráfica.

21. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$ **22.** $\lim_{x\to 0} \dfrac{(4 + x)^3 - 64}{x}$

23. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^3 - x}$ **24.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^8 - 1}{x^5 - x}$

25. **a)** Estime el valor de

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + 3x} - 1}$$

graficando la función $f(x) = x/(\sqrt{1 + 3x} - 1)$.

b) Construya una tabla de valores de $f(x)$ para x cercana a 0 e infiera el valor del límite.

c) Use las leyes de límites para probar que su inferencia es correcta.

26. **a)** Use una gráfica de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 + x} - \sqrt{3}}{x}$$

para estimar el valor de $\lim_{x\to 0} f(x)$ hasta dos decimales.

b) Use una tabla de valores de $f(x)$ para estimar el límite hasta cuatro decimales.

c) Use las leyes de los límites para hallar el valor exacto del límite.

27–32 ■ Encuentre el límite, si existe. Si el límite no existe, explique por qué.

27. $\lim_{x \to -4} |x + 4|$

28. $\lim_{x \to -4^-} \dfrac{|x + 4|}{x + 4}$

29. $\lim_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

30. $\lim_{x \to 1.5} \dfrac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

31. $\lim_{x \to 0^-} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

32. $\lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} \right)$

33. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Encuentre $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x)$.

b) ¿Existe el $\lim_{x \to 2} f(x)$?

c) Bosqueje la gráfica de f.

34. Sea

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 8 - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Evalúe cada límite, si existe.

i) $\lim_{x \to 0^+} h(x)$

ii) $\lim_{x \to 0} h(x)$

iii) $\lim_{x \to 1} h(x)$

iv) $\lim_{x \to 2^-} h(x)$

v) $\lim_{x \to 2^+} h(x)$

vi) $\lim_{x \to 2} h(x)$

b) Bosqueje la gráfica de h.

Descubrimiento • Debate

35. Cancelación y límites

a) ¿Qué está mal en la siguiente ecuación?

$$\frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = x + 3$$

b) Dado el inciso a), explique por qué la ecuación

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \to 2} (x + 3)$$

es correcta.

36. Contracción de Lorentz En la teoría de la relatividad, la fórmula de la contracción de Lorentz

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

expresa la longitud L de un objeto como una función de su velocidad v con respecto a un observador, donde L_0 es la longitud del objeto en reposo y c es la velocidad de la luz. Encuentre el $\lim_{v \to c^-} L$ e interprete el resultado. ¿Por qué es necesario un límite izquierdo?

37. Límites de sumas y productos

a) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)]$ podría existir aun cuando no existen $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

b) Muestre por medio de un ejemplo que $\lim_{x \to a} [f(x)g(x)]$ podría existir aun cuando no existen $\lim_{x \to a} f(x)$ ni $\lim_{x \to a} g(x)$.

12.3 Rectas tangentes y derivadas

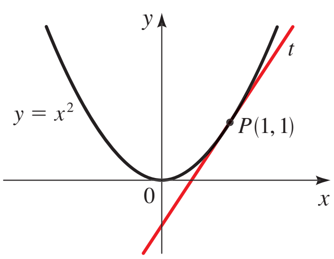


Figura 1

En esta sección se puede observar cómo surgen los límites cuando se intenta hallar la recta tangente a una curva o la tasa de cambio instantánea de una función.

Problema de la tangente

Una *recta tangente* es una recta que *sólo* toca a una curva. Por ejemplo, en la figura 1 se muestra la parábola $y = x^2$ y la recta tangente t que toca a la parábola en el punto $P(1, 1)$. Se podrá hallar una ecuación de la recta tangente t tan pronto como se conozca su pendiente m. La dificultad es que sólo se conoce el punto P, en t, mientras que para calcular la pendiente se requieren dos puntos. Pero observe que se puede calcular

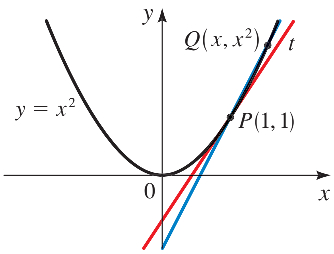


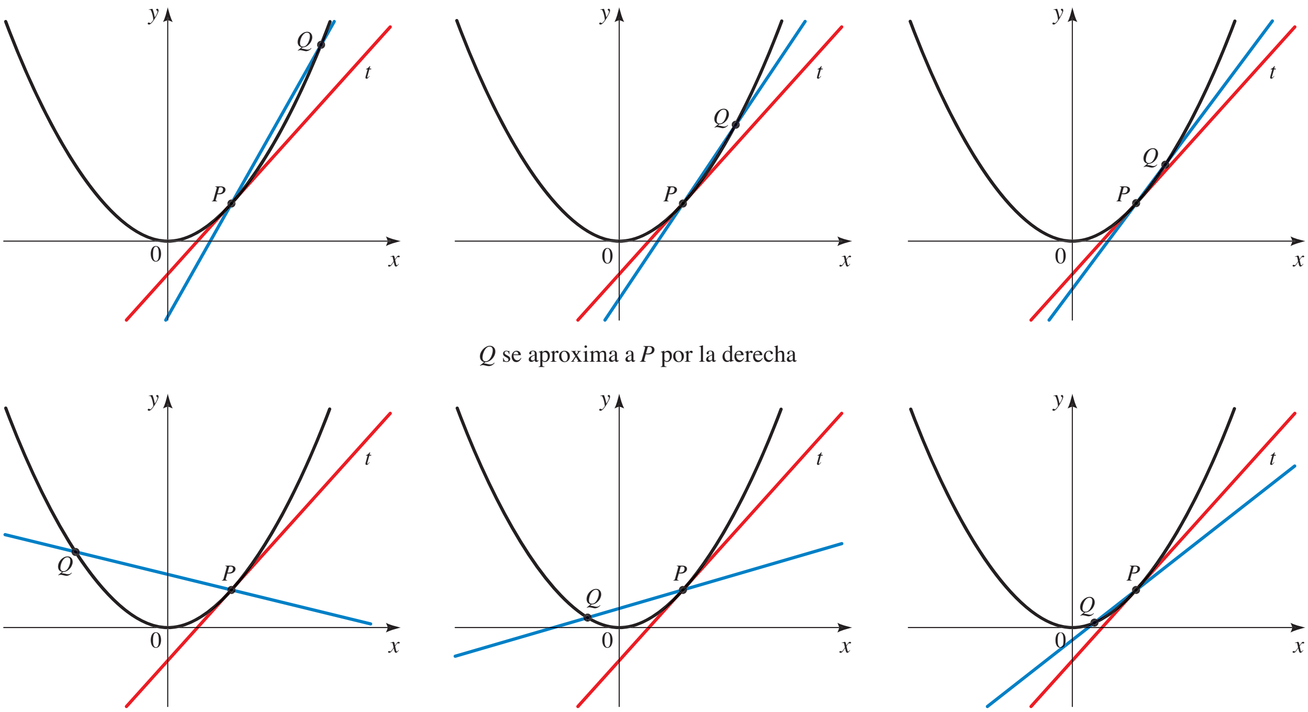
Figura 2

una aproximación a m si se elige un punto cercano $Q(x, x^2)$ en la parábola (como en la figura 2) y se calcula la pendiente m_{PQ} de la secante PQ.

Se elige $x \neq 1$ de modo que $Q \neq P$. Entonces

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Ahora se permite que x se aproxime a 1, de modo que Q se aproxima a P a lo largo de la parábola. En la figura se muestra cómo las secantes correspondientes rotan respecto a P y se aproximan a la recta tangente t.



Q se aproxima a *P* por la derecha

Q se aproxima a *P* por la izquierda

Figura 3

La pendiente de la tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes:

$$m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

Por lo tanto, usando el método de la sección 12.2, se tiene

$$m = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

La forma punto-pendiente para la ecuación de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(Véase la sección 1.10.)

Ahora que se sabe que la pendiente de la recta tangente es $m = 2$, se puede usar la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta para encontrar su ecuación:

$$y - 1 = 2(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = 2x - 1$$

A veces se hace referencia a la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto como la **pendiente de la curva** en el punto. La idea es que si se amplía lo suficiente la zona del punto, la curva se asemeja a una recta. En la figura 4 se ilustra este procedimiento para la curva $y = x^2$. Mientras más se amplía la zona, más se parece a una recta la parábola. En otras palabras, la curva se vuelve casi indistinguible de su recta tangente.

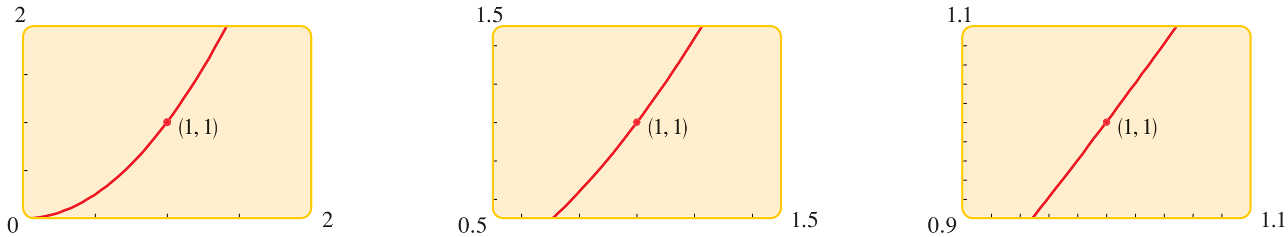


Figura 4
Ampliación de la zona del punto (1, 1) en la parábola $y = x^2$

Si se tiene una curva general C con ecuación $y = f(x)$ y se quiere hallar la tangente a C en el punto $P(a, f(a))$, entonces se considera un punto cercano $Q(x, f(x))$, donde $x \neq a$, y se calcula la pendiente de la secante PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Entonces se permite que Q se aproxime a P a lo largo de la curva C permitiendo que x se aproxime a a. Si m_{PQ} se aproxima a un número m, entonces se define la *tangente t* como la recta que pasa por P con pendiente m. (Esto equivale a decir que la tangente es la posición limitante de la secante PQ cuando Q se aproxima a P. Véase la figura 5.)

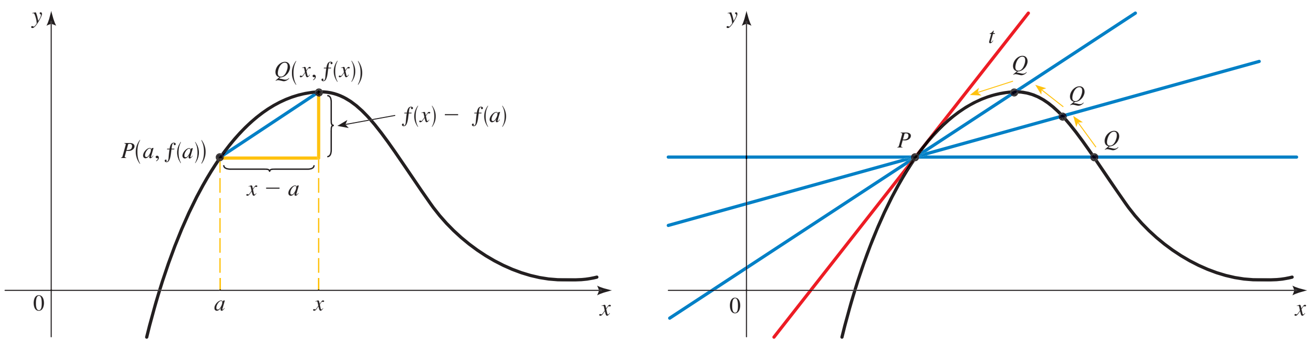


Figura 5

Definición de una recta tangente

La **recta tangente** a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(a, f(a))$ es la recta que pasa por P con pendiente

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que este límite exista.

Ejemplo 1 Hallar una recta tangente a una hipérbola

Encuentre una ecuación de la tangente a la hipérbola $y = 3/x$ en el punto (3, 1).

Solución Sea $f(x) = 3/x$. Entonces la pendiente de la recta tangente en (3, 1) es

$$m = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \qquad \text{Definición de } m$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\frac{3}{x} - 1}{x - 3} \qquad f(x) = \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{3 - x}{x(x - 3)} \qquad \text{Multiplique numerador y denominador por } x$$

$$= \lim_{x\to 3} \left(-\frac{1}{x}\right) \qquad \text{Cancele } x - 3$$

$$= -\frac{1}{3} \qquad \text{Permita que } x \to 3$$

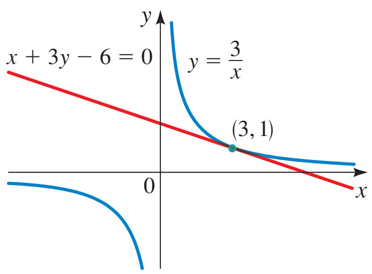


Figura 6

Por lo tanto, una ecuación de la tangente en el punto (3, 1) es

$$y - 1 = -\tfrac{1}{3}(x - 3)$$

que se simplifica a

$$x + 3y - 6 = 0$$

La hipérbola y la tangente se muestran en la figura 6. ■

Hay otra expresión para la pendiente de una recta tangente que algunas veces es más fácil usar. Sea $h = x - a$. Entonces $x = a + h$, de modo que la pendiente de la secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Véase la figura 7 donde se ilustra el caso $h > 0$ y Q está a la derecha de P. Sin embargo, si sucede que $h < 0$, Q estaría a la izquierda de P.

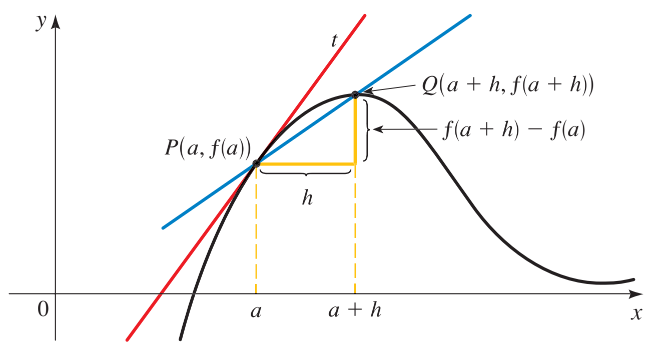


Figura 7

Observe que cuando x se aproxima a a, h tiende a 0 (porque $h = x - a$) y, por lo tanto, la expresión para la pendiente de la tangente es

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Newton y los límites

En 1687, Isaac Newton (véase la página 894) publicó su obra maestra *Principia Mathematica*. En este trabajo, el tratado científico más grande jamás escrito, Newton explicó su versión del cálculo y la empleó para investigar la mecánica, la dinámica de fluidos y el movimiento ondulatorio, y explicar el movimiento de planetas y cometas.

Los inicios del cálculo se encuentran en los cálculos de áreas y volúmenes de los eruditos griegos como Eudoxus y Arquímedes. Aunque los aspectos de la idea de límite están implícitos en su "método de agotamiento", Eudoxus y Arquímedes nunca formularon de manera explícita el concepto de límite. Del mismo modo, matemáticos como Cavalieri, Ferinat y Barrow, los precursores inmediatos de Newton en el desarrollo del cálculo, no emplearon en realidad límites. Fue Isaac Newton quien habló primero en forma explícita acerca de los límites. Explicó que la idea principal detrás de los límites es que las cantidades "se aproximan lo más posible por alguna diferencia dada". Newton estableció que el límite era el concepto básico en cálculo, pero quedó en manos de matemáticos posteriores como Cauchy aclarar estas ideas.

Ejemplo 2 Hallar una tangente

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 2x + 3$ en el punto (1, 2).

Solución Si $f(x) = x^3 - 2x + 3$, entonces la pendiente de la recta tangente donde $a = 1$ es

$$
\begin{aligned}
m &= \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} && \text{Definición de } m \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[(1+h)^3 - 2(1+h) + 3] - [1^3 - 2(1) + 3]}{h} && f(x) = x^3 - 2x + 3 \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 2 - 2h + 3 - 2}{h} && \text{Desarrolle el numerador} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h + 3h^2 + h^3}{h} && \text{Simplifique} \\
&= \lim_{h \to 0} (1 + 3h + h^2) && \text{Cancele } h \\
&= 1 && \text{Permita que } h \to 0
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, una ecuación de la recta tangente en (1, 2) es

$$y - 2 = 1(x - 1) \qquad \text{o} \qquad y = x + 1$$

■

Derivadas

Se ha visto que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ se puede escribir como

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Resulta que esta expresión surge también en muchos otros contextos, como hallar velocidades y otras tasas de cambio. Debido a que este tipo de límite ocurre de manera extensa, recibe un nombre y notación especiales.

Definición de una derivada

La **derivada de una función *f* en un número *a***, denotada por $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

si este límite existe.

Ejemplo 3 Hallar una derivada en un punto

Encuentre la derivada de la función $f(x) = 5x^2 + 3x - 1$ en el número 2.

Solución De acuerdo con la definición de una derivada, con $a = 2$, se tiene

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} && \text{Definición de } f'(2)\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{[5(2+h)^2+3(2+h)-1]-[5(2)^2+3(2)-1]}{h} && f(x)=5x^2+3x-1\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{20+20h+5h^2+6+3h-1-25}{h} && \text{Desarrolle}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{23h+5h^2}{h} && \text{Simplifique}\\
&= \lim_{h\to 0}(23+5h) && \text{Cancele } h\\
&= 23 && \text{Permita que } h\to 0
\end{aligned}$$

■

Se puede observar de la definición de una derivada que el número $f'(a)$ es el mismo que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. Por lo tanto, el resultado del ejemplo 2 muestra que la pendiente de la recta tangente a la parábola $y = 5x^2 + 3x - 1$ en el punto $(2, 25)$ es $f'(2) = 23$.

Ejemplo 4 Hallar una derivada

Sea $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Encuentre $f'(a)$.

b) Encuentre $f'(1)$, $f'(4)$ y $f'(9)$.

Solución

a) Se usa la definición de la derivada en a:

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} && \text{Definición de derivada}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} && f(x)=\sqrt{x}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\cdot\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} && \text{Racionalice el numerador}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} && \text{Diferencia de cuadrados}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)} && \text{Simplifique el numerador}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \qquad \text{Cancele } h$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \qquad \text{Permita que } h \to 0$$

b) Al sustituir $a = 1$, $a = 4$ y $a = 9$ en el resultado del inciso a), se obtiene

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} \qquad f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \qquad f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

Estos valores de la derivada son las pendientes de las rectas tangentes mostradas en la figura 8.

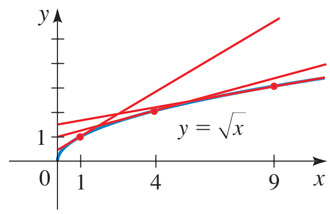


Figura 8

Tasas de cambio instantáneas

En la sección 2.3 se definió la tasa de cambio promedio de una función f entre los números a y x como

$$\text{tasa de cambio promedio} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Suponga que se considera la tasa de cambio promedio sobre intervalos cada vez más pequeños permitiendo que x se aproxima a a. El límite de estas tasas de cambio promedio se llama tasa de cambio instantánea.

Tasa de cambio instantánea

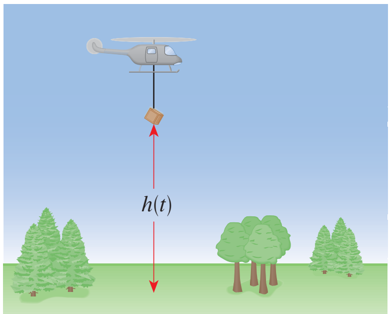
Si $y = f(x)$, la **tasa de cambio instantánea de y con respecto a x** en $x = a$ es el límite de las tasas de cambio promedio cuando x tiende a a:

$$\text{tasa de cambio instantánea} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Observe que ahora se tienen dos formas de interpretar la derivada:

- $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a $y = f(x)$ en $x = a$
- $f'(a)$ es la tasa de cambio instantánea de y con respecto a x en $x = a$

En el caso especial donde $x = t =$ tiempo y $s = f(t) =$ desplazamiento (distancia dirigida) en el tiempo t de un objeto que viaja en una recta, la tasa de cambio instantánea se llama **velocidad instantánea**.



Ejemplo 5 Velocidad instantánea de un objeto que cae

Si se deja caer un objeto desde una altura de 3000 pies, su distancia sobre el suelo (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 3000 - 16t^2$. Encuentre la velocidad instantánea del objeto después de 4 segundos.

Solución Después de 4 s, la altura es $h(4) = 2744$ pies. La velocidad instantánea es

$$\begin{aligned} h'(4) &= \lim_{t\to 4} \frac{h(t) - h(4)}{t - 4} && \text{Definición de } h'(4) \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{3000 - 16t^2 - 2744}{t - 4} && h(t) = 3000 - 16t^2 \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{256 - 16t^2}{t - 4} && \text{Simplifique} \\ &= \lim_{t\to 4} \frac{16(4 - t)(4 + t)}{t - 4} && \text{Factorice el numerador} \\ &= \lim_{t\to 4} -16(4 + t) && \text{Cancele } t - 4 \\ &= -16(4 + 4) = -128 \text{ pies/s} && \text{Permita } t \to 4 \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la altura *disminuye* a la velocidad de 128 pies/s. ■

t	$P(t)$
1996	269 667 000
1998	276 115 000
2000	282 192 000
2002	287 941 000
2004	293 655 000

t	$\dfrac{P(t) - P(2000)}{t - 2000}$
1996	3 131 250
1998	3 038 500
2002	2 874 500
2004	2 865 750

Ejemplo 6 Estimar una tasa de cambio instantánea

Sea $P(t)$ la población de Estados Unidos en el tiempo t. La tabla del margen da valores aproximados de esta función al proveer las estimaciones de población de mediados de año de 1996 a 2004. Interprete y estime el valor de $P'(2000)$.

Solución La derivada $P'(2000)$ significa la tasa de cambio de P con respecto a t cuando $t = 2000$, es decir, la tasa de incremento de la población en 2000.

De acuerdo con la definición de una derivada, se tiene

$$P'(2000) = \lim_{t\to 2000} \frac{P(t) - P(2000)}{t - 2000}$$

Así que se calculan y tabulan los valores del cociente de diferencias (las tasas de cambio promedio) como se muestra en la tabla del margen. Se puede observar que $P'(2000)$ yace en alguna parte entre 3 038 500 y 2 874 500. (Aquí se hace la suposición razonable de que la población no fluctuó mucho entre 1996 y 2004.) Se estima que la tasa de incremento de la población de Estados Unidos en 2000 fue el promedio de estos dos números, a saber

$$P'(2000) \approx 2.96 \text{ millones de personas/año}$$ ■

Aquí se ha estimado la derivada promediando las pendientes de dos secantes. Otro método es graficar la función de población y estimar la pendiente de la recta tangente cuando $t = 2000$

12.3 Ejercicios

1–6 ■ Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto dado.

1. $f(x) = 3x + 4$ en $(1, 7)$

2. $f(x) = 5 - 2x$ en $(-3, 11)$

3. $f(x) = 4x^2 - 3x$ en $(-1, 7)$

4. $f(x) = 1 + 2x - 3x^2$ en $(1, 0)$

5. $f(x) = 2x^3$ en $(2, 16)$

6. $f(x) = \dfrac{6}{x + 1}$ en $(2, 2)$

7–12 ■ Encuentre una ecuación de la tangente a la curva en el punto dado. Grafique la curva y la recta tangente.

7. $y = x + x^2$ en $(-1, 0)$

8. $y = 2x - x^3$ en $(1, 1)$

9. $y = \dfrac{x}{x - 1}$ en $(2, 2)$

10. $y = \dfrac{1}{x^2}$ en $(-1, 1)$

11. $y = \sqrt{x + 3}$ en $(1, 2)$

12. $y = \sqrt{1 + 2x}$ en $(4, 3)$

13–18 ■ Encuentre la derivada de la función en el número dado.

13. $f(x) = 1 - 3x^2$ en 2

14. $f(x) = 2 - 3x + x^2$ en -1

15. $g(x) = x^4$ en 1

16. $g(x) = 2x^2 + x^3$ en 1

17. $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 4

18. $G(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ en 4

19–22 ■ Encuentre $f'(a)$, donde a está en el dominio de f.

19. $f(x) = x^2 + 2x$

20. $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

21. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

22. $f(x) = \sqrt{x - 2}$

23. a) Si $f(x) = x^3 - 2x + 4$, encuentre $f'(a)$.

b) Encuentre ecuaciones de las tangentes a la gráfica de f en los puntos cuyas coordenadas x son 0, 1 y 2.

c) Grafique f y las tres tangentes.

24. a) Si $g(x) = 1/(2x - 1)$, encuentre $g'(a)$.

b) Encuentre las ecuaciones de las tangentes a la gráfica de g en los puntos cuyas coordenadas x son -1, 0 y 1.

c) Grafique g y las tres tangentes.

Aplicaciones

25. Velocidad de una bola Se lanza una bola al aire con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. Encuentre la velocidad cuando $t = 2$.

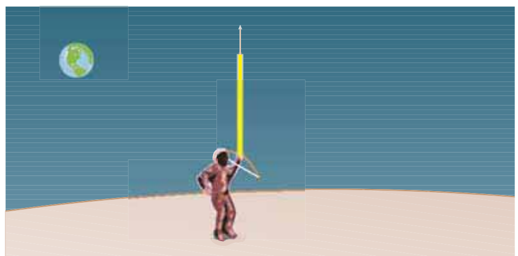
26. Velocidad sobre la Luna Si se lanza una flecha hacia arriba sobre la Luna con una velocidad de 58 m/s, su altura (en metros) después de t segundos está dada por $H = 58t - 0.83t^2$.

a) Encuentre la velocidad de la flecha después de un segundo.

b) Encuentre la velocidad de la flecha cuando $t = a$.

c) ¿En qué tiempo t la flecha chocará con la Luna?

d) ¿Con qué velocidad la flecha chocará con la Luna?

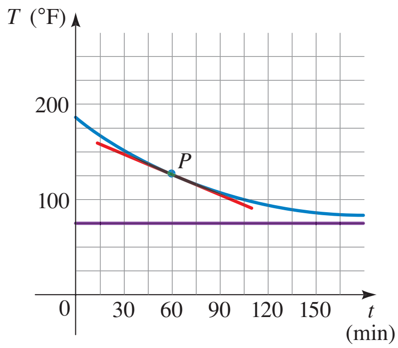


27. Velocidad de una partícula El desplazamiento s (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta está dada por la ecuación de movimiento $s = 4t^3 + 6t + 2$, donde t se mide en segundos. Encuentre la velocidad de la partícula s en los instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$.

28. Inflado de un balón Un balón esférico está siendo inflado. Encuentre la tasa de cambio del área de superficie $(S = 4\pi r^2)$ con respecto al radio r cuando $r = 2$ pies.

29. Cambio de temperatura Se saca de un horno un pavo asado cuando su temperatura ha alcanzado 185°F y se coloca sobre una mesa en una habitación donde la temperatura es 75°F. En la gráfica se muestra cómo disminuye la tempe-

ratura del pavo y finalmente alcanza la temperatura ambiente. Midiendo la pendiente de la tangente, estime la tasa de cambio de la temperatura después de una hora.



30. Frecuencia cardiaca Un monitor cardiaco se emplea para medir la frecuencia cardiaca de un paciente después de una cirugía. El monitor compila el número de latidos después de t minutos. Cuando se grafican los datos de la tabla, la pendiente de la tangente representa la frecuencia cardiaca en latidos por minuto.

t (min)	36	38	40	42	44
Latidos	2530	2661	2806	2948	3080

a) Encuentre las frecuencias cardiacas promedio (pendientes de las secantes) en los intervalos de tiempo $[40, 42]$ y $[42, 44]$.

b) Estime la frecuencia cardiaca del paciente después de 42 minutos promediando las pendientes de estas dos secantes.

31. Flujo de agua Un depósito contiene 1000 galones de agua, que salen por el fondo del depósito en media hora. Los valores de la tabla muestran el volumen V de agua que permanece en el depósito (en galones) después de t minutos.

t (min)	5	10	15	20	25	30
V (gal)	694	444	250	111	28	0

a) Encuentre las tasas promedio a las que el agua fluye del depósito (pendientes de las secantes) para los intervalos de tiempo $[10, 15]$ y $[15, 20]$.

b) La pendiente de la tangente en el punto $(15, 250)$ representa la tasa a la cual el agua fluye del depósito después de 15 minutos. Estime esta tasa promediando las pendientes de las secantes del inciso a).

32. Crecimiento de la población mundial En la tabla se muestran datos de la población mundial en el siglo XX.

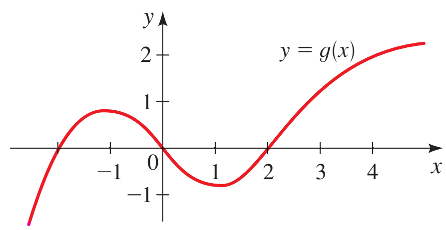
Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1900	1650	1960	3040
1910	1750	1970	3710
1920	1860	1980	4450
1930	2070	1990	5280
1940	2300	2000	6080
1950	2560		

Estime la tasa de crecimiento poblacional en 1920 y en 1980 promediando las pendientes de dos secantes.

Descubrimiento • Debate

33. Estimación de las derivadas de una gráfica Para la función g cuya gráfica se da, disponga los siguientes números en orden creciente y explique su razonamiento.

$$0 \qquad g'(-2) \qquad g'(0) \qquad g'(2) \qquad g'(4)$$



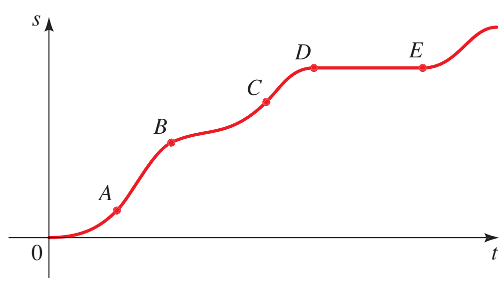
34. Estimación de las velocidades de una gráfica La gráfica muestra la función de posición de un automóvil. Use la forma de la gráfica para explicar sus respuestas a las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la velocidad inicial del automóvil?

b) ¿El automóvil iba más rápido en B o en C?

c) ¿El automóvil desaceleró o aceleró en A, B y C?

d) ¿Qué sucedió entre D y E?



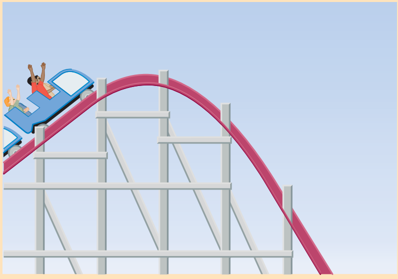
PROYECTO PARA UN DESCUBRIMIENTO

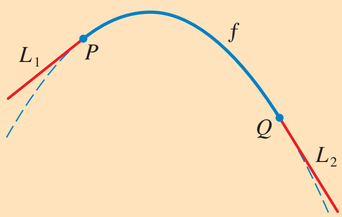
Diseño de una montaña rusa

Suponga que se le pide diseñar el primer ascenso y descenso de una nueva montaña rusa. Al estudiar las fotografías de sus montañas rusas favoritas, decide que la pendiente de ascenso sea 0.8 y la de descenso -1.6. Después, conecta estos dos tramos rectos $y = L_1(x)$ y $y = L_2(x)$ con parte de una parábola

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde x y $f(x)$ se miden en pies. Para que la pista sea uniforme no puede haber cambios abruptos de dirección, por lo que desea que los segmentos lineales L_1 y L_2 sean tangentes a la parábola en los puntos de transición P y Q, como se muestra en la figura.





1. Para simplificar las ecuaciones, usted decide colocar el origen en P. Como consecuencia, ¿cuál es el valor de c?
2. Suponga que la distancia horizontal entre P y Q es 100 pies. Para asegurar que la pista sea uniforme en los puntos de transición, ¿cuáles deben ser los valores de $f'(0)$ y $f'(100)$?
3. Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, muestre que $f'(x) = 2ax + b$.
4. Use los resultados de los problemas 2 y 3 para determinar los valores de a y b. Es decir, encuentre una fórmula para $f(x)$.
5. Grafique L_1, f y L_2 para comprobar en forma gráfica que las transiciones son uniformes.
6. Encuentre la diferencia de altura entre P y Q.

12.4 Límites en el infinito; límites de sucesiones

En esta sección se estudia una clase especial de límite conocida como *límite en el infinito*. Se examina el límite de una función $f(x)$ cuando aumenta el valor de x. Se examina también el límite de una sucesión a_n cuando n aumenta. Los límites de sucesiones se emplearán en la sección 12.5 como ayuda para determinar el área bajo la gráfica de una función.

Límites en el infinito

x	$f(x)$
0	−1.000000
±1	0.000000
±2	0.600000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

Se investigará el comportamiento de la función f definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

cuando x toma valores grandes. En la tabla del margen se dan los valores de esta función correctos hasta seis decimales, y la gráfica de f ha sido trazada mediante una computadora en la figura 1.

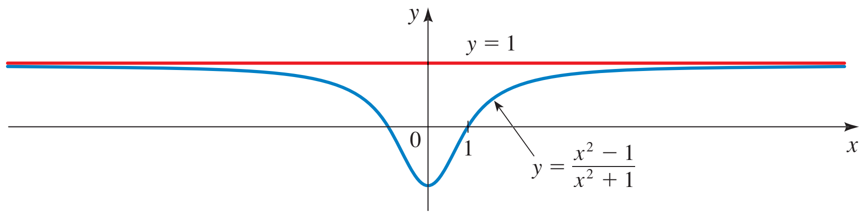


Figura 1

Cuando x toma valores cada vez más grandes, se ve que los valores de $f(x)$ se aproximan a 1. De hecho, al parecer se puede hacer que los valores de $f(x)$ se aproximen a 1 tanto como se quiera al tomar x suficientemente grande. Esta situación se expresa en símbolos como

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

En general, se usa la notación

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

para indicar que los valores de $f(x)$ se aproximan más y más a L cuando x toma valores cada vez más grandes.

Límite en el infinito

Sea f una función definida en algún intervalo (a, ∞). Entonces,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

indica que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores suficientemente grandes.

Otra notación para $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ es

$$f(x) \to L \qquad \text{cuando} \qquad x \to \infty$$

Los límites en el infinito se estudian en la sección 3.6.

El símbolo ∞ no representa un número. Sin embargo, con frecuencia la expresión $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$ se lee como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x se vuelve infinita, es L"

o bien "el límite de $f(x)$, cuando x crece sin cota, es L"

Las ilustraciones geométricas se muestran en la figura 2. Observe que hay muchas maneras para que la gráfica de f se aproxime a la recta $y = L$ (que se llama *asíntota horizontal*) como se ve a la derecha.

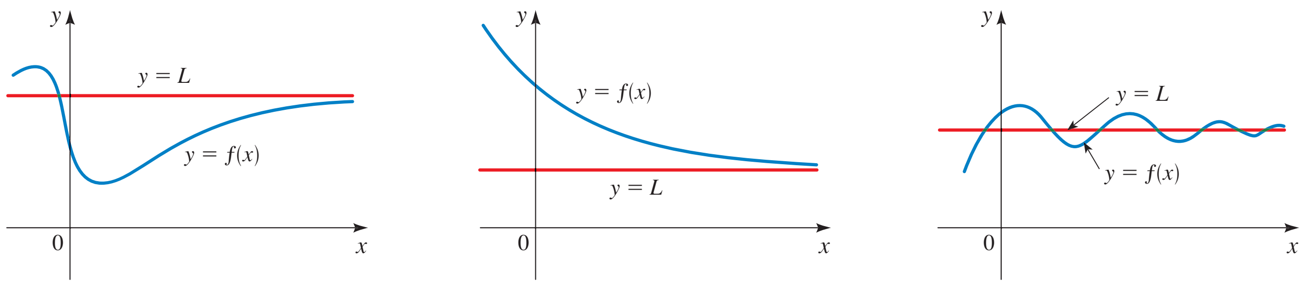


Figura 2
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Refiriéndose de nuevo a la figura 1, se ve que para valores numéricamente grandes de x, los valores de $f(x)$ se aproximan a 1. Si se permite que x disminuya por valores negativos sin cota, se puede hacer que $f(x)$ se aproxime a 1 tanto como se desee. Esto se expresa escribiendo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

La definición general es como sigue.

Límite en el infinito negativo

Sea f una función definida en algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores negativos suficientemente grandes.

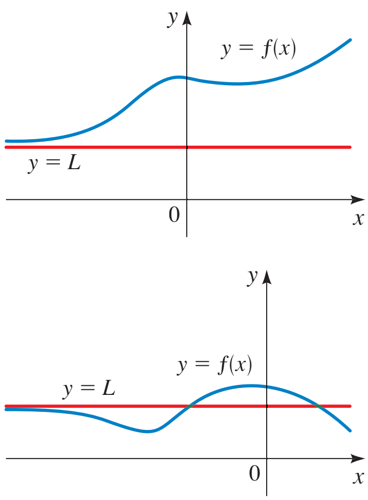


Figura 3
Ejemplos que ilustran $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$

De nuevo, el símbolo $-\infty$ no representa un número, pero la expresión $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ suele leerse como

"el límite de $f(x)$, cuando x se aproxima al infinito negativo, es L"

La definición se ilustra en la figura 3. Observe que la gráfica se aproxima a la recta $y = L$ como se ve a la izquierda.

Asíntota horizontal

La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de la curva $y = f(x)$ si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

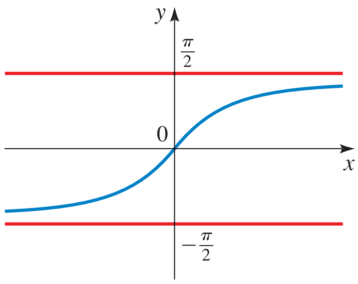


Figura 4
$y = \tan^{-1} x$

Por ejemplo, la curva ilustrada en la figura 1 tiene la recta $y = 1$ como una asíntota horizontal porque

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1$$

Como se asegura en la sección 7.4, un ejemplo de una curva con dos asíntotas horizontales es $y = \tan^{-1} x$ (véase la figura 4). De hecho,

$$\lim_{x \to -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$

de modo que ambas rectas $y = -\pi/2$ y $y = \pi/2$ son asíntotas horizontales. (Esto se deduce del hecho de que las líneas $x = \pm\pi/2$ son asíntotas verticales de la gráfica de tan.)

Ejemplo 1 Límites en el infinito

Encuentre $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

Primero se investigan las asíntotas horizontales y los límites en el infinito para funciones racionales en la sección 3.6.

Solución Observe que cuando x es grande, $1/x$ es pequeña. Por ejemplo,

$$\frac{1}{100} = 0.01 \qquad \frac{1}{10\,000} = 0.0001 \qquad \frac{1}{1\,000\,000} = 0.000001$$

De hecho, si se toma un valor de x bastante grande, se puede hacer que $1/x$ se aproxime a 0 tanto como se desee. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Con un razonamiento similar se ve que cuando x es grande y negativa, $1/x$ es pequeña y negativa, por lo tanto se tiene también

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de la curva $y = 1/x$. (Ésta es una hipérbola; véase la figura 5.) ■

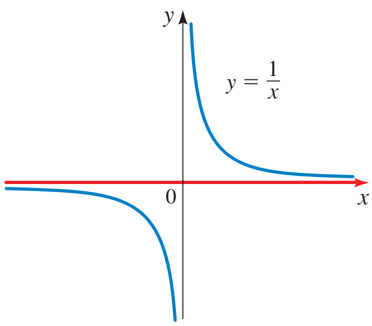


Figura 5
$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0, \ \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$

Las leyes de límites analizadas en la sección 12.2 se cumplen también para límites en el infinito. En particular, si se combina la ley 6 (límite de una potencia) con los resultados del ejemplo 1, se obtiene la siguiente importante regla para calcular límites.

> Si k es un entero positivo, entonces
>
> $$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^k} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0$$

Ejemplo 2 Hallar un límite en el infinito

Evalúe $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$.

Solución Para evaluar el límite de una función racional en el infinito, se divide primero numerador y denominador entre la potencia más alta de x que aparece en el denominador. (Se podría suponer que $x \neq 0$ puesto que sólo se tiene interés en valores grandes de x.) En este caso, la potencia más alta de x en el denominador es x^2, así que se tiene

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}}{5 + \dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x^2}}$$

Divida numerador y denominador entre x^2

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(3 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(5 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Límite de un cociente

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} - 2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\displaystyle\lim_{x\to\infty} 5 + 4\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}$$

Límites de sumas y diferencias

$$= \frac{3 - 0 - 0}{5 + 0 + 0} = \frac{3}{5}$$

Permita que $x \to \infty$

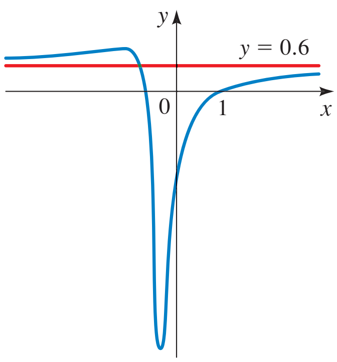


Figura 6

Un cálculo similar muestra que el límite cuando $x \to -\infty$ es también $\frac{3}{5}$. En la figura 6 se ilustran los resultados de estos cálculos mostrando cómo la gráfica de la función racional dada se aproxima a la asíntota horizontal $y = \frac{3}{5}$. ■

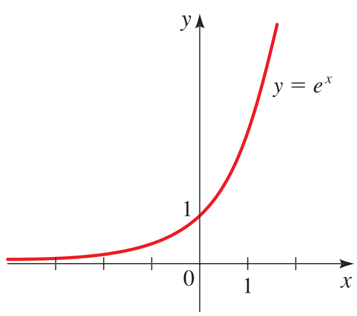
Ejemplo 3 Límite en el infinito negativo

Use métodos numéricos y gráficos para determinar $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} e^x$.

Solución De la gráfica de la función exponencial natural $y = e^x$ en la figura 7 y la tabla de valores correspondiente, se puede observar que

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

Se deduce que la recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal.



x	e^x
0	1.00000
−1	0.36788
−2	0.13534
−3	0.04979
−5	0.00674
−8	0.00034
−10	0.00005

Figura 7

■

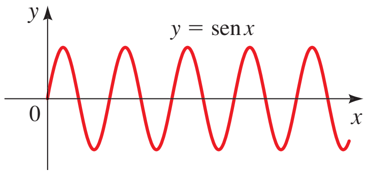


Figura 8

Ejemplo 4 Una función sin límite en el infinito

Evalúe $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$.

Solución De la gráfica de la figura 8 y la naturaleza periódica de la función seno, se puede observar que, cuando se incrementa x, los valores de sen x oscilan entre 1 y -1 de manera infinita y, por lo tanto, no se aproximan a algún número definido. En consecuencia, $\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x$ no existe. ■

Límites de sucesión

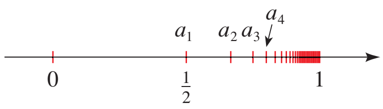


Figura 9

En la sección 11.1 se introdujo la idea de una sucesión de números $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Aquí se tiene interés en su comportamiento cuando n toma valores grandes. Por ejemplo, la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

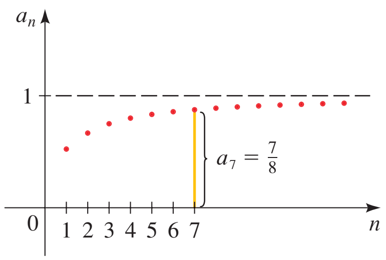


Figura 10

se ilustra en la figura 9 graficando sus términos en una recta numérica y en la figura 10 mediante el trazo de su gráfica. De la figura 9 o 10 parece que los términos de la secuencia $a_n = n/(n+1)$ se aproximan a 1 cuando n crece. Esto se indica escribiendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Definición de límite de una sucesión

Una sucesión $a_1, a_2, a_3, \ldots$ tiene el **límite** L y se escribe

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad \text{o} \qquad a_n \to L \text{ cuando } n \to \infty$$

si el término n-ésimo a_n de la secuencia puede hacerse arbitrariamente cercano a L al tomar n suficientemente grande. Si $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, se dice que la sucesión **converge** (o es **convergente**). De lo contrario, se dice que la sucesión **diverge** (o es **divergente**).

Esta definición se ilustra en la figura 11.

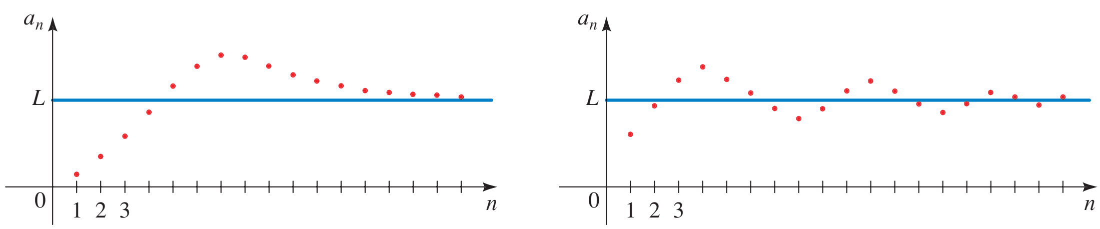


Figura 11 Gráficas de dos sucesiones con $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Si se comparan las definiciones de $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, se observa que la única diferencia es que se requiere que n sea un entero. Así, lo siguiente es cierto.

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ y $f(n) = a_n$ cuando n es un entero, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

En particular, puesto que se sabe que $\lim_{x\to\infty}(1/x^k) = 0$ cuando k es un entero positivo, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \qquad \text{si } k \text{ es un entero positivo}$$

Observa que las leyes de los límites dadas en la sección 12.2 se cumplen también para límites de sucesiones.

Ejemplo 5 Hallar el límite de una sucesión

Encuentre $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1}$.

Solución El método es similar al que se empleó en el ejemplo 2: divida numerador y denominador entre la potencia más alta de n y después use las leyes de los límites.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \qquad \text{Divida numerador y denominador entre } n$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 1}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}} \qquad \text{Límites de un cociente y una suma}$$

$$= \frac{1}{1+0} = 1 \qquad \text{Permita que } n \to \infty$$

Este resultado muestra que la inferencia realizada antes a partir de las figuras 9 y 10 fue correcta.

Por lo tanto, la sucesión $a_n = n/(n+1)$ es convergente. ■

Ejemplo 6 Una sucesión que diverge

Determine si la sucesión $a_n = (-1)^n$ es convergente o divergente.

Solución Si se escriben los términos de la sucesión, se obtiene

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$$

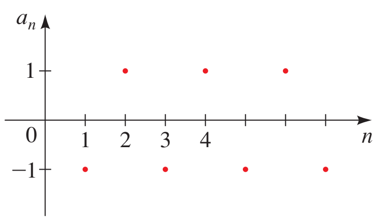


Figura 12

La gráfica de esta sucesión se muestra en la figura 12. Puesto que los términos oscilan entre 1 y -1 de manera infinita, a_n no se aproxima a ningún número. Así, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ no existe; es decir, la sucesión $a_n = (-1)^n$ es divergente. ■

Ejemplo 7 Hallar el límite de una sucesión

Encuentre el límite de la sucesión dada por

$$a_n = \frac{15}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

Solución Antes de calcular el límite, se simplificará primero la expresión para a_n. Debido a que $n^3 = n \cdot n \cdot n$, se coloca un factor de n debajo de cada factor en el numerador que contiene una n:

$$a_n = \frac{15}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = \frac{5}{2} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

Ahora se puede calcular el límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \qquad \textit{Definición de } a_n$$

$$= \frac{5}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{n}\right) \qquad \textit{Límite de un producto}$$

$$= \frac{5}{2}(1)(2) = 5 \qquad \textit{Sea que } n \to \infty$$

■

12.4 Ejercicios

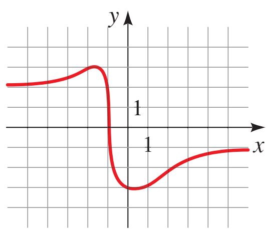
1–2 ■ **a)** Use la gráfica de f para hallar los siguientes límites.

i) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

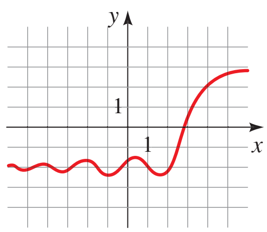
ii) $\lim_{x\to\infty} f(x)$

b) Exprese las ecuaciones de las asíntotas horizontales.

1.



2.



3–14 ■ Encuentre el límite.

3. $\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x}$

4. $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{x^4}$

5. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x + 1}{5x - 1}$

6. $\lim_{x\to\infty} \frac{2 - 3x}{4x + 5}$

7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 + 1}{2 + 3x^2}$

8. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 + x + 1}$

9. $\lim_{t\to\infty} \frac{8t^3 + t}{(2t - 1)(2t^2 + 1)}$

10. $\lim_{r\to\infty} \frac{4r^3 - r^2}{(r + 1)^3}$

11. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^4}{1 - x^2 + x^3}$

12. $\lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{2t}{t - 1}\right)$

13. $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x - 1}{x + 1} + 6\right)$

14. $\lim_{x\to\infty} \cos x$

15–18 ■ Use una tabla de valores para estimar el límite. Después use un dispositivo de graficación para confirmar su resultado de manera gráfica.

15. $\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{4x + 1}$

16. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

17. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^5}{e^x}$

18. $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

19–30 ■ Si la secuencia es convergente, encuentre su límite. Si es divergente, explique por qué.

19. $a_n = \frac{1 + n}{n + n^2}$

20. $a_n = \frac{5n}{n + 5}$

21. $a_n = \frac{n^2}{n + 1}$

22. $a_n = \frac{n - 1}{n^3 + 1}$

23. $a_n = \frac{1}{3^n}$

24. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

25. $a_n = \operatorname{sen}(n\pi/2)$

26. $a_n = \cos n\pi$

27. $a_n = \frac{3}{n^2}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]$

28. $a_n = \frac{5}{n}\left(n + \frac{4}{n}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]\right)$

29. $a_n = \frac{24}{n^3}\left[\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}\right]$

30. $a_n = \frac{12}{n^4}\left[\frac{n(n + 1)}{2}\right]^2$

Aplicaciones

31. Concentración de sal

a) Un recipiente contiene 5000 L de agua pura. Una salmuera que contiene 30 g de sal por litro de agua es bombeada al recipiente a razón de 25 L/min. Muestre que la concentración de sal después de t minutos (en gramos por litro) es

$$C(t) = \frac{30t}{200 + t}$$

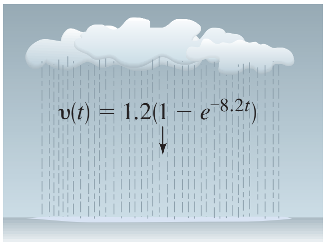
b) ¿Qué sucede con la concentración cuando $t \to \infty$?

32. Velocidad de una gota de lluvia La velocidad descendente de una gota en el instante t se modela con la función

$$v(t) = 1.2(1 - e^{-8.2t})$$

a) Encuentre la velocidad terminal de la gota al evaluar $\lim_{t\to\infty} v(t)$. (Use el resultado del ejemplo 3.)

b) Grafique $v(t)$ y emplee la gráfica para estimar en cuánto tiempo la velocidad de la gota llega a 99% de su velocidad terminal.



Descubrimiento • Debate

33. Límite de una sucesión recursiva

a) Una sucesión se define de modo recursivo por $a_1 = 0$ y

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

Encuentre los primeros diez términos de esta sucesión correctos hasta ocho decimales. ¿Al parecer esta sucesión es convergente? Si es así, infiera el valor del límite.

b) Suponiendo que la sucesión del inciso a) es convergente, sea que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Explique por qué $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ también y, por lo tanto,

$$L = \sqrt{2 + L}$$

Resuelva esta ecuación para hallar el valor exacto de L.

12.5 Áreas

Se ha visto que los límites son necesarios para calcular la pendiente de una recta tangente o una tasa de cambio instantánea. Aquí se verá que también son necesarios para hallar el área de una región con un límite curvo. El problema de hallar tales áreas tiene consecuencias más allá de simplemente determinar el área. (Véase *Enfoque en el modelado*, página 929.)

Problema del área

Uno de los problemas centrales en el cálculo es el *problema del área*: hallar el área de la región S que yace bajo la curva $y = f(x)$ de a a b. Esto significa que S, ilustrada en la figura 1, está acotada por la gráfica de una función f (donde $f(x) \geq 0$), las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, y el eje x.

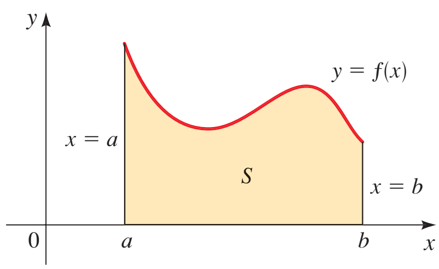


Figura 1

Al tratar de resolver el problema del área, hay que preguntarse: ¿cuál es el significado de la palabra *área*? Esta pregunta es fácil de responder para regiones con lados rectos. Para un rectángulo, el área se define como el producto de la longitud y

el ancho. El área de un triángulo es la mitad de la base por la altura. El área de un polígono se encuentra dividiéndolo en triángulos (como en la figura 2) y sumando las áreas de los triángulos.

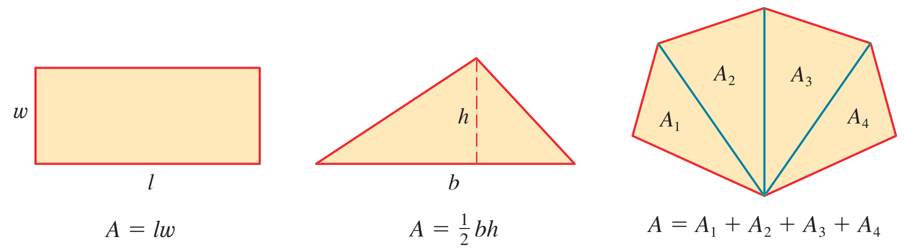


Figura 2

Sin embargo, no es fácil hallar el área de una región con lados curvos. Todos tenemos una idea intuitiva de lo que es el área de una región. Pero parte del problema del área es hacer esta idea intuitiva precisa al dar una definición exacta de área.

Recuerde que para definir una tangente primero se aproximó la pendiente de la tangente mediante pendientes de secantes y luego se tomó el límite de estas aproximaciones. Se sigue una idea similar para las áreas. Primero se aproxima la región S mediante rectángulos, y luego se toma el límite de las áreas de estos rectángulos cuando se incrementa el número de rectángulos. En el siguiente ejemplo se ilustra el procedimiento.

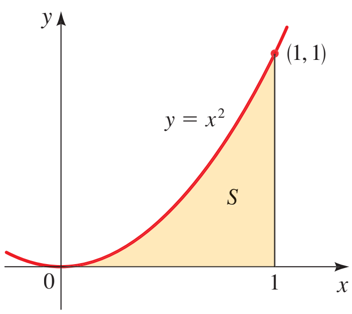


Figura 3

Ejemplo 1 Estimar un área por medio de rectángulos

Use rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ de 0 a 1 (la región parabólica S ilustrada en la figura 3).

Solución Se observa primero que el área de S debe estar en alguna parte entre 0 y 1 porque S está contenida en un cuadrado con longitud lateral 1, pero por supuesto se puede hacer algo mejor que eso. Suponga que S se divide en cuatro tiras S_1, S_2, S_3 y S_4 dibujando líneas verticales $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{4}$ como en la figura 4a). Se puede aproximar cada tira mediante un rectángulo con la misma base que la tira y cuya altura es la misma que el lado derecho de la tira (véase la figura 4b)). En otras palabras, las alturas de estos rectángulos son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos finales derechos de los subintervalos $[0, \frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4}, 1]$.

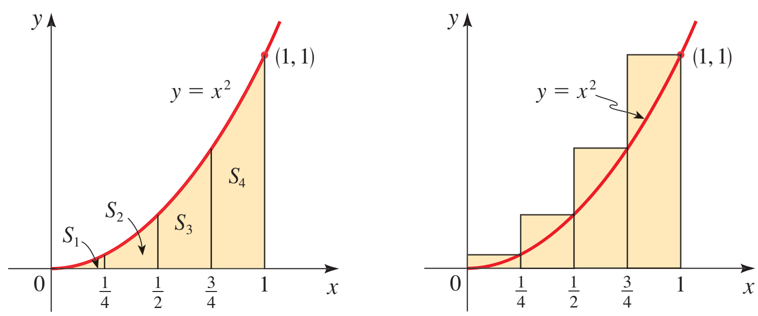


Figura 4 a) b)

Cada rectángulo tiene amplitud $\frac{1}{4}$ y las alturas son $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ y 1^2. Si R_4 es la suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación, se obtiene

$$R_4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2 = \frac{15}{32} = 0.46875$$

De la figura 4b) se puede observar que el área A de S es menor que R_4, entonces

$$A < 0.46875$$

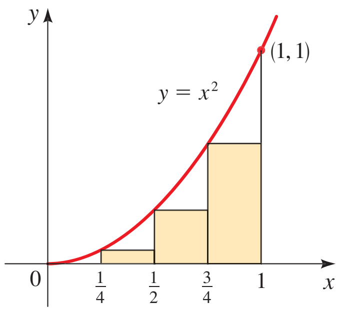


Figura 5

En lugar de usar los rectángulos de la figura 4b), se podrían usar los rectángulos más pequeños de la figura 5 cuyas alturas son los valores de f en los puntos izquierdos de los subintervalos. (El rectángulo de la izquierda ha desaparecido porque su altura es cero.) La suma de las áreas de estos rectángulos de aproximación es

$$L_4 = \frac{1}{4}\cdot 0^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{32} = 0.21875$$

Se puede observar que el área de S es mayor que L_4, por lo tanto se tienen las estimaciones inferior y superior para A:

$$0.21875 < A < 0.46875$$

Se puede repetir este procedimiento con un número grande de tiras. En la figura 6 se muestra lo que sucede cuando se divide la región S en ocho tiras de igual amplitud. Al calcular la suma de las áreas de los rectángulos más pequeños (L_8) y la suma de las áreas de los rectángulos más grandes (R_8), se obtienen las estimaciones inferior y superior para A:

$$0.2734375 < A < 0.3984375$$

Así que una respuesta posible a la pregunta es decir que el área verdadera de S se ubica en alguna parte entre 0.2734375 y 0.3984375.

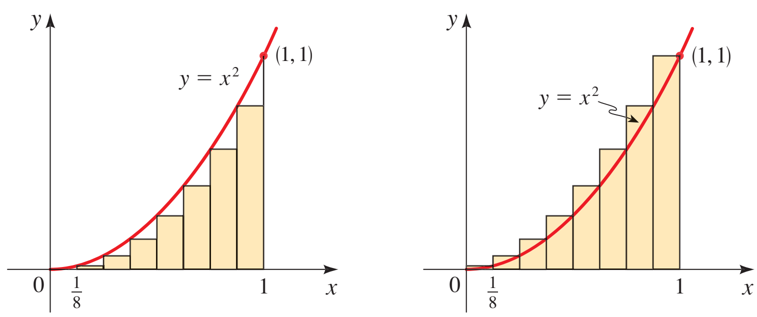


Figura 6
Aproximación de S con ocho rectángulos

n	L_n	R_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

Se podrían obtener mejores estimaciones si se incrementa el número de tiras. En la tabla del margen se muestran los resultados de cálculos similares (con una computadora) usando n rectángulos cuyas alturas se encuentran con puntos izquierdos (L_n) o puntos derechos (R_n). En particular, se puede observar al usar 50 tiras que el área está entre 0.3234 y 0.3434. Con 1000 tiras se estrecha aún más: A se localiza entre 0.3328335 y 0.3338335. Una buena estimación se obtiene promediando estos números: $A \approx 0.3333335$. ■

De los valores de la tabla parece como si R_n se aproxima a $\frac{1}{3}$ cuando n aumenta. Esto se confirma en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2 Límite de sumas de aproximación

Para la región S del ejemplo 1, muestre que la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación tiende a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \tfrac{1}{3}$$

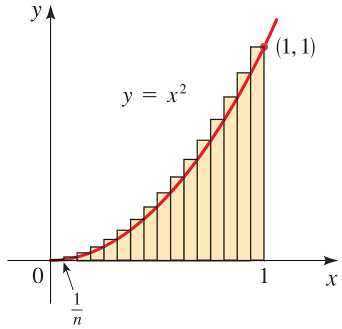


Figura 7

Solución R_n es la suma de las áreas de los n rectángulos mostrados en la figura 7. Cada rectángulo tiene ancho $1/n$, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos $1/n, 2/n, 3/n, \ldots, n/n$. Es decir, las alturas son $(1/n)^2, (2/n)^2, (3/n)^2, \ldots, (n/n)^2$. Así,

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\ &= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \end{aligned}$$

Aquí se necesita la fórmula para la suma de los cuadrados de los primeros n enteros positivos:

Esta fórmula se estudió en la sección 11.5.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Al colocar la fórmula anterior en la expresión para R_n, se obtiene

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

Así, se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \tfrac{1}{6}\cdot 1\cdot 2 = \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Se puede demostrar que las sumas de aproximación menores se aproximan también a $\frac{1}{3}$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

De las figuras 8 y 9 es evidente que, cuando n aumenta, R_n y L_n se vuelven cada vez mejores aproximaciones al área de S. Por lo tanto, se *define* el área A como el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación, es decir,

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} L_n = \tfrac{1}{3}$$

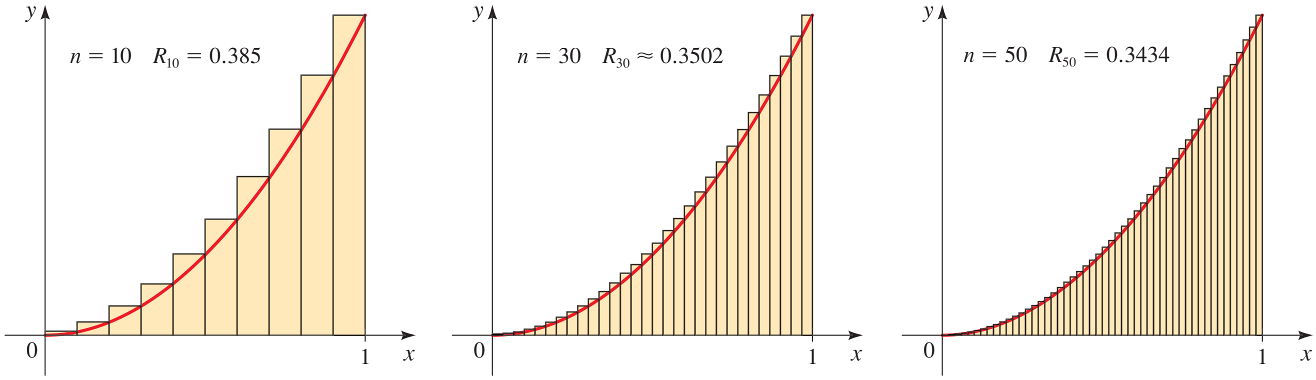


Figura 8

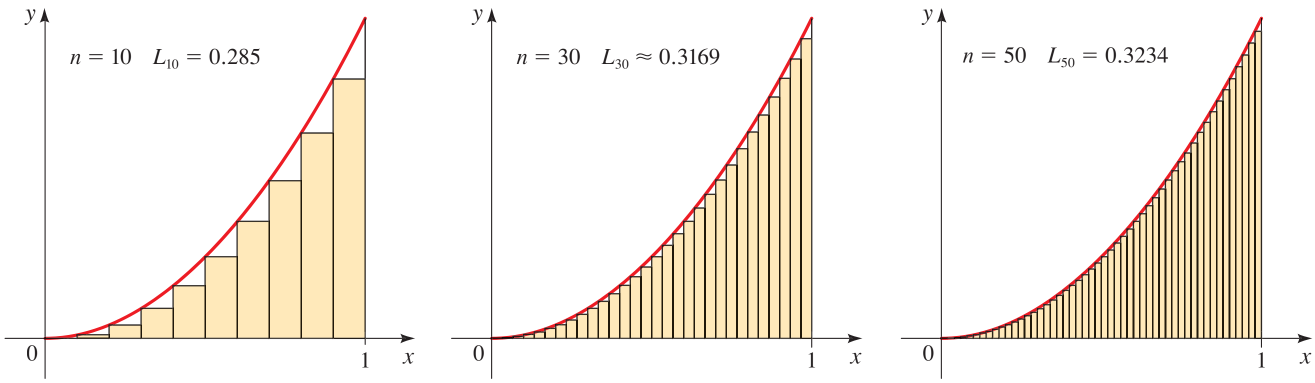


Figura 9

Definición de área

Se aplicará la idea de los ejemplos 1 y 2 a la región más general S de la figura 1. Se inicia subdividiendo S en n tiras $S_1, S_2, \ldots, S_n$ de igual ancho como en la figura 10.

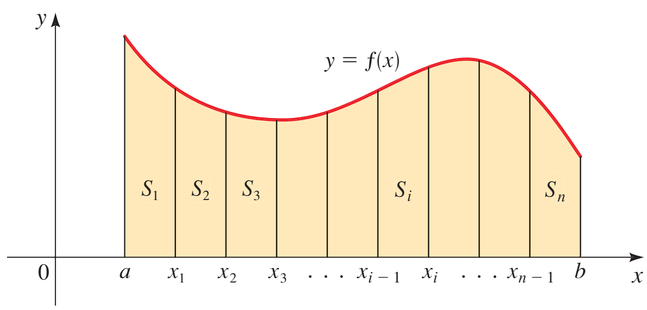


Figura 10

El ancho del intervalo $[a, b]$ es $b - a$, así que el ancho de cada de las n tiras es

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

Estas tiras dividen el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad [x_2, x_3], \quad \ldots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

donde $x_0 = a$ y $x_n = b$. Los puntos derechos de los subintervalos son

$$x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\,\Delta x, \quad x_3 = a + 3\,\Delta x, \quad \ldots, \quad x_k = a + k\,\Delta x, \quad \ldots$$

Se aproximará la k-ésima tira S_k mediante un rectángulo con ancho Δx y altura $f(x_k)$, que es el valor de f en el punto final derecho (véase la figura 11). Entonces el área del k-ésimo rectángulo es $f(x_k)\Delta x$. Lo que se considera en forma intuitiva como el área de S se aproxima mediante la suma de las áreas de estos rectángulos, la cual es

$$R_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x$$

En la figura 12 se muestra esta aproximación para $n = 2, 4, 8$ y 12.

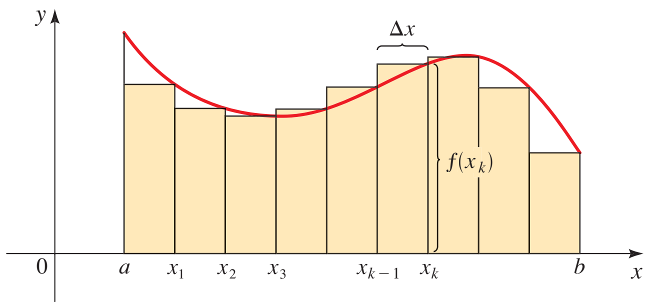


Figura 11

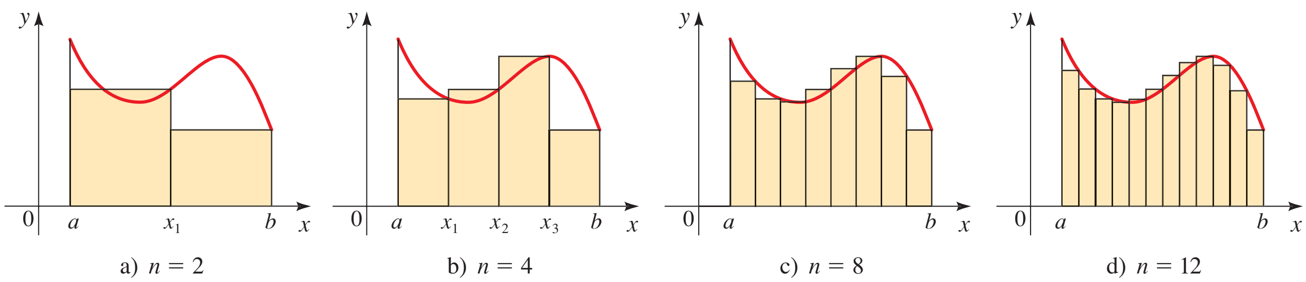


Figura 12

Observe que esta aproximación parece ser mejor cada vez conforme aumenta el número de tiras, es decir, cuando $n \to \infty$. Por lo tanto, se define el área A de la región S de la siguiente manera.

Definición de área

El **área** A de la región S que yace bajo la gráfica de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \cdots + f(x_n)\Delta x]$$

Si se usa la notación sigma, lo anterior se escribe como sigue:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

Cuando utilice esta fórmula para el área, recuerde que Δx es el ancho de un rectángulo de aproximación, x_k es el punto final derecho del k-ésimo rectángulo y $f(x_k)$ es su altura. Por lo tanto,

Ancho: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

Punto final derecho: $x_k = a + k\,\Delta x$

Altura: $f(x_k) = f(a + k\,\Delta x)$

Al trabajar con sumas serán necesarias las siguientes propiedades de la sección 11.1:

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$$

También se necesitarán las siguientes fórmulas para las sumas de las potencias de los primeros n números naturales de la sección 11.5.

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

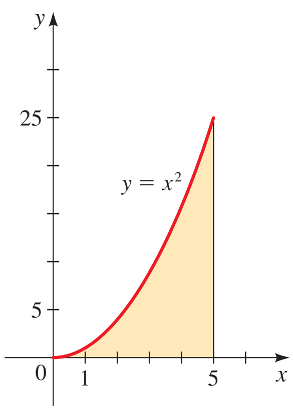


Figura 13

Ejemplo 3 Hallar el área debajo de una curva

Calcule el área de la región que yace bajo la parábola $y = x^2$, $0 \le x \le 5$.

Solución La región se grafica en la figura 13. Para hallar el área, primero se determinan las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la n-ésima etapa.

Ancho: $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{5-0}{n} = \dfrac{5}{n}$

Punto final derecho: $x_k = a + k\,\Delta x = 0 + k\left(\dfrac{5}{n}\right) = \dfrac{5k}{n}$

Altura: $f(x_k) = f\left(\dfrac{5k}{n}\right) = \left(\dfrac{5k}{n}\right)^2 = \dfrac{25k^2}{n^2}$

Ahora se sustituyen estos valores en la definición de área:

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x && \text{Definición de área}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{25k^2}{n^2}\cdot\frac{5}{n} && f(x_k)=\frac{25k^2}{n^2},\ \Delta x=\frac{5}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{125k^2}{n^3} && \text{Simplifique}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 && \text{Factorice } \frac{125}{n^3}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Fórmula de suma de cuadrados}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125(2n^2+3n+1)}{6n^2} && \text{Cancele } n \text{ y desarrolle el numerador}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) && \text{Divida numerador y denominador entre } n^2\\
&= \frac{125}{6}(2+0+0) = \frac{125}{3} && \text{Haga que } n\to\infty
\end{aligned}$$

El límite se puede calcular también escribiendo

$$\frac{125}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{125}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

como en el ejemplo 2.

Así, el área de la región es $\frac{125}{3} \approx 41.7$. ■

Ejemplo 4 Hallar el área bajo una curva

Calcule el área de la región que yace bajo la parábola $y = 4x - x^2$, $1 \le x \le 3$.

En la figura 14 se muestra la región cuya área se calcula en el ejemplo 4.

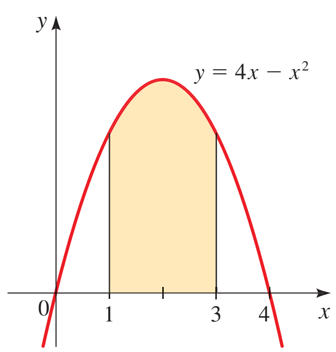


Figura 14

Solución Se comienza por hallar las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la n-ésima etapa.

Ancho: $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

Punto final derecho: $$x_k = a + k\Delta x = 1 + k\left(\frac{2}{n}\right) = 1 + \frac{2k}{n}$$

Altura: $$\begin{aligned}
f(x_k) &= f\left(1+\frac{2k}{n}\right) = 4\left(1+\frac{2k}{n}\right) - \left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\\
&= 4 + \frac{8k}{n} - 1 - \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}\\
&= 3 + \frac{4k}{n} - \frac{4k^2}{n^2}
\end{aligned}$$

Así, de acuerdo con la definición de área, se obtiene

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(3+\frac{4k}{n}-\frac{4k^2}{n^2}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} 3 + \frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2\right)\left(\frac{2}{n}\right)
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}3 + \frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}(3n) + \frac{8}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(6 + 4\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n} - \frac{4}{3}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[6 + 4\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right]$$

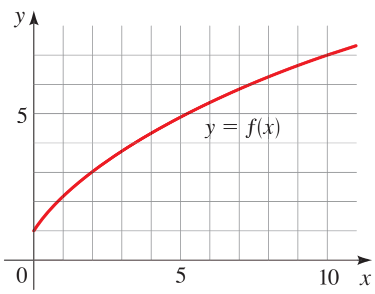
$$= 6 + 4\cdot 1 - \frac{4}{3}\cdot 1\cdot 2 = \frac{22}{3}$$

■

12.5 Ejercicios

1. a) Leyendo los valores de la gráfica dada de f, use cinco rectángulos para hallar una estimación inferior y una estimación superior para el área bajo la gráfica de f de $x = 0$ a $x = 10$. En cada caso, bosqueje los rectángulos que use.

b) Encuentre nuevas estimaciones con diez rectángulos en cada caso.



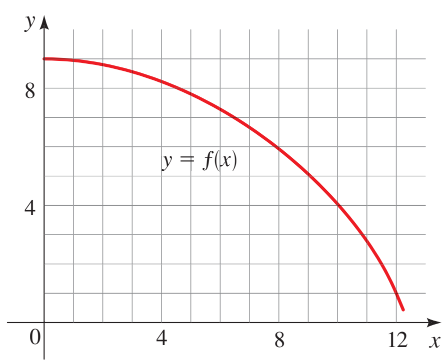
2. a) Use seis rectángulos para hallar estimaciones de cada tipo para el área bajo la gráfica de f de $x = 0$ a $x = 12$.

i) L_6 (con puntos finales izquierdos)

ii) R_6 (con puntos finales derechos)

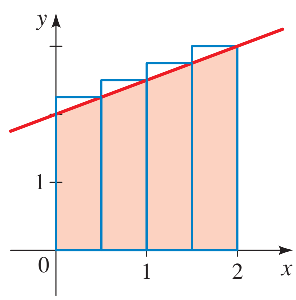
b) ¿L_6 es una subestimación o una sobreestimación del área verdadera?

c) ¿R_6 es una subestimación o una sobreestimación del área verdadera?

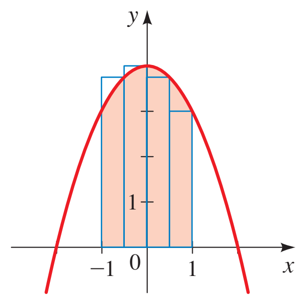


3–6 ■ Aproxime el área de la región sombreada bajo la gráfica de la función dada por medio de los rectángulos indicados. (Los rectángulos tienen igual amplitud).

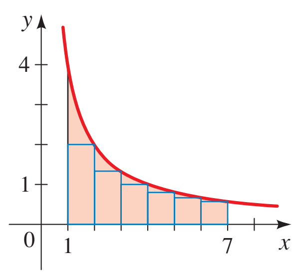
3. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$



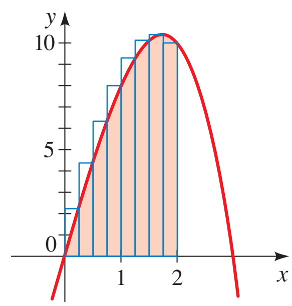
4. $f(x) = 4 - x^2$



5. $f(x) = \dfrac{4}{x}$



6. $f(x) = 9x - x^3$



7. a) Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1/x$ de $x = 1$ a $x = 5$ con cuatro rectángulos de aproximación y puntos finales derechos. Bosqueje la gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una subestimación o una sobreestimación?

b) Repita el inciso a) con puntos finales izquierdos.

8. **a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 25 - x^2$ de $x = 0$ a $x = 5$ con cinco rectángulos de aproximación y puntos finales derechos. Bosqueje su gráfica y los rectángulos. ¿Su estimación es una subestimación o una sobreestimación?

b) Repita el inciso a) con puntos finales izquierdos.

9. **a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ a partir de $x = -1$ a $x = 2$ por medio de tres rectángulos y puntos finales derechos. Después mejore su estimación con seis rectángulos. Bosqueje la curva y los ángulos de aproximación.

b) Repita el inciso a) con puntos finales izquierdos.

10. **a)** Estime el área bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$, $0 \le x \le 4$, por medio de cuatro rectángulos de aproximación y tomando los puntos de muestra como

i) puntos finales derechos

ii) puntos finales izquierdos

En cada caso, bosqueje la curva y los rectángulos.

b) Mejore sus estimaciones del inciso a) por medio de ocho rectángulos.

11–12 ■ Use la definición de área como un límite para hallar el área de la región que yace bajo la curva. Compruebe su respuesta bosquejando la región y por medio de geometría.

11. $y = 3x, \quad 0 \le x \le 5$ **12.** $y = 2x + 1, \quad 1 \le x \le 3$

13–18 ■ Encuentre el área de la región que yace bajo la gráfica de f en el intervalo dado.

13. $f(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 2$

14. $f(x) = x + x^2, \quad 0 \le x \le 1$

15. $f(x) = x^3 + 2, \quad 0 \le x \le 5$

16. $f(x) = 4x^3, \quad 2 \le x \le 5$

17. $f(x) = x + 6x^2, \quad 1 \le x \le 4$

18. $f(x) = 20 - 2x^2, \quad 2 \le x \le 3$

Descubrimiento • Debate

19. Aproximación del área por medio de una calculadora Cuando se aproximan áreas por medio de rectángulos como en el ejemplo 1, mientras más rectángulos se empleen más exacta es la respuesta. El siguiente programa de la TI-83 encuentra el área aproximada bajo la gráfica de f en el intervalo $[a, b]$ con n rectángulos. Para usar el programa, primero guarde la función f en `Y1`. El programa solicita que se introduzca `N`, el número de rectángulos, y `A` y `B`, los puntos finales del intervalo.

a) Aproxime el área bajo la gráfica $f(x) = x^5 + 2x + 3$ en $[1, 3]$ usando 10, 20 y 100 rectángulos.

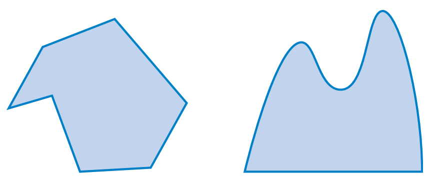
b) Aproxime el área bajo la gráfica de f en el intervalo dado por medio de 100 rectángulos.

i) $f(x) = \text{sen}\, x, \quad \text{en } [0, \pi]$

ii) $f(x) = e^{-x^2}, \quad \text{en } [-1, 1]$

```
PROGRAM:AREA
:Prompt N
:Prompt A
:Prompt B
:(B-A)/N→D
:0→S
:A→X
:For (K,1,N)
:X+D→X
:S+Y1→S
:End
:D*S→S
:Disp "AREA IS"
:Disp S
```

20. Regiones con límites rectos contra curvos Escriba un ensayo corto que explique cómo hallaría el área de un polígono, es decir, una región acotada por segmentos de recta. Después explique cómo encontraría el área de una región cuyo límite es curvo, como se hizo en esta sección. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre estos dos procesos?



12 Repaso

Revisión de conceptos

1. Explique con sus propias palabras lo que significa la ecuación

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5$$

¿Es posible que este enunciado sea cierto y aun que $f(2) = 3$? Explique.

2. Explique lo que significa decir que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 7$$

En esta situación ¿es posible que $\lim_{x \to 1} f(x)$ exista? Explique.

3. Describa varias formas en las que es posible que un límite no exista. Ilustre con bosquejos.

4. Enuncie las siguientes leyes de los límites.
- **a)** Ley de la suma
- **b)** Ley de la diferencia
- **c)** Ley del múltiplo constante
- **d)** Ley del producto
- **e)** Ley del cociente
- **f)** Ley de la potencia
- **g)** Ley de la raíz

5. Escriba una expresión para la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

6. Defina la derivada $f'(a)$. Describa dos formas de interpretar este número.

7. Si $y = f(x)$, escriba expresiones para lo siguiente.
- **a)** La tasa de cambio promedio de y con respecto a x entre los números a y x.
- **b)** La tasa de cambio instantánea de y con respecto a x en $x = a$.

8. Explique el significado de la ecuación

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$$

Trace esquemas para ilustrar varias posibilidades.

9. **a)** ¿Qué significa decir que la recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la curva $y = f(x)$? Dibuje curvas para ilustrar las distintas posibilidades.

b) ¿Cuál de las siguientes curvas tiene asíntotas horizontales?

i) $y = x^2$ iv) $y = \tan^{-1} x$

ii) $y = 1/x$ v) $y = e^x$

iii) $y = \operatorname{sen} x$ vi) $y = \ln x$

10. **a)** ¿Qué es una sucesión convergente?

b) ¿Qué significa $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$?

11. Suponga que S es la región que yace bajo la curva de la gráfica de $y = f(x)$, $a \le x \le b$.
- **a)** Explique cómo se aproxima está área por medio de rectángulos.
- **b)** Escriba una expresión para el área de S como un límite de sumas.

Ejercicios

1–6 ■ Use una tabla de valores para estimar el valor del límite. Después use un dispositivo de graficación para confirmar su resultado en forma gráfica.

1. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

2. $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{t+1}{t^3-t}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln\sqrt{x-1}$

6. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\tan x}{|x|}$

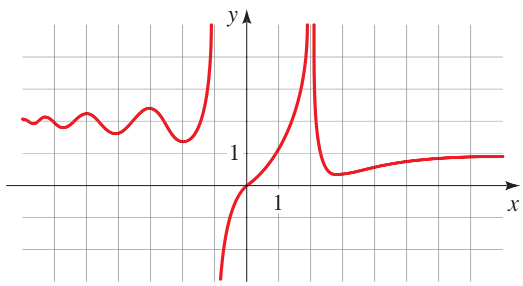
7. La gráfica de f se muestra en la figura. Encuentre cada límite o explique por qué no existe.

a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to -3^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ **d)** $\lim_{x\to -3} f(x)$

e) $\lim_{x\to 4} f(x)$ **f)** $\lim_{x\to \infty} f(x)$

g) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ **h)** $\lim_{x\to 0} f(x)$



8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x+2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Encuentre cada límite o explique por qué no existe.

a) $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ **b)** $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

c) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **d)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ **f)** $\lim_{x \to 2} f(x)$

g) $\lim_{x \to 0} f(x)$ **h)** $\lim_{x \to 3} (f(x))^2$

9–20 ■ Use las leyes de los límites para evaluar el límite, si existe.

9. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x + 1}{x - 3}$ **10.** $\lim_{t \to 1} (t^3 - 3t + 6)$

11. $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 + x - 12}{x - 3}$ **12.** $\lim_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$

13. $\lim_{u \to 0} \dfrac{(u + 1)^2 - 1}{u}$ **14.** $\lim_{z \to 9} \dfrac{\sqrt{z} - 3}{z - 9}$

15. $\lim_{x \to 3^-} \dfrac{x - 3}{|x - 3|}$ **16.** $\lim_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2 - 2x}\right)$

17. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x}{x - 4}$ **18.** $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{x^4 - 3x + 6}$

19. $\lim_{x \to \infty} \cos^2 x$ **20.** $\lim_{t \to -\infty} \dfrac{t^4}{t^3 - 1}$

21–24 ■ Encuentre la derivada de la función en el número dado.

21. $f(x) = 3x - 5$, en 4 **22.** $g(x) = 2x^2 - 1$, en -1

23. $f(x) = \sqrt{x}$, en 16 **24.** $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$, en 1

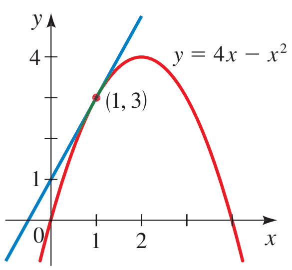
25–28 ■ **a)** Encuentre $f'(a)$. **b)** Encuentre $f'(2)$ y $f'(-2)$.

25. $f(x) = 6 - 2x$ **26.** $f(x) = x^2 - 3x$

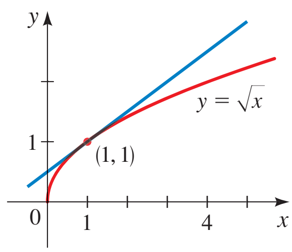
27. $f(x) = \sqrt{x + 6}$ **28.** $f(x) = \dfrac{4}{x}$

29–30 ■ Encuentre una ecuación de la tangente mostrada en la figura.

29.



30.



31–34 ■ Encuentre una ecuación de la tangente a la gráfica de la f en el punto dado.

31. $f(x) = 2x$, en $(3, 6)$ **32.** $f(x) = x^2 - 3$, en $(2, 1)$

33. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, en $\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$ **34.** $f(x) = \sqrt{x + 1}$, en $(3, 2)$

35. Se deja caer una piedra desde el techo de un edificio a 640 pies sobre el suelo. Su altura (en pies) después de t segundos está dada por $h(t) = 640 - 16t^2$.

a) Encuentre la velocidad de la piedra cuando $t = 2$.

b) Determine el velocidad de la piedra cuando $t = a$.

c) ¿En qué momento t la piedra choca contra el suelo?

d) ¿Con qué velocidad la piedra golpeará el suelo?

36. Si un gas está confinado en un volumen fijo, según la ley de Boyle el producto de la presión P y la temperatura T es una constante. Para cierto gas, $PT = 100$, donde P se mide en lb/in^2 y T se mide en kelvins (K).

a) Exprese P como una función de T.

b) Encuentre la tasa de cambio instantánea de P con respecto a T cuando $T = 300$ K.

37–42 ■ Si la sucesión es convergente, encuentre su límite. Si es divergente, explique por qué.

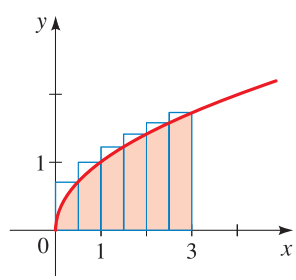
37. $a_n = \dfrac{n}{5n + 1}$ **38.** $a_n = \dfrac{n^3}{n^3 + 1}$

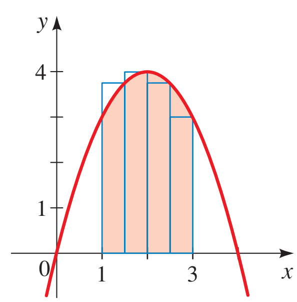
39. $a_n = \dfrac{n(n + 1)}{2n^2}$ **40.** $a_n = \dfrac{n^3}{2n + 6}$

41. $a_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **42.** $a_n = \dfrac{10}{3^n}$

43–44 ■ Aproxime el área de la región sombreada bajo la gráfica de la función dada por medio de los rectángulos indicados. (Los rectángulos tienen igual anchura.)

43. $f(x) = \sqrt{x}$ **44.** $f(x) = 4x - x^2$





45–48 ■ Use la definición de límite de área para hallar el área de la región que yace bajo la gráfica de f sobre el intervalo dado.

45. $f(x) = 2x + 3$, $0 \le x \le 2$

46. $f(x) = x^2 + 1$, $0 \le x \le 3$

47. $f(x) = x^2 - x$, $1 \le x \le 2$

48. $f(x) = x^3$, $1 \le x \le 2$

12 Evaluación

1. a) Use una tabla de valores para estimar el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen} 2x}$$

b) Use una calculadora graficadora para confirmar su respuesta en forma gráfica.

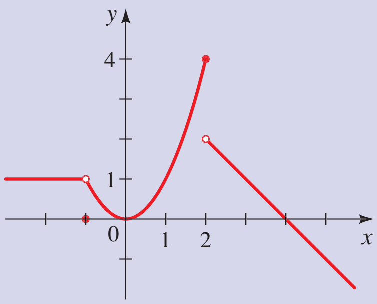
2. Para la función definida por partes f cuya gráfica se muestra, encuentre:

a) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$ b) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ c) $\lim_{x \to -1} f(x)$

d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ e) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ f) $\lim_{x \to 0} f(x)$

g) $\lim_{x \to 2^-} f(x)$ h) $\lim_{x \to 2^+} f(x)$ i) $\lim_{x \to 2} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \le 2 \\ 4 - x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$



3. Evalúe el límite, si existe.

a) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2}$ b) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$ c) $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x - 2}$

d) $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{|x - 2|}$ e) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ f) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 4}{x^2 + x}$

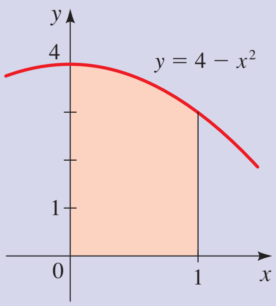
4. Sea $f(x) = x^2 - 2x$. Encuentre:

a) $f'(x)$ b) $f'(-1), f'(1), f'(2)$

5. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto donde $x = 9$.

6. Encuentre el límite de la sucesión.

a) $a_n = \frac{n}{n^2 + 4}$ b) $a_n = \sec n\pi$



7. La región bosquejada en la figura del margen yace bajo la gráfica de $f(x) = 4 - x^2$, arriba del intervalo $0 \le x \le 1$.

a) Aproxime el área de la región con cinco rectángulos igualmente espaciados a lo largo del eje x, con puntos finales derechos para determinar las alturas de los rectángulos.

b) Use la definición límite de área para hallar el valor exacto del área de la región.

Enfoque en el modelado

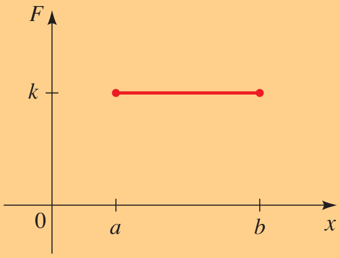
Interpretaciones de área

El área bajo la gráfica de una función se usa para modelar muchas cantidades en física, economía, ingeniería y otros campos. Ésa es la razón por la que el problema del área es tan importante. Aquí se mostrará cómo se modela el concepto de trabajo (sección 8.5) mediante el área. En los problemas se exploran otras aplicaciones.

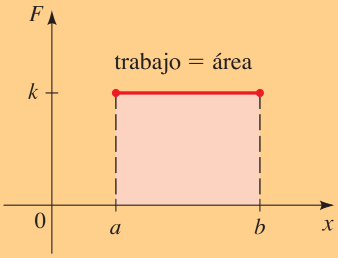
Recuerde que el trabajo W hecho al mover un objeto es el producto de la fuerza F aplicada al objeto y la distancia d que se mueve el objeto:

$$W = Fd \qquad \text{trabajo} = \text{fuerza} \times \text{distancia}$$

Esta fórmula se emplea si la fuerza es *constante*. Por ejemplo, suponga que empuja una caja en un piso, moviéndose a lo largo del eje positivo x de $x = a$ a $x = b$, y aplica una fuerza constante $F = k$. La gráfica de F como una función de la distancia x se muestra en la figura 1a). Observe que el trabajo hecho es $W = Fd = k(b - a)$, que es el área bajo la gráfica de F (véase la figura 1b)).



a)



b)

Figura 1
Una fuerza constante F

¿Pero qué pasa si la fuerza no es constante? Por ejemplo, suponga que la fuerza que aplica a la caja varía con la distancia (empuja más fuerte en ciertos lugares que en otros). Para ser más precisos, suponga que empuja la caja a lo largo del eje x en la dirección positiva, de $x = a$ a $x = b$, y en cada punto x entre a y b aplica una fuerza $f(x)$ a la caja. En la figura 2 se muestra una gráfica de la fuerza f como una función de la distancia x.

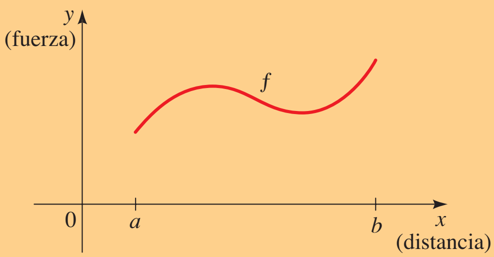


Figura 2
Una fuerza variable

¿Cuánto trabajo se hizo? No se puede aplicar directamente la fórmula para el trabajo porque la fuerza no es constante. Así, se dividirá el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con puntos finales $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e igual amplitud Δx como se muestra en la figura 3a) en la página siguiente. La fuerza en el punto final derecho del intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ es $f(x_k)$. Si n es grande, entonces Δx es pequeña, de modo que los valores de f no cambian mucho en el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$. En otras palabras, f es casi constante

en el intervalo y, por lo tanto, el trabajo W_k que se hace al mover la caja de x_{k-1} a x_k es aproximadamente

$$W_k \approx f(x_k)\,\Delta x$$

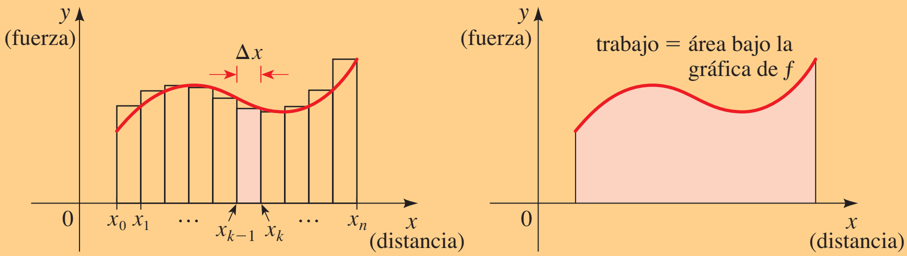
Así, se puede aproximar el trabajo hecho al mover la caja de $x = a$ a $x = b$ por

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Parece ser que la aproximación es mejor cuando n toma valores grandes (y, por lo tanto, el intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ se hace más pequeño). En consecuencia, se define el trabajo hecho al mover un objeto de a a b como el límite de esta cantidad cuando $n \to \infty$:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x$$

Observe que ésta es precisamente el área bajo la gráfica de f entre $x = a$ y $x = b$ como se define en la sección 12.5. Véase la figura 3b).



a) b)

Figura 3
Aproximación del trabajo

Ejemplo Trabajo hecho por una fuerza variable

Una persona empuja una caja a lo largo de una trayectoria recta una distancia de 18 pies. A una distancia x de su punto de partida, aplica una fuerza dada por $f(x) = 340 - x^2$. Encuentre el trabajo que realiza la persona.

Solución La gráfica de f entre $x = 0$ y $x = 18$ se muestra en la figura 4. Observe cómo varía la fuerza que aplica la persona: comienza empujando con una fuerza de 340 lb, pero de manera uniforme aplica menos fuerza. El trabajo hecho es el área

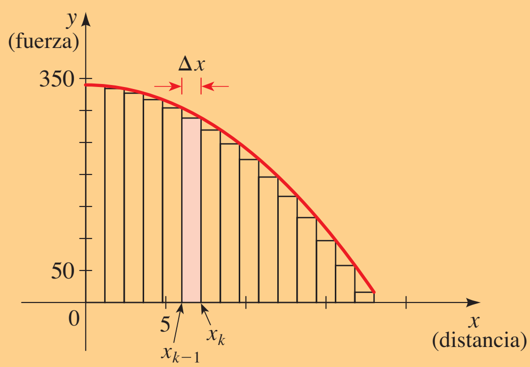


Figura 4

bajo la gráfica de f en el intervalo $[0, 18]$. Para hallar esta área, se empieza por hallar las dimensiones de los rectángulos de aproximación en la n-ésima etapa.

Ancho: $$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{18-0}{n} = \frac{18}{n}$$

Punto final derecho: $$x_k = a + k\,\Delta x = 0 + k\left(\frac{18}{n}\right) = \frac{18k}{n}$$

Altura: $$f(x_k) = f\left(\frac{18k}{n}\right) = 340 - \left(\frac{18k}{n}\right)^2 = 340 - \frac{324k^2}{n^2}$$

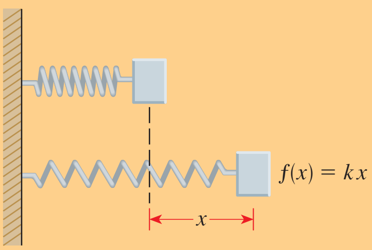
Así, de acuerdo con la definición de trabajo, se obtiene

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(340 - \frac{324k^2}{n^2}\right)\left(\frac{18}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n} \sum_{k=1}^{n} 340 - \frac{(18)(324)}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{18}{n}\,340n - \frac{5832}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(6120 - 972 \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n}\right) \\ &= 6120 - 972 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 2 = 4176 \end{aligned}$$

De modo que el trabajo que realiza la persona al mover la caja es 4176 pies-libras. ■

Problemas

1. **Trabajo hecho por un cabrestante** Un cabrestante motorizado se emplea para jalar un árbol derribado a un camión. El motor ejerce una fuerza de $f(x) = 1500 + 10x - \frac{1}{2}x^2$ lb sobre el árbol en el instante cuando éste se ha movido x pies. El árbol se debe mover una distancia de 40 pies, de $x = 0$ a $x = 40$. ¿Cuánto trabajo realiza el cabrestante al mover el árbol?

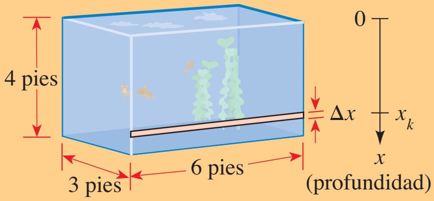


2. **Trabajo hecho por un resorte** La ley de Hooke establece que cuando se estira un resorte, jala hacia atrás con una fuerza proporcional a la cantidad del estiramiento. La constante de proporcionalidad es una característica del resorte conocida como la **constante del resorte.** Así, un resorte con una constante k ejerce una fuerza $f(x) = kx$ cuando se estira una distancia x.

   Cierto resorte tiene una constante $k = 20$ lb/pie. Encuentre el trabajo que realiza el resorte cuando se jala de modo que la cantidad por la que se estira se incrementa de $x = 0$ a $x = 2$ pies.

3. **Fuerza del agua** Como todo buzo sabe, un objeto sumergido en agua experimenta presión, y conforme se incrementa la profundidad, también aumenta la presión del agua. A una profundidad de x pies, la presión del agua es $p(x) = 62.5x$ lb/pie^2. Para hallar la fuerza ejercida por el agua sobre una superficie, se multiplica la presión por el área de la superficie:

$$\text{fuerza} = \text{presión} \times \text{área}$$



Suponga que un acuario con 3 pies de ancho, 6 pies de largo y 4 pies de altura está lleno de agua. El fondo del acuario tiene área $3 \times 6 = 18$ pies^2, y experimenta una presión de agua de $p(4) = 62.5 \times 4 = 250$ lb/pies^2. Así, la fuerza total ejercida por el agua en el fondo es $250 \times 18 = 4500$ lb.

El agua ejerce también una fuerza sobre los lados del acuario, pero no es tan fácil calcularla porque la presión se incrementa de la parte superior a la inferior. Para calcular la fuerza en uno de los lados de 4 pies $\times$ 6 pies, se divide su área en n tiras horizontales delgadas de ancho Δx, como se muestra en la figura. El área de cada tira es

$$\text{longitud} \times \text{ancho} = 6\,\Delta x$$

Si el fondo de la k-ésima tira está a la profundidad x_k, entonces experimenta una presión de agua de casi $p(x_k) = 62.5x_k$ lb/pies^2; mientras más delgada es la tira, más exacta es la aproximación. Así, en cada tira el agua ejerce una fuerza de

$$\text{presión} \times \text{área} = 62.5x_k \times 6\,\Delta x = 375x_k\Delta x \text{ libras}$$

a) Explique por qué la fuerza total ejercida por el agua sobre los lados de 4×6 pies del acuario es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} 375x_k\,\Delta x$$

donde $\Delta x = 4/n$ y $x_k = 4k/n$.

b) ¿Qué área representa el límite del inciso a)?

c) Evalúe el límite del inciso a) para hallar la fuerza ejercida por el agua en uno de los lados de 4×6 pies del acuario.

d) Use la misma técnica para hallar la fuerza ejercida por el agua en uno de los lados de 4×3 pies del acuario.

NOTA Los ingenieros emplean la técnica descrita en este problema para hallar la fuerza total que ejerce el aguja sobre una presa.

4. Distancia recorrida por un automóvil Puesto que distancia = velocidad $\times$ tiempo, es fácil apreciar que un automóvil en movimiento, por ejemplo, a 70 millas/h durante 5 h recorrerá una distancia de 350 millas. ¿Pero qué pasa si varía la velocidad, como sucede en realidad en la práctica?

a) Suponga que la velocidad de un objeto móvil en el tiempo t es $v(t)$. Explique por qué la distancia que recorre el objeto entre los tiempos $t = a$ y $t = b$ es el área bajo la gráfica de v entre $t = a$ y $t = b$.

b) La velocidad de un automóvil t segundos después de que comienza a moverse está dada por la función $v(t) = 6t + 0.1t^3$ pies/s. Encuentre la distancia que recorre el automóvil de $t = 0$ a $t = 5$ s.

5. Capacidad térmica Si la temperatura exterior alcanza un máximo de 90°F un día y sólo 80°F el siguiente, entonces probablemente se diría que el primer día fue más cálido que el segundo. Sin embargo, suponga que el primer día la temperatura fue menor a 60°F durante la mayor parte del día, y alcanza la máxima temperatura sólo de manera breve, mientras que en el segundo día la temperatura permaneció arriba de 75°F todo el tiempo. Ahora bien, ¿cuál día es el más cálido? Para tener una mejor medición de cuán cálido es un día particular, los científicos usan el concepto de **grado de calentamiento-hora.** Si la temperatura es una constante D grados durante t horas, entonces el "poder calorífico" generado en este periodo es Dt grados de calentamiento-horas:

$$\text{grados de calentamiento-horas} = \text{temperatura} \times \text{tiempo}$$

Si la temperatura no es constante, entonces el número de grados de calentamiento-horas es igual al área bajo la gráfica de la función de temperatura en el periodo en cuestión.

a) En un determinado día, la temperatura (en °F) se modeló mediante la función $D(t) = 61 + \frac{6}{5}t - \frac{1}{25}t^2$, donde t se midió en horas desde la medianoche. ¿Cuántos grados de calentamiento-horas se experimentaron en este día, de $t = 0$ a $t = 24$?

b) ¿Cuál fue la temperatura máxima en el día descrito en el inciso a)?

c) En otro día, la temperatura (en °F) se modeló mediante la función $E(t) = 50 + 5t - \frac{1}{4}t^2$. ¿Cuántos grados de calentamiento-horas se experimentaron ese día?

d) ¿Cuál es la temperatura máxima en el día descrito en el inciso c)?

e) ¿Qué día fue más cálido?

Respuestas a ejercicios y evaluaciones impares

Capítulo 1

Sección 1.1 ■ página 10

1. a) 50 **b)** $0, -10, 50$ **c)** $0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}$ **d)** $\sqrt{7}, \sqrt[3]{2}$
3. Propiedad conmutativa de la adición
5. Propiedad asociativa de la adición
7. Propiedad distributiva
9. Propiedad conmutativa de la multiplicación
11. $3 + x$ **13.** $4A + 4B$ **15.** $3x + 3y$ **17.** $8m$
19. $-5x + 10y$ **21. a)** $\frac{17}{30}$ **b)** $\frac{9}{20}$ **23. a)** 3 **b)** $\frac{25}{72}$
25. a) $\frac{8}{3}$ **b)** 6 **27. a)** $<$ **b)** $>$ **c)** $=$
29. a) Falso **b)** Verdadero **31. a)** Falso **b)** Verdadero
33. a) $x > 0$ **b)** $t < 4$ **c)** $a \geq \pi$ **d)** $-5 < x < \frac{1}{3}$
e) $|p - 3| \leq 5$ **35. a)** $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ **b)** $\{2, 4, 6\}$
37. a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ **b)** $\{7\}$
39. a) $\{x \mid x \leq 5\}$ **b)** $\{x \mid -1 < x < 4\}$
41. $-3 < x < 0$

43. $2 \leq x < 8$

45. $x \geq 2$

47. $(-\infty, 1]$

49. $(-2, 1]$

51. $(-1, \infty)$

53. a) $[-3, 5]$ **b)** $(-3, 5]$

55.

57.

59.

61. a) 100 **b)** 73
63. a) 2 **b)** -1 **65. a)** 12 **b)** 5 **67.** 5
69. a) 15 **b)** 24 **c)** $\frac{67}{40}$ **71. a)** $\frac{7}{9}$ **b)** $\frac{13}{45}$ **c)** $\frac{19}{33}$
73. Propiedad distributiva
75. a) Sí, no **b)** 6 pies

Sección 1.2 ■ página 21

1. $5^{-1/2}$ **3.** $\sqrt[3]{4^2}$ **5.** $5^{3/5}$ **7.** $\sqrt[5]{a^2}$ **9. a)** -9 **b)** 9 **c)** 1
11. a) 4 **b)** $\frac{1}{81}$ **c)** 16 **13. a)** 4 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$
15. a) $\frac{2}{3}$ **b)** $-\frac{1}{4}$ **c)** $-\frac{1}{2}$ **17. a)** $\frac{3}{2}$ **b)** 4 **c)** -4
19. 5 **21.** 14 **23.** $7\sqrt{2}$
25. $3\sqrt[5]{3}$ **27.** a^4 **29.** $6x^7y^5$
31. $16x^{10}$ **33.** $\dfrac{4}{b^2}$
35. $64r^7s$ **37.** $648y^7$ **39.** $\dfrac{x^3}{y}$
41. $\dfrac{y^2z^9}{x^5}$ **43.** $\dfrac{s^3}{q^7r^6}$ **45.** $|x|$
47. $2x^2$ **49.** $|ab^3|$ **51.** $2|x|$
53. $x^{13/15}$ **55.** $\dfrac{-1}{9a^{5/4}}$
57. $16b^{9/10}$ **59.** $\dfrac{1}{c^{2/3}d}$ **61.** $y^{1/2}$
63. $\dfrac{32x^{12}}{y^{16/15}}$ **65.** $\dfrac{x^{15}}{y^{15/2}}$ **67.** $\dfrac{4a^2}{3b^{1/3}}$ **69.** $\dfrac{3t^{25/6}}{s^{1/2}}$
71. a) 6.93×10^7 **b)** 7.2×10^{12} **c)** 2.8536×10^{-5}
d) 1.213×10^{-4} **73. a)** 319 000 **b)** 272 100 000
c) 0.00000002670 **d)** 0.000000009999
75. a) 5.9×10^{12} millas **b)** 4×10^{-13} cm
c) 3.3×10^{19} moléculas **77.** 1.3×10^{-20}
79. 1.429×10^{19} **81.** 7.4×10^{-14}
83. a) $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2x}}{x}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3x}}{3}$
85. a) $\dfrac{2\sqrt[3]{x^2}}{x}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[4]{y}}{y}$ **c)** $\dfrac{xy^{3/5}}{y}$

87. a) Negativo **b)** Positivo **c)** Negativo **d)** Negativo **e)** Positivo **f)** Negativo **89.** 2.5×10^{13} millas **91.** 1.3×10^{21} L **93.** 4.03×10^{27} moléculas **95. a)** 28 millas/h **b)** 167 pies **97. a)** 17.707 pies/s **b)** 1328.0 pies^3/s

Sección 1.3 ▪ página 31

1. Trinomio; $x^2, -3x, 7$; 2 **3.** Monomio; -8; 0 **5.** Cuatro términos; $-x^4, x^3, -x^2, x$; 4 **7.** $7x + 5$ **9.** $5x^2 - 2x - 4$ **11.** $x^3 + 3x^2 - 6x + 11$ **13.** $9x + 103$ **15.** $-t^4 + t^3 - t^2 - 10t + 5$ **17.** $x^{3/2} - x$ **19.** $21t^2 - 29t + 10$ **21.** $3x^2 + 5xy - 2y^2$ **23.** $1 - 4y + 4y^2$ **25.** $4x^4 + 12x^2y^2 + 9y^4$ **27.** $2x^3 - 7x^2 + 7x - 5$ **29.** $x^4 - a^4$ **31.** $a - 1/b^2$ **33.** $1 + 3a^3 + 3a^6 + a^9$ **35.** $2x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 2$ **37.** $1 - x^{2/3} + x^{4/3} - x^2$ **39.** $3x^4y^4 + 7x^3y^5 - 6x^2y^3 - 14xy^4$ **41.** $x^2 - y^2 - 2yz - z^2$ **43.** $2x(-x^2 + 8)$ **45.** $(y - 6)(y + 9)$ **47.** $xy(2x - 6y + 3)$ **49.** $(x - 1)(x + 3)$ **51.** $(2x - 5)(4x + 3)$ **53.** $(3x + 4)(3x + 8)$ **55.** $(3a - 4)(3a + 4)$ **57.** $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$ **59.** $(x + 6)^2$ **61.** $(x + 4)(x^2 + 1)$ **63.** $(2x + 1)(x^2 - 3)$ **65.** $(x + 1)(x^2 + 1)$ **67.** $x^{1/2}(x + 1)(x - 1)$ **69.** $(x^2 + 3)(x^2 + 1)^{-1/2}$ **71.** $6x(2x^2 + 3)$ **73.** $(x - 4)(x + 2)$ **75.** $(2x + 3)(x + 1)$ **77.** $(3x + 2)(2x - 3)$ **79.** $(5s - t)^2$ **81.** $(2x - 5)(2x + 5)$ **83.** $4ab$ **85.** $(x + 3)(x - 3)(x + 1)(x - 1)$ **87.** $(2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$ **89.** $(x^2 - 2y)(x^4 + 2x^2y + 4y^2)$ **91.** $x(x + 1)^2$ **93.** $(y + 2)(y - 2)(y - 3)$ **95.** $(2x^2 + 1)(x + 2)$ **97.** $3(x - 1)(x + 2)$ **99.** $(a + 2)(a - 2)(a + 1)(a - 1)$ **101.** $2(x^2 + 4)^4(x - 2)^3(7x^2 - 10x + 8)$ **103.** $(x^2 + 3)^{-4/3}(\frac{1}{3}x^2 + 3)$ **105. d)** $(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b - a + c)$

Sección 1.4 ▪ página 41

1. $\mathbb{R}$ **3.** $x \neq 4$ **5.** $x \geq -3$ **7.** $\dfrac{x + 2}{2(x - 1)}$ **9.** $\dfrac{1}{x + 2}$ **11.** $\dfrac{x + 2}{x + 1}$ **13.** $\dfrac{y}{y - 1}$ **15.** $\dfrac{x(2x + 3)}{2x - 3}$ **17.** $\dfrac{1}{4(x - 2)}$ **19.** $\dfrac{x + 3}{3 - x}$ **21.** $\dfrac{1}{t^2 + 9}$ **23.** $\dfrac{x + 4}{x + 1}$ **25.** $\dfrac{(2x + 1)(2x - 1)}{(x + 5)^2}$ **27.** $x^2(x + 1)$ **29.** $\dfrac{x}{yz}$ **31.** $\dfrac{3(x + 2)}{x + 3}$ **33.** $\dfrac{3x + 7}{(x - 3)(x + 5)}$ **35.** $\dfrac{1}{(x + 1)(x + 2)}$ **37.** $\dfrac{3x + 2}{(x + 1)^2}$ **39.** $\dfrac{u^2 + 3u + 1}{u + 1}$ **41.** $\dfrac{2x + 1}{x^2(x + 1)}$ **43.** $\dfrac{2x + 7}{(x + 3)(x + 4)}$ **45.** $\dfrac{x - 2}{(x + 3)(x - 3)}$ **47.** $\dfrac{5x - 6}{x(x - 1)}$ **49.** $\dfrac{-5}{(x + 1)(x + 2)(x - 3)}$ **51.** $-xy$ **53.** $\dfrac{c}{c - 2}$ **55.** $\dfrac{3x + 7}{x^2 + 2x - 1}$ **57.** $\dfrac{y - x}{xy}$ **59.** 1 **61.** $\dfrac{-1}{a(a + h)}$ **63.** $\dfrac{-3}{(2 + x)(2 + x + h)}$ **65.** $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ **67.** $\dfrac{(x + 2)^2(x - 13)}{(x - 3)^3}$ **69.** $\dfrac{x + 2}{(x + 1)^{3/2}}$ **71.** $\dfrac{2x + 3}{(x + 1)^{4/3}}$ **73.** $2 + \sqrt{3}$ **75.** $\dfrac{2(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5}$ **77.** $\dfrac{y\sqrt{3} - y\sqrt{y}}{3 - y}$ **79.** $\dfrac{-4}{3(1 + \sqrt{5})}$ **81.** $\dfrac{r - 2}{5(\sqrt{r} - \sqrt{2})}$ **83.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$ **85.** Verdadero **87.** Falso **89.** Falso **91.** Verdadero **93. a)** $\dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ **b)** $\frac{20}{3} \approx 6.7$ ohms

Sección 1.5 ▪ página 55

1. a) No **b)** Sí **3. a)** Sí **b)** No **5.** 12 **7.** 18 **9.** -3 **11.** 12 **13.** $-\frac{3}{4}$ **15.** 30 **17.** $-\frac{1}{3}$ **19.** $\frac{13}{3}$ **21.** -2 **23.** $R = \dfrac{PV}{nT}$ **25.** $R_1 = \dfrac{RR_2}{R_2 - R}$ **27.** $x = \dfrac{2d - b}{a - 2c}$ **29.** $x = \dfrac{1 - a}{a^2 - a - 1}$ **31.** $r = \pm\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ **33.** $b = \pm\sqrt{c^2 - a^2}$ **35.** $t = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$ **37.** $-4, 3$ **39.** 3, 4 **41.** $-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ **43.** $-2, \frac{1}{3}$ **45.** $-1 \pm \sqrt{6}$ **47.** $-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}$ **49.** $-2 \pm \dfrac{\sqrt{14}}{2}$ **51.** $0, \frac{1}{4}$ **53.** $-3, 5$ **55.** $\dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ **57.** $-\frac{3}{2}, 1$ **59.** $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ **61.** $-\frac{9}{2}, \frac{1}{2}$ **63.** $\dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$ **65.** $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ **67.** $-\frac{7}{5}$ **69.** 2 **71.** 1 **73.** No hay solución real **75.** $-\frac{7}{5}, 2$ **77.** $-50, 100$ **79.** -4 **81.** 4 **83.** 3 **85.** $\pm 2\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}$ **87.** No hay solución real **89.** $\pm 3\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{2}$ **91.** $-1, 0, 3$ **93.** 27, 729 **95.** $-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$ **97.** 3.99, 4.01 **99.** 4.24 s **101. a)** Después de 1 s y $1\frac{1}{2}$ s **b)** Nunca **c)** 25 pies **d)** Después $1\frac{1}{4}$ s **e)** Después $2\frac{1}{2}$ s **103. a)** 0.00055, 12.018 m **b)** 234.375 kg/m^3 **105. a)** Después de 17 años, el 1 de enero de 2019; **b)** Después de 18.612 años, el 12 de agosto de 2020; **107.** 50 **109.** 132.6 pies

Sección 1.6 ▪ página 68

1. $3n + 3$ **3.** $\dfrac{160 + s}{3}$ **5.** $0.025x$ **7.** $A = 3w^2$ **9.** $d = \frac{3}{4}s$ **11.** $\dfrac{25}{x + 3}$ **13.** 51, 52, 53 **15.** 19 y 36

17. \$9000 dólares a $4\frac{1}{2}$% y \$3000 dólares a 4% **19.** 7.5%
21. \$7400 **23.** \$45 000 **25.** Plomero, 70 h; ayudante, 35 h
27. 40 años de edad **29.** 9 centavos, 9 de a cinco centavos, 9 de a 10 centavos **31.** 6.4 pies desde el punto de apoyo
33. a) 9 cm **b)** 5 pulg **35.** 45 pies **37.** 120 pies por lado
39. 25 por 35 pies **41.** 60 por 40 pies **43.** 120 pies
45. 4 pulg **47.** 18 pies **49.** 5 m **51.** 4 **53.** 18 g
55. 0.6 L **57.** 35% **59.** 37 min 20 s **61.** 3 h
63. Irene 3 h, Henry $4\frac{1}{2}$ h **65.** 4 h **67.** 500 millas/h
69. 50 millas/h (o 240 millas/h) **71.** 6 km/h
73. 2 por 6 por 15 pies **75.** 13 por 13 pulg **77.** 2.88 pies
79. 16 millas; no **81.** 7.52 pies **83.** 18 pies **85.** 4.55 pies

Sección 1.7 ■ página 84

1. $\{\sqrt{2}, 2, 4\}$ **3.** $\{4\}$

5. $\{-2, -1, 2, 4\}$

7. $(4, \infty)$

9. $(-\infty, 2]$

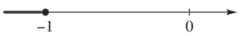
11. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

13. $[1, \infty)$

15. $\left(\frac{16}{3}, \infty\right)$

17. $(-\infty, -18)$

19. $(-\infty, -1]$



21. $[-3, -1)$

23. $(2, 6)$

25. $\left[\frac{9}{2}, 5\right)$

27. $\left(\frac{15}{2}, \frac{21}{2}\right]$

29. $(-2, 3)$

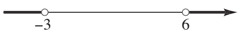
31. $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right] \cup [0, \infty)$

33. $[-3, 6]$

35. $(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

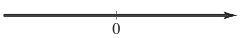
37. $(-1, 4)$

39. $(-\infty, -3) \cup (6, \infty)$

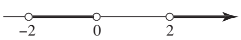


41. $(-2, 2)$

43. $(-\infty, \infty)$



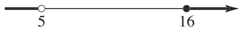
45. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$



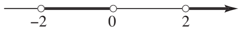
47. $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$

49. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$

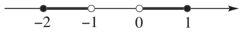
51. $(-\infty, 5) \cup [16, \infty)$



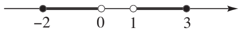
53. $(-2, 0) \cup (2, \infty)$



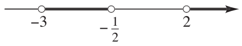
55. $[-2, -1) \cup (0, 1]$



57. $[-2, 0) \cup (1, 3]$



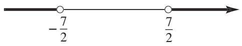
59. $\left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, \infty)$



61. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

63. $[-4, 4]$

65. $\left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{7}{2}, \infty\right)$



67. $[2, 8]$

69. $[1.3, 1.7]$

71. $(-4, 8)$

73. $(-6.001, -5.999)$

75. $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

77. $|x| < 3$ **79.** $|x - 7| \geq 5$ **81.** $|x| \leq 2$

83. $|x| > 3$ **85.** $|x - 1| \leq 3$ **87.** $-\dfrac{4}{3} \leq x \leq \dfrac{4}{3}$

89. $x < -2$ o $x > 7$ **91. a)** $x \geq \dfrac{c}{a} + \dfrac{c}{b}$

b) $\dfrac{a - c}{b} \leq x < \dfrac{2a - c}{b}$

93. $68 \leq F \leq 86$ **95.** Más de 200 millas **97.** Entre 12 000 y 14 000 millas **99.** Distancias entre 20 000 y 100 000 km

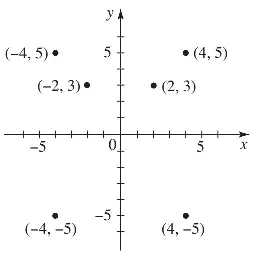
101. Entre 0 y 60 millas/h **103. a)** $T = 20 - \dfrac{h}{100}$

b) Desde 20°C pasa a −30°C **105.** 24

107. a) $|x - 0.020| \leq 0.003$ **b)** $0.017 \leq x \leq 0.023$

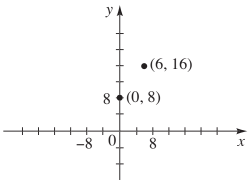
Sección 1.8 ■ página 97

1.



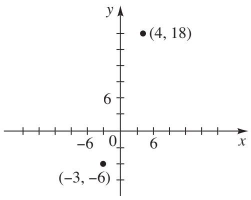
3. a) $\sqrt{13}$ **b)** $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$ **5. a)** 10 **b)** $(1, 0)$

7. a)



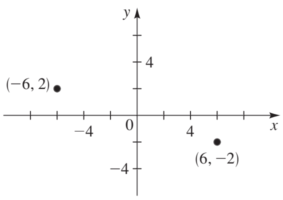
b) 10 **c)** $(3, 12)$

9. a)



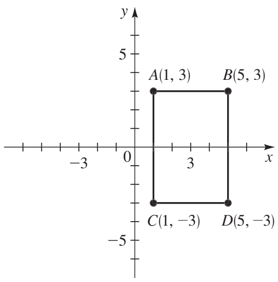
b) 25 **c)** $\left(\frac{1}{2}, 6\right)$

11. a)

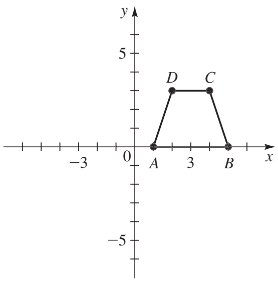


b) $4\sqrt{10}$ **c)** $(0, 0)$

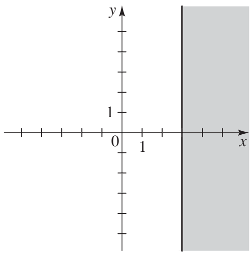
13. 24



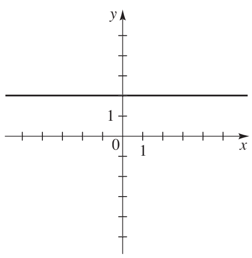
15. Trapezoide, área $= 9$



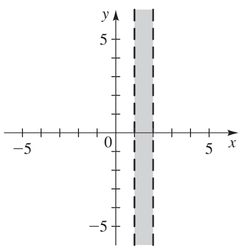
17.



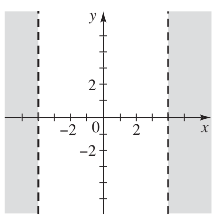
19.



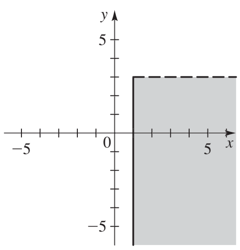
21.



23.

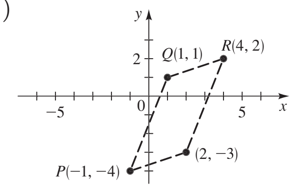


25.

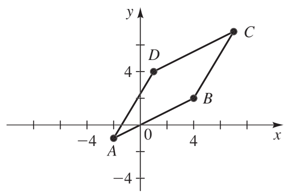


27. $A(6, 7)$ **29.** $Q(-1, 3)$ **33. b)** 10 **37.** $(0, -4)$

39. $(2, -3)$



41. a)



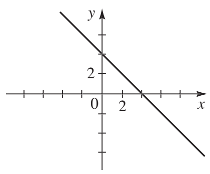
b) $\left(\frac{5}{2}, 3\right), \left(\frac{5}{2}, 3\right)$

43. No, sí, sí **45.** Sí, no, sí

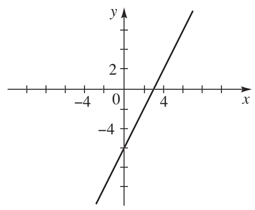
47. intersección con x en 0, 4; intersección con y en 0

49. corta a x en -2, 2; corta a y en -4, 4

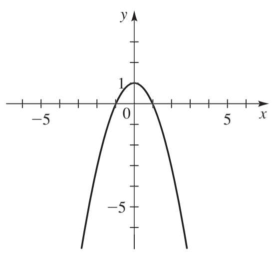
51. Corta al eje x en 4, ordenada al origen $= 4$, sin simetría



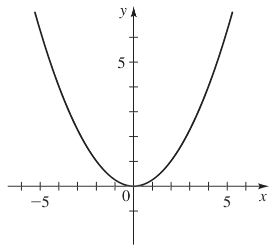
53. Corta al eje x en 3, ordenada al origen $= -6$, sin simetría



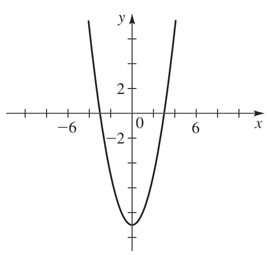
55. Corta al eje x en ± 1, intersección con y en 1, simétrica con respecto a y



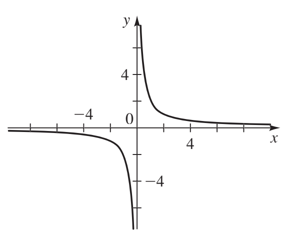
57. Pasa por $x = 0$, $y = 0$, simétrica con respecto a y



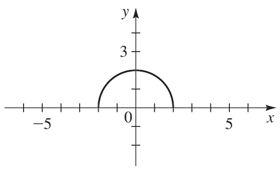
59. Corta al eje x en ± 3, corta a y en -9, simétrica con respecto al eje y



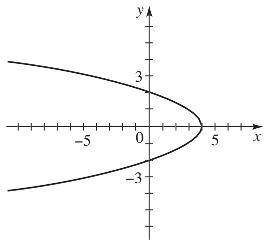
61. Sin intersecciones, simétrica con respecto al origen



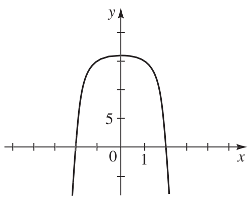
63. Corta al eje x en ± 2, corta a y en 2, simétrica con respecto al eje y



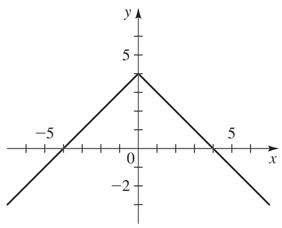
65. Corta al eje x en 4, corta a y en -2, 2, simétrica con respecto al eje x



67. Corta al eje x en ± 2, corta a y en 16, simétrica con respecto al eje y

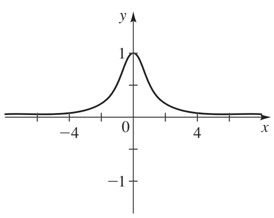


69. Corta al eje x en ± 4, corta a y en 4, simétrica con respecto al eje y

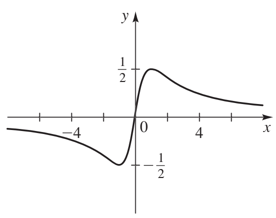


71. Simetría con respecto al eje y
73. Simetría con respecto al origen
75. Simetría con respecto al origen

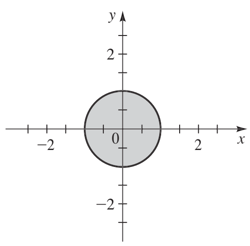
77.



79.



81. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ **83.** $x^2 + y^2 = 65$
85. $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 9$ **87.** $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$
89. $(2, -5), 4$ **91.** $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right), \frac{1}{2}$
93. $\left(\frac{3}{4}, 0\right), \frac{3}{4}$ **95.**

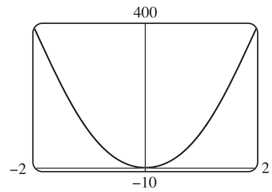


97. 12π **99.** **a)** 5 **b)** 31; 25 **c)** Los puntos P y Q deben estar en la misma calle o en la misma avenida.
101. **a)** 2 Mm, 8 Mm **b)** -1.33, 7.33; 2.40 Mm, 7.60 Mm

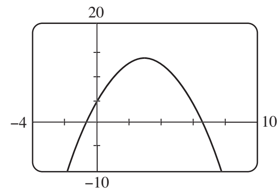
Sección 1.9 ■ página 109

1. c) **3.** c) **5.** c)

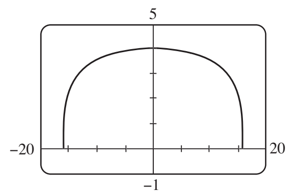
7.



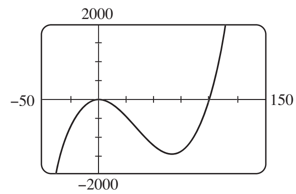
9.



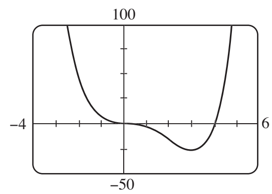
11.



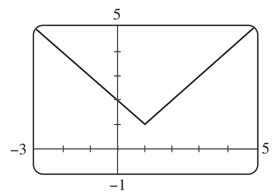
13.



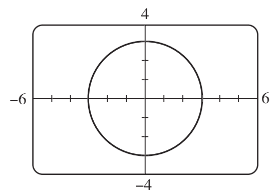
15.



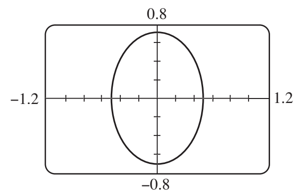
17.



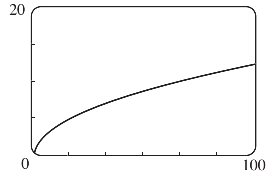
19.



21.



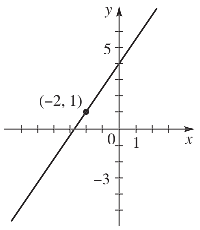
23. No **25.** Sí, 2 **27.** -4 **29.** $\frac{5}{14}$ **31.** $\pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5.7$
33. 2.5, -2.5 **35.** $5 + 2\sqrt[4]{5} \approx 7.99$, $5 - 2\sqrt[4]{5} \approx 2.01$
37. 3.00, 4.00 **39.** 1.00, 2.00, 3.00 **41.** 1.62
43. -1.00, 0.00, 1.00 **45.** 2.55 **47.** -2.05, 0, 1.05
49. $[-2.00, 5.00]$ **51.** $(-\infty, 1.00] \cup [2.00, 3.00]$
53. $(-1.00, 0) \cup (1.00, \infty)$ **55.** $(-\infty, 0)$ **57.** 0, 0.01
59. **a)**



b) 67 millas

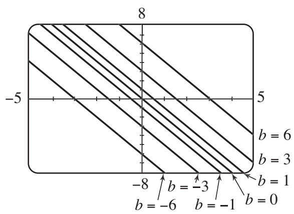
Sección 1.10 ▪ página 120

1. $\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{6}$ **5.** $-\frac{1}{2}$ **7.** $-\frac{9}{2}$ **9.** $-2, \frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{4}$
11. $x + y - 4 = 0$
13. $3x - 2y - 6 = 0$
15. $x - y + 1 = 0$
17. $2x - 3y + 19 = 0$
19. $5x + y - 11 = 0$
21. $3x - y - 2 = 0$
23. $3x - y - 3 = 0$
25. $y = 5$ **27.** $x + 2y + 11 = 0$
29. $x = -1$
31. $5x - 2y + 1 = 0$
33. $x - y + 6 = 0$
35. a)

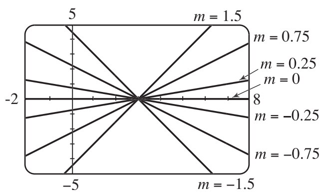


b) $3x - 2y + 8 = 0$

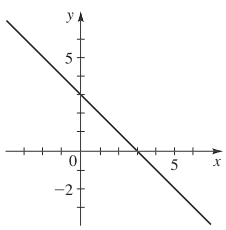
37. Todas tienen la misma pendiente.



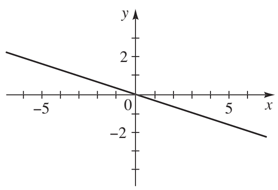
39. Todas cortan al eje x en el mismo punto



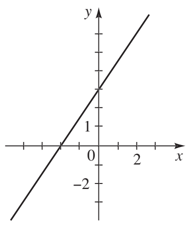
41. $-1, 3$



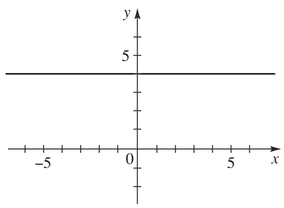
43. $-\frac{1}{3}, 0$



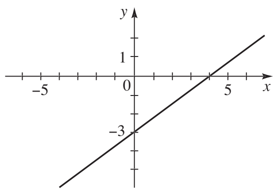
45. $\frac{3}{2}, 3$



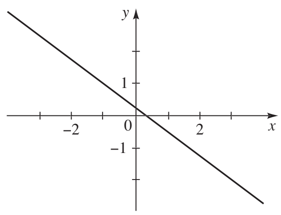
47. $0, 4$



49. $\frac{3}{4}, -3$

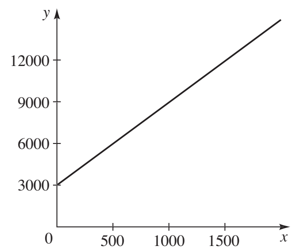


51. $-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}$



57. $x - y - 3 = 0$ **59. b)** $4x - 3y - 24 = 0$
61. 16 667 pies **63. a)** 8.34; la pendiente representa el incremento en la dosis para un aumento de un año en la edad. **b)** 8.34 mg

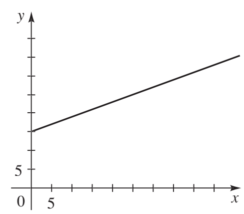
65. a)



b) La pendiente representa el costo de producción por tostador; el corte con el eje y representa el costo fijo mensual.

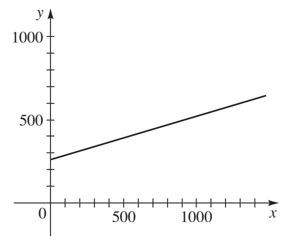
67. a) $t = \frac{5}{24}n + 45$ **b)** 76°F
69. a) $P = 0.434d + 15$, donde P es la presión en lb/pulg^2 y d es la profundidad en pies

b)



c) La pendiente es la rapidez de incremento en la presión del agua, y la ordenada al origen es la presión del aire en la superficie **d)** 196 pies

71. a) $C = \frac{1}{4}d + 260$
b) \$635
c) La pendiente representa el costo por milla
d) La ordenada al origen representa el costo fijo mensual



Sección 1.11 ▪ página 127

1. $T = kx$ **3.** $v = k/z$ **5.** $y = ks/t$ **7.** $z = k\sqrt{y}$
9. $V = klwh$ **11.** $R = k\dfrac{i}{Pt}$ **13.** $y = 7x$ **15.** $M = 15x/y$
17. $W = 360/r^2$ **19.** $C = 16lwh$ **21.** $s = 500/\sqrt{t}$
23. a) $F = kx$ **b)** 8 **c)** 32 N **25. a)** $C = kpm$

b) 0.125 **c)** \$57 500 **27.** **a)** $P = ks^3$ **b)** 0.012
c) 324 **29.** 0.7 dB **31.** 4 **33.** 5.3 millas/h
35. **a)** $R = kL/d^2$ **b)** $0.00291\overline{6}$ **c)** $R \approx 137\ \Omega$
37. **a)** 160 000 **b)** 1 930 670 340 **39.** 36 lb
41. **a)** $f = k/L$ **b)** Se divide a la mitad

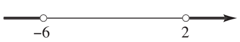
Capítulo 1 Repaso ■ página 131

1. Propiedad conmutativa de la adición
3. Propiedad distributiva
5. $-2 \le x < 6$

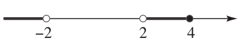
7. $[5, \infty)$

9. 6 **11.** $\frac{1}{72}$ **13.** $\frac{1}{6}$ **15.** 11 **17.** 4 **19.** $16x^3$
21. $12xy^8$ **23.** x^2y^2 **25.** $3x^{3/2}y^2$ **27.** $\dfrac{4r^{5/2}}{s^7}$
29. 7.825×10^{10} **31.** 1.65×10^{-32}
33. $3xy^2(4xy^2 - y^3 + 3x^2)$ **35.** $(x - 2)(x + 5)$
37. $(4t + 3)(t - 4)$ **39.** $(5 - 4t)(5 + 4t)$
41. $(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)$
43. $x^{-1/2}(x - 1)^2$ **45.** $(x - 2)(4x^2 + 3)$
47. $\sqrt{x^2 + 2}(x^2 + x + 2)^2$ **49.** $6x^2 - 21x + 3$
51. $-7 + x$ **53.** $2x^3 - 6x^2 + 4x$ **55.** $\dfrac{3(x + 3)}{x + 4}$ **57.** $\dfrac{x + 1}{x - 4}$
59. $\dfrac{1}{x + 1}$ **61.** $-\dfrac{1}{2x}$ **63.** $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
65. 5 **67.** No hay solución **69.** 2, 7 **71.** $-1, \frac{1}{2}$
73. $0, \pm\frac{5}{2}$ **75.** $\dfrac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$ **77.** -5 **79.** 3, 11
81. 20 lb de pasitas, 30 lb de nueces
83. $\frac{1}{4}(\sqrt{329} - 3) \approx 3.78$ millas/h **85.** 1 h 50 min
87. $(-3, \infty)$

89. $(-\infty, -6) \cup (2, \infty)$

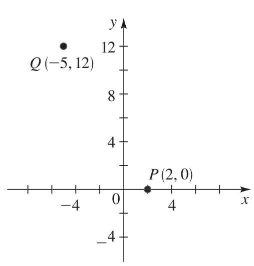


91. $(-\infty, -2) \cup (2, 4]$



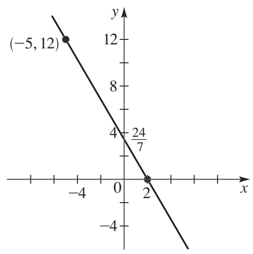
93. $[2, 8]$

95. $-1, 7$ **97.** $[1, 3]$
99. **a)**

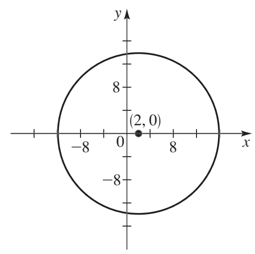


b) $\sqrt{193}$ **c)** $\left(-\frac{3}{2}, 6\right)$

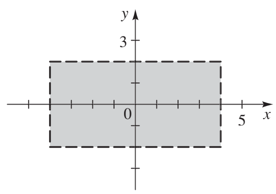
d) $y = -\frac{12}{7}x + \frac{24}{7}$



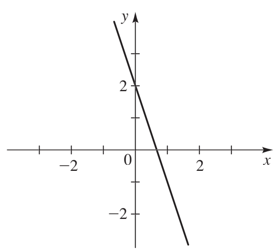
e) $(x - 2)^2 + y^2 = 193$



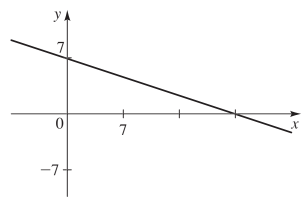
101.



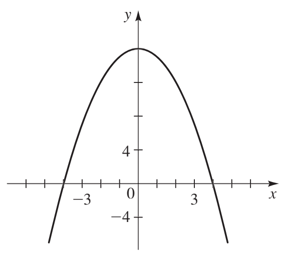
103. B **105.** $(x + 5)^2 + (y + 1)^2 = 26$
107. Circunferencia, centro $(-1, 3)$ radio 1
109. No tiene gráfica
111. No hay simetría



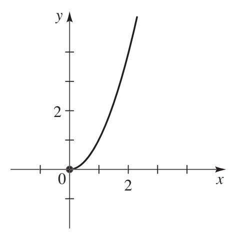
113. No hay simetría



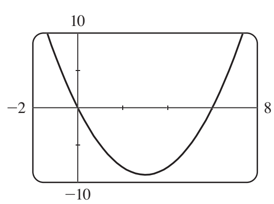
115. Simetría con respecto al eje y



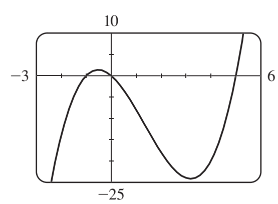
117. No hay simetría



119.



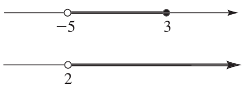
121.



123. $2x - 3y - 16 = 0$ **125.** $3x + y - 12 = 0$
127. $x + 5y = 0$ **129.** $x^2 + y^2 = 169, 5x - 12y + 169 = 0$
131. **a)** La pendiente representa la cantidad que se alarga el resorte con un incremento de una libra en el peso. El corte en S representa la longitud sin estiramiento del resorte.
b) 4 pulg **133.** $M = 8z$ **135.** **a)** $I = k/d^2$ **b)** 64 000
c) 160 candelas **137.** 11.0 millas/h

Capítulo 1 Evaluación ■ página 135

1. **a)**



b) $(-\infty, 3], [-1, 4)$ **c)** 16

3. **a)** 1.86×10^{11} **b)** 3.965×10^{-7}

5. $5\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

7. **a)** $(2x - 5)(2x + 5)$ **b)** $(2x - 3)(x + 4)$

c) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)$

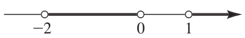
d) $x(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$

e) $3x^{-1/2}(x - 1)(x - 2)$ **f)** $xy(x - 2)(x + 2)$

9. 120 millas

11. **a)** $[-4, 3)$

b) $(-2, 0) \cup (1, \infty)$

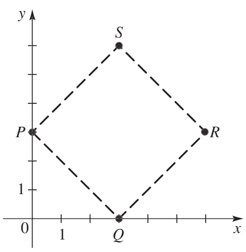


c) $(1, 7)$

d) $(-1, 4]$

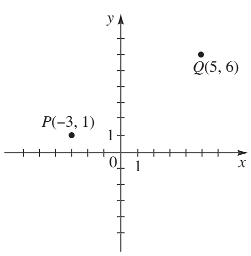
13. $0 \le x \le 6$

15. **a)** $S(3, 6)$



b) 18

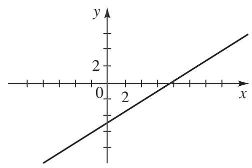
17. **a)**



b) $\sqrt{89}$ **c)** $\left(1, \frac{7}{2}\right)$ **d)** $\frac{5}{8}$ **e)** $y = -\frac{8}{5}x + \frac{51}{10}$

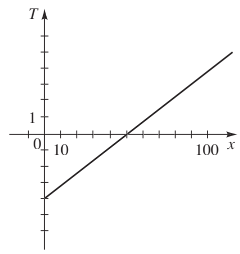
f) $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{89}{4}$

19. $y = \frac{2}{3}x - 5$



pendiente $\frac{2}{3}$; ordenada en el origen $= -5$

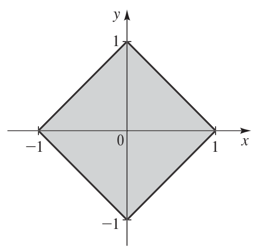
21. **a)** 4°C **b)**



c) La pendiente es la razón de cambio en la temperatura, la intersección con el eje x es la profundidad a la cual la temperatura es 0°C y la intersección con el eje T es la temperatura a nivel del suelo.

Enfoque en la resolución de problemas ■ página 141

1. 37.5 millas/h **3.** 150 millas **5.** $427, 3n + 1$ **7.** 75 s
9. La misma cantidad **11.** 2π **13.** 8.49 **15.** 7
19. El Polo Norte es uno de dichos puntos. Hay una cantidad infinita de otros cerca del Polo Sur **21.** π
23. $1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3 = 1729$
27. Infinitamente lejos **29.**

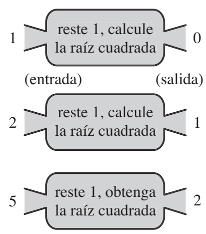


Capítulo 2

Sección 2.1 ■ página 155

1. $f(x) = 2(x + 3)$ **3.** $f(x) = (x - 5)^2$ **5.** Reste 4, luego divida entre 3 **7.** Saque el cuadrado, luego sume 2

9.



11.

x	$f(x)$
−1	8
0	2
1	0
2	2
3	8

13. $3, -3, 2, 2a+1, -2a+1, 2a+2b+1$

15. $-\frac{1}{3}, -3, \frac{1}{3}, \frac{1-a}{1+a}, \frac{2-a}{a}$, indefinido

17. $-4, 10, -2, 3\sqrt{2}, 2x^2+7x+1, 2x^2-3x-4$

19. $6, 2, 1, 2, 2|x|, 2(x^2+1)$

21. $4, 1, 1, 2, 3$ **23.** $8, -\frac{3}{4}, -1, 0, -1$

25. x^2+4x+5, x^2+6

27. $x^2+4, x^2+8x+16$

29. $3a+2, 3(a+h)+2, 3$ **31.** $5, 5, 0$

33. $\frac{a}{a+1}, \frac{a+h}{a+h+1}, \frac{1}{(a+h+1)(a+1)}$

35. $3-5a+4a^2, 3-5a-5h+4a^2+8ah+4h^2,$ $-5+8a+4h$ **37.** $(-\infty, \infty)$ **39.** $[-1, 5]$

41. $\{x \mid x \neq 3\}$ **43.** $\{x \mid x \neq \pm 1\}$ **45.** $[5, \infty)$

47. $(-\infty, \infty)$ **49.** $[\frac{5}{2}, \infty)$ **51.** $[-2, 3) \cup (3, \infty)$

53. $(-\infty, 0] \cup [6, \infty)$ **55.** $(4, \infty)$

57. $(\frac{1}{2}, \infty)$ **59. a)** $C(10) = 1532.1, C(100) = 2100$

b) El costo de producción de 10 yardas y 100 yardas

c) $C(2) = 1500$ **61. a)** $D(0.1) = 28.1, D(0.2) = 39.8$

b) 41.3 millas **c)** 235.6 millas

63. a) $v(0.1) = 4440, v(0.4) = 1665$

b) El flujo es más rápido cerca del eje central.

c)

r	$v(r)$
0	4625
0.1	4440
0.2	3885
0.3	2960
0.4	1665
0.5	0

65. a) 8.66 m, 6.61 m, 4.36 m

b) Parecerá que se vuelve más corto.

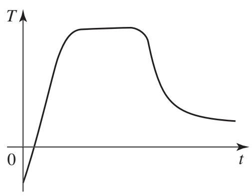
67. a) \$90, \$105, \$100, \$105

b) Costo total de un pedido, incluyendo el embarque

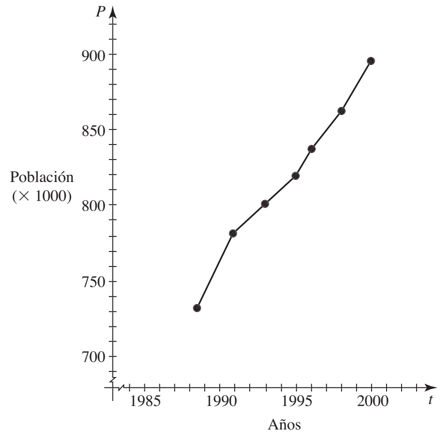
69. a) $F(x) = \begin{cases} 15(40-x) & \text{si } 0 < x < 40 \\ 0 & \text{si } 40 \leq x \leq 65 \\ 15(x-65) & \text{si } x > 65 \end{cases}$

b) \$150, \$0, \$150 **c)** Multas por transgredir los límites de velocidad

71.

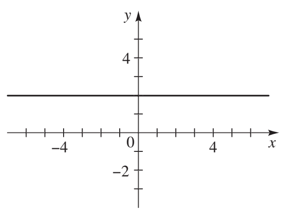


73.

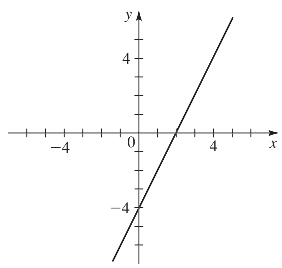


Sección 2.2 ▪ página 167

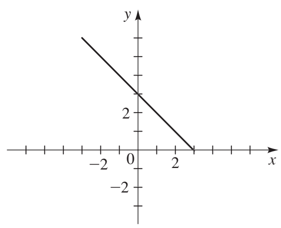
1.



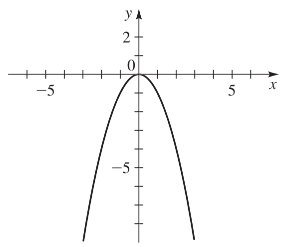
3.



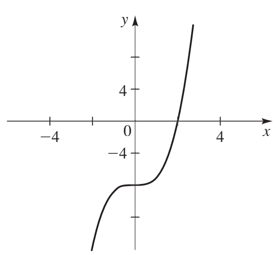
5.



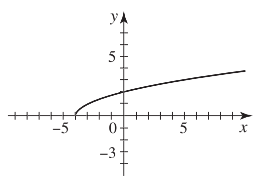
7.



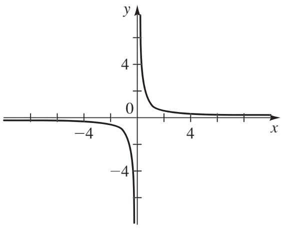
9.



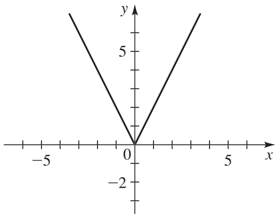
11.



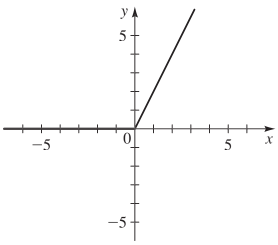
13.



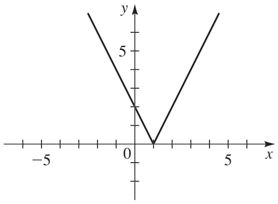
15.



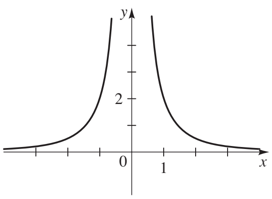
17.



19.



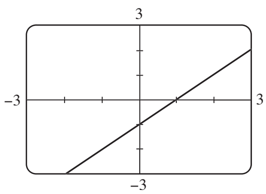
21.



23. a) 1, −1, 3, 4 **b)** Dominio [−3, 4], rango [−1, 4]

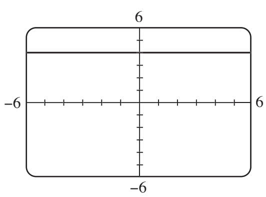
25. a) $f(0)$ **b)** $g(-3)$ **c)** −2, 2

27. a)



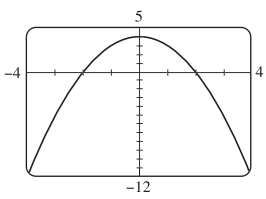
b) Dominio $(-\infty, \infty)$, rango $(-\infty, \infty)$

29. a)



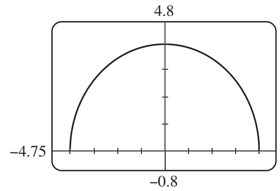
b) Dominio $(-\infty, \infty)$, rango $\{4\}$

31. a)



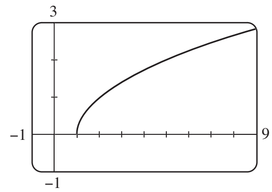
b) Dominio $(-\infty, \infty)$, rango $(-\infty, 4]$

33. a)



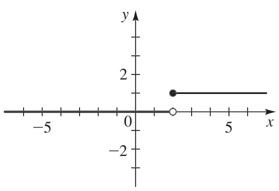
b) Dominio [−4, 4], rango [0, 4]

35. a)

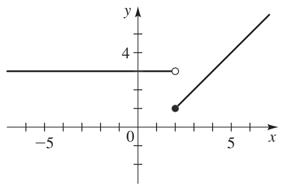


b) Dominio $[1, \infty)$, rango $[0, \infty)$

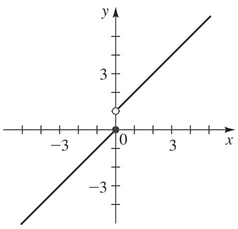
37.



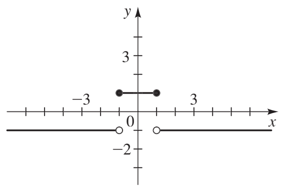
39.



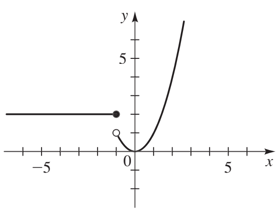
41.



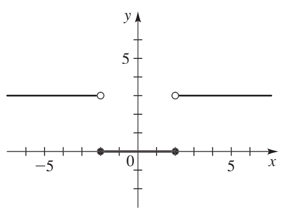
43.



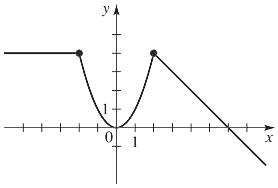
45.



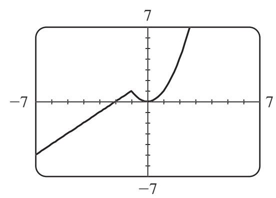
47.



49.

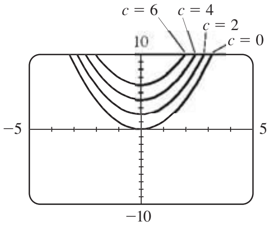


51.

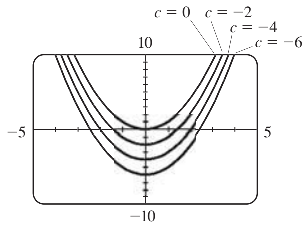


53. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

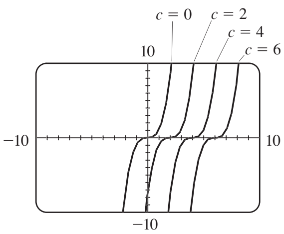
55. a) Sí **b)** No **c)** Sí **d)** No
57. Función, dominio $[-3, 2]$, rango $[-2, 2]$ **59.** No es una función **61.** Sí **63.** No **65.** No **67.** Sí **69.** Sí **71.** Sí
73. a)



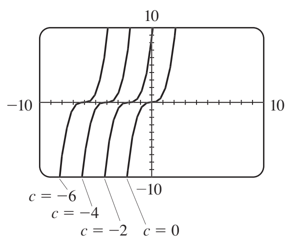
b)



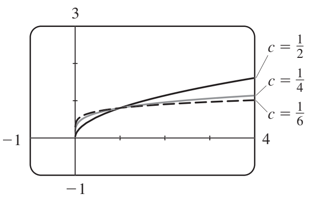
c) Si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ es la misma que la gráfica de $y = x^2$ desplazada hacia arriba c unidades. Si $c < 0$, entonces la gráfica de $f(x) = x^2 + c$ es la misma que la de $y = x^2$ desplazada hacia abajo c unidades.
75. a)



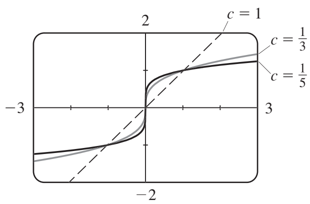
b)



c) Si $c > 0$, entonces la gráfica de $f(x) = (x - c)^3$ es la misma que la gráfica de $y = x^3$ desplazada hacia la derecha c unidades. Si $c < 0$, entonces la gráfica de $f(x) = (x - c)^3$ es la misma que la de $y = x^3$ desplazada hacia la izquierda c unidades.
77. a)



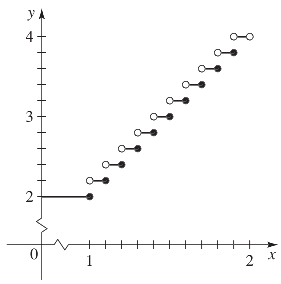
b)



c) Las gráficas de raíces pares son similares a $\sqrt{x}$; las gráficas de raíces impares son similares a $\sqrt[3]{x}$. A medida que c se incrementa, la gráfica de $y = \sqrt[c]{x}$ se vuelve más pronunciada cerca de 0 y más plana cuando $x > 1$.
79. $f(x) = -\frac{7}{6}x - \frac{4}{3}, -2 \le x \le 4$
81. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, -3 \le x \le 3$
83. El peso de esta persona se incrementa a medida que crece, luego sigue en aumento; la persona sigue entonces una dieta rigurosa (quizá) a la edad de 30 años, luego sube otra vez de peso; con el paso del tiempo, el peso se estabiliza. **85.** A ganó la carrera. Todos los corredores terminaron. El corredor B cayó, pero se levantó para llegar en segundo lugar.

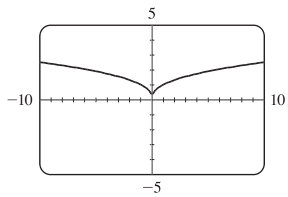
87. a) 5 s **b)** 30 s **c)** 17 s

89. $C(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x \le 1 \\ 2.2 & 1 < x \le 1.1 \\ 2.4 & 1.1 < x \le 1.2 \\ \vdots & \\ 4.0 & 1.9 < x < 2.0 \end{cases}$



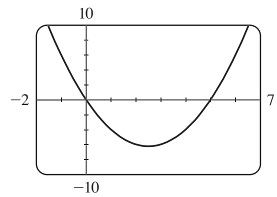
Sección 2.3 ■ página 179

1. a) $[-1, 1], [2, 4]$ **b)** $[1, 2]$ **3. a)** $[-2, -1], [1, 2]$ **b)** $[-3, -2], [-1, 1], [2, 3]$
5. a)



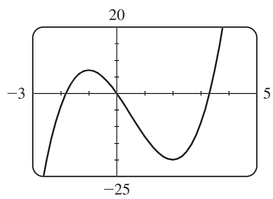
b) Creciente en $[0, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 0]$

7. a)



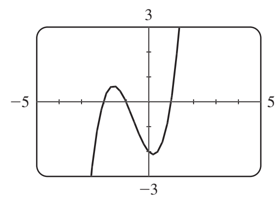
b) Creciente en $[2.5, \infty)$; decreciente en $(-\infty, 2.5]$

9. a)



b) Creciente en $(-\infty, -1]$, $[2, \infty)$; decreciente en $[-1, 2]$

11. a)

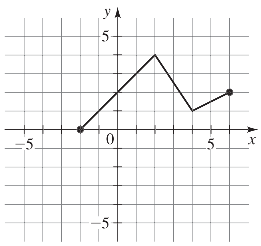


b) Creciente en $(-\infty, -1.55]$, $[0.22, \infty)$; decreciente en $[-1.55, 0.22]$

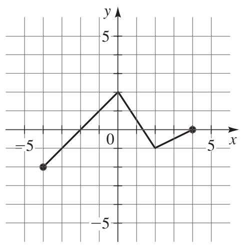
13. $\frac{2}{3}$ **15.** $-\frac{4}{5}$ **17.** 3 **19.** 5 **21.** 60
23. $12 + 3h$ **25.** $-\dfrac{1}{a}$ **27.** $\dfrac{-2}{a(a + h)}$ **29. a)** $\frac{1}{2}$
31. a) Creciente en $[0, 150]$, $[300, 365]$; decreciente en $[150, 300]$ **b)** -0.25 pies/día **33. a)** 245 personas/año **b)** -328.5 personas/año **c)** 1997–2001 **d)** 2001–2006
35. a) 7.2 unidades/año **b)** 8 unidades/año **c)** -55 unidades/año **d)** 2000–2001, 2001–2002

Sección 2.4 ▪ página 190

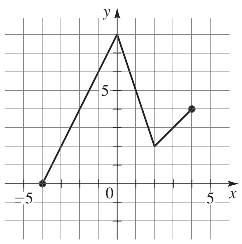
1. a) Muévase hacia abajo 5 unidades **b)** Desplácese a la derecha 5 unidades
3. a) Desplácese a la izquierda $\frac{1}{2}$ unidad **b)** Suba $\frac{1}{2}$ de unidad
5. a) Refleje en el eje x y estira verticalmente en un factor de 2
b) Refleje en el eje x y contraiga verticalmente en un factor de $\frac{1}{2}$
7. a) Diríjase a la derecha 4 unidades y suba $\frac{3}{4}$ de unidad
b) Vaya a la izquierda 4 unidades y baje $\frac{3}{4}$ de unidad
9. a) Contraiga en el sentido horizontal por un factor de $\frac{1}{4}$
b) Estire en la dirección horizontal por un factor de 4
11. $g(x) = (x - 2)^2$
13. $g(x) = |x + 1| + 2$ **15.** $g(x) = -\sqrt{x + 2}$
17. a) 3 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4
19. a)



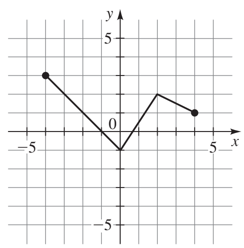
b)



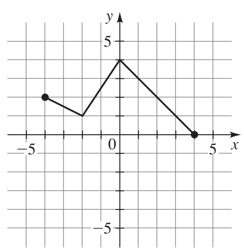
c)



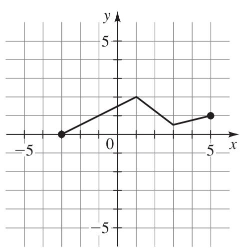
d)



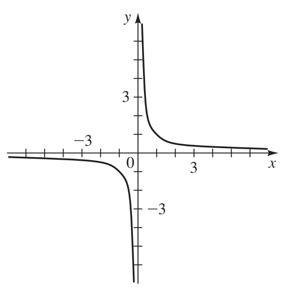
e)



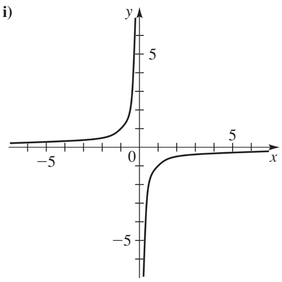
f)



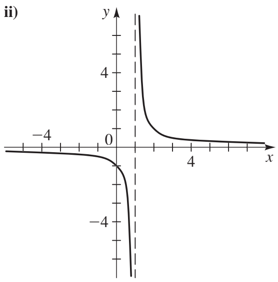
21. a)



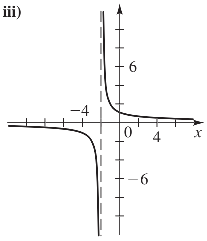
b) i)



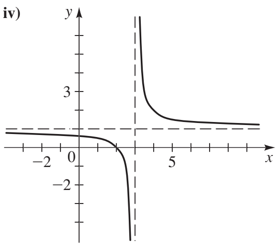
ii)



iii)

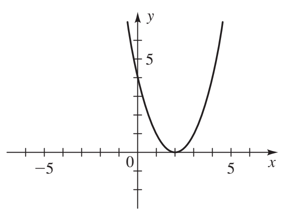


iv)

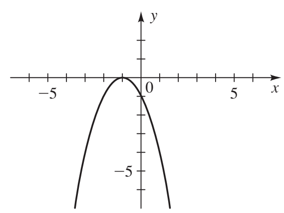


23. a) Desplácese a la izquierda 2 unidades
b) Suba 2 unidades
25. a) Estire verticalmente por un factor de 2
b) Vaya a la derecha 2 unidades, luego contraiga verticalmente por un factor de $\frac{1}{2}$
27. $g(x) = (x - 2)^2 + 3$ **29.** $g(x) = -5\sqrt{x + 3}$
31. $g(x) = 0.1\left|x - \frac{1}{2}\right| - 2$

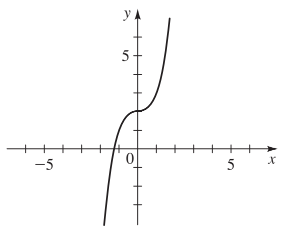
33.



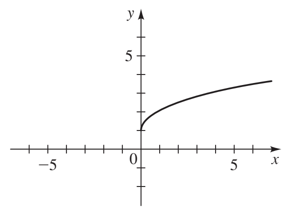
35.



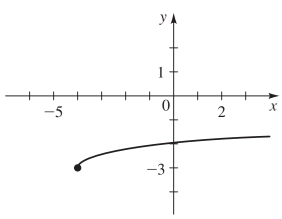
37.



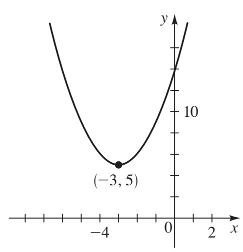
39.



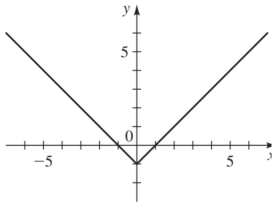
41.



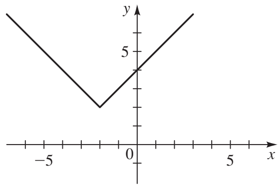
43.



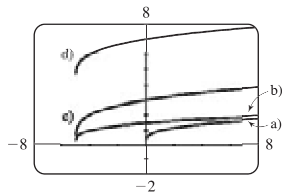
45.



47.

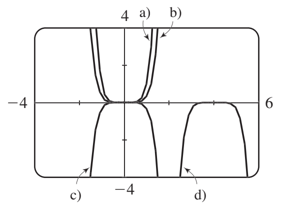


49.



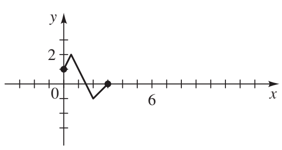
En el caso del inciso b) desplace 5 unidades a la izquierda la gráfica que está en a); para el inciso c) desplace 5 unidades a la izquierda la gráfica en a) y estire verticalmente con un factor de 2; para el inciso d) desplace 5 unidades la gráfica en a), estire verticalmente con un factor de 2 y luego suba 4 unidades.

51.

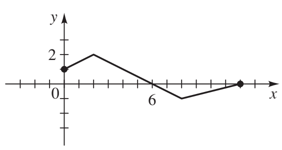


En el caso del inciso b), contraiga verticalmente la gráfica en a) por un factor de $\frac{1}{3}$; para el inciso c) contraiga verticalmente la gráfica en a) por un factor de $\frac{1}{3}$ y refléjela en el eje x; para el inciso d) desplace 4 unidades a la derecha la gráfica en a), contraiga verticalmente por un factor de $\frac{1}{3}$ y luego refléjela en el eje x.

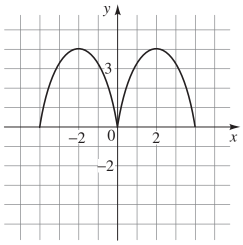
53. a)



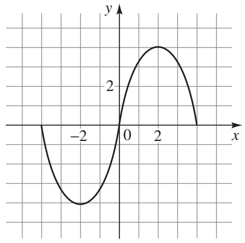
b)



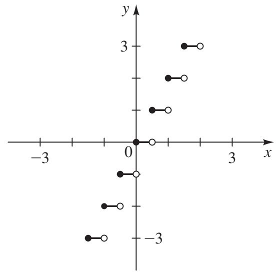
55. a)



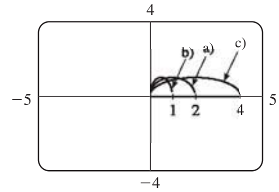
b)



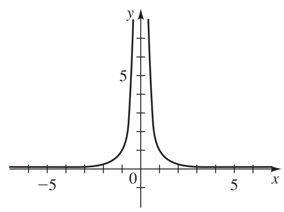
57.



59.

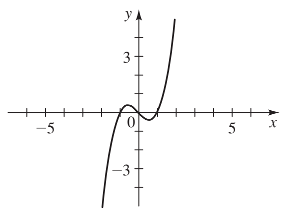


61. Par



63. Ninguna de las dos

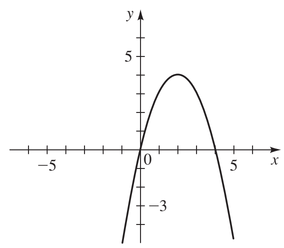
65. Impar



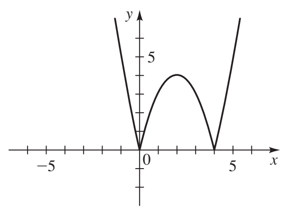
67. Ninguna de las dos

69. Para obtener la gráfica de g, refleje en el eje x la parte de la gráfica de f que está abajo del eje x.

71. a)



b)



73. a) Suba 4 unidades, contraiga en el sentido vertical por un factor de 0.01 **b)** Desplácese a la derecha 10 unidades; $g(t) = 4 + 0.01(t - 10)^2$

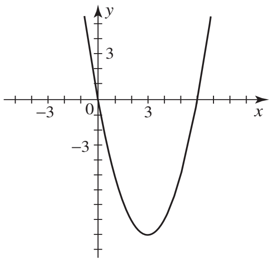
Sección 2.5 ■ página 200

1. a) $(3, 4)$ **b)** 4 **3. a)** $(1, -3)$ **b)** -3

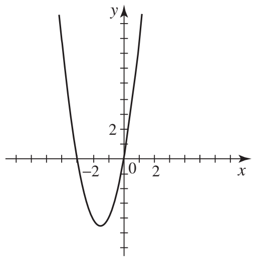
5. a) $f(x) = (x - 3)^2 - 9$
b) Vértice $(3, -9)$
intersección con x en 0, 6
intersección con y en 0

7. a) $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2}$
b) Vértice $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{9}{2}\right)$
intersección con x en 0, -3,
intersección con y en 0

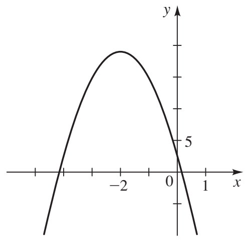
c)



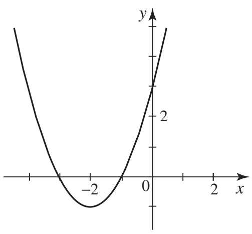
c)



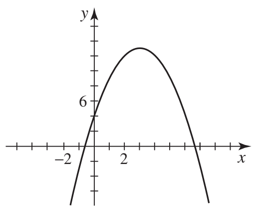
c)



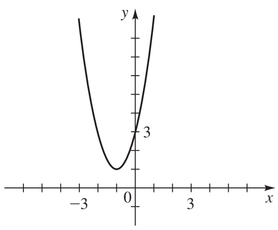
9. a) $f(x) = (x + 2)^2 - 1$
b) Vértice $(-2, -1)$
intersección con x en $-1, -3$
intersección con y en 3
c)



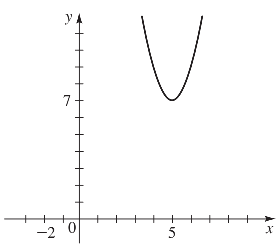
11. a) $f(x) = -(x - 3)^2 + 13$
b) Vértice $(3, 13)$;
intersección con x en $3 \pm \sqrt{13}$;
intersección con y en 4
c)



13. a) $f(x) = 2(x + 1)^2 + 1$ **b)** Vértice $(-1, 1)$;
no corta a x; intersección con y en 3
c)

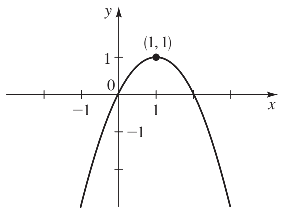


15. a) $f(x) = 2(x - 5)^2 + 7$ **b)** Vértice $(5, 7)$;
no corta a x; intersección con y en 57
c)



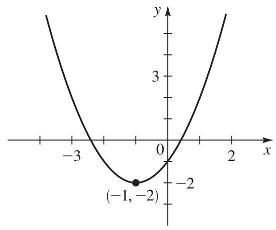
17. a) $f(x) = -4(x + 2)^2 + 19$ **b)** Vértice $(-2, 19)$;
intersección con x en $-2 \pm \frac{1}{2}\sqrt{19}$; intersección con y en 3

19. a) $f(x) = -(x - 1)^2 + 1$
b)



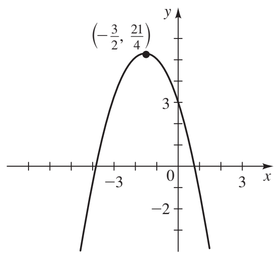
c) Máximo $f(1) = 1$

21. a) $f(x) = (x + 1)^2 - 2$
b)



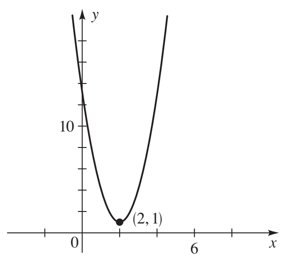
c) Mínimo $f(-1) = -2$

23. a) $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{21}{4}$
b)



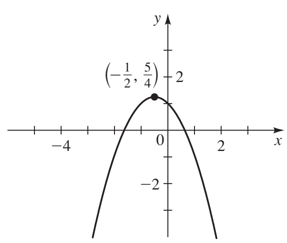
c) Máximo $f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$

25. a) $g(x) = 3(x - 2)^2 + 1$
b)



c) Mínimo $g(2) = 1$

27. a) $h(x) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$
b)



c) Máximo $h\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$

29. Mínimo $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ **31.** Máximo $f(-3.5) = 185.75$
33. Mínimo $f(0.6) = 15.64$ **35.** Mínimo $h(-2) = -8$
37. Máximo $f(-1) = \frac{7}{2}$ **39.** $f(x) = 2x^2 - 4x$
41. $(-\infty, \infty), (-\infty, 1]$ **43.** $(-\infty, \infty), \left(-\frac{23}{2}, \infty\right)$
45. a) -4.01 **b)** -4.011025
47. Máximo local 2; mínimo local $-1, 0$ **49.** Máximo local 0, 1; mínimo local $-2, -1$ **51.** Máximo local ≈ 0.38 cuando $x \approx -0.58$; mínimo local ≈ -0.38 cuando $x \approx 0.58$
53. Máximo local ≈ 0 cuando $x = 0$;
mínimo local ≈ -13.61 cuando $x \approx -1.71$;
mínimo local ≈ -73.32 cuando $x \approx 3.21$
55. Máximo local ≈ 5.66 cuando $x \approx 4.00$
57. Máximo local ≈ 0.38 cuando $x \approx -1.73$;
mínimo local ≈ -0.38 cuando $x \approx 1.73$ **59.** 25 pies
61. 4000 dólares, 100 unidades **63.** 30 veces
65. 50 árboles por acre **67.** 20 millas/h **69.** $r \approx 0.67$ cm

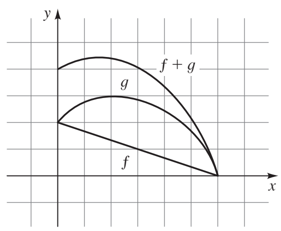
Sección 2.6 ■ página 210

1. $A(w) = 3w^2, w > 0$ **3.** $V(w) = \frac{1}{2}w^3, w > 0$
5. $A(x) = 10x - x^2, 0 < x < 10$
7. $A(x) = (\sqrt{3}/4)x^2, x > 0$ **9.** $r(A) = \sqrt{A/\pi}, A > 0$
11. $S(x) = 2x^2 + 240/x, x > 0$ **13.** $D(t) = 25t, t \geq 0$
15. $A(b) = b\sqrt{4 - b}, 0 < b < 4$
17. $A(h) = 2h\sqrt{100 - h^2}, 0 < h < 10$
19. b) $p(x) = x(19 - x)$ **c)** 9.5, 9.5 **21.** $-12, -12$
23. b) $A(x) = x(2400 - 2x)$ **c)** 600 por 1200 pies
25. a) $f(w) = 8w + 7200/w$ **b)** El ancho del camino es 30 pies, el largo es de 40 pies **c)** 15 por 60 pies
27. a) $R(p) = -3000p^2 + 57\,000p$ **b)** \$19 **c)** \$9.50
29. a) $A(x) = 15x - \left(\dfrac{\pi + 4}{8}\right)x^2$
b) Ancho ≈ 8.40 pies, altura de la parte rectangular ≈ 4.20 pies
31. a) $A(x) = x^2 + 48/x$ **b)** Altura ≈ 1.44 pies, ancho ≈ 2.88 pies
33. a) $A(x) = 2x + 200/x$ **b)** 10 por 10 m
35. a) $E(x) = 14\sqrt{25 + x^2} + 10(12 - x)$
b) Al punto C, 5.1 millas desde el punto B

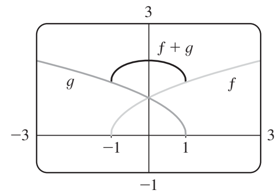
Sección 2.7 ■ página 219

1. $(f + g)(x) = x^2 + x - 3, (-\infty, \infty)$;
$(f - g)(x) = -x^2 + x - 3, (-\infty, \infty)$;
$(fg)(x) = x^3 - 3x^2, (-\infty, \infty)$;
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x - 3}{x^2}, (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
3. $(f + g)(x) = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 + x}, [-1, 2]$;
$(f - g)(x) = \sqrt{4 - x^2} - \sqrt{1 + x}, [-1, 2]$;
$(fg)(x) = \sqrt{-x^3 - x^2 + 4x + 4}, [-1, 2]$;
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\dfrac{4 - x^2}{1 + x}}, (-1, 2]$
5. $(f + g)(x) = \dfrac{6x + 8}{x^2 + 4x}, x \neq -4, x \neq 0$;
$(f - g)(x) = \dfrac{-2x + 8}{x^2 + 4x}, x \neq -4, x \neq 0$;
$(fg)(x) = \dfrac{8}{x^2 + 4x}, x \neq -4, x \neq 0$;
$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{x + 4}{2x}, x \neq -4, x \neq 0$
7. $[0, 1]$ **9.** $(3, \infty)$

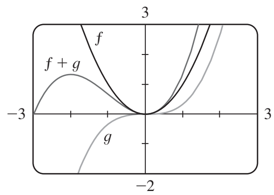
11.



13.



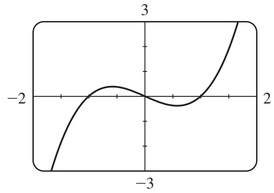
15.



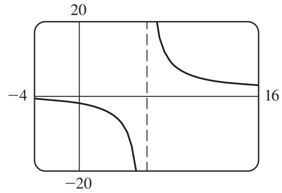
17. a) 1 **b)** -23 **19. a)** -11 **b)** -119
21. a) $-3x^2 + 1$ **b)** $-9x^2 + 30x - 23$
23. 4 **25.** 5 **27.** 4
29. $(f \circ g)(x) = 8x + 1, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = 8x + 11, (-\infty, \infty)$;
$(f \circ f)(x) = 4x + 9, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = 16x - 5, (-\infty, \infty)$
31. $(f \circ g)(x) = (x + 1)^2, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = x^2 + 1, (-\infty, \infty)$; $(f \circ f)(x) = x^4, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = x + 2, (-\infty, \infty)$
33. $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{2x + 4}, x \neq -2$; $(g \circ f)(x) = \dfrac{2}{x} + 4, x \neq 0$;
$(f \circ f)(x) = x, x \neq 0$, $(g \circ g)(x) = 4x + 12, (-\infty, \infty)$
35. $(f \circ g)(x) = |2x + 3|, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ f)(x) = 2|x| + 3, (-\infty, \infty)$; $(f \circ f)(x) = |x|, (-\infty, \infty)$;
$(g \circ g)(x) = 4x + 9, (-\infty, \infty)$
37. $(f \circ g)(x) = \dfrac{2x - 1}{2x}, x \neq 0$;
$(g \circ f)(x) = \dfrac{2x}{x + 1} - 1, x \neq -1$;

$(f \circ f)(x) = \dfrac{x}{2x+1}, x \neq -1, x \neq -\frac{1}{2};$
$(g \circ g)(x) = 4x - 3, (-\infty, \infty)$
39. $(f \circ g)(x) = \sqrt[12]{x}, [0, \infty); (g \circ f)(x) = \sqrt[12]{x}, [0, \infty);$
$(f \circ f)(x) = \sqrt[9]{x}, (-\infty, \infty); (g \circ g)(x) = \sqrt[12]{x}, [0, \infty)$
41. $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{x-1} - 1$
43. $(f \circ g \circ h)(x) = (\sqrt{x} - 5)^4 + 1$
45. $g(x) = x - 9, f(x) = x^5$
47. $g(x) = x^2, f(x) = x/(x+4)$
49. $g(x) = 1 - x^3, f(x) = |x|$
51. $h(x) = x^2, g(x) = x + 1, f(x) = 1/x$
53. $h(x) = \sqrt[3]{x}, g(x) = 4 + x, f(x) = x^9$
55. $R(x) = 0.15x - 0.000002x^2$ **57. a)** $g(t) = 60t$
b) $f(r) = \pi r^2$ **c)** $(f \circ g)(t) = 3600\pi t^2$
59. $A(t) = 16\pi t^2$ **61. a)** $f(x) = 0.9x$ **b)** $g(x) = x - 100$
c) $f \circ g(x) = 0.9x - 90,\ g \circ f(x) = 0.9x - 100, f \circ g$: primero rebaja, luego descuento, $g \circ f$: primero descuento, luego rebaja, $g \circ f$ es la mejor opción

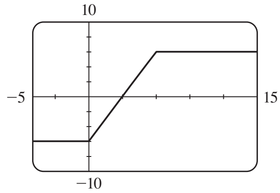
55. No es uno a uno



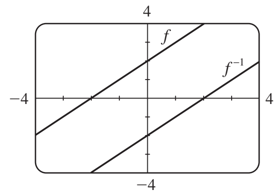
57. Uno a uno



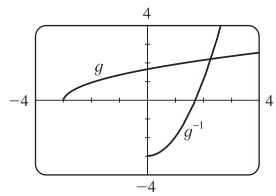
59. No es uno a uno



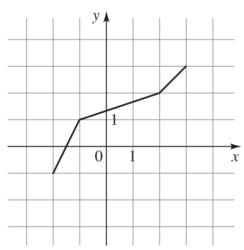
61. a) $f^{-1}(x) = x - 2$
b)



63. a) $g^{-1}(x) = x^2 - 3, x \geq 0$
b)



65. $x \geq 0, f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}$
67. $x \geq -2, h^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$
69.



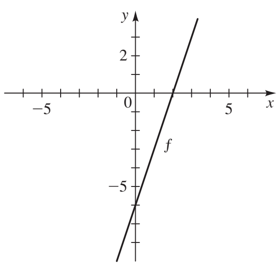
71. a) $f(x) = 500 + 80x$ **b)** $f^{-1}(x) = \frac{1}{80}(x - 500)$, la cantidad de horas laboradas en función de la tarifa
c) 9; si él carga 1220 dólares, trabaja 9 h

73. a) $v^{-1}(t) = \sqrt{0.25 - \dfrac{t}{18\,500}}$ **b)** 0.498; a una distancia de 0.498 desde el eje central, la velocidad es 30

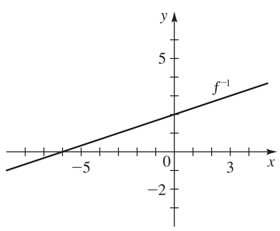
75. a) $F^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$; la temperatura Celsius cuando la temperatura Fahrenheit es x
b) $F^{-1}(86) = 30$; cuando la temperatura es 86°F, es de 30°C

Sección 2.8 ■ página 230

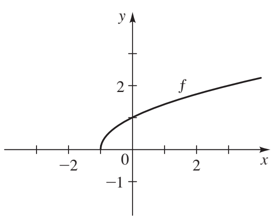
1. No **3.** Sí **5.** No **7.** Sí **9.** Sí **11.** No **13.** No
15. No **17. a)** 2 **b)** 3 **19.** 1
31. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$ **33.** $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(x - 7)$
35. $f^{-1}(x) = 2x$ **37.** $f^{-1}(x) = (1/x) - 2$
39. $f^{-1}(x) = (5x - 1)/(2x + 3)$
41. $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x^2 - 2), x \geq 0$
43. $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x}, x \leq 4$ **45.** $f^{-1}(x) = (x - 4)^3$
47. $f^{-1}(x) = x^2 - 2x, x \geq 1$ **49.** $f^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$
51. a)



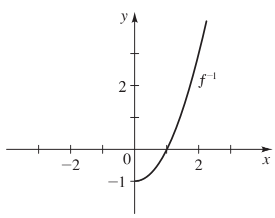
b)



c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x + 6)$
53. a)



b)



c) $f^{-1}(x) = x^2 - 1, x \geq 0$

77. a) $f(x) = \begin{cases} 0.1x & \text{si } 0 \le x \le 20\,000 \\ 2000 + 0.2(x - 20\,000) & \text{si } x > 20\,000 \end{cases}$

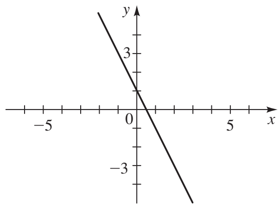
b) $f^{-1}(x) = \begin{cases} 10x & \text{si } 0 \le x \le 2000 \\ 10\,000 + 5x & \text{si } x > 2000 \end{cases}$

Si paga x euros en impuestos, su ingreso es $f^{-1}(x)$.
c) $f^{-1}(10\,000) = 60\,000$
79. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 7)$. Una pizza que cuesta x dólares tiene $f^{-1}(x)$ ingredientes extra.

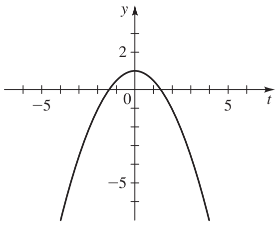
Capítulo 2 Repaso ■ página 234

1. $6, 2, 18, a^2 - 4a + 6, a^2 + 4a + 6, x^2 - 2x + 3, 4x^2 - 8x + 6, 2x^2 - 8x + 10$ **3. a)** $-1, 2$ **b)** $[-4, 5]$ **c)** $[-4, 4]$ **d)** Creciente en $[-4, -2]$ y $[-1, 4]$; decreciente en $[-2, -1]$ y $[4, 5]$ **e)** No **5.** Dominio $[-3, \infty)$, rango $[0, \infty)$ **7.** $(-\infty, \infty)$ **9.** $[-4, \infty)$ **11.** $\{x \mid x \neq -2, -1, 0\}$ **13.** $(-\infty, -1] \cup [1, 4]$

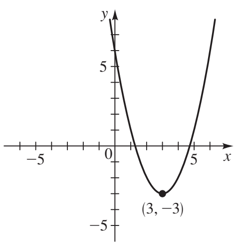
15.



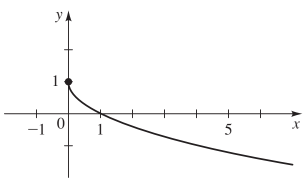
17.



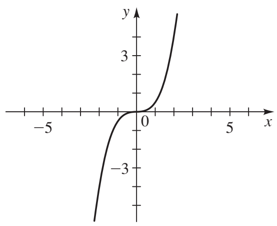
19.



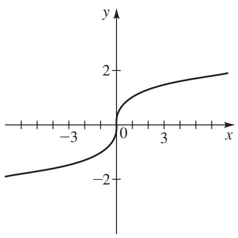
21.



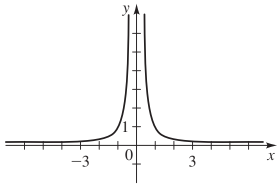
23.



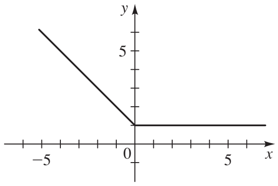
25.



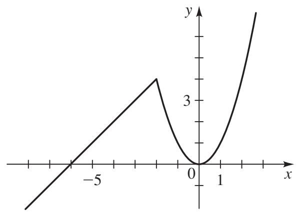
27.



29.

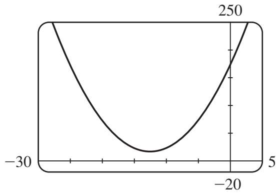


31.

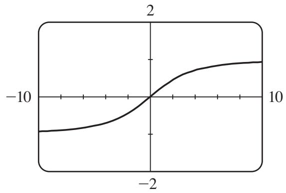


33. iii)

35.

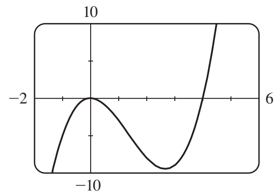


37.



39. $[-2.1, 0.2] \cup [1.9, \infty)$ **41.** 5 **43.** $\dfrac{-1}{3(3 + h)}$

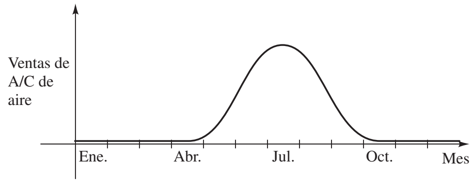
45.



Creciente en $(-\infty, 0]$, $[2.67, \infty)$; decreciente en $[0, 2.67]$

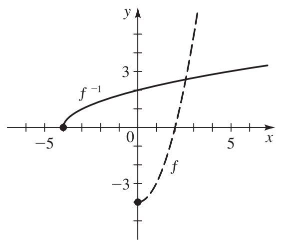
47. a) Suba 8 unidades **b)** Vaya a la izquierda 8 unidades **c)** Estire verticalmente con un factor de 2, luego desplácese hacia arriba 1 unidad **d)** Vaya a la derecha 2 unidades y hacia abajo 2 unidades **e)** Refleje en el eje y **f)** Refleje en el eje y, luego en el eje x **g)** Refleje en el eje x **h)** Refleje en la recta $y = x$
49. a) Ninguna de las dos **b)** Impar **c)** Par **d)** Ninguna de las dos
51. $f(x) = (x + 2)^2 - 3$ **53.** $g(-1) = -7$
55. 68 pies **57.** Máximo local ≈ 3.79 cuando $x \approx 0.46$; mínimo local ≈ 2.81 cuando $x \approx -0.46$

59.



61. a) $A(x) = 5\sqrt{3}x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$ **b)** 5 cm por $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
63. a) $(f + g)(x) = x^2 - 6x + 6$ **b)** $(f - g)(x) = x^2 - 2$

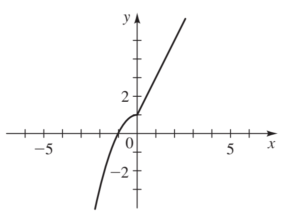
c) $(fg)(x) = -3x^3 + 13x^2 - 18x + 8$
d) $(f/g)(x) = (x^2 - 3x + 2)/(4 - 3x)$
e) $(f \circ g)(x) = 9x^2 - 15x + 6$
f) $(g \circ f)(x) = -3x^2 + 9x - 2$
65. $(f \circ g)(x) = -3x^2 + 6x - 1, (-\infty, \infty)$; $(g \circ f)(x) = -9x^2 + 12x - 3, (-\infty, \infty)$; $(f \circ f)(x) = 9x - 4, (-\infty, \infty)$; $(g \circ g)(x) = -x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 4x, (-\infty, \infty)$
67. $(f \circ g \circ h)(x) = 1 + \sqrt{x}$
69. Sí **71.** No **73.** No
75. $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$
77. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} - 1$
79. a), **b)**



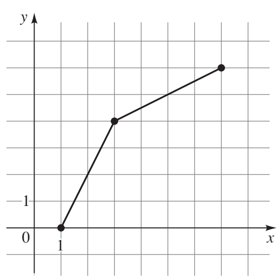
c) $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 4}$

Capítulo 2 Evaluación ■ página 237

1. a) y **b)** son gráficas de funciones, **a)** es uno a uno **3.** 5
5. a) Desplácese a la derecha 3 unidades, luego hacia arriba 2 unidades **b)** Refleje en el eje y
7. a) $-3, 3$ **b)**



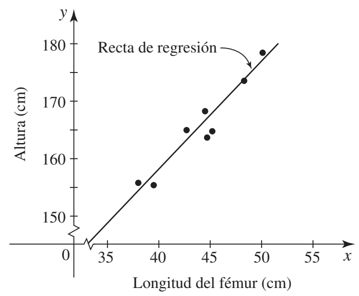
9. a) $(f \circ g)(x) = (x - 3)^2 + 1$ **b)** $(g \circ f)(x) = x^2 - 2$
c) 2 **d)** 2 **e)** $(g \circ g \circ g)(x) = x - 9$
11. a) Dominio $[0, 6]$, rango $[1, 7]$
b)



c) $\frac{5}{4}$

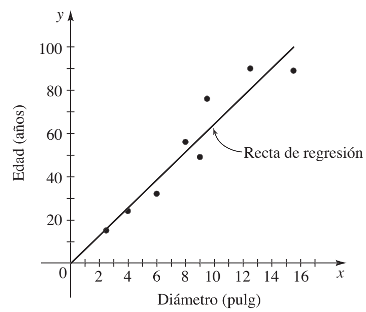
Enfoque en el modelado ■ página 243

1. a)



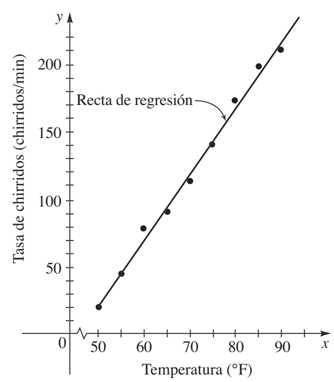
b) $y = 1.8807x + 82.65$ **c)** 191.7 cm

3. a)



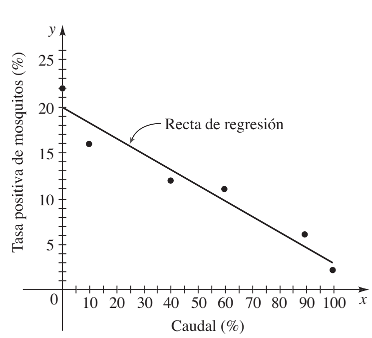
b) $y = 6.451x - 0.1523$ **c)** 116 años

5. a)



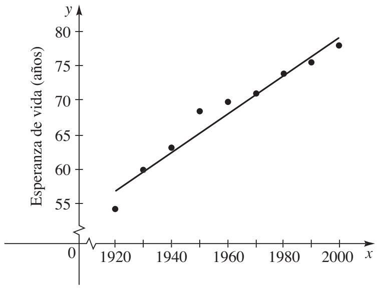
b) $y = 4.857x - 220.97$ **c)** 265 chirridos/min

7. a)



b) $y = -0.168x + 19.89$ **c)** 8.13%

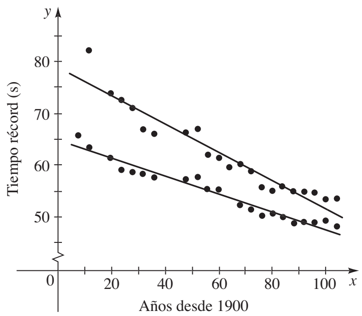
9. a)



b) $y = 0.2708x - 462.9$ **c)** 78.2 años

11. a) $y = -0.1729x + 64.717$, $y = -0.269x + 78.667$

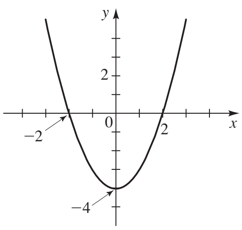
b) 2039



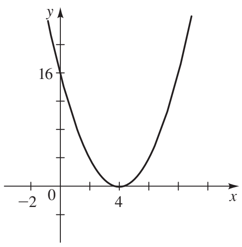
Capítulo 3

Sección 3.1 ■ página 262

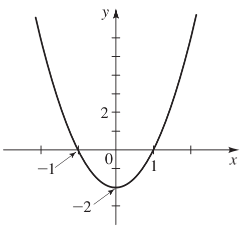
1. a)



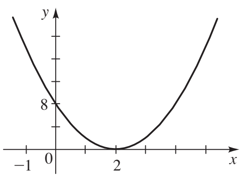
b)



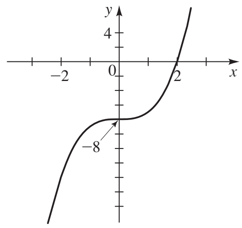
c)



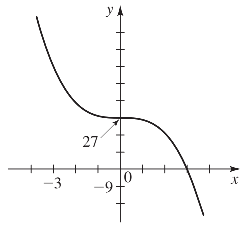
d)



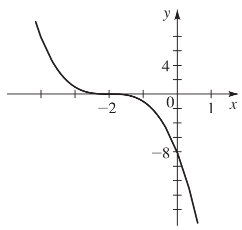
3. a)



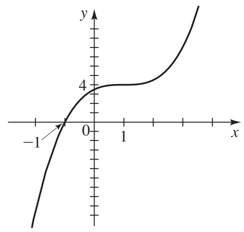
b)



c)

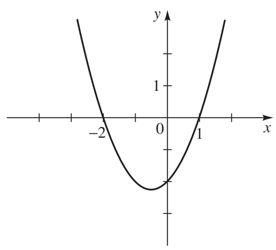


d)

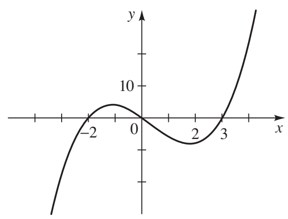


5. III **7.** V **9.** VI

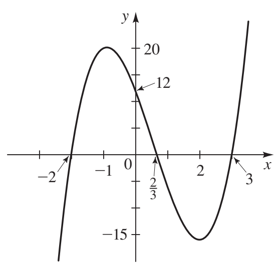
11.



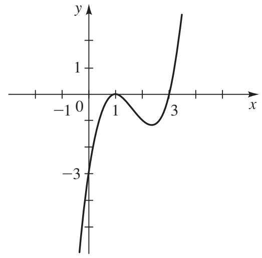
13.



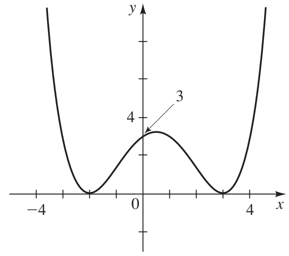
15.



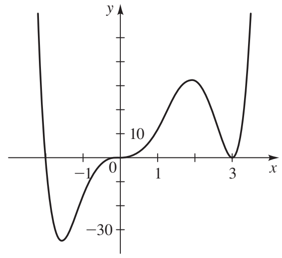
17.



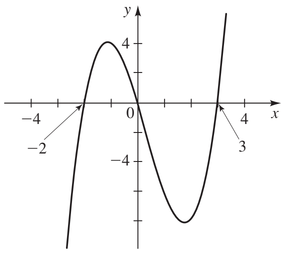
19.



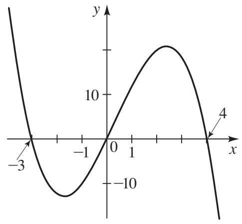
21.



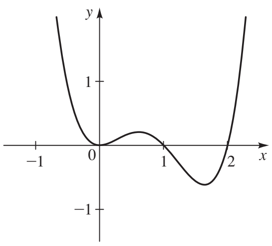
23. $P(x) = x(x + 2)(x - 3)$



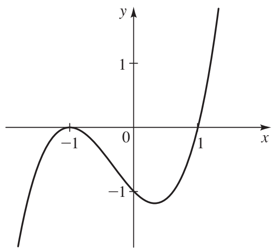
25. $P(x) = -x(x + 3)(x - 4)$



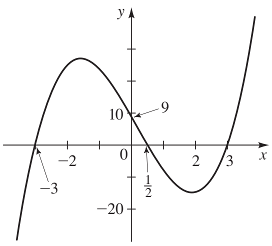
27. $P(x) = x^2(x - 1)(x - 2)$



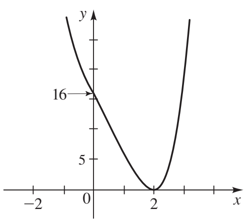
29. $P(x) = (x + 1)^2(x - 1)$



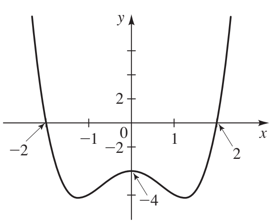
31. $P(x) = (2x - 1)(x + 3)(x - 3)$



33. $P(x) = (x - 2)^2(x^2 + 2x + 4)$



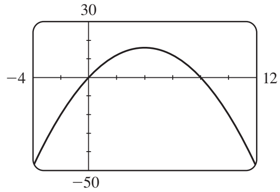
35. $P(x) = (x^2 + 1)(x + 2)(x - 2)$



37. $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$, $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$
39. $y \to \infty$ cuando $x \to \pm\infty$
41. $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$, $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

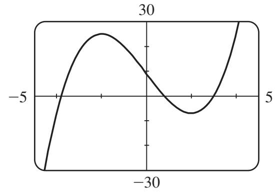
43. a) corta al eje x en 0, 4; corta a y en 0 **b)** (2, 4)
45. a) intersección con x en -2, 1; intersección con y en -1 **b)** $(-1, -2)$, (1, 0)

47.



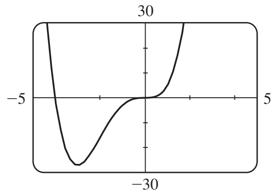
máximo local (4, 16)

49.



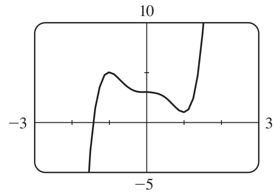
máximo local $(-2, 25)$, mínimo local $(2, -7)$

51.



mínimo local $(-3, -27)$

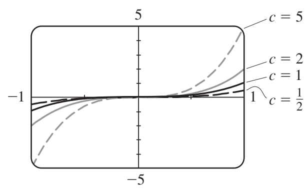
53.



máximo local $(-1, 5)$, mínimo local (1, 1)

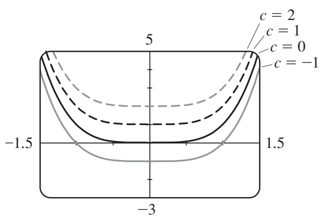
55. Un máximo local, ningún mínimo local
57. Un máximo local, un mínimo local
59. Un máximo local, dos mínimos locales
61. No hay puntos extremos locales
63. Un máximo local, dos mínimos locales

65.



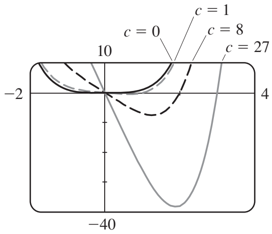
Al incrementar el valor de c se estira la gráfica en el sentido vertical

67.



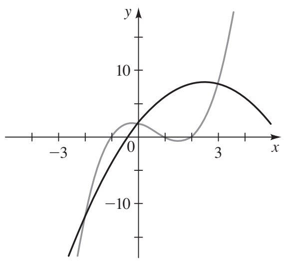
Al incrementar el valor de c la gráfica se sube

69.



Cuando aumenta el valor de c hay un hundimiento en la gráfica en el cuarto cuadrante y la intersección con la x positiva se mueve a la derecha.

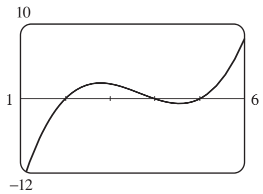
71. a)



b) Tres **c)** $(0, 2), (3, 8), (-2, -12)$

73. d) $P(x) = P_O(x) + P_E(x)$, donde $P_O(x) = x^5 + 6x^3 - 2x$ y $P_E(x) = -x^2 + 5$

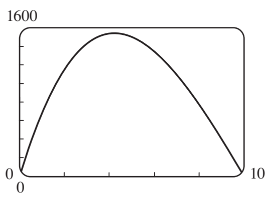
75. a) Dos puntos extremos locales



77. a) 26 licuadoras **b)** No; 3 276.22 dólares

79. a) $V(x) = 4x^3 - 120x^2 + 800x$ **b)** $0 < x < 10$

c) Volumen máximo ≈ 1539.6 cm^3



Sección 3.2 ■ página 270

1. $(x + 3)(3x - 4) + 8$ **3.** $(2x - 3)(x^2 - 1) - 3$

5. $(x^2 + 3)(x^2 - x - 3) + (7x + 11)$ **7.** $x + 1 + \dfrac{-11}{x + 3}$

9. $2x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{-\frac{15}{2}}{2x - 1}$ **11.** $2x^2 - x + 1 + \dfrac{4x - 4}{x^2 + 4}$

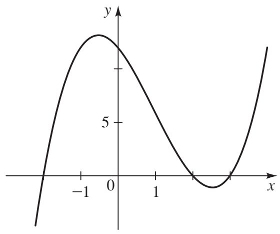
En las respuestas 13 a 36, el primer polinomio que se da es el cociente y el segundo es el residuo.

13. $x - 2, -16$ **15.** $2x^2 - 1, -2$ **17.** $x + 2, 8x - 1$
19. $3x + 1, 7x - 5$ **21.** $x^4 + 1, 0$ **23.** $x - 2, -2$
25. $3x + 23, 138$ **27.** $x^2 + 2, -3$ **29.** $x^2 - 3x + 1, -1$
31. $x^4 + x^3 + 4x^2 + 4x + 4, -2$ **33.** $2x^2 + 4x, 1$
35. $x^2 + 3x + 9, 0$ **37.** -3 **39.** 12 **41.** -7 **43.** -483
45. 2159 **47.** $\frac{7}{3}$ **49.** -8.279 **55.** $-1 \pm \sqrt{6}$
57. $x^3 - 3x^2 - x + 3$ **59.** $x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15$
61. $-\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{15}{2}x - 9$ **63.** $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$
65. $(x + 2)^2(x - 1)^2$

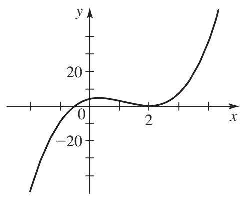
Sección 3.3 ■ página 279

1. $\pm 1, \pm 3$ **3.** $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2}$
5. $\pm 1, \pm 7, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{7}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{7}{4}$
7. a) $\pm 1, \pm \frac{1}{5}$ **b)** $-1, 1, \frac{1}{5}$
9. a) $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ **b)** $-\frac{1}{2}, 1, 3$
11. $-2, 1$ **13.** $-1, 2$ **15.** 2 **17.** $-1, 2, 3$
19. -1 **21.** $\pm 1, \pm 2$ **23.** $1, -1, -2, -4$
25. $\pm 2, \pm \frac{3}{2}$ **27.** -2 **29.** $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ **31.** $-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1$
33. $-\frac{5}{2}, -1, \frac{3}{2}$ **35.** $-1, \frac{1}{2}, 2$ **37.** $-3, -2, 1, 3$
39. $-1, -\frac{1}{3}, 2, 5$ **41.** $-2, -1 \pm \sqrt{2}$
43. $-1, 4, \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ **45.** $3, \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
47. $\frac{1}{2}, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ **49.** $-1, -\frac{1}{2}, -3 \pm \sqrt{10}$

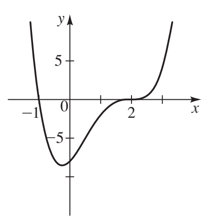
51. a) $-2, 2, 3$ **b)**



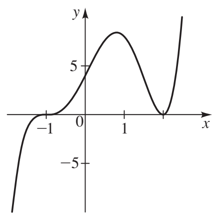
53. a) $-\frac{1}{2}, 2$ **b)**



55. a) $-1, 2$ **b)**



57. a) $-1, 2$ **b)**



59. 1 positivo, 2 o 0 negativos; 3 o 1 reales
61. 1 positivo, 1 negativo; 2 reales
63. 2 o 0 positivos, 0 negativo; 3 o 1 real (puesto que 0 es un cero, pero ni es positivo ni negativo) **69.** $3, -2$
71. $3, -1$ **73.** $-2, \frac{1}{2}, \pm 1$ **75.** $\pm\frac{1}{2}, \pm\sqrt{5}$
77. $-2, 1, 3, 4$ **83.** $-2, 2, 3$ **85.** $-\frac{3}{2}, -1, 1, 4$
87. $-1.28, 1.53$ **89.** -1.50 **93.** 11.3 pies
95. a) Empieza a nevar otra vez. **b)** No **c)** Justo antes de medianoche del sábado **97.** 2.76 m **99.** 88 pulg (o 3.21 pulg).

Sección 3.4 ■ página 289

1. Parte real 5, parte imaginaria -7 **3.** Parte real $-\frac{2}{3}$, parte imaginaria $-\frac{5}{3}$ **5.** Parte real 3, parte imaginaria 0
7. Parte real 0, parte imaginaria $-\frac{2}{3}$ **9.** Parte real $\sqrt{3}$, parte imaginaria 2 **11.** $5 - i$ **13.** $3 + 5i$ **15.** $6 - i$
17. $2 - 2i$ **19.** $-19 + 4i$ **21.** $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$
23. $-4 + 8i$ **25.** $30 + 10i$ **27.** $-33 - 56i$ **29.** $27 - 8i$
31. $-i$ **33.** $\frac{8}{5} + \frac{1}{5}i$ **35.** $-5 + 12i$ **37.** $-4 + 2i$
39. $2 - \frac{4}{3}i$ **41.** $-i$ **43.** $-i$ **45.** 1 **47.** $5i$ **49.** -6
51. $(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5})i$ **53.** 2 **55.** $-i\sqrt{2}$ **57.** $\pm 3i$
59. $2 \pm i$ **61.** $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **63.** $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ **65.** $-\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$
67. $\dfrac{-6 \pm \sqrt{6}i}{6}$ **69.** $1 \pm 3i$

Sección 3.5 ■ página 298

1. a) $0, \pm 2i$ **b)** $x^2(x - 2i)(x + 2i)$
3. a) $0, 1 \pm i$ **b)** $x(x - 1 - i)(x - 1 + i)$
5. a) $\pm i$ **b)** $(x - i)^2(x + i)^2$
7. a) $\pm 2, \pm 2i$ **b)** $(x - 2)(x + 2)(x - 2i)(x + 2i)$
9. a) $-2, 1 \pm i\sqrt{3}$
b) $(x + 2)(x - 1 - i\sqrt{3})(x - 1 + i\sqrt{3})$
11. a) $\pm 1, \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i\sqrt{3}$
b) $(x - 1)(x + 1)(x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) \times (x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\sqrt{3})(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})$

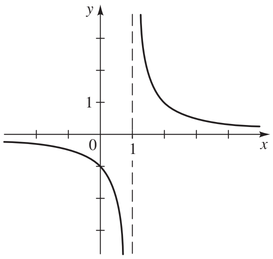
En las respuestas 13 a 30, la forma factorizada se anota primero, luego se proporciona un listado de los ceros y la multiplicidad de cada uno entre paréntesis

13. $(x - 5i)(x + 5i); \pm 5i\ (1)$
15. $[x - (-1 + i)][x - (-1 - i)]; -1 + i\ (1), -1 - i\ (1)$
17. $x(x - 2i)(x + 2i); 0\ (1), 2i\ (1), -2i\ (1)$
19. $(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i); 1\ (1), -1\ (1), i\ (1), -i\ (1)$
21. $16(x - \frac{3}{2})(x + \frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}i)(x + \frac{3}{2}i)$; $\frac{3}{2}\ (1), -\frac{3}{2}\ (1), \frac{3}{2}i\ (1), -\frac{3}{2}i\ (1)$
23. $(x + 1)(x - 3i)(x + 3i); -1\ (1), 3i\ (1), -3i\ (1)$
25. $(x - i)^2(x + i)^2; i\ (2), -i\ (2)$
27. $(x - 1)(x + 1)(x - 2i)(x + 2i); 1\ (1), -1\ (1), 2i\ (1), -2i\ (1)$
29. $x(x - i\sqrt{3})^2(x + i\sqrt{3})^2; 0\ (1), i\sqrt{3}\ (2), -i\sqrt{3}\ (2)$
31. $P(x) = x^2 - 2x + 2$ **33.** $Q(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$
35. $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$
37. $R(x) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 5$
39. $T(x) = 6x^4 - 12x^3 + 18x^2 - 12x + 12$
41. $-2, \pm 2i$ **43.** $1, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ **45.** $2, \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$
47. $-\frac{3}{2}, -1 \pm i\sqrt{2}$ **49.** $-2, 1, \pm 3i$
51. $1, \pm 2i, \pm i\sqrt{3}$ **53.** 3 (multiplicidad 2), $\pm 2i$
55. $-\frac{1}{2}$ (multiplicidad 2), $\pm i$ **57.** 1 (multiplicidad 3), $\pm 3i$
59. a) $(x - 5)(x^2 + 4)$ **b)** $(x - 5)(x - 2i)(x + 2i)$
61. a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 9)$
b) $(x - 1)(x + 1)(x - 3i)(x + 3i)$
63. a) $(x - 2)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4)$
b) $(x - 2)(x + 2)[x - (1 + i\sqrt{3})][x - (1 - i\sqrt{3})] \times [x + (1 + i\sqrt{3})][x + (1 - i\sqrt{3})]$
65. a) 4 real **b)** 2 real, 2 imaginario **c)** 4 imaginario

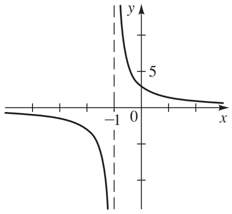
Sección 3.6 ■ página 312

1. a) $-3, -19, -199, -1999; 5, 21, 201, 2001$;
1.2500, 1.0417, 1.0204, 1.0020; 0.8333, 0.9615, 0.9804, 0.9980
b) $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$; $r(x) \to \infty$ cuando $x \to 2^+$
c) Asíntota horizontal $y = 1$
3. a) $-22, -430, -40\,300, -4\,003\,000$;
$-10, -370, -39\,700, -3\,997\,000$;
0.3125, 0.0608, 0.0302, 0.0030;
$-0.2778, -0.0592, -0.0298, -0.0030$
b) $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$; $r(x) \to -\infty$ cuando $x \to 2^+$
c) Asíntota horizontal $y = 0$
5. Corta a x en 1, corta a y en $-\frac{1}{4}$
7. intersección con x en $-1, 2$; intersección con y en $\frac{1}{3}$
9. intersección con x en $-3, 3$; no hay corte en y
11. intersección con x en 3, intersección con y en 3, vertical $x = 2$; horizontal $y = 2$
13. corta a x en $-1, 1$; intersección con y en $\frac{1}{4}$; vertical $x = -2$, $x = 2$; horizontal $y = 1$
15. Vertical $x = -2$; horizontal $y = 0$
17. Vertical $x = 3, x = -2$; horizontal $y = 1$
19. Horizontal $y = 0$
21. Vertical $x = -6, x = 1$; horizontal $y = 0$
23. Vertical $x = 1$

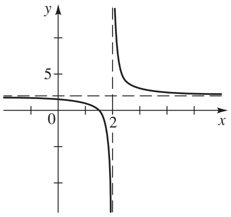
25.



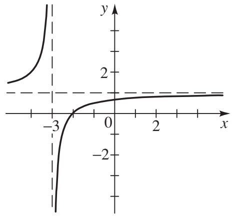
27.



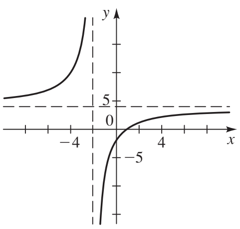
29.



31.

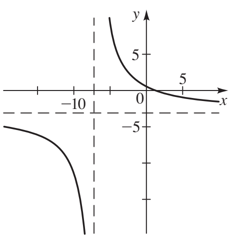


33.



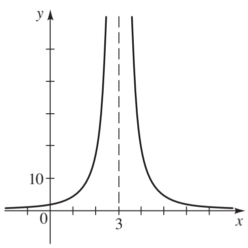
intersección con x en 1
intersección con y en -2
vertical $x = -2$
horizontal $y = 4$

35.



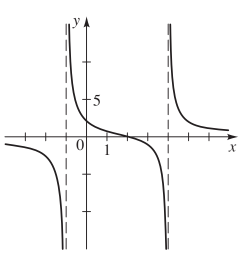
intersección con x en $\frac{4}{3}$
intersección con y en $\frac{4}{7}$
vertical $x = -7$
horizontal $y = -3$

37.



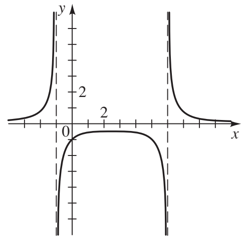
intersección con y en 2
vertical $x = 3$
horizontal $y = 0$

39.



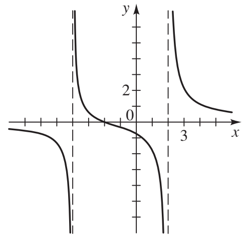
intersección con x en 2
intersección con y en 2
vertical $x = -1, x = 4$
horizontal $y = 0$

41.



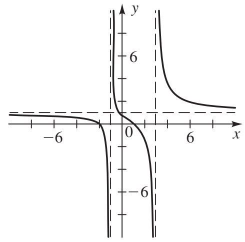
intersección con y en -1
vertical $x = -1, x = 6$
horizontal $y = 0$

43.



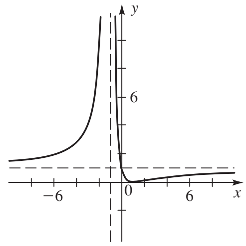
intersección con x en -2
intersección con y en $-\frac{3}{4}$
vertical $x = -4, x = 2$
horizontal $y = 0$

45.



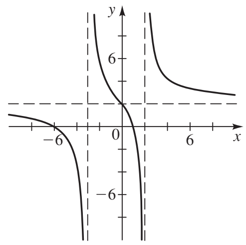
intersección con x en -2, 1
intersección con y en $\frac{2}{3}$
vertical $x = -1, x = 3$
horizontal $y = 1$

47.



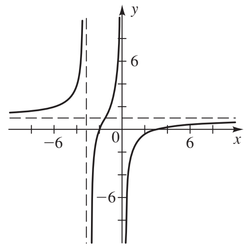
intersección con x en 1
intersección con y en 1
vertical $x = -1$
horizontal $y = 1$

49.



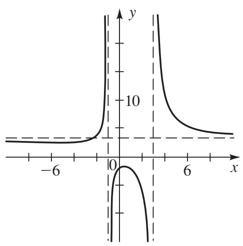
intersección con x en -6, 1
intersección con y en 2
vertical $x = -3, x = 2$
horizontal $y = 2$

51.



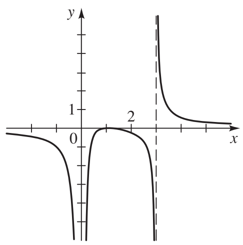
intersección con x en -2, 3
vertical $x = -3, x = 0$
horizontal $y = 1$

53.



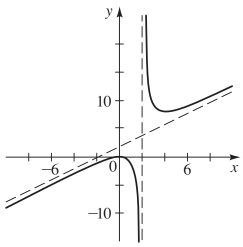
intersección con y en -2
vertical $x = -1$, $x = 3$
horizontal $y = 3$

55.



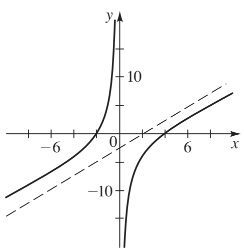
intersección con x en 1
vertical $x = 0$, $x = 3$
horizontal $y = 0$

57.



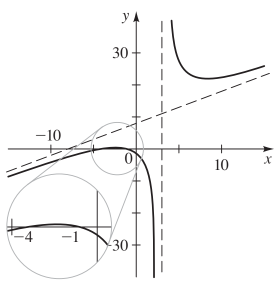
asíntota inclinada $y = x + 2$
vertical $x = 2$

59.



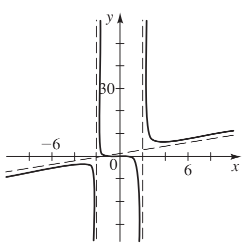
asíntota inclinada $y = x - 2$
vertical $x = 0$

61.



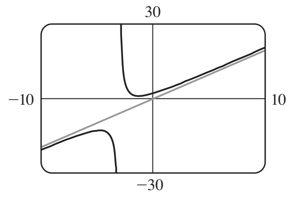
asíntota inclinada $y = x + 8$
vertical $x = 3$

63.



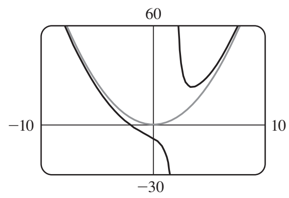
asíntota inclinada $y = x + 1$
vertical $x = 2$, $x = -2$

65.



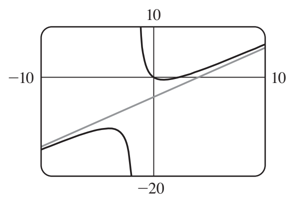
vertical $x = -3$

67.



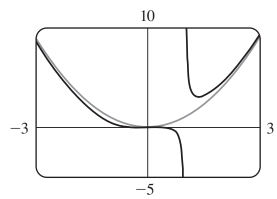
vertical $x = 2$

69.



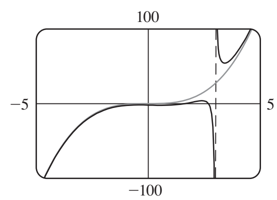
vertical $x = -1.5$
en x en 0, 2.5
intersección con y en 0,
máximo local
$(-3.9, -10.4)$
mínimo local $(0.9, -0.6)$
comportamiento extremo:
$y = x - 4$

71.



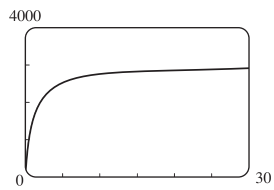
vertical $x = 1$
corte en x en 0,
intersección con y en 0,
mínimo local $(1.4, 3.1)$
comportamiento extremo:
$y = x^2$

73.



vertical $x = 3$
corte en x en 1.6, 2.7
intersección con y en -2
máximo local $(-0.4, -1.8)$,
$(2.4, 3.8)$,
mínimo local $(0.6, -2.3)$,
$(3.4, 54.3)$
comportamiento extremo
$y = x^3$

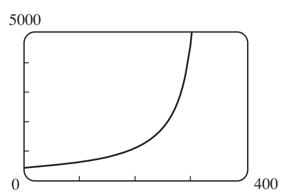
75. **a)**



b) Se nivela a 3000.

77. **a)** 2.50 mg/L **b)** Decrece a 0. **c)** 16.61 h

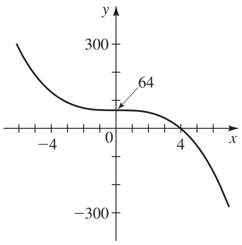
79.



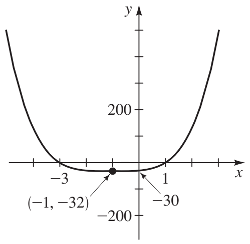
Si la velocidad del tren se aproxima a la velocidad del sonido, entonces el tono se incrementa indefinidamente (explosión sónica).

Capítulo 3 Repaso ■ página 316

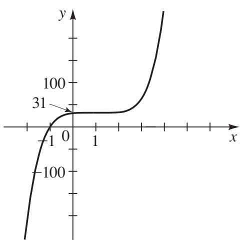
1.



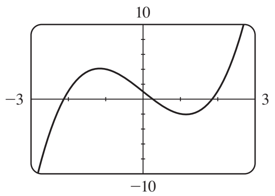
3.



5.

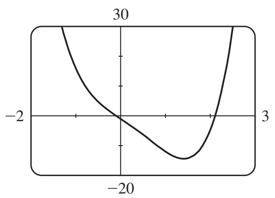


7.



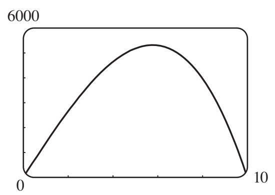
intersección con x en -2.1, 0.3, 1.9
corta a y en 1
máximo local $(-1.2, 4.1)$
mínimo local $(1.2, -2.1)$
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

9.



intersección con x en -0.1, 2.1
intersección con y en -1
mínimo local $(1.4, -14.5)$
$y \to \infty$ cuando $x \to \infty$
$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$

11. a) $S = 13.8x(100 - x^2)$ **b)** $0 \le x \le 10$
c)

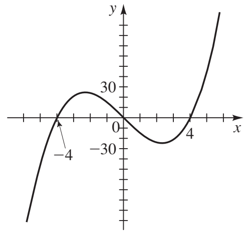


d) 5.8 pulg.

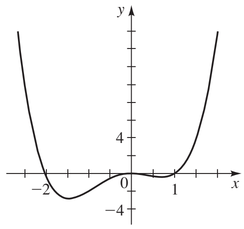
En las respuestas 13 a 20, el primer polinomio que se ofrece es el cociente y el segundo es el residuo.

13. $x - 1$, 3 **15.** $x^2 + 3x + 23$, 94
17. $x^3 - 5x^2 + 17x - 83$, 422 **19.** $2x - 3$, 12

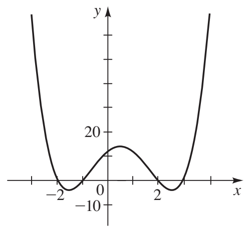
21. 3 **25.** 8 **27. a)** $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18$
b) 2 o 0 positivos, 3 o 1 negativos
29. a) $-4, 0, 4$ **b)**



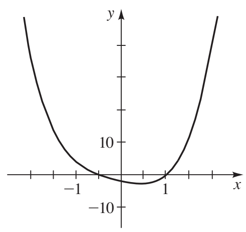
31. a) -2, 0 (multiplicidad 2), 1 **b)**



33. a) $-2, -1, 2, 3$ **b)**

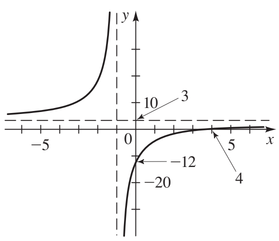


35. a) $-\frac{1}{2}$, 1 **b)**

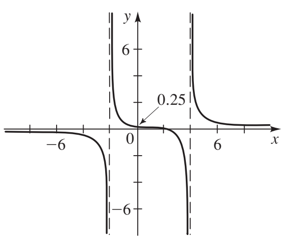


37. $3 + i$ **39.** $8 - i$ **41.** $\frac{6}{5} + \frac{8}{5}i$ **43.** i **45.** 2
47. $4x^3 - 18x^2 + 14x + 12$
49. No; puesto que los conjugados complejos de ceros imaginarios también serán ceros, el polinomio tendría 8 ceros, lo que contradice la condición de que sería de grado 4. **51.** $-3, 1, 5$
53. $-1 \pm 2i$, -2 (multiplicidad 2) **55.** ±2, 1 (multiplicidad 3)
57. $\pm2, \pm1 \pm i\sqrt{3}$ **59.** $1, 3, \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$
61. $x = -0.5, 3$ **63.** $x \approx -0.24, 4.24$

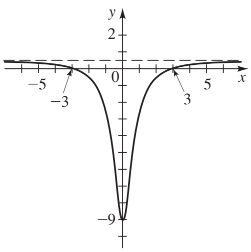
65.



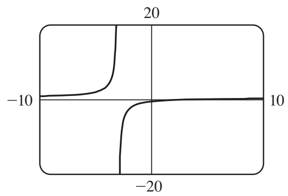
67.



69.

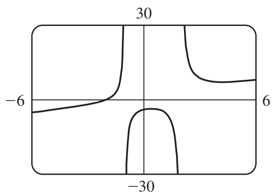


71.



intersección con x en 3
corta a y en -0.5
vertical $x = -3$
horizontal $y = 0.5$
no hay puntos extremos locales

73.

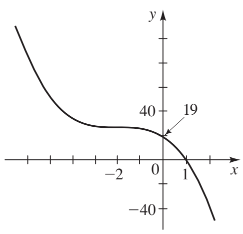


intersección con x en -2
corta a y en -4
vertical $x = -1$, $x = 2$
asíntota inclinada $y = x + 1$
máximo local
$(0.425, -3.599)$
mínimo local
$(4.216, 7.175)$

75. $(-2, -28), (1, 26), (2, 68), (5, 770)$

Capítulo 3 Evaluación ■ página 319

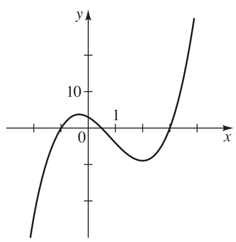
1.



3. a) $\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$ **b)** $2(x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$

c) $-1, \frac{1}{2}, 3$

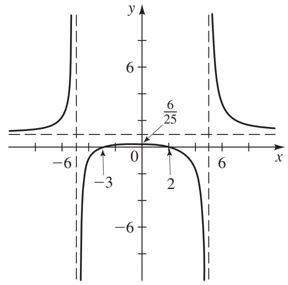
d)



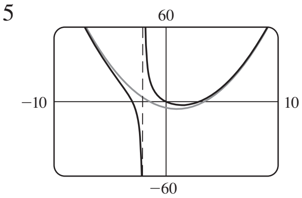
5. $3, -1 \pm i$

7. $x^4 + 2x^3 + 10x^2 + 18x + 9$

9. a) r, u **b)** s **c)** s **d)**



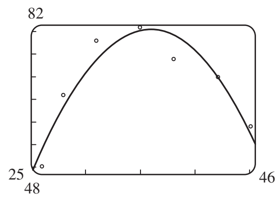
e) $x^2 - 2x - 5$



Enfoque en el modelado ■ página 323

1. a) $y = -0.275428x^2 + 19.7485x - 273.5523$

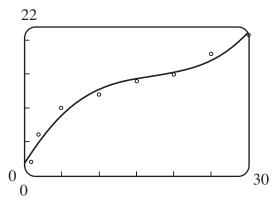
b)



c) 35.85 lb/pulg^2

3. a) $y = 0.00203708x^3 - 0.104521x^2 + 1.966206x + 1.45576$

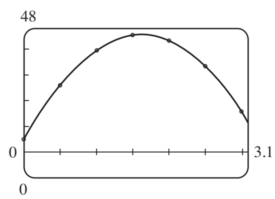
b)



c) 43 verduras **d)** 2.0 s

5. a) Grado 2

b) $y = -16.0x^2 + 51.8429x + 4.20714$



c) 0.3 s y 2.9 s **d)** 46.2 pies

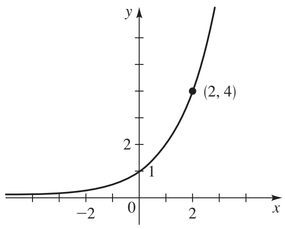
Capítulo 4

Sección 4.1 ■ página 336

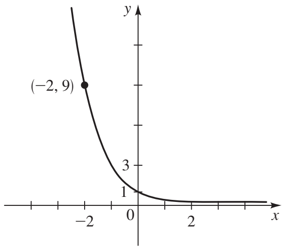
1. 2.000, 7.103, 77.880, 1.587

3. 0.885, 0.606, 0.117, 1.837

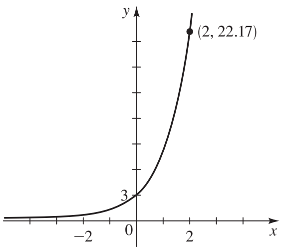
5.



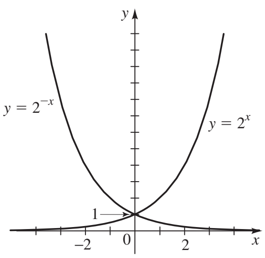
7.



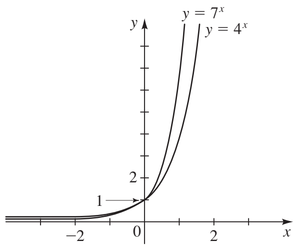
9.



11.

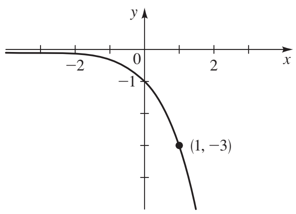


13.

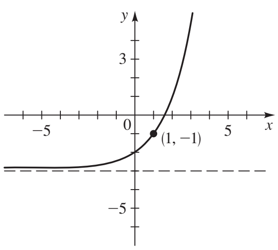


15. $f(x) = 3^x$ **17.** $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **19.** III **21.** I **23.** II

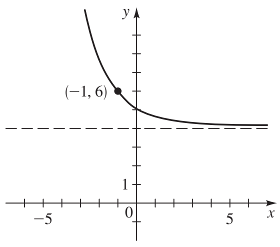
25. $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



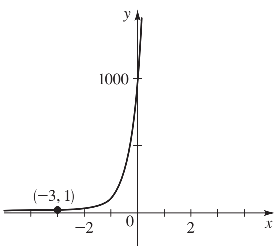
27. $\mathbb{R}, (-3, \infty), y = -3$



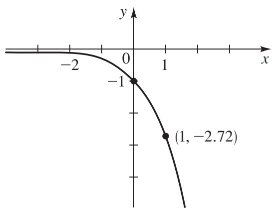
29. $\mathbb{R}, (4, \infty), y = 4$



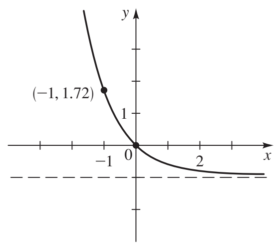
31. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



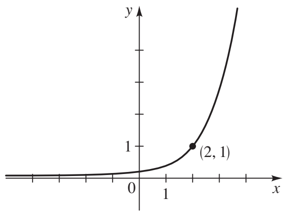
33. $\mathbb{R}, (-\infty, 0), y = 0$



35. $\mathbb{R}, (-1, \infty), y = -1$

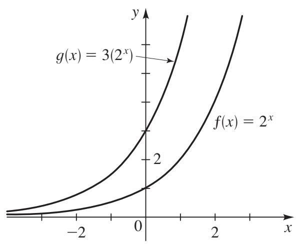


37. $\mathbb{R}, (0, \infty), y = 0$



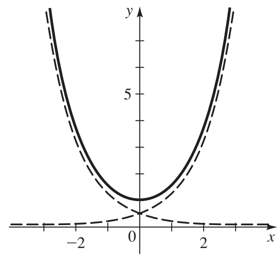
39. $y = 3(2^x)$

41. a)



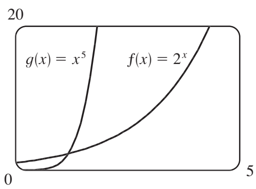
b) La gráfica de g tiene mayor pendiente que la de f.

45.

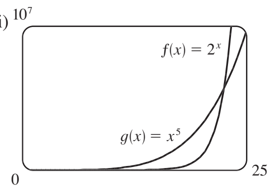


51. a)

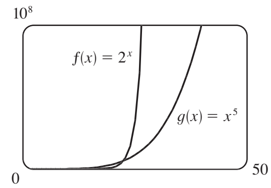
i)



ii)



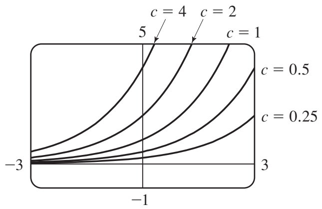
iii)



La gráfica de f se incrementa en última instancia mucho más rápido que g.

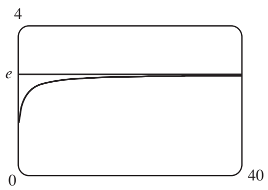
b) 1.2, 22.4

53.

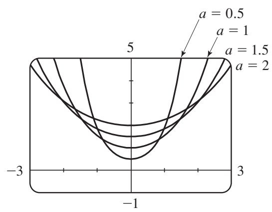


A medida que el valor de c es mayor, con mayor rapidez se incrementa la gráfica.

55.

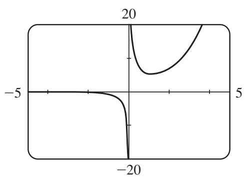


57. a)



b) Entre más grande es el valor de a, más ancha es la gráfica.

59.



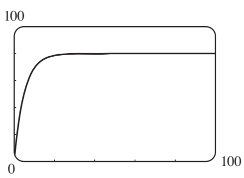
asíntota vertical $x = 0$
asíntota horizontal $y = 0$, sólo lado izquierdo

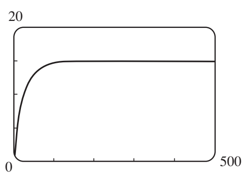
61. Mínimo local $\approx (0.27, 1.75)$

63. a) Creciente en $(-\infty, 1.00]$, decreciente en $[1.00, \infty)$ **b)** $(-\infty, 0.37]$ **65. a)** 13 kg **b)** 6.6 kg

67. a) 0 **b)** 50.6 pies/s, 69.2 pies/s

c)





d) 80 pies/s **d)** 15 lb; sí

69. a) 100 **b)** 482, 999, 1168 **c)** 1200

71. 1.6 pies

73. \$5203.71, \$5415.71, \$5636.36, \$5865.99, \$6104.98, \$6353.71

75. a) \$16 288.95 **b)** \$26 532.98 **c)** \$43 219.42

77. a) \$4615.87 **b)** \$4658.91 **c)** \$4697.04 **d)** \$4703.11 **e)** \$4704.68 **f)** \$4704.93 **g)** \$4704.94 **79.** i) **81. a)** \$7678.96 **b)** \$67 121.04

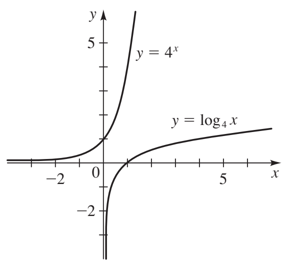
Sección 4.2 ■ página 349

1.

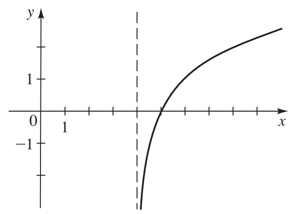
Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	$8^1 = 8$
$\log_8 64 = 2$	$8^2 = 64$
$\log_8 4 = \frac{2}{3}$	$8^{2/3} = 4$
$\log_8 512 = 3$	$8^3 = 512$
$\log_8 \frac{1}{8} = -1$	$8^{-1} = \frac{1}{8}$
$\log_8 \frac{1}{64} = -2$	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

3. a) $5^2 = 25$ **b)** $5^0 = 1$ **5. a)** $8^{1/3} = 2$ **b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$
7. a) $e^x = 5$ **b)** $e^5 = y$ **9. a)** $\log_5 125 = 3$
b) $\log_{10} 0.0001 = -4$ **11. a)** $\log_8 \frac{1}{8} = -1$ **b)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$
13. a) $\ln 2 = x$ **b)** $\ln y = 3$ **15. a)** 1 **b)** 0 **c)** 2
17. a) 2 **b)** 2 **c)** 10 **19. a)** -3 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** -1
21. a) 37 **b)** 8 **c)** $\sqrt{5}$ **23. a)** $-\frac{2}{3}$ **b)** 4 **c)** -1
25. a) 32 **b)** 4 **27. a)** 5 **b)** 27 **29. a)** 100 **b)** 25
31. a) 2 **b)** 4 **33. a)** 0.3010 **b)** 1.5465 **c)** -0.1761
35. a) 1.6094 **b)** 3.2308 **c)** 1.0051 **37.** $y = \log_5 x$
39. $y = \log_9 x$ **41.** II **43.** III **45.** VI

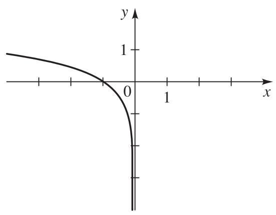
47.



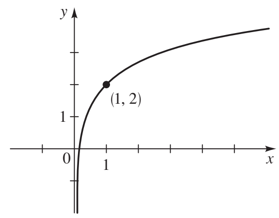
49. $(4, \infty), \mathbb{R}, x = 4$



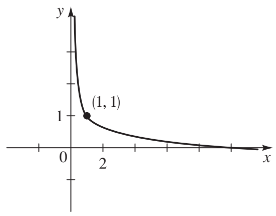
51. $(-\infty, 0), \mathbb{R}, x = 0$



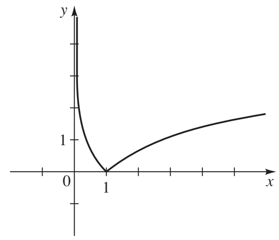
53. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$



55. $(0, \infty), \mathbb{R}, x = 0$

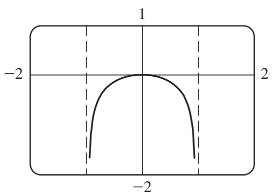


57. $(0, \infty), [0, \infty), x = 0$



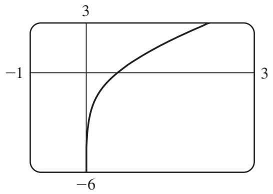
59. $(-3, \infty)$ **61.** $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ **63.** $(0, 2)$

65.



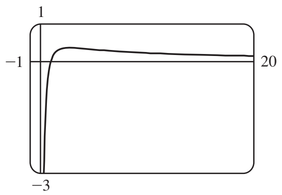
dominio $(-1, 1)$
asíntotas verticales $x = 1$, $x = -1$
máximo local $(0, 0)$

67.



dominio $(0, \infty)$
asíntota vertical $x = 0$
no hay ni máximos ni mínimos

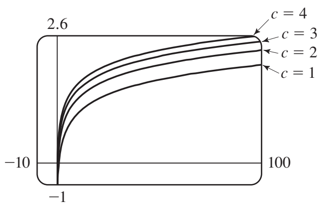
69.



dominio $(0, \infty)$
asíntota vertical $x = 0$
asíntota horizontal $y = 0$
máximo local $\approx (2.72, 0.37)$

71. La gráfica de f crece más lentamente que g

73. **a)**



b) La gráfica de $f(x) = \log(cx)$ es la gráfica de $f(x) = \log(x)$ desplazada hacia arriba $\log c$ unidades.

75. **a)** $(1, \infty)$ **b)** $f^{-1}(x) = 10^{2^x}$

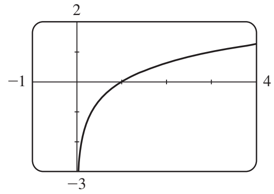
77. **a)** $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ **b)** $(0, 1)$ **79.** 2602 años

81. 11.5 años, 9.9 años, 8.7 años **83.** 5.32, 4.32

Sección 4.3 ■ página 356

1. $\frac{3}{2}$ **3.** 2 **5.** 3 **7.** 3 **9.** 200 **11.** 4
13. $1 + \log_2 x$ **15.** $\log_2 x + \log_2(x-1)$
17. $10 \log 6$ **19.** $\log_2 A + 2\log_2 B$
21. $\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 y$ **23.** $\frac{1}{3}\log_5(x^2+1)$
25. $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$ **27.** $3\log x + 4\log y - 6\log z$
29. $\log_2 x + \log_2(x^2+1) - \frac{1}{2}\log_2(x^2-1)$
31. $\ln x + \frac{1}{2}(\ln y - \ln z)$ **33.** $\frac{1}{4}\log(x^2+y^2)$
35. $\frac{1}{2}[\log(x^2+4) - \log(x^2+1) - 2\log(x^3-7)]$
37. $3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \ln(3x+4)$ **39.** $\log_3 160$
41. $\log_2(AB/C^2)$ **43.** $\log\left(\dfrac{x^4(x-1)^2}{\sqrt[3]{x^2+1}}\right)$ **45.** $\ln(5x^2(x^2+5)^3)$
47. $\log\left(\sqrt[3]{2x+1}\sqrt{(x-4)/(x^4-x^2-1)}\right)$ **49.** 2.321928

51. 2.523719 **53.** 0.493008 **55.** 3.482892
57.



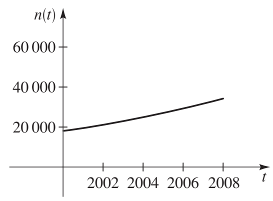
63. **a)** $P = c/W^k$ **b)** 1866, 64
65. **a)** $M = -2.5\log B + 2.5\log B_0$

Sección 4.4 ■ página 366

1. 1.3979 **3.** −0.9730 **5.** −0.5850 **7.** 1.2040
9. 0.0767 **11.** 0.2524 **13.** 1.9349 **15.** −43.0677
17. 2.1492 **19.** 6.2126 **21.** −2.9469 **23.** −2.4423
25. 14.0055 **27.** ± 1 **29.** $0, \frac{4}{3}$ **31.** $\ln 2 \approx 0.6931$, 0
33. $\frac{1}{2}\ln 3 \approx 0.5493$ **35.** $e^{10} \approx 22026$ **37.** 0.01 **39.** $\frac{95}{3}$
41. $3 - e^2 \approx -4.3891$ **43.** 5 **45.** 5 **47.** $\frac{13}{12}$ **49.** 6
51. $\frac{3}{2}$ **53.** $1/\sqrt{5} \approx 0.4472$ **55.** 2.21 **57.** 0.00, 1.14
59. −0.57 **61.** 0.36 **63.** $2 < x < 4$ o $7 < x < 9$
65. $\log 2 < x < \log 5$ **67.** **a)** \$6435.09 **b)** 8.24 años
69. 6.33 años **71.** 8.15 años **73.** 8.30%
75. 13 días **77.** **a)** 7337 **b)** 1.73 años
79. **a)** $P = P_0 e^{-kh}$ **b)** 56.47 kPa
81. **a)** $t = -\frac{5}{13}\ln(1 - \frac{13}{60}I)$ **b)** 0.218 s

Sección 4.5 ■ página 379

1. **a)** 500 **b)** 45% **c)** 1929 **d)** 6.66 h
3. **a)** $n(t) = 18\,000e^{0.08t}$ **b)** 34,137
c)

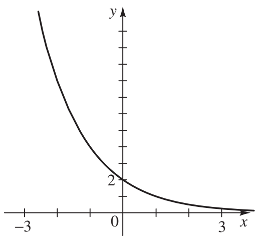


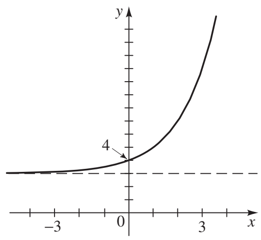
5. **a)** $n(t) = 112\,000e^{0.04t}$ **b)** Alrededor de 142 000
c) 2008
7. **a)** 20 000 **b)** $n(t) = 20\,000e^{0.1096t}$
c) Alrededor de 48 000 **d)** 2010
9. **a)** $n(t) = 8600e^{0.1508t}$ **b)** Alrededor de 11 600
c) 4.6 h
11. **a)** 2029 **b)** 2049 **13.** 22.85 h
15. **a)** $n(t) = 10e^{-0.0231t}$ **b)** 1.6 g **c)** 70 años
17. 18 años **19.** 149 h **21.** 3560 años
23. **a)** 210°F **b)** 153°F **c)** 28 min
25. **a)** 137°F **b)** 116 min
27. **a)** 2.3 **b)** 3.5 **c)** 8.3
29. **a)** 10^{-3} M **b)** 3.2×10^{-7} M
31. $4.8 \le \text{pH} \le 6.4$ **33.** $\log 20 \approx 1.3$

35. El doble de intenso **37.** 8.2
39. 6.3×10^{-3} W/m^2 **41. b)** 106 dB

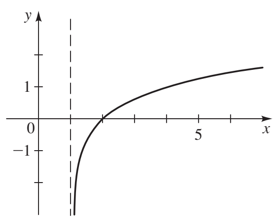
Capítulo 4 Repaso ■ página 383

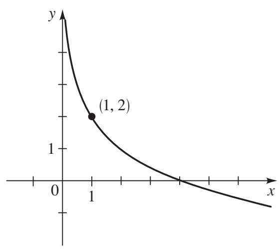
1. $\mathbb{R}$, $(0, \infty)$, $y = 0$ **3.** $\mathbb{R}$, $(3, \infty)$, $y = 3$



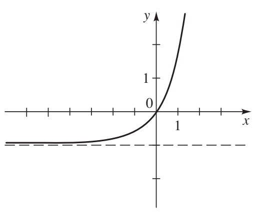


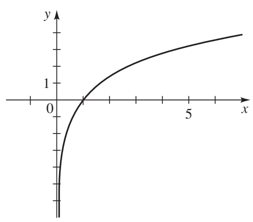
5. $(1, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 1$ **7.** $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$



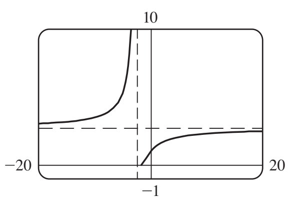


9. $\mathbb{R}$, $(-1, \infty)$, $y = -1$ **11.** $(0, \infty)$, $\mathbb{R}$, $x = 0$



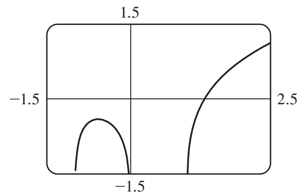


13. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ **15.** $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ **17.** $2^{10} = 1024$
19. $10^y = x$ **21.** $\log_2 64 = 6$ **23.** $\log 74 = x$
25. 7 **27.** 45 **29.** 6 **31.** -3 **33.** $\frac{1}{2}$ **35.** 2 **37.** 92
39. $\frac{2}{3}$ **41.** $\log A + 2 \log B + 3 \log C$
43. $\frac{1}{2}[\ln(x^2 - 1) - \ln(x^2 + 1)]$
45. $2 \log_5 x + \frac{3}{2} \log_5(1 - 5x) - \frac{1}{2} \log_5(x^3 - x)$
47. $\log 96$ **49.** $\log_2\left(\frac{(x - y)^{3/2}}{(x^2 + y^2)^2}\right)$ **51.** $\log\left(\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 4}}\right)$
53. -15 **55.** $\frac{1}{3}(5 - \log_5 26) \approx 0.99$ **57.** $\frac{4}{3} \ln 10 \approx 3.07$
59. 3 **61.** -4, 2 **63.** 0.430618 **65.** 2.303600
67.



asíntota vertical $x = -2$
asíntota horizontal $y = 2.72$
ni máximo ni mínimo

69.

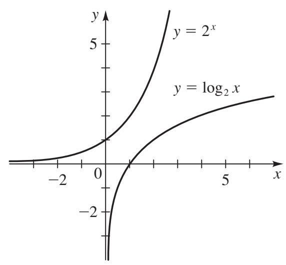


asíntotas verticales $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$
máximo local $\approx (-0.58, -0.41)$

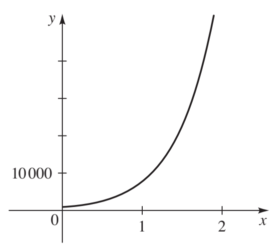
71. 2.42 **73.** $0.16 < x < 3.15$
75. Creciente en $(-\infty, 0]$ y $[1.10, \infty)$, decreciente en $[0, 1.10]$
77. 1.953445 **79.** $\log_4 258$
81. a) \$16 081.15 **b)** \$16 178.18 **c)** \$16 197.64
d) \$16 198.31
83. a) $n(t) = 30e^{0.15t}$ **b)** 55 **c)** 19 años
85. a) 9.97 mg **b)** 1.39×10^5 años
87. a) $n(t) = 150e^{-0.0004359t}$ **b)** 97.0 mg **c)** 2520 años
89. a) $n(t) = 1500e^{0.1515t}$ **b)** 7940
91. 7.9, básica **93.** 8.0

Capítulo 4 Evaluación ■ página 385

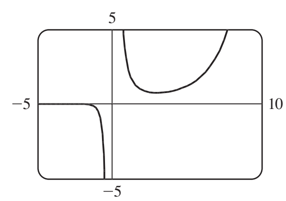
1.



3. a) $\frac{3}{2}$ **b)** 3 **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** 2
5. $\ln\left(\frac{x\sqrt{3 - x^4}}{(x^2 + 1)^2}\right)$
7. a) $n(t) = 1000e^{2.07944t}$ **b)** 22 627 **c)** 1.3 h
d)



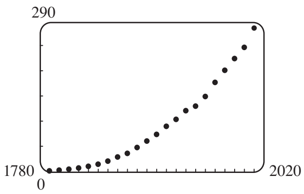
9. a)



b) $x = 0$, $y = 0$
c) Mínimo local $\approx (3.00, 0.74)$
d) $(-\infty, 0) \cup [0.74, \infty)$
e) -0.85, 0.96, 9.92

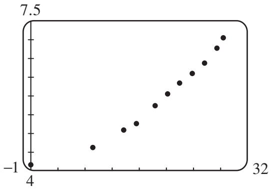
Enfoque en el modelado ■ página 393

1. a)



b) $y = ab^t$, donde $a = 1.180609 \times 10^{-15}$, $b = 1.0204139$, y y es la población en millones en el año t **c)** 515.9 millones
d) 207.8 millones **e)** No

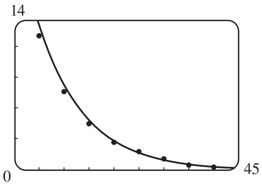
3. a) Sí **b)** Sí, la gráfica de dispersión parece lineal.



c) $\ln E = 4.494411 + 0.0970921464t$, donde t es años desde 1970 y E es el gasto en miles de millones de dólares
d) $E = 89.51543173e^{at}$, donde $a = 0.0970921464$
e) 3948.2 miles de millones de dólares

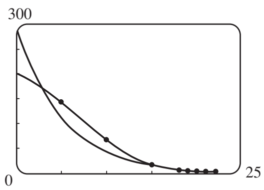
5. a) $I_0 = 22.7586444$, $k = 0.1062398$

b)



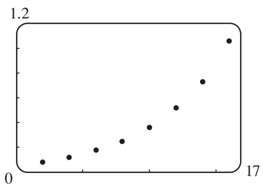
c) 47.3 pies

7. a) $y = ab^t$, donde $a = 301.813054$, $b = 0.819745$, y t es la cantidad de años desde 1970
b) $y = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$, donde $a = -0.002430$, $b = 0.135159$, $c = -2.014322$, $d = -4.055294$, $e = 199.092227$, y t es la cantidad de años desde 1970
c) De acuerdo con las gráficas vemos que el polinomio de cuarto grado es el mejor modelo

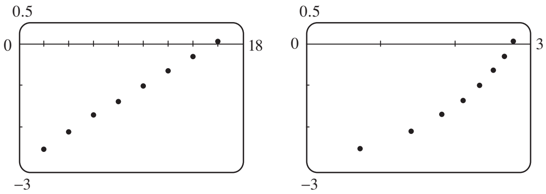


d) 202.8, 27.8; 184.0, 43.5

9. a)



b)



c) Función exponencial
d) $y = ab^x$ donde $a = 0.057697$ y $b = 1.200236$

11. a) $y = \dfrac{c}{1 + ae^{-bx}}$, donde $a = 49.10976596$, $b = 0.4981144989$ y $c = 500.855793$ **b)** 10.58 días

Capítulo 5

Sección 5.1 ■ página 406

7. $-\frac{4}{5}$ **9.** $-2\sqrt{2}/3$ **11.** $3\sqrt{5}/7$ **13.** $P\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$
15. $P\left(-\sqrt{5}/3, \frac{2}{3}\right)$ **17.** $P\left(-\sqrt{2}/3, -\sqrt{7}/3\right)$
19. $t = \pi/4$, $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$; $t = \pi/2$, $(0, 1)$; $t = 3\pi/4$, $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$; $t = \pi$, $(-1, 0)$; $t = 5\pi/4$, $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$; $t = 3\pi/2$, $(0, -1)$; $t = 7\pi/4$, $\left(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$; $t = 2\pi$, $(1, 0)$
21. $(0, 1)$ **23.** $\left(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ **25.** $\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
27. $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$ **29.** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
31. a) $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **b)** $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **c)** $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ **d)** $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$
33. a) $\pi/4$ **b)** $\pi/3$ **c)** $\pi/3$ **d)** $\pi/6$
35. a) $2\pi/7$ **b)** $2\pi/9$ **c)** $\pi - 3 \approx 0.14$ **d)** $2\pi - 5 \approx 1.28$
37. a) $\pi/3$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$
39. a) $\pi/4$ **b)** $\left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$
41. a) $\pi/3$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
43. a) $\pi/4$ **b)** $\left(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2\right)$
45. a) $\pi/6$ **b)** $\left(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2}\right)$
47. a) $\pi/3$ **b)** $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$
49. a) $\pi/3$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2\right)$
51. $(0.5, 0.8)$ **53.** $(0.5, -0.9)$

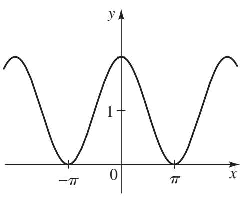
Sección 5.2 ■ página 416

1. $t = \pi/4$, sen $t = \sqrt{2}/2$, cos $t = \sqrt{2}/2$; $t = \pi/2$, sen $t = 1$, cos $t = 0$; $t = 3\pi/4$, sen $t = \sqrt{2}/2$, cos $t = -\sqrt{2}/2$; $t = \pi$, sen $t = 0$, cos $t = -1$; $t = 5\pi/4$, sen $t = -\sqrt{2}/2$, cos $t = -\sqrt{2}/2$; $t = 3\pi/2$, sen $t = -1$, cos $t = 0$; $t = 7\pi/4$, sen $t = -\sqrt{2}/2$, cos $t = \sqrt{2}/2$; $t = 2\pi$, sen $t = 0$, cos $t = 1$
3. a) $\sqrt{3}/2$ **b)** $-1/2$ **c)** $-\sqrt{3}$
5. a) $-1/2$ **b)** $-1/2$ **c)** $-1/2$
7. a) $-\sqrt{2}/2$ **b)** $-\sqrt{2}/2$ **c)** $\sqrt{2}/2$
9. a) $\sqrt{3}/2$ **b)** $2\sqrt{3}/3$ **c)** $\sqrt{3}/3$
11. a) -1 **b)** 0 **c)** 0 **13. a)** 2 **b)** $-2\sqrt{3}/3$ **c)** 2
15. a) $-\sqrt{3}/3$ **b)** $\sqrt{3}/3$ **c)** $-\sqrt{3}/3$

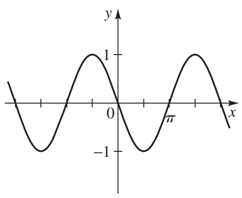
17. a) $\sqrt{2}/2$ **b)** $-\sqrt{2}$ **c)** -1
19. a) -1 **b)** 1 **c)** -1 **21. a)** 0 **b)** 1 **c)** 0
23. $\operatorname{sen} 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\tan 0 = 0$, $\sec 0 = 1$, otras no están definidas
25. $\operatorname{sen} \pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\tan \pi = 0$, $\sec \pi = -1$, otras no están definidas
27. $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{3}$ **29.** $-\sqrt{11}/4, \sqrt{5}/4, -\sqrt{55}/5$
31. $\sqrt{13}/7, -6/7, -\sqrt{13}/6$ **33.** $-\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{12}{5}$
35. $\frac{21}{29}, -\frac{20}{29}, -\frac{21}{20}$ **37. a)** 0.8 **b)** 0.84147
39. a) 0.9 **b)** 0.93204 **41. a)** 1 **b)** 1.02964
43. a) -0.6 **b)** -0.57482 **45.** Negativo
47. Negativo **49.** II **51.** II **53.** $\operatorname{sen} t = \sqrt{1 - \cos^2 t}$
55. $\tan t = (\operatorname{sen} t)/\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t}$ **57.** $\sec t = -\sqrt{1 + \tan^2 t}$
59. $\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1}$ **61.** $\tan^2 t = (\operatorname{sen}^2 t)/(1 - \operatorname{sen}^2 t)$
63. $\cos t = -\frac{4}{5}$, $\tan t = -\frac{3}{4}$, $\csc t = \frac{5}{3}$, $\sec t = -\frac{5}{4}$, $\cot t = -\frac{4}{3}$
65. $\operatorname{sen} t = -2\sqrt{2}/3$, $\cos t = \frac{1}{3}$, $\tan t = -2\sqrt{2}$, $\csc t = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$, $\cot t = -\sqrt{2}/4$
67. $\operatorname{sen} t = -\frac{3}{5}$, $\cos t = \frac{4}{5}$, $\csc t = -\frac{5}{3}$, $\sec t = \frac{5}{4}$, $\cot t = -\frac{4}{3}$
69. $\cos t = -\sqrt{15}/4$, $\tan t = \sqrt{15}/15$, $\csc t = -4$, $\sec t = -4\sqrt{15}/15$, $\cot t = \sqrt{15}$
71. Impar **73.** Impar **75.** Par **77.** Ninguna de los dos
79. $y(0) = 4$, $y(0.25) = -2.828$, $y(0.50) = 0$, $y(0.75) = 2.828$, $y(1.00) = -4$, $y(1.25) = 2.828$
81. a) 0.49870 amp **b)** -0.17117 amp

Sección 5.3 ■ página 429

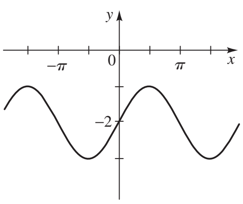
1.



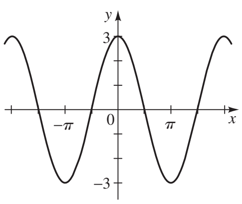
3.



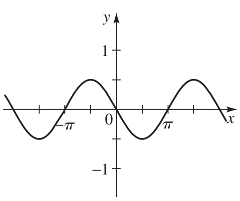
5.



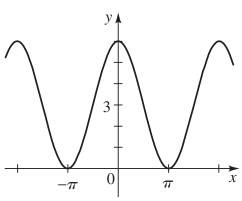
7.



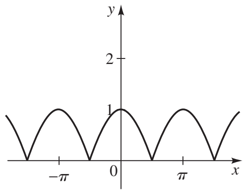
9.



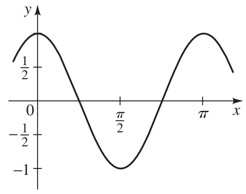
11.



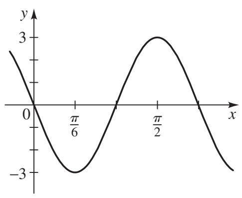
13.



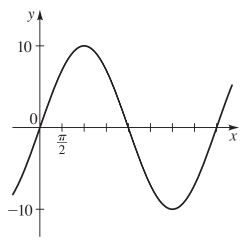
15. $1, \pi$



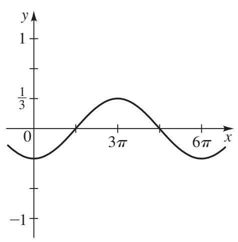
17. $3, 2\pi/3$



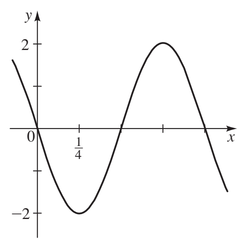
19. $10, 4\pi$



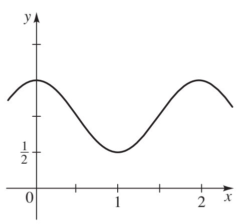
21. $\frac{1}{3}, 6\pi$



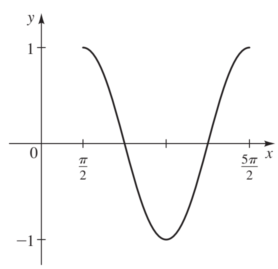
23. $2, 1$



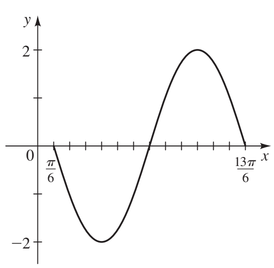
25. $\frac{1}{2}, 2$



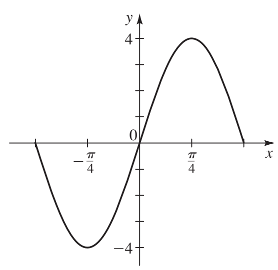
27. $1, 2\pi, \pi/2$



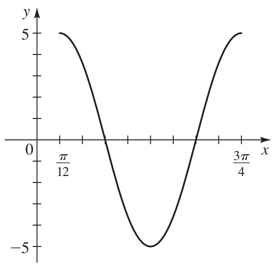
29. $2, 2\pi, \pi/6$



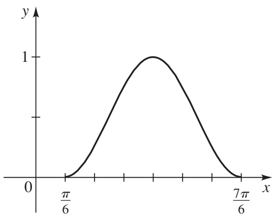
31. $4, \pi, -\pi/2$



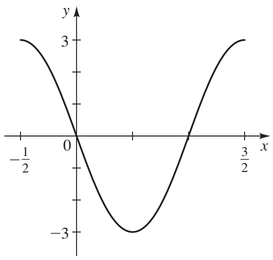
33. $5, 2\pi/3, \pi/12$



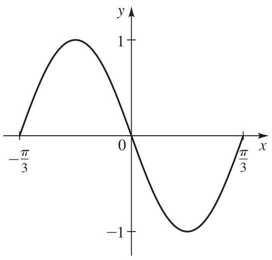
35. $\frac{1}{2}, \pi, \pi/6$



37. $3, 2, -\frac{1}{2}$

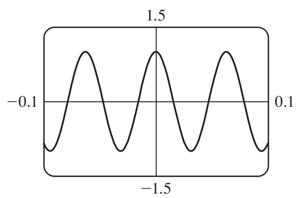


39. $1, 2\pi/3, -\pi/3$

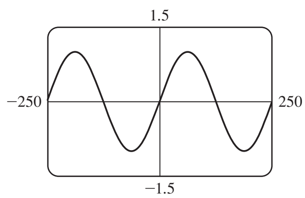


41. a) $4, 2\pi, 0$ **b)** $y = 4 \operatorname{sen} x$
43. a) $\frac{3}{2}, \frac{2\pi}{3}, 0$ **b)** $y = \frac{3}{2}\cos 3x$
45. a) $\frac{1}{2}, \pi, -\frac{\pi}{3}$ **b)** $y = -\frac{1}{2}\cos 2(x + \pi/3)$
47. a) $4, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ **b)** $y = 4 \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

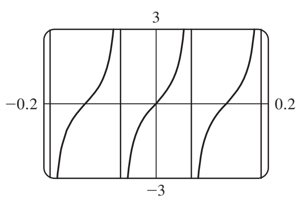
49.



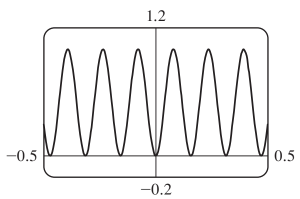
51.



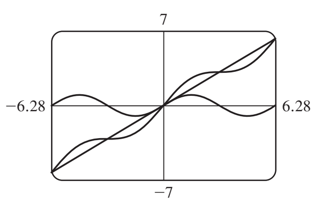
53.



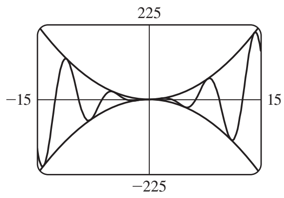
55.



57.

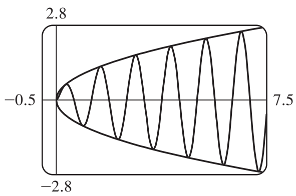


59.



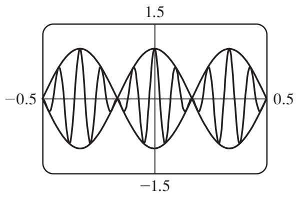
$y = x^2 \operatorname{sen} x$ es una curva seno que queda entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$

61.



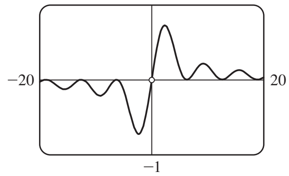
$y = \sqrt{x} \operatorname{sen} 5\pi x$ es una curva seno que se ubica entre las gráficas de $y = \sqrt{x}$ y $y = -\sqrt{x}$

63.



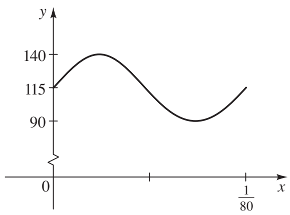
$y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$ es una curva coseno que está entre las gráficas de $y = \cos 3\pi x$ y $y = -\cos 3\pi x$

65. Valor máximo 1.76 cuando $x \approx 0.94$, valor mínimo -1.76 cuando $x \approx -0.94$ (Los mismos valores máximo y mínimo se presentan en una cantidad infinita de otros valores de x.)
67. Valor máximo 3.00 cuando $x \approx 1.57$, valor mínimo -1.00 cuando $x \approx -1.57$ (Los mismos valores máximo y mínimo se encuentran en una cantidad infinita de otros valores de x.)
69. 1.16 **71.** 0.34, 2.80
73. a) Impar **b)** $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \pm 6\pi, \ldots$
c)



d) $f(x)$ se aproxima a 0
e) $f(x)$ se aproxima a 0

75. a) 20 s **b)** 6 pies
77. a) $\frac{1}{80}$ min **b)** 80
c)

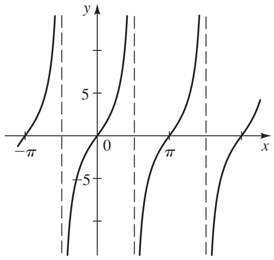


d) $\frac{140}{90}$; es más alta que lo normal

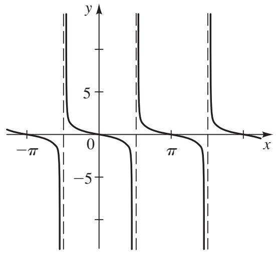
Sección 5.4 ■ página 441

1. II **3.** VI **5.** IV

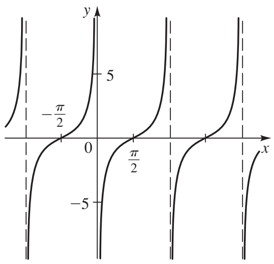
7. π



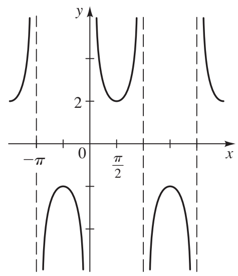
9. π



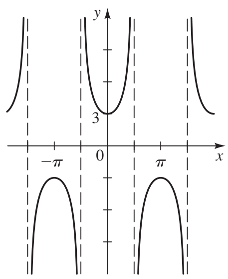
11. π



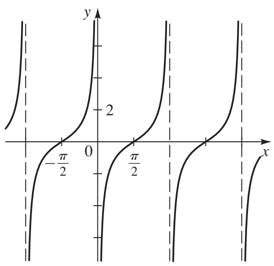
13. 2π



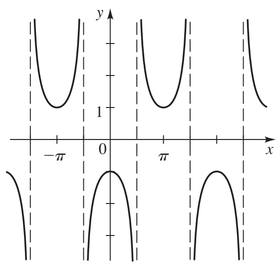
15. 2π



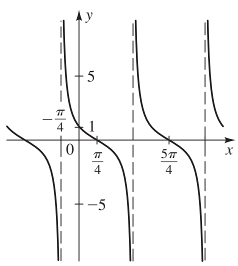
17. π



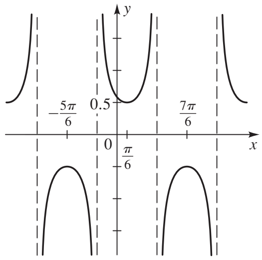
19. 2π



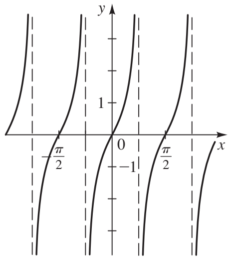
21. π



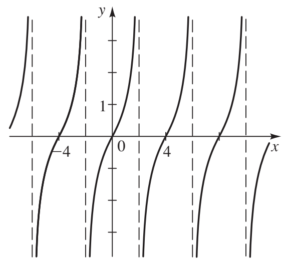
23. 2π



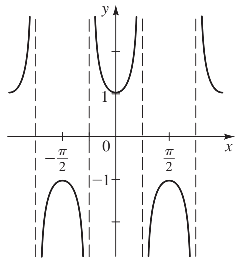
25. $\pi/2$



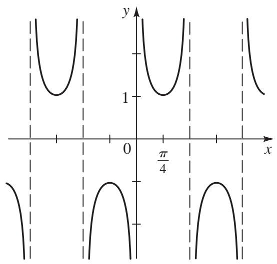
27. 4



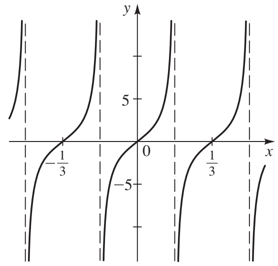
29. π



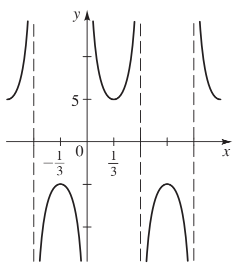
31. π



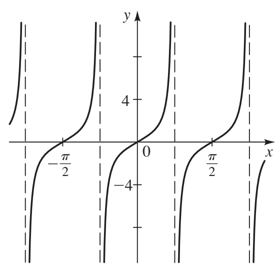
33. $\frac{1}{3}$



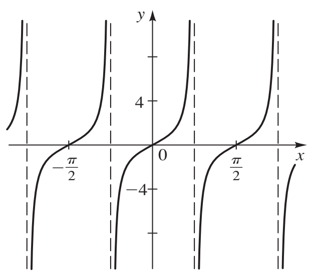
35. $\frac{4}{3}$



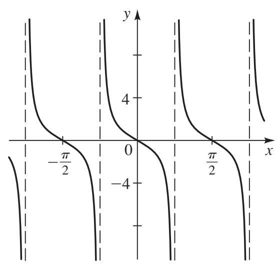
37. $\pi/2$



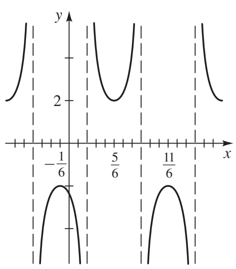
39. $\pi/2$



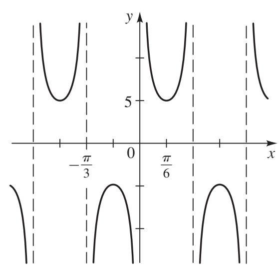
41. $\pi/2$



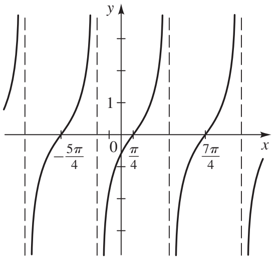
43. 2



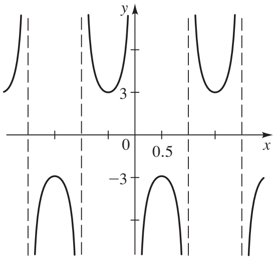
45. $2\pi/3$



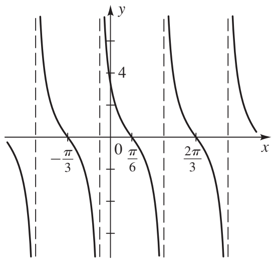
47. $3\pi/2$



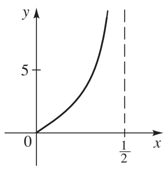
49. 2



51. $\pi/2$



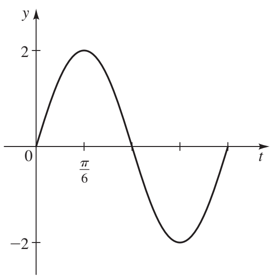
55. a) 1.53 millas, 3.00 millas, 18.94 millas
b)



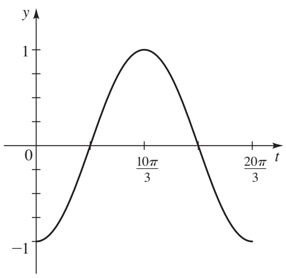
c) $d(t)$ se aproxima a ∞

Sección 5.5 ■ página 451

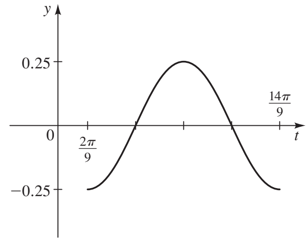
1. a) $2, 2\pi/3, 3/(2\pi)$
b)



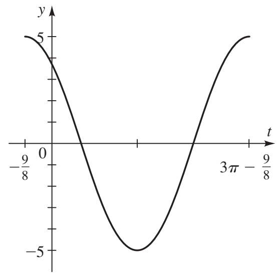
3. a) $1, 20\pi/3, 3/(20\pi)$
b)



5. a) $\frac{1}{4}, 4\pi/3, 3/(4\pi)$ **b)**



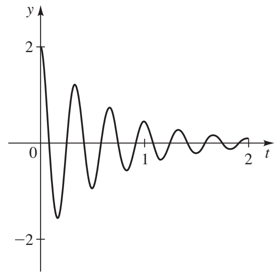
7. a) $5, 3\pi, 1/(3\pi)$ **b)**



9. $y = 10 \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{3}t\right)$ **11.** $y = 6 \operatorname{sen}(10t)$

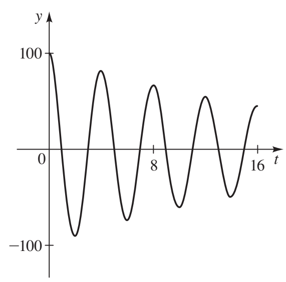
13. $y = 60\cos(4\pi t)$ **15.** $y = 2.4\cos(1500\pi t)$

17. a) $y = 2e^{-1.5t}\cos 6\pi t$ **b)**

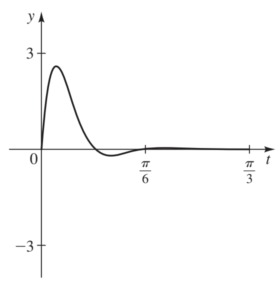


19. a) $y = 100e^{-0.05t}\cos\dfrac{\pi}{2}t$

b)

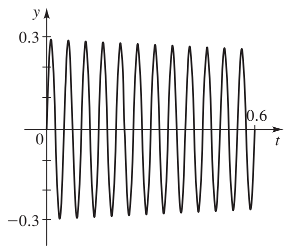


21. a) $y = 7e^{-10t}\operatorname{sen} 12t$ **b)**



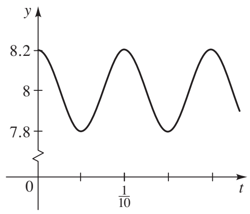
23. a) $y = 0.3e^{-0.2t}\,\text{sen}(40\pi t)$

b)



25. a) 10 ciclos por minuto

b)

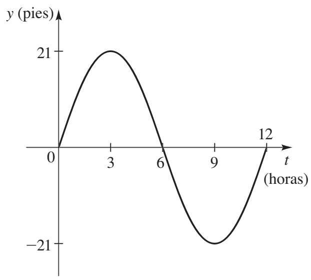


c) 0.4 m

27. a) 8900 **b)** alrededor de 3.14 años

29. $d(t) = 5\,\text{sen}(5\pi t)$

31. $y = 21\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{6}t\right)$



33. $y = 5\cos(2\pi t)$ **35.** $y = 11 + 10\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi t}{10}\right)$

37. $y = 3.8 + 0.2\,\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{5}t\right)$

39. $E(t) = 310\cos(200\pi t)$, 219.2 V

41. a) 45 V **b)** 40 **c)** 40 **d)** $E(t) = 45\cos(80\pi t)$

43. $f(t) = e^{-0.9t}\,\text{sen}\,\pi t$ **45.** $e = \dfrac{1}{3}\ln 4 \approx 0.46$

Capítulo 5 Repaso ■ página 455

1. b) $\frac{1}{2}, -\sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/3$

3. a) $\pi/3$ **b)** $\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$

c) $\text{sen}\,t = \sqrt{3}/2$, $\cos t = -\frac{1}{2}$, $\tan t = -\sqrt{3}$, $\csc t = 2\sqrt{3}/3$, $\sec t = -2$, $\cot t = -\sqrt{3}/3$

5. a) $\pi/4$ **b)** $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$

c) $\text{sen}\,t = -\sqrt{2}/2$, $\cos t = -\sqrt{2}/2$, $\tan t = 1$, $\csc t = -\sqrt{2}$, $\sec t = -\sqrt{2}$, $\cot t = 1$

7. a) $\sqrt{2}/2$ **b)** $-\sqrt{2}/2$ **9. a)** 0.89121 **b)** 0.45360

11. a) 0 **b)** Indefinida **13. a)** Indefinida **b)** 0

15. a) $-\sqrt{3}/3$ **b)** $-\sqrt{3}$

17. $(\text{sen}\,t)/(1 - \text{sen}^2 t)$ **19.** $(\text{sen}\,t)/\sqrt{1 - \text{sen}^2 t}$

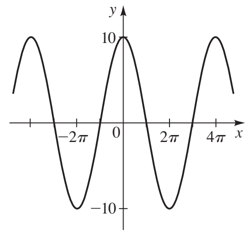
21. $\tan t = -\frac{5}{12}$, $\csc t = \frac{13}{5}$, $\sec t = -\frac{13}{12}$, $\cot t = -\frac{12}{5}$

23. $\text{sen}\,t = 2\sqrt{5}/5$, $\cos t = -\sqrt{5}/5$, $\tan t = -2$, $\sec t = -\sqrt{5}$

25. $(16 - \sqrt{17})/4$ **27.** 3

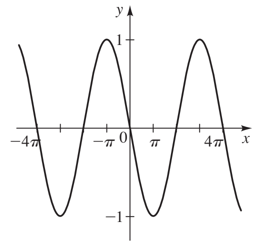
29. a) 10, 4π, 0

b)



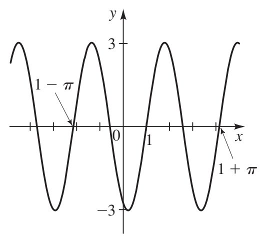
31. a) 1, 4π, 0

b)



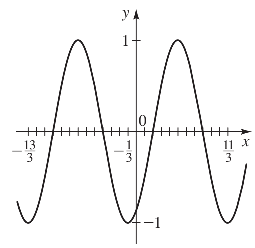
33. a) 3, π, 1

b)



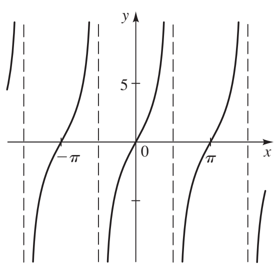
35. a) 1, 4, $-\frac{1}{3}$

b)

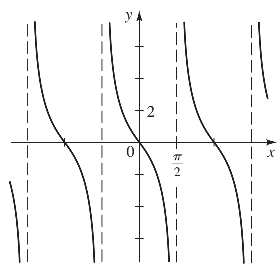


37. $y = 5\,\text{sen}\,4x$ **39.** $y = \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\pi\left(x + \frac{1}{3}\right)$

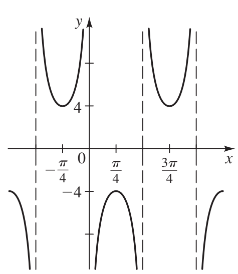
41. π



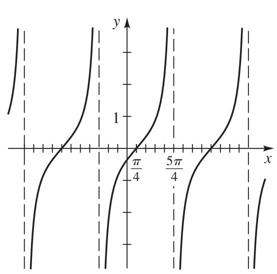
43. π



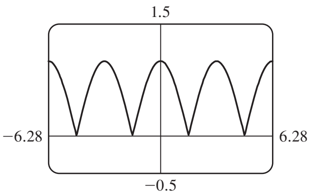
45. π



47. 2π

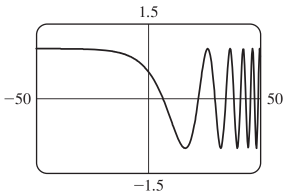


49. a)



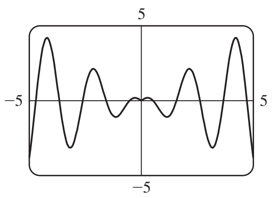
b) Periodo π
c) Par

51. a)



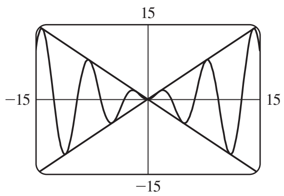
b) No periódica
c) Ninguno de los dos

53. a)



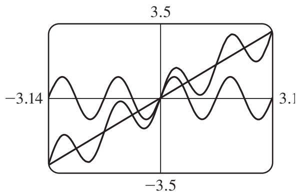
b) No periódica
c) Par

55.



$y = x$ sen x es una función seno cuya gráfica queda entre la de $y = x$ y $y = -x$

57.

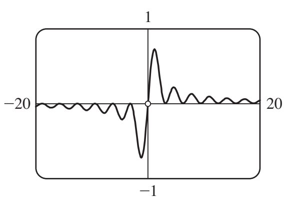


Las gráficas se relacionan mediante la adición gráfica.

59. 1.76, −1.76 **61.** 0.30, 2.84

63. a) Impar **b)** $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

c)



d) $f(x)$ se aproxima a 0
e) $f(x)$ se aproxima a 0

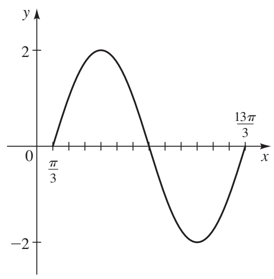
65. $y = 50\cos(16\pi t)$ **67.** $y = 4\cos(\frac{\pi}{6}t)$

Capítulo 5 Evaluación ■ página 458

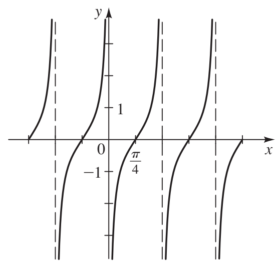
1. $y = -\frac{5}{6}$ **3. a)** $-\frac{1}{2}$ **b)** $-\sqrt{2}/2$ **c)** $\sqrt{3}$ **d)** -1 **5.** $-\frac{2}{15}$

7. a) $2, 4\pi, \pi/3$

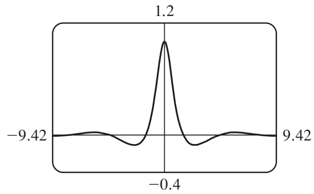
b)



9. $\pi/2$



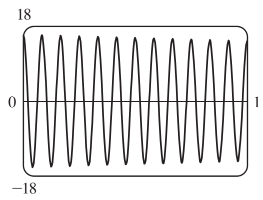
11. a)



b) Par

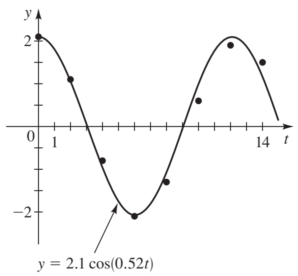
c) Valor mínimo −0.11 cuando $x \approx \pm 2.54$, valor máximo 1 cuando $x = 0$

13. $y = 16e^{-0.1t}\cos 24\pi t$



Enfoque en el modelado ■ página 463

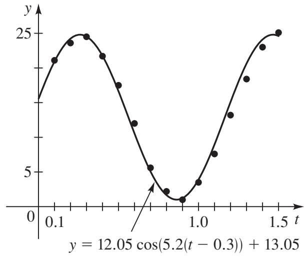
1. a) y **c)**



b) $y = 2.1\cos(0.52t)$

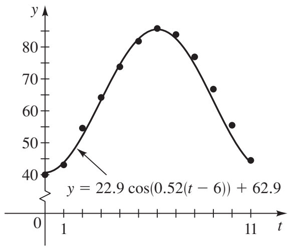
d) $y = 2.05$ sen$(0.50t + 1.55) - 0.01$ **e)** La fórmula de d) se reduce a $y = 2.05\cos(0.50t - 0.02) - 0.01$. Igual que b), con una cifra decimal.

3. a) y **c)**



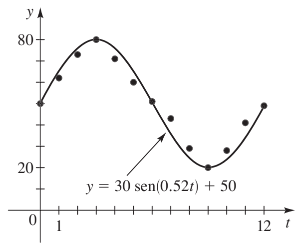
b) $y = 12.05\cos(5.2(t - 0.3)) + 13.05$
d) $y = 11.72\,\text{sen}(5.05t + 0.24) + 12.96$ **e)** La fórmula de d) se reduce a $y = 11.72\cos(5.05(t - 0.26)) + 12.96$. Cerca, pero no idéntico a b).

5. **a)** y **c)**



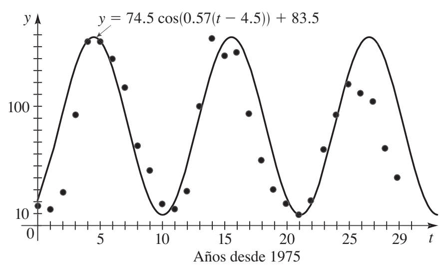
b) $y = 22.9\cos(0.52(t - 6)) + 62.9$, donde y es temperatura (°F) y t está en meses (enero = 0)
d) $y = 23.4\,\text{sen}(0.48t - 1.36) + 62.2$

7. **a)** y **c)**



b) $y = 30\,\text{sen}(0.52t) + 50$ donde y es la población de búhos en el año t **d)** $y = 25.8\,\text{sen}(0.52t - 0.02) + 50.6$

9. **a)** y **c)**



b) $y = 74.5\cos(0.57(t - 4.5)) + 83.5$, donde y es la cuenta de manchas solares diarias promedio y t son los años desde 1975
d) $y = 67.65\,\text{sen}(0.62t - 1.65) + 74.5$

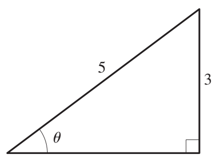
Capítulo 6

Sección 6.1 ■ página 474

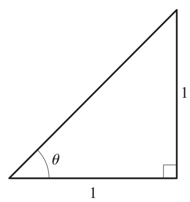
1. $2\pi/5 \approx 1.257$ rad **3.** $-\pi/4 \approx -0.785$ rad
5. $-5\pi/12 \approx -1.309$ rad **7.** $6\pi \approx 18.850$ rad
9. $8\pi/15 \approx 1.676$ rad **11.** $\pi/24 \approx 0.131$ rad
13. 210° **15.** −225° **17.** $540/\pi \approx 171.9°$
19. $-216/\pi \approx 68.8°$ **21.** 18° **23.** −24°
25. 410°, 770°, −310°, −670°
27. $11\pi/4$, $19\pi/4$, $-5\pi/4$, $-13\pi/4$
29. $7\pi/4$, $15\pi/4$, $-9\pi/4$, $-17\pi/4$
31. Sí **33.** Sí **35.** Sí **37.** 13° **39.** 30° **41.** 280°
43. $5\pi/6$ **45.** π **47.** $\pi/4$ **49.** $55\pi/9 \approx 19.2$
51. 4 **53.** 4 millas **55.** 2 rad ≈ 114.6°
57. $36/\pi \approx 11.459$ m **59.** **a)** 35.45 **b)** 25 **61.** 50 m^2
63. 4 m **65.** 6 cm^2 **67.** 13.9 millas
69. 330π millas ≈ 1037 millas **71.** 1.6 millones de millas
73. 1.15 millas **75.** 360π $\text{pulg}^2 \approx 1130.97$ pulg^2
77. $32\pi/15$ pies/s ≈ 6.7 pies/s
79. **a)** 2000π rad/min **b)** $50\pi/3$ pies/s ≈ 52.4 pies/s
81. 39.3 millas/h **83.** 2.1 m/s
85. **a)** 10π cm ≈ 31.4 cm **b)** 5 cm **c)** 3.32 cm **d)** 86.8 cm^3

Sección 6.2 ■ página 484

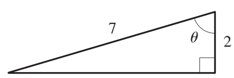
1. $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$, $\csc\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$, $\cot\theta = \frac{3}{4}$ **3.** $\text{sen}\,\theta = \frac{40}{41}$, $\cos\theta = \frac{9}{41}$, $\tan\theta = \frac{40}{9}$, $\csc\theta = \frac{41}{40}$, $\sec\theta = \frac{41}{9}$, $\cot\theta = \frac{9}{40}$
5. $\text{sen}\,\theta = 2\sqrt{13}/13$, $\cos\theta = 3\sqrt{13}/13$, $\tan\theta = \frac{2}{3}$, $\csc\theta = \sqrt{13}/2$, $\sec\theta = \sqrt{13}/3$, $\cot\theta = \frac{3}{2}$
7. **a)** $3\sqrt{34}/34$, $3\sqrt{34}/34$ **b)** $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{5}$ **c)** $\sqrt{34}/5$, $\sqrt{34}/5$
9. $\frac{25}{2}$ **11.** $13\sqrt{3}/2$ **13.** 16.51658
15. $x = 28\cos\theta$, $y = 28\,\text{sen}\,\theta$
17. $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = \frac{4}{3}$



19. $\text{sen}\,\theta = \sqrt{2}/2$, $\cos\theta = \sqrt{2}/2$, $\tan\theta = 1$, $\csc\theta = \sqrt{2}$, $\sec\theta = \sqrt{2}$

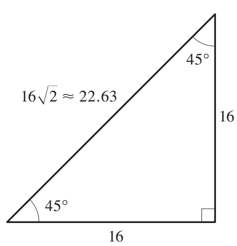


21. $\text{sen}\,\theta = 3\sqrt{5}/7$, $\cos\theta = \frac{2}{7}$, $\tan\theta = 3\sqrt{5}/2$, $\csc\theta = 7\sqrt{5}/15$, $\cot\theta = 2\sqrt{5}/15$

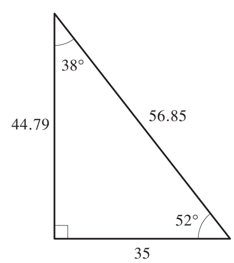


23. $(1 + \sqrt{3})/2$ **25.** 1 **27.** $\frac{1}{2}$

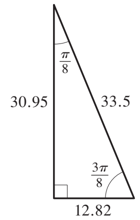
29.



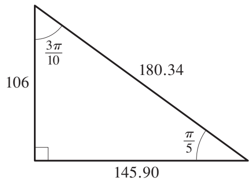
31.



33.



35.



37. sen $\theta \approx 0.45$, cos $\theta \approx 0.89$, tan $\theta = 0.50$, csc $\theta \approx 2.24$, sec $\theta \approx 1.12$, cot $\theta = 2.00$ **39.** 230.9 **41.** 63.7
43. $x = 10 \tan\theta \operatorname{sen}\theta$ **45.** 1026 pies
47. a) 2100 millas **b)** No **49.** 19 pies **51.** 38.7°
53. 345 pies **55.** 415 pies, 152 pies **57.** 2570 pies
59. 5808 pies **61.** 91.7 millones de millas
63. 3960 millas **65.** 0.723 AU

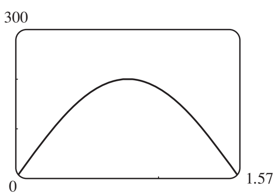
Sección 6.3 ■ página 495

1. a) 30° **b)** 30° **c)** 30° **3. a)** 45° **b)** 90° **c)** 75°
5. a) $\pi/4$ **b)** $\pi/6$ **c)** $\pi/3$ **7. a)** $2\pi/7$ **b)** 0.4π **c)** 1.4
9. $\frac{1}{2}$ **11.** $-\sqrt{2}/2$ **13.** $-\sqrt{3}$ **15.** 1 **17.** $-\sqrt{3}/2$
19. $\sqrt{3}/3$ **21.** $\sqrt{3}/2$ **23.** -1 **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** 2
29. -1 **31.** No definido **33.** III **35.** IV
37. $\tan\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}/\cos\theta$
39. $\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}$ **41.** $\sec\theta = -\sqrt{1+\tan^2\theta}$
43. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
45. $\operatorname{sen}\theta = -\frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\csc\theta = -\frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
47. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \sqrt{3}/2$, $\tan\theta = \sqrt{3}/3$, $\sec\theta = 2\sqrt{3}/3$, $\cot\theta = \sqrt{3}$
49. $\operatorname{sen}\theta = 3\sqrt{5}/7$, $\tan\theta = -3\sqrt{5}/2$, $\csc\theta = 7\sqrt{5}/15$, $\sec\theta = -\frac{7}{2}$, $\cot\theta = -2\sqrt{5}/15$
51. a) $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}$ **b)** $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}/4$ **c)** $\frac{3}{4}$, 0.88967
53. 19.1 **55.** 66.1° **57.** $(4\pi/3) - \sqrt{3} \approx 2.46$
61. b)

θ	20°	60°	80°	85°
h	1922	9145	29 944	60 351

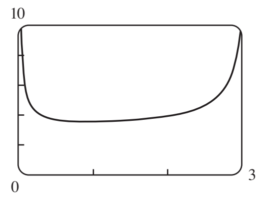
63. a) $A(\theta) = 400 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

b)



c) ancho = profundidad ≈ 14.14 pulg.
65. a) $9\sqrt{3}/4$ pies ≈ 3.897 pies, $\frac{9}{16}$ pies = 0.5625 pies
b) 23.982 pies, 3.462 pies

67. a)

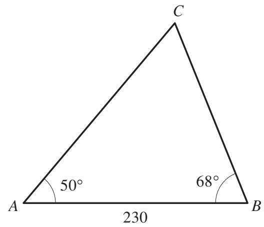


b) 0.946 rad o 54°

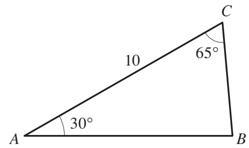
69. 42°

Sección 6.4 ■ página 506

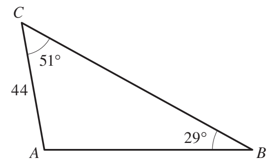
1. 318.8 **3.** 24.8 **5.** 44°
7. $\angle C = 114°$, $a \approx 51$, $b \approx 24$
9. $\angle A = 44°$, $\angle B = 68°$, $a \approx 8.99$
11. $\angle C = 62°$, $a \approx 200$, $b \approx 242$



13. $\angle B = 85°$, $a \approx 5$, $c \approx 9$



15. $\angle A = 100°$, $a \approx 89$, $c \approx 71$



17. $\angle B \approx 30°$, $\angle C \approx 40°$, $c \approx 19$ **19.** No hay solución
21. $\angle A_1 \approx 125°$, $\angle C_1 \approx 30°$, $a_1 \approx 49$; $\angle A_2 \approx 5°$, $\angle C_2 \approx 150°$, $a_2 \approx 5.6$
23. No hay solución
25. $\angle A_1 \approx 57.2°$, $\angle B_1 \approx 93.8°$, $b_1 \approx 30.9$; $\angle A_2 \approx 122.8°$, $\angle B_2 \approx 28.2°$, $b_2 \approx 14.6$
27. a) 91.146° **b)** 14.427°
31. a) 1018 millas **b)** 1017 millas **33.** 219 pies
35. 55.9 m **37.** 175 pies
39. 192 m **41.** 0.427 AU, 1.119 AU

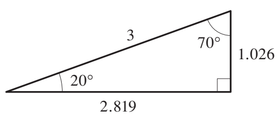
Sección 6.5 ■ página 513

1. 28.9 **3.** 47 **5.** 29.89°
7. 15 **9.** $\angle A \approx 39.4°$, $\angle B \approx 20.6°$, $c \approx 24.6$
11. $\angle A \approx 48°$, $\angle B \approx 79°$, $c \approx 3.2$
13. $\angle A \approx 50°$, $\angle B \approx 73°$, $\angle C \approx 57°$

15. $\angle A_1 \approx 83.6°$, $\angle C_1 \approx 56.4°$, $a_1 \approx 193$; $\angle A_2 \approx 16.4°$, $\angle C_2 \approx 123.6$, $a_2 \approx 54.9$
17. No hay tal triángulo **19.** 2 **21.** 25.4 **23.** 89.2°
25. 24.3 **27.** 54 **29.** 26.83 **31.** 5.33 **33.** 40.77
35. 3.85 cm^2 **37.** 2.30 millas **39.** 23.1 millas
41. 2179 millas **43. a)** 62.6 millas **b)** S 18.2° E **45.** 96°
47. 211 pies **49.** 3835 pies **51.** $165 554

Capítulo 6 Repaso ■ página 516

1. a) $\pi/3$ **b)** $11\pi/6$ **c)** $-3\pi/4$ **d)** $-\pi/2$
3. a) 450° **b)** −30° **c)** 405° **d)** $(558/\pi)° \approx 177.6°$
5. 8 m **7.** 82 pies **9.** 0.619 rad ≈ 35.4°
11. 18 151 pies cuadrados
13. 300π rad/min ≈ 942.5 rad/min, 7539.8 pulg/min = 628.3 pies/min
15. $\operatorname{sen}\theta = 5/\sqrt{74}$, $\cos\theta = 7/\sqrt{74}$, $\tan\theta = \frac{5}{7}$, $\csc\theta = \sqrt{74}/5$, $\sec\theta = \sqrt{74}/7$, $\cot\theta = \frac{7}{5}$
17. $x \approx 3.83$, $y \approx 3.21$ **19.** $x \approx 2.92$, $y \approx 3.11$
21.



23. $a = \cot\theta$, $b = \csc\theta$ **25.** 48 m **27.** 1076 millas
29. $-\sqrt{2}/2$ **31.** 1 **33.** $-\sqrt{3}/3$ **35.** $-\sqrt{2}/2$
37. $2\sqrt{3}/3$ **39.** $-\sqrt{3}$
41. $\operatorname{sen}\theta = \frac{12}{13}$, $\cos\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$, $\csc\theta = \frac{13}{12}$, $\sec\theta = -\frac{13}{5}$, $\cot\theta = -\frac{5}{12}$ **43.** 60°
45. $\tan\theta = -\sqrt{1-\cos^2\theta}/\cos\theta$
47. $\tan^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta/(1-\operatorname{sen}^2\theta)$
49. $\operatorname{sen}\theta = \sqrt{7}/4$, $\cos\theta = \frac{3}{4}$, $\csc\theta = 4\sqrt{7}/7$, $\cot\theta = 3\sqrt{7}/7$
51. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$, $\csc\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = -\frac{5}{4}$, $\cot\theta = -\frac{4}{3}$
53. $-\sqrt{5}/5$ **55.** 1 **57.** 5.32 **59.** 148.07 **61.** 77.82
63. 77.3 millas **65.** 3.9 millas **67.** 32.12

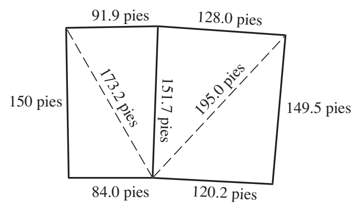
Capítulo 6 Evaluación ■ página 520

1. $11\pi/6$, $-3\pi/4$
3. a) 240π rad/min ≈ 753.98 rad/min
b) 12 063.7 pies/min = 137 mi/h
5. $(26+6\sqrt{13})/39$ **7.** $(4-3\sqrt{2})/4$
9. $\tan\theta = -\sqrt{\sec^2\theta - 1}$ **11.** 9.1
13. 8.4 **15. a)** 15.3 m^2 **b)** 24.3 m **17.** 554 pies

Enfoque en el modelado ■ página 523

1. 1.41 millas **3.** 14.3 m **5. c)** 2349.8 pies

7.



Capítulo 7

Sección 7.1 ■ página 533

1. sen t **3.** $\tan\theta$ **5.** −1 **7.** csc u **9.** $\tan\theta$
11. 1 **13.** cos y **15.** $\operatorname{sen}^2 x$ **17.** sec x **19.** 2 sec u
21. $\cos^2 x$ **23.** $\cos\theta$

25. $\text{PM} = \operatorname{sen}\theta \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \text{SM}$

27. $\text{PM} = \cos u \dfrac{1}{\cos u}\cot u = \text{SM}$

29. $\text{PM} = \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}\operatorname{sen} y = \dfrac{1-\cos^2 y}{\cos y} = \sec y - \cos y = \text{SM}$

31. $\text{PM} = \operatorname{sen} B + \cos B \dfrac{\cos B}{\operatorname{sen} B}$
$= \dfrac{\operatorname{sen}^2 B + \cos^2 B}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{1}{\operatorname{sen} B} = \text{SM}$

33. $\text{PM} = -\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$
$= \dfrac{-1}{\operatorname{sen}\alpha} = \text{SM}$

35. $\text{PM} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta}$
$= \dfrac{1}{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} = \text{SM}$

37. $\text{PM} = 1 - \cos^2\beta = \operatorname{sen}^2\beta = \text{SM}$

39. $\text{PM} = \dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)} = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$
$= \dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)}{(\operatorname{sen} x - \cos x)(\operatorname{sen} x - \cos x)} = \text{SM}$

41. $\text{PM} = \dfrac{\frac{1}{\cos t} - \cos t}{\frac{1}{\cos t}} \cdot \dfrac{\cos t}{\cos t} = \dfrac{1-\cos^2 t}{1} = \text{SM}$

43. $\text{PM} = \dfrac{1}{\cos^2 y} = \sec^2 y = \text{SM}$

45. $\text{PM} = \cot x \cos x + \cot x - \csc x \cos x - \csc x$
$= \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x}$
$= \dfrac{-\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} = \text{SM}$

47. $\text{PM} = \operatorname{sen}^2 x\left(1 + \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}\right) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \text{SM}$

49. $\text{PM} = 2(1 - \text{sen}^2 x) - 1 = 2 - 2\,\text{sen}^2 x - 1 = \text{SM}$

51. $\text{PM} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha}\cdot\dfrac{1 + \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$

$= \dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha(1 + \cos\alpha)} = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\text{sen}\,\alpha(1 + \cos\alpha)} = \text{SM}$

53. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} - \dfrac{\text{sen}^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\text{sen}^2\theta(1 - \cos^2\theta)}{\cos^2\theta} = \dfrac{\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\theta}{\cos^2\theta} = \text{SM}$

55. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}\,x - 1}{\text{sen}\,x + 1}\cdot\dfrac{\text{sen}\,x + 1}{\text{sen}\,x + 1} = \dfrac{\text{sen}^2 x - 1}{(\text{sen}\,x + 1)^2} = \text{SM}$

57. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}^2 t + 2\,\text{sen}\,t\cos t + \cos^2 t}{\text{sen}\,t\cos t}$

$= \dfrac{\text{sen}^2 t + \cos^2 t}{\text{sen}\,t\cos t} + \dfrac{2\,\text{sen}\,t\cos t}{\text{sen}\,t\cos t} = \dfrac{1}{\text{sen}\,t\cos t} + 2$

$= \text{SM}$

59. $\text{PM} = \dfrac{1 + \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u}}{1 - \frac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u}}\cdot\dfrac{\cos^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\cos^2 u + \text{sen}^2 u}{\cos^2 u - \text{sen}^2 u} = \text{SM}$

61. $\text{PM} = \dfrac{\sec x}{\sec x - \tan x}\cdot\dfrac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$

$= \dfrac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec^2 x - \tan^2 x} = \text{SM}$

63. $\text{PM} = (\sec v - \tan v)\cdot\dfrac{\sec v + \tan v}{\sec v + \tan v}$

$= \dfrac{\sec^2 v - \tan^2 v}{\sec v + \tan v} = \text{SM}$

65. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\text{sen}\,x}} = \dfrac{\text{sen}\,x + \cos x}{\frac{\text{sen}\,x + \cos x}{\cos x\,\text{sen}\,x}}$

$= (\text{sen}\,x + \cos x)\dfrac{\cos x\,\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x + \cos x} = \text{SM}$

67. $\text{PM} = \dfrac{\frac{1}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos x}{\text{sen}\,x}}{\frac{1}{\cos x} - 1}\cdot\dfrac{\text{sen}\,x\cos x}{\text{sen}\,x\cos x} = \dfrac{\cos x(1 - \cos x)}{\text{sen}\,x(1 - \cos x)}$

$= \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \text{SM}$

69. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u} - \dfrac{\text{sen}^2 u\cos^2 u}{\cos^2 u} = \dfrac{\text{sen}^2 u}{\cos^2 u}(1 - \cos^2 u) = \text{SM}$

71. $\text{PM} = (\sec^2 x - \tan^2 x)(\sec^2 x + \tan^2 x) = \text{SM}$

73. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}\,\theta - \frac{1}{\text{sen}\,\theta}}{\cos\theta - \frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta}} = \dfrac{\frac{\text{sen}^2\theta - 1}{\text{sen}\,\theta}}{\frac{\cos\theta\,\text{sen}\,\theta - \cos\theta}{\text{sen}\,\theta}}$

$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta(\text{sen}\,\theta - 1)} = \text{SM}$

75. $\text{PM} = \dfrac{-\text{sen}^2 t + \tan^2 t}{\text{sen}^2 t} = -1 + \dfrac{\text{sen}^2 t}{\cos^2 t}\cdot\dfrac{1}{\text{sen}^2 t}$

$= -1 + \sec^2 t = \text{SM}$

77. $\text{PM} = \dfrac{\sec x - \tan x + \sec x + \tan x}{(\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)}$

$= \dfrac{2\sec x}{\sec^2 x - \tan^2 x} = \text{SM}$

79. $\text{PM} = \tan^2 x + 2\tan x\cot x + \cot^2 x = \tan^2 x + 2 + \cot^2 x$

$= (\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) = \text{SM}$

81. $\text{PM} = \dfrac{\frac{1}{\cos u} - 1}{\frac{1}{\cos u} + 1}\cdot\dfrac{\cos u}{\cos u} = \text{SM}$

83. $\text{PM} = \dfrac{(\text{sen}\,x + \cos x)(\text{sen}^2 x - \text{sen}\,x\cos x + \cos^2 x)}{\text{sen}\,x + \cos x}$

$= \text{sen}^2 x - \text{sen}\,x\cos x + \cos^2 x = \text{SM}$

85. $\text{PM} = \dfrac{1 + \text{sen}\,x}{1 - \text{sen}\,x}\cdot\dfrac{1 + \text{sen}\,x}{1 + \text{sen}\,x} = \dfrac{(1 + \text{sen}\,x)^2}{1 - \text{sen}^2 x}$

$= \dfrac{(1 + \text{sen}\,x)^2}{\cos^2 x} = \left(\dfrac{1 + \text{sen}\,x}{\cos x}\right)^2 = \text{SM}$

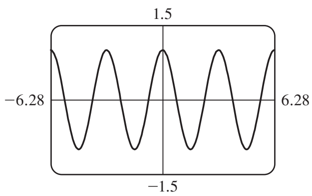
87. $\text{PM} = \left(\dfrac{\text{sen}\,x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen}\,x}\right)^4 = \left(\dfrac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}\,x\cos x}\right)^4$

$= \left(\dfrac{1}{\text{sen}\,x\cos x}\right)^4 = \text{SM}$

89. $\tan\theta$ **91.** $\tan\theta$

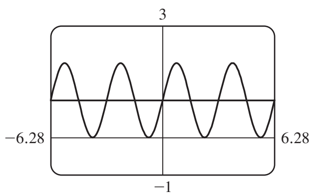
93. $3\cos\theta$

95.



Sí

97.



No

Sección 7.2 ■ página 539

1. $\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **3.** $\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ **5.** $2 - \sqrt{3}$

7. $-\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ **9.** $\sqrt{3} - 2$ **11.** $-\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

13. $\sqrt{2}/2$ **15.** $\frac{1}{2}$ **17.** $\sqrt{3}$

19. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \dfrac{\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\cos u - \cos\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\,u}{\cos\frac{\pi}{2}\cos u + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\,u}$

$= \dfrac{\cos u}{\text{sen}\,u} = \text{SM}$

21. $\text{PM} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\cos u + \text{sen}\,\frac{\pi}{2}\,\text{sen}\, u}$

$= \dfrac{1}{\text{sen}\, u} = \text{SM}$

23. $\text{PM} = \text{sen}\, x\cos\frac{\pi}{2} - \cos x\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = \text{SM}$

25. $\text{PM} = \text{sen}\, x\cos\pi - \cos x\,\text{sen}\,\pi = \text{SM}$

27. $\text{PM} = \dfrac{\tan x - \tan\pi}{1 + \tan x\tan\pi} = \text{SM}$

29. $\text{PM} = \cos x\cos\frac{\pi}{6} - \text{sen}\, x\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6} + \text{sen}\, x\cos\frac{\pi}{3} - \cos x\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \text{SM}$

31. $\text{PM} = \text{sen}\, x\cos y + \cos x\,\text{sen}\, y$

$-(\text{sen}\, x\cos y - \cos x\,\text{sen}\, y) = \text{SM}$

33. $\text{PM} = \dfrac{1}{\tan(x - y)} = \dfrac{1 + \tan x\tan y}{\tan x - \tan y}$

$= \dfrac{1 + \frac{1}{\cot x}\frac{1}{\cot y}}{\frac{1}{\cot x} - \frac{1}{\cot y}} \cdot \dfrac{\cot x\cot y}{\cot x\cot y} = \text{SM}$

35. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x} - \dfrac{\text{sen}\, y}{\cos y} = \dfrac{\text{sen}\, x\cos y - \cos x\,\text{sen}\, y}{\cos x\cos y} = \text{SM}$

37. $\text{PM} = \dfrac{\text{sen}\, x\cos y + \cos x\,\text{sen}\, y - (\text{sen}\, x\cos y - \cos x\,\text{sen}\, y)}{\cos x\cos y - \text{sen}\, x\,\text{sen}\, y + \cos x\cos y + \text{sen}\, x\,\text{sen}\, y}$

$= \dfrac{2\cos x\,\text{sen}\, y}{2\cos x\cos y} = \text{SM}$

39. $\text{PM} = \text{sen}((x + y) + z)$

$= \text{sen}(x + y)\cos z + \cos(x + y)\,\text{sen}\, z$

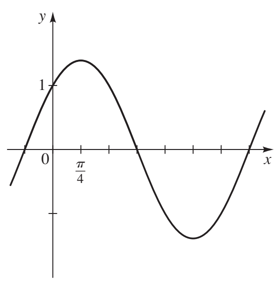
$= \cos z[\text{sen}\, x\cos y + \cos x\,\text{sen}\, y]$

$+ \text{sen}\, z[\cos x\cos y - \text{sen}\, x\,\text{sen}\, y] = \text{SM}$

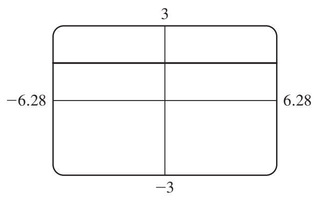
41. $2\,\text{sen}\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$ **43.** $5\sqrt{2}\,\text{sen}\left(2x + \dfrac{7\pi}{4}\right)$

45. **a)** $f(x) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **49.** $\tan\gamma = \frac{17}{6}$

b)



51. **a)**



$\text{sen}^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \text{sen}^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

53. $\pi/2$ **55.** **b)** $k = 10\sqrt{3}, \phi = \pi/6$

Sección 7.3 ■ página 548

1. $\frac{120}{169}, \frac{119}{169}, \frac{120}{119}$ **3.** $-\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, -\frac{24}{7}$ **5.** $\frac{24}{25}, \frac{7}{25}, \frac{24}{7}$

7. $-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{3}{4}$ **9.** $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \cos 2x + \frac{1}{4}\cos 4x\right)$

11. $\frac{1}{16}(1 - \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x\cos 4x)$

13. $\frac{1}{32}\left(\frac{3}{4} - \cos 4x + \frac{1}{4}\cos 8x\right)$ **15.** $\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

17. $\sqrt{2} - 1$ **19.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ **21.** $\sqrt{2} - 1$

23. $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ **25.** $-\frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

27. **a)** $\text{sen}\, 36°$ **b)** $\text{sen}\, 6\theta$ **29.** **a)** $\cos 68°$ **b)** $\cos 10\theta$

31. **a)** $\tan 4°$ **b)** $\tan 2\theta$ **35.** $\sqrt{10}/10, 3\sqrt{10}/10, \frac{1}{3}$

37. $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})/6}, \sqrt{(3 - 2\sqrt{2})/6}, 3 + 2\sqrt{2}$

39. $\sqrt{6}/6, -\sqrt{30}/6, -\sqrt{5}/5$ **41.** $\frac{1}{2}(\text{sen}\, 5x - \text{sen}\, x)$

43. $\frac{1}{2}(\text{sen}\, 5x + \text{sen}\, 3x)$ **45.** $\frac{3}{2}(\cos 11x + \cos 3x)$

47. $2\,\text{sen}\, 4x\cos x$ **49.** $2\,\text{sen}\, 5x\,\text{sen}\, x$

51. $-2\cos\frac{9}{2}x\,\text{sen}\,\frac{5}{2}x$ **53.** $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)/2$ **55.** $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right)$

57. $\sqrt{2}/2$ **59.** $\text{PM} = \cos(2 \cdot 5x) = \text{SM}$

61. $\text{PM} = \text{sen}^2 x + 2\,\text{sen}\, x\cos x + \cos^2 x$

$= 1 + 2\,\text{sen}\, x\cos x = \text{SM}$

63. $\text{PM} = \dfrac{2\,\text{sen}\, 2x\cos 2x}{\text{sen}\, x} = \dfrac{2(2\,\text{sen}\, x\cos x)(\cos 2x)}{\text{sen}\, x} = \text{SM}$

65. $\text{PM} = \dfrac{2(\tan x - \cot x)}{(\tan x + \cot x)(\tan x - \cot x)} = \dfrac{2}{\tan x + \cot x}$

$= \dfrac{2}{\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\text{sen}\, x}} \cdot \dfrac{\text{sen}\, x\cos x}{\text{sen}\, x\cos x} = \dfrac{2\,\text{sen}\, x\cos x}{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}$

$= 2\,\text{sen}\, x\cos x = \text{SM}$

67. $\text{PM} = \tan(2x + x) = \dfrac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\tan x}$

$= \dfrac{\frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\tan x}$

$= \dfrac{2\tan x + \tan x(1 - \tan^2 x)}{1 - \tan^2 x - 2\tan x\tan x} = \text{SM}$

69. $\text{PM} = (\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$

$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \text{SM}$

71. $\text{PM} = \dfrac{2\,\text{sen}\, 3x\cos 2x}{2\cos 3x\cos 2x} = \dfrac{\text{sen}\, 3x}{\cos 3x} = \text{SM}$

73. $\text{PM} = \dfrac{2\,\text{sen}\, 5x\cos 5x}{2\,\text{sen}\, 5x\cos 4x} = \text{SM}$

75. $\text{PM} = \dfrac{2\,\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)\cos\left(\frac{x - y}{2}\right)}$

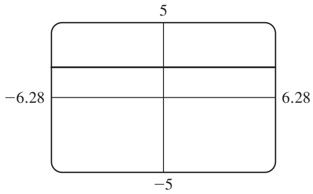
$= \dfrac{\text{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x + y}{2}\right)} = \text{SM}$

81. $\text{PM} = \dfrac{(\text{sen}\, x + \text{sen}\, 5x) + (\text{sen}\, 2x + \text{sen}\, 4x) + \text{sen}\, 3x}{(\cos x + \cos 5x) + (\cos 2x + \cos 4x) + \cos 3x}$

$= \dfrac{2\,\text{sen}\, 3x\cos 2x + 2\,\text{sen}\, 3x\cos x + \text{sen}\, 3x}{2\cos 3x\cos 2x + 2\cos 3x\cos x + \cos 3x}$

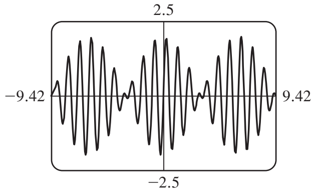
$= \dfrac{\text{sen}\, 3x(2\cos 2x + 2\cos x + 1)}{\cos 3x(2\cos 2x + 2\cos x + 1)} = \text{SM}$

83. a)

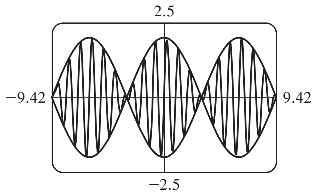


$$\frac{\text{sen } 3x}{\text{sen } x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

85. a)



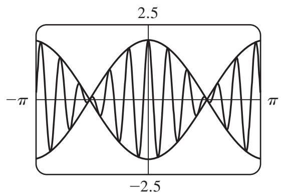
c)



La gráfica de $y = f(x)$ queda entre las otras dos gráficas.

87. a) $P(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1$ **b)** $Q(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t$

93. a) y **c)**

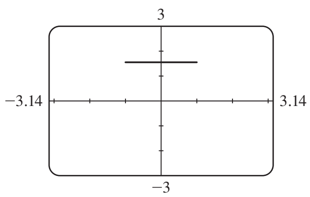


La gráfica de f queda entre las gráficas de $y = 2 \cos t$ y $y = -2 \cos t$. Por lo tanto, la intensidad del sonido varía entre $y = \pm 2 \cos t$.

Sección 7.4 ■ página 557

1. a) $\pi/6$ **b)** $\pi/3$ **c)** No está definida
3. a) $\pi/4$ **b)** $\pi/4$ **c)** $-\pi/4$
5. a) $\pi/2$ **b)** 0 **c)** π
7. a) $\pi/6$ **b)** $-\pi/6$ **c)** No está definida
9. a) 0.13889 **b)** 2.75876
11. a) 0.88998 **b)** No está definida
13. $\frac{1}{4}$ **15.** 5 **17.** $\pi/3$ **19.** $-\pi/6$ **21.** $-\pi/3$
23. $\sqrt{3}/3$ **25.** $\frac{1}{2}$ **27.** $\pi/3$ **29.** $\frac{4}{5}$ **31.** $\frac{12}{13}$
33. $\frac{13}{5}$ **35.** $\sqrt{5}/5$ **37.** $\frac{24}{25}$ **39.** 1 **41.** $\sqrt{1 - x^2}$
43. $x/\sqrt{1 - x^2}$ **45.** $\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$ **47.** 0

49. a)



Conjetura : $y = \pi/2$ para $-1 \le x \le 1$

51. a) 0.28 **b)** $\left(-3 + \sqrt{17}\right)/4$
53. a) $h = 2 \tan \theta$ **b)** $\theta = \tan^{-1}(h/2)$
55. a) $\theta = \text{sen}^{-1}(h/680)$ **b)** $\theta = 0.826$ rad
57. a) 54.1° **b)** 48.3°, 32.2°, 24.5°. La función sen^{-1} no está definida para valores fuera del intervalo $[-1, 1]$.

Sección 7.5 ■ página 568

1. $(2k + 1)\pi$ **3.** $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$

5. $\dfrac{5\pi}{6} + k\pi$ **7.** $\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$

9. $\dfrac{(2k + 1)\pi}{4}$ **11.** $\dfrac{\pi}{3} + k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + k\pi$

13. $\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi$

15. $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi$ **17.** $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ **19.** $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi$

21. $\dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi$ **23.** No hay solución

25. $\dfrac{7\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3}$

27. $\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right), \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$

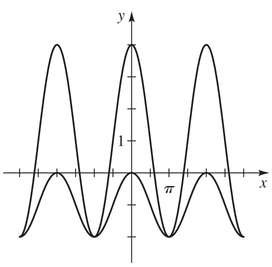
29. $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6} + k\pi\right)$ **31.** $4k\pi$ **33.** $4\left(\dfrac{2\pi}{3} + k\pi\right)$

35. $\dfrac{k\pi}{3}$ **37.** $\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi$

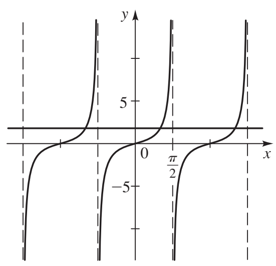
39. $\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2}$ **41.** $\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{5\pi}{9}, \dfrac{7\pi}{9}, \dfrac{11\pi}{9}, \dfrac{13\pi}{9}, \dfrac{17\pi}{9}$

43. $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{4}$ **45.** $\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}$ **47.** $0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$

49. a) $1.15928 + 2k\pi, 5.12391 + 2k\pi$
b) 1.15928, 5.12391
51. a) $1.36944 + 2k\pi, 4.91375 + 2k\pi$
b) 1.36944, 4.91375
53. a) $0.46365 + k\pi, 2.67795 + k\pi$
b) 0.46365, 2.67795, 3.60524, 5.81954
55. a) $0.33984 + 2k\pi, 2.80176 + 2k\pi$
b) 0.33984, 2.80176
57. $((2k + 1)\pi, -2)$



59. $\left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \sqrt{3}\right)$



61. $\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$

63. $\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}$ **65.** $\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

67. 0 **69.** $\frac{k\pi}{2}$ **71.** $\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$

73. 0, ±0.95 **75.** 1.92 **77.** ±0.71

79. 0.94721° o 89.05279° **81.** 44.95°

83. a) 34o. día (3 de febrero), 308o. día (4 de noviembre)
b) 275 días

85. b) $1.047 \approx 60°$

Capítulo 7 Repaso ■ página 571

1. $\text{PM} = \text{sen}\,\theta\left(\frac{\cos\theta}{\text{sen}\,\theta} + \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\right) = \cos\theta + \frac{\text{sen}^2\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \text{SM}$

3. $\text{PM} = (1 - \text{sen}^2 x)\csc x - \csc x$

$= \csc x - \text{sen}^2 x \csc x - \csc x$

$= -\text{sen}^2 x \frac{1}{\text{sen}\,x} = \text{SM}$

5. $\text{PM} = \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} - \frac{\tan^2 x}{\text{sen}^2 x} = \cot^2 x - \frac{1}{\cos^2 x} = \text{SM}$

7. $\text{PM} = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}(1 - \text{sen}\,x)} = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x} - \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}} = \text{SM}$

9. $\text{PM} = \text{sen}^2 x \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} + \cos^2 x \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x + \text{sen}^2 x = \text{SM}$

11. $\text{PM} = \frac{2\,\text{sen}\,x \cos x}{1 + 2\cos^2 x - 1} = \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{2\cos^2 x} = \frac{2\,\text{sen}\,x}{2\cos x} = \text{SM}$

13. $\text{PM} = \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\,x} = \frac{1}{\text{sen}\,x} - \frac{\cos x}{\text{sen}\,x} = \text{SM}$

15. $\text{PM} = \frac{1}{2}[\cos((x + y) - (x - y))$

$- \cos((x + y) + (x - y))]$

$= \frac{1}{2}(\cos 2y - \cos 2x)$

$= \frac{1}{2}[1 - 2\,\text{sen}^2 y - (1 - 2\,\text{sen}^2 x)]$

$= \frac{1}{2}(2\,\text{sen}^2 x - 2\,\text{sen}^2 y) = \text{SM}$

17. $\text{PM} = 1 + \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\text{sen}\,x} = 1 + \frac{1 - \cos x}{\cos x}$

$= 1 + \frac{1}{\cos x} - 1 = \text{SM}$

19. $\text{PM} = \cos^2\frac{x}{2} - 2\,\text{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \text{sen}^2\frac{x}{2}$

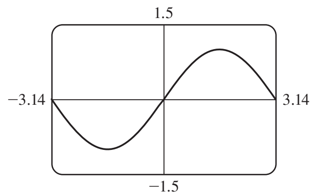
$= 1 - \text{sen}\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \text{SM}$

21. $\text{PM} = \frac{2\,\text{sen}\,x\cos x}{\text{sen}\,x} - \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos x}$

$= 2\cos x - 2\cos x + \frac{1}{\cos x} = \text{SM}$

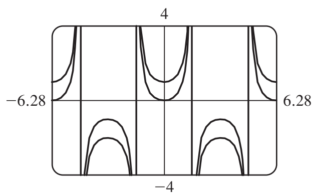
23. $\text{PM} = \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan x \tan\frac{\pi}{4}} = \text{SM}$

25. a)



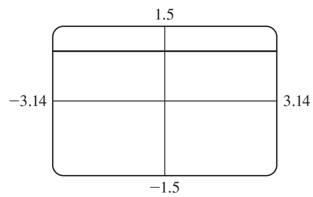
b) Sí

27. a)



b) No

29. a)



$2\,\text{sen}^2 3x + \cos 6x = 1$

31. 0, π **33.** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ **35.** $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ **37.** $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

39. $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}$ **41.** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$

43. $\frac{\pi}{6}$ **45.** 1.18 **47. a)** 63.4° **b)** No **c)** 90°

49. $\frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ **51.** $\sqrt{2} - 1$ **53.** $\sqrt{2}/2$

55. $\sqrt{2}/2$ **57.** $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$ **59.** $2\frac{\sqrt{10} + 1}{9}$

61. $\frac{2}{3}(\sqrt{2} + \sqrt{5})$ **63.** $\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})/6}$ **65.** $\pi/3$

67. $\frac{1}{2}$ **69.** $2/\sqrt{21}$ **71.** $\frac{7}{9}$ **73.** $x/\sqrt{1 + x^2}$

75. $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$ **77. a)** $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{x}\right)$ **b)** 286.4 pies

Capítulo 7 Evaluación ■ página 574

1. a) $\text{PM} = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}\,\text{sen}\,\theta + \cos\theta = \frac{\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta} = \text{SM}$

b) $\text{PM} = \frac{\tan x}{1 - \cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\tan x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$

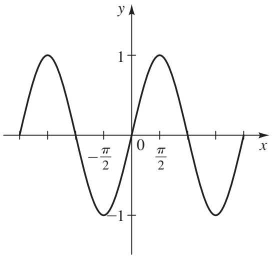
$= \frac{\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}(1 + \cos x)}{\text{sen}^2 x} = \frac{1}{\text{sen}\,x} \cdot \frac{1 + \cos x}{\cos x} = \text{SM}$

c) $\text{PM} = \dfrac{2\tan x}{\sec^2 x} = \dfrac{2\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\cos^2 x = 2\operatorname{sen} x\cos x = \text{SM}$

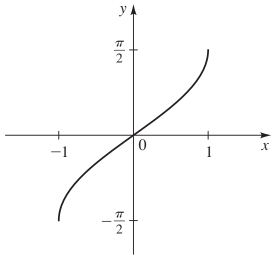
3. a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

5. a) $\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 8x - \operatorname{sen} 2x)$ **b)** $-2\cos\frac{7}{2}x\operatorname{sen}\frac{3}{2}x$

7.



Dominio $\mathbb{R}$

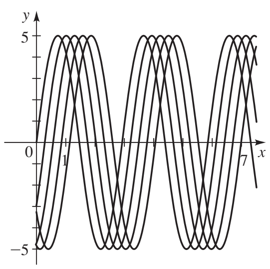


Dominio $[-1, 1]$

9. a) $\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$ **b)** $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}$ **11.** $\frac{40}{41}$

Enfoque en el modelado ■ página 578

1. a) $y = -5\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$ **b)**



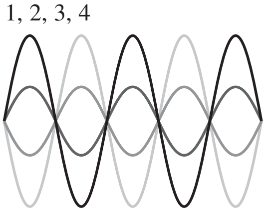
c) $v = \pi/4$ Sí, es una onda progresiva.

3. $y(x, t) = 2.7\operatorname{sen}(0.68x - 4.10t)$

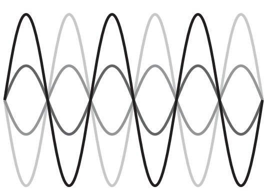
5. $y(x, t) = 0.6\operatorname{sen}(\pi x)\cos(40\pi t)$

7. a) 1, 2, 3, 4

b) 5:



6:



c) 880π

d) $y(x, t) = \operatorname{sen} t\cos(880\pi t)$;

$y(x, t) = \operatorname{sen}(2t)\cos(880\pi t)$;

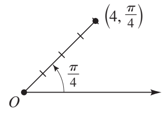
$y(x, t) = \operatorname{sen}(3t)\cos(880\pi t)$;

$y(x, t) = \operatorname{sen}(4t)\cos(880\pi t)$

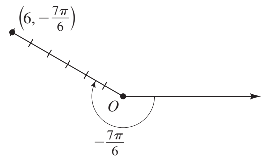
Capítulo 8

Sección 8.1 ■ página 586

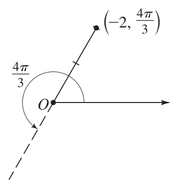
1.



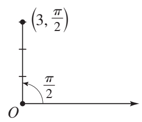
3.



5.

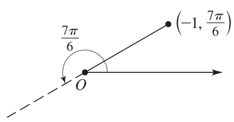


7.



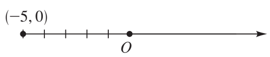
$\left(-3, \dfrac{3\pi}{2}\right), \left(3, \dfrac{5\pi}{2}\right)$

9.



$\left(-1, -\dfrac{5\pi}{6}\right), \left(1, \dfrac{\pi}{6}\right)$

11.



$(-5, 2\pi), (5, \pi)$

13. Q **15.** Q **17.** P **19.** P **21.** $(3\sqrt{2}, 3\pi/4)$

23. $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ **25.** $(2\sqrt{3}, 2)$ **27.** $(1, -1)$

29. $(-5, 0)$ **31.** $(3\sqrt{6}, -3\sqrt{2})$ **33.** $(\sqrt{2}, 3\pi/4)$

35. $(4, \pi/4)$ **37.** $\left(5, \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$ **39.** $(6, \pi)$

41. $\theta = \pi/4$ **43.** $r = \tan\theta\sec\theta$ **45.** $r = 4\sec\theta$

47. $x^2 + y^2 = 49$ **49.** $x = 6$ **51.** $x^2 + y^2 = \dfrac{y}{x}$

53. $y - x = 1$ **55.** $x^2 + y^2 = (x^2 + y^2 - x)^2$

57. $x = 2$ **59.** $y = \pm\sqrt{3}x$

Sección 8.2 ■ página 594

1. VI **3.** II **5.** I

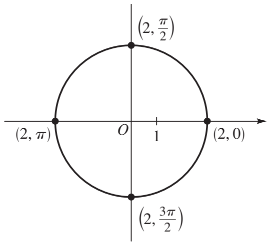
7. Simétrica con respecto a $\theta = \pi/2$

9. Simétrica con respecto al eje polar

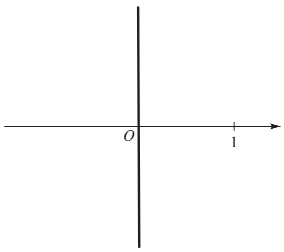
11. Simétrica con respecto a $\theta = \pi/2$

13. Los tres tipos de simetría

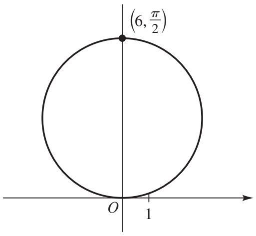
15.



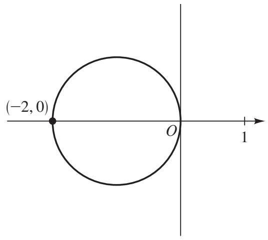
17.



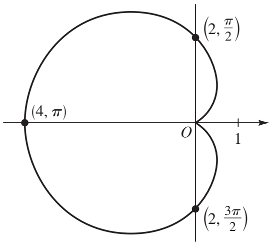
19.



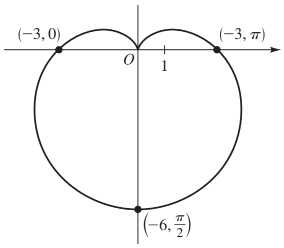
21.



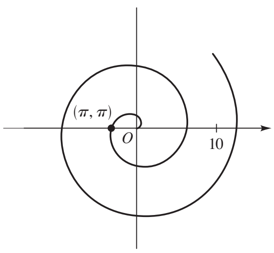
23.



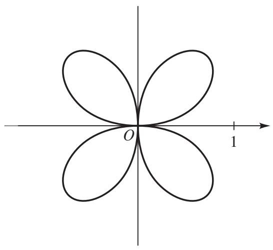
25.



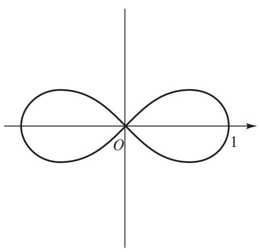
27.



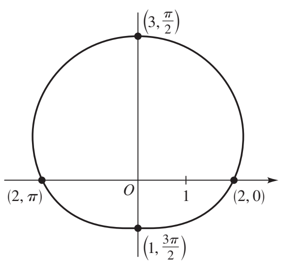
29.



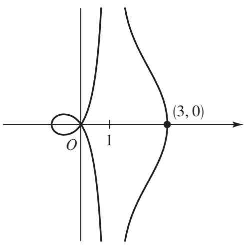
31.



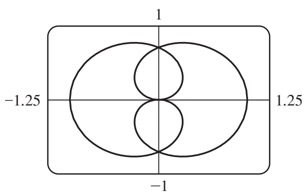
33.



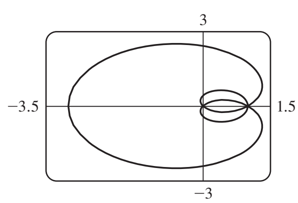
35.



37. $0 \le \theta \le 4\pi$



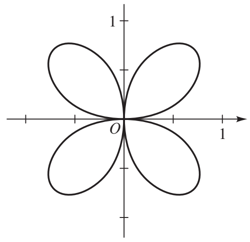
39. $0 \le \theta \le 4\pi$



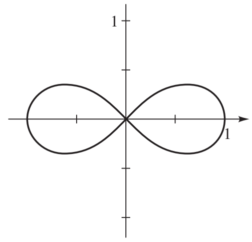
41. La gráfica de $r = 1 + \operatorname{sen} n\theta$ tiene n bucles.

43. IV **45.** III

47.

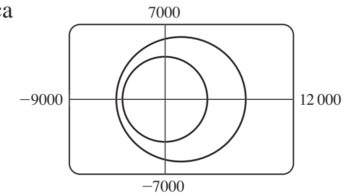


49.



51. $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right), \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$

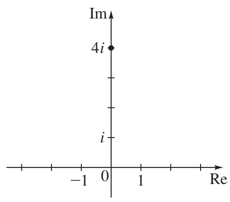
53. a) Elíptica



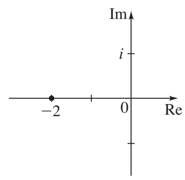
b) π; 540 millas

Sección 8.3 ■ página 603

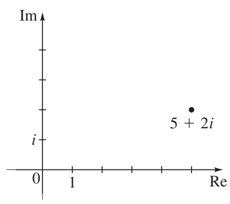
1. 4



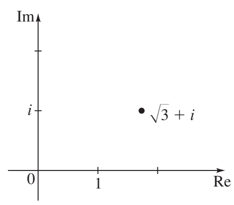
3. 2



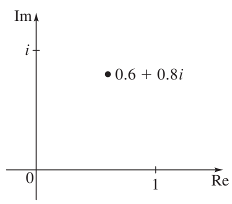
5. $\sqrt{29}$



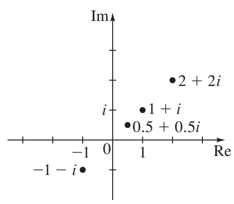
7. 2



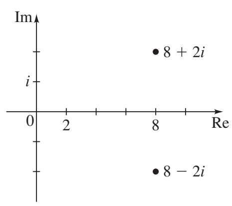
9. 1



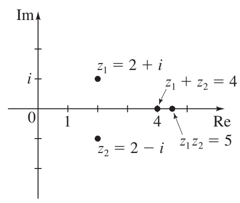
11.



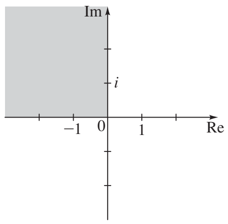
13.



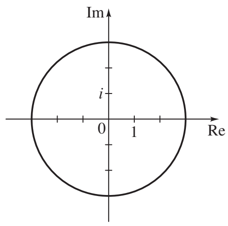
15.



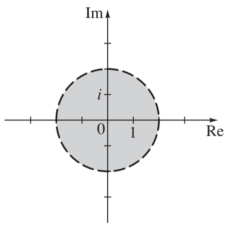
17.



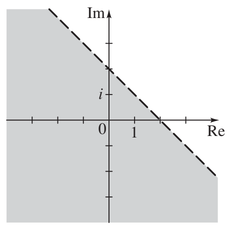
19.



21.



23.



25. $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$ **27.** $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$

29. $4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$ **31.** $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$

33. $5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$ **35.** $8\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

37. $20(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$ **39.** $5\left[\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\tfrac{4}{3}\right)\right]$

41. $3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **43.** $8\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

45. $\sqrt{5}\left[\cos\left(\tan^{-1}\tfrac{1}{2}\right) + i\operatorname{sen}\left(\tan^{-1}\tfrac{1}{2}\right)\right]$

47. $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

49. $z_1z_2 = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{4\pi}{3}$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{3}$

51. $z_1z_2 = 15\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3}{5}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} - i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$

53. $z_1z_2 = 8(\cos 150° + i\operatorname{sen} 150°)$

$z_1/z_2 = 2(\cos 90° + i\operatorname{sen} 90°)$

55. $z_1z_2 = 100(\cos 350° + i\operatorname{sen} 350°)$

$z_1/z_2 = \tfrac{4}{25}(\cos 50° + i\operatorname{sen} 50°)$

57. $z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)$

$z_1z_2 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \cos\dfrac{\pi}{6} - i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}$

$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{6} - i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

59. $z_1 = 4\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$z_1z_2 = 4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{12}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{12}\right)$

$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{4}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} - i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{6}\right)$

61. $z_1 = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = 4(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$

$z_1z_2 = 20\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

63. $z_1 = 20(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$

$z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)$

$z_1z_2 = 40\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{6}\right)$

$\dfrac{z_1}{z_2} = 10\left(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{6}\right)$

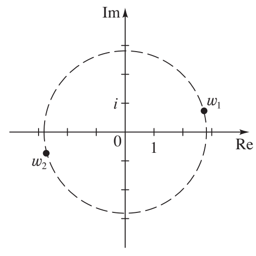
$\dfrac{1}{z_1} = \tfrac{1}{20}(\cos\pi - i\operatorname{sen}\pi)$

65. -1024 **67.** $512(-\sqrt{3} + i)$ **69.** -1 **71.** 4096

73. $8(-1 + i)$ **75.** $\tfrac{1}{2048}(-\sqrt{3} - i)$

77. $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{12}\right)$,

$2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{13\pi}{12} + i\operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{12}\right)$

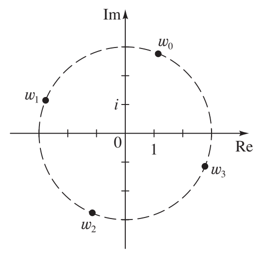


79. $3\left(\cos\dfrac{3\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{8}\right)$,

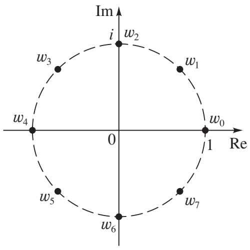
$3\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{8}\right)$,

$3\left(\cos\dfrac{11\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{11\pi}{8}\right)$,

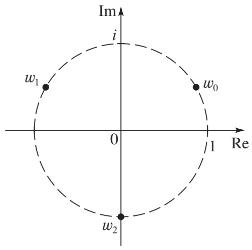
$3\left(\cos\dfrac{15\pi}{8} + i\operatorname{sen}\dfrac{15\pi}{8}\right)$



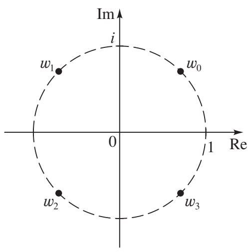
81. $\pm 1, \pm i, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$



83. $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -i$



85. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$



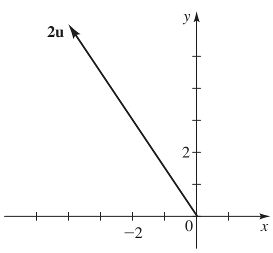
87. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$

89. $2\left(\cos\frac{\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{18}\right), 2\left(\cos\frac{13\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{18}\right),$
$2\left(\cos\frac{25\pi}{18} + i \operatorname{sen}\frac{25\pi}{18}\right)$

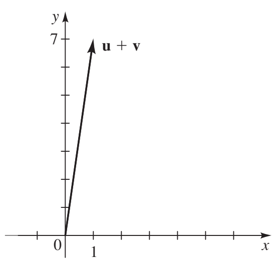
91. $2^{1/6}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}\right), 2^{1/6}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{13\pi}{12}\right),$
$2^{1/6}\left(\cos\frac{21\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{21\pi}{12}\right)$

Sección 8.4 ■ página 615

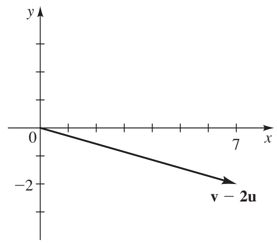
1.



3.



5.



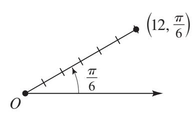
7. $\langle 3, 3\rangle$ **9.** $\langle 3, -1\rangle$ **11.** $\langle 5, 7\rangle$ **13.** $\langle -4, -3\rangle$
15. $\langle 0, 2\rangle$ **17.** $\langle 4, 14\rangle, \langle -9, -3\rangle, \langle 5, 8\rangle, \langle -6, 17\rangle$
19. $\langle 0, -2\rangle, \langle 6, 0\rangle, \langle -2, -1\rangle, \langle 8, -3\rangle$
21. $4\mathbf{i}, -9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j}, -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$
23. $\sqrt{5}, \sqrt{13}, 2\sqrt{5}, \frac{1}{2}\sqrt{13}, \sqrt{26}, \sqrt{10}, \sqrt{5} - \sqrt{13}$
25. $\sqrt{101}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{101}, \sqrt{2}, \sqrt{73}, \sqrt{145}, \sqrt{101} - 2\sqrt{2}$
27. $20\sqrt{3}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$ **29.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$
31. $4 \cos 10°\mathbf{i} + 4 \operatorname{sen} 10°\mathbf{j} \approx 3.94\mathbf{i} + 0.69\mathbf{j}$
33. 5, 53.13° **35.** 13, 157.38° **37.** 2, 60°
39. $15\sqrt{3}, -15$ **41.** $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$
43. **a)** $40\mathbf{j}$ **b)** $425\mathbf{i}$ **c)** $425\mathbf{i} + 40\mathbf{j}$
d) 427 millas/h, N 84.6° E **45.** 794 millas/h, N 26.6° W
47. **a)** $10\mathbf{i}$ **b)** $10\mathbf{i} + 17.32\mathbf{j}$ **c)** $20\mathbf{i} + 17.32\mathbf{j}$
d) 26.5 millas/h, N 49.1° E
49. **a)** $22.8\mathbf{i} + 7.4\mathbf{j}$ **b)** 7.4 millas/h, 22.8 millas/h
51. **a)** $\langle 5, -3\rangle$ **b)** $\langle -5, 3\rangle$ **53.** **a)** $-4\mathbf{j}$ **b)** $4\mathbf{j}$
55. **a)** $\langle -7.57, 10.61\rangle$ **b)** $\langle 7.57, -10.61\rangle$
57. $\mathbf{T}_1 \approx -56.5\mathbf{i} + 67.4\mathbf{j}, \mathbf{T}_2 \approx 56.5\mathbf{i} + 32.6\mathbf{j}$

Sección 8.5 ■ página 624

1. **a)** 2 **b)** 45° **3.** **a)** 13 **b)** 56° **5.** **a)** −1 **b)** 97°
7. **a)** $5\sqrt{3}$ **b)** 30° **9.** Sí **11.** No **13.** Sí
15. 9 **17.** −5 **19.** $-\frac{12}{5}$ **21.** −24
23. **a)** $\langle 1, 1\rangle$ **b)** $\mathbf{u}_1 = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle -3, 3\rangle$
25. **a)** $\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ **b)** $\mathbf{u}_1 = \langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle$
27. **a)** $\langle -\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\rangle$ **b)** $\mathbf{u}_1 = \langle -\frac{18}{5}, \frac{24}{5}\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle \frac{28}{5}, \frac{21}{5}\rangle$
29. −28 **31.** 25 **39.** 16 pies-lb **41.** 8660 pies-lb
43. 1164 lb **45.** 23.6°

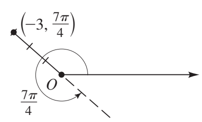
Capítulo 8 Repaso ■ página 627

1. **a)**



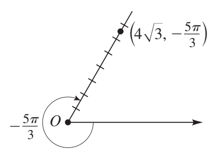
b) $(6\sqrt{3}, 6)$

3. **a)**



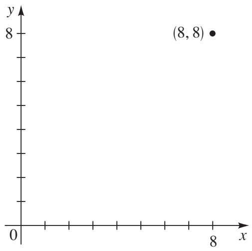
b) $\left(\frac{-3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

5. **a)**



b) $(2\sqrt{3}, 6)$

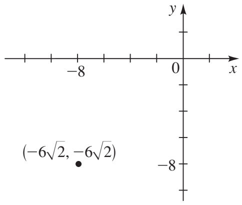
7. a)



b) $\left(8\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$

c) $\left(-8\sqrt{2}, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

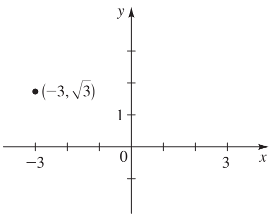
9. a)



b) $\left(12, \dfrac{5\pi}{4}\right)$

c) $\left(-12, \dfrac{\pi}{4}\right)$

11. a)

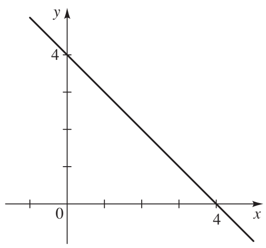


b) $\left(2\sqrt{3}, \dfrac{5\pi}{6}\right)$

c) $\left(-2\sqrt{3}, -\dfrac{\pi}{6}\right)$

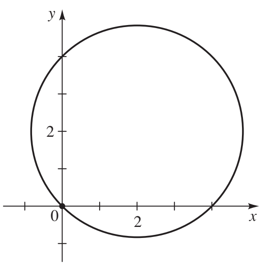
13. a) $r = \dfrac{4}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

b)

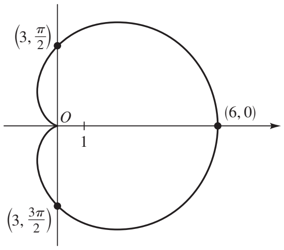


15. a) $r = 4(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)$

b)

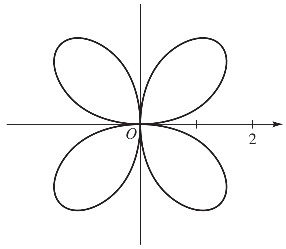


17. a)



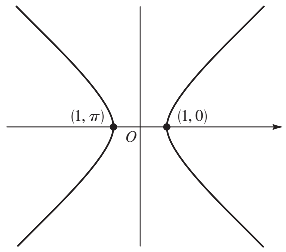
b) $(x^2 + y^2 - 3x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

19. a)



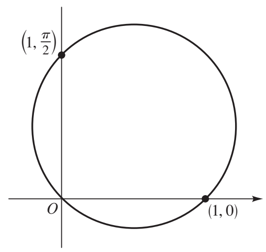
b) $(x^2 + y^2)^3 = 16x^2y^2$

21. a)



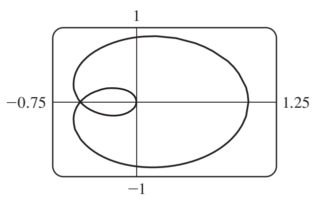
b) $x^2 - y^2 = 1$

23. a)

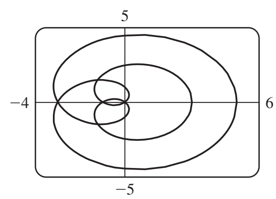


b) $x^2 + y^2 = x + y$

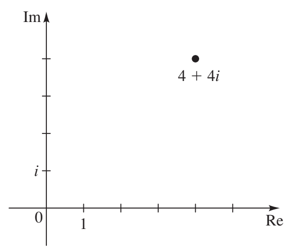
25. $0 \le \theta \le 6\pi$



27. $0 \le \theta \le 6\pi$

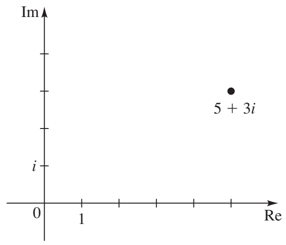


29. a)



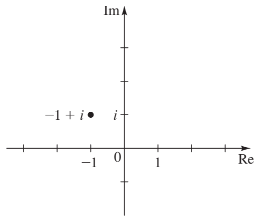
b) $4\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}$ **c)** $4\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)$

31. a)



b) $\sqrt{34}, \tan^{-1}(\frac{3}{5})$ **c)** $\sqrt{34}[\cos(\tan^{-1}\frac{3}{5}) + i\,\mathrm{sen}(\tan^{-1}\frac{3}{5})]$

33. a)



b) $\sqrt{2}, \dfrac{3\pi}{4}$ **c)** $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{3\pi}{4}\right)$

35. $8(-1 + i\sqrt{3})$ **37.** $-\frac{1}{32}(1 + i\sqrt{3})$

39. $\pm 2\sqrt{2}(1 - i)$ **41.** $\pm 1, \pm\frac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

43. $\sqrt{13}, \langle 6, 4\rangle, \langle -10, 2\rangle, \langle -4, 6\rangle, \langle -22, 7\rangle$

45. $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ **47.** $(10, -2)$

49. a) $(4.8\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) \times 10^4$ **b)** 4.8×10^4 lb, N 85.2° E

51. 5, 25, 60 **53.** $2\sqrt{2}$, 8, 0 **55.** Sí **57.** No, 45°

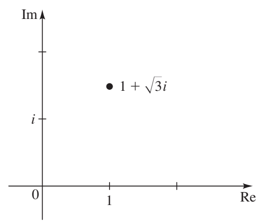
59. a) $17\sqrt{37}/37$ **b)** $\langle \frac{102}{37}, -\frac{17}{37}\rangle$

c) $\mathbf{u}_1 = \langle \frac{102}{37}, -\frac{17}{37}\rangle, \mathbf{u}_2 = \langle \frac{9}{37}, \frac{54}{37}\rangle$ **61.** -6

Capítulo 8 Evaluación ■ página 629

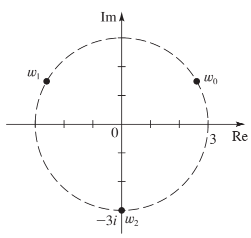
1. a) $(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$ **b)** $(4\sqrt{3}, 5\pi/6), (-4\sqrt{3}, 11\pi/6)$

3. a)



b) $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3}\right)$ **c)** -512

5. $-3i, 3\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)$



7. a) $\langle 19, -3\rangle$ **b)** $5\sqrt{2}$ **c)** 0 **d)** Sí

9. a) $14\mathbf{i} + 6\sqrt{3}\,\mathbf{j}$ **b)** 17.4 millas/h, N 53.4° E **11.** 90

Enfoque en el modelado ■ página 632

1. a) $R = 18/\pi \approx 5.73$ **b)** 691.2 millas

3. a) $x \approx -12.23, y \approx 6.27$ **b)** $x \approx 3.76, y \approx 8.43$

c) $x \approx 15.12, y \approx -3.85$ **d)** $x \approx -4.31, y \approx -2.42$

5. a) 1.14 **b)** 1.73 **c)** 36.81

7. a) 1.48 **b)** 1.21 **c)** 1.007

Capítulo 9

Sección 9.1 ■ página 642

1. $(3, 1)$ **3.** $(4, 16), (-3, 9)$ **5.** $(2, -2), (-2, 2)$

7. $(-25, 5), (-25, -5)$ **9.** $(1, 2)$ **11.** $(-3, 4), (3, 4)$

13. $(-2, -1), (-2, 1), (2, -1), (2, 1)$

15. $(-1, \sqrt{2}), (-1, -\sqrt{2}), (\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}), (\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}})$

17. $(-2, 3)$ **19.** $(2, 4), (-\frac{5}{2}, \frac{7}{4})$

21. $(0, 0), (1, -1), (-2, -4)$ **23.** $(4, 0)$ **25.** $(-2, -2)$

27. $(6, 2), (-2, -6)$ **29.** No hay solución

31. $(\sqrt{5}, 2), (\sqrt{5}, -2), (-\sqrt{5}, 2), (-\sqrt{5}, -2)$

33. $(3, -\frac{1}{2}), (-3, -\frac{1}{2})$ **35.** $(\frac{1}{5}, \frac{1}{3})$ **37.** $(-0.33, 5.33)$

39. $(2.00, 20.00), (-8.00, 0)$

41. $(-4.51, 2.17), (4.91, -0.97)$

43. $(1.23, 3.87), (-0.35, -4.21)$

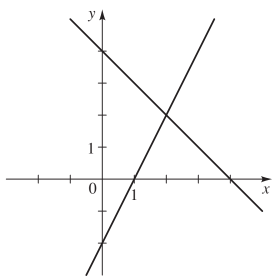
45. $(-2.30, -0.70), (0.48, -1.19)$

47. 12 por 15 cm **49.** 15, 20

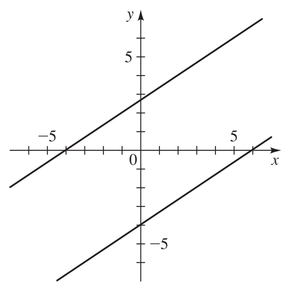
51. $(400.50, 200.25)$, 447.77 m **53.** $(12, 8)$

Sección 9.2 ■ página 649

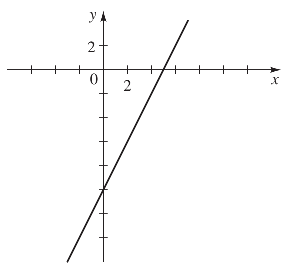
1. $(2, 2)$



3. No hay solución



5. Una cantidad infinita de soluciones



7. $(2, 2)$ **9.** $(3, -1)$ **11.** $(2, 1)$ **13.** $(3, 5)$ **15.** $(1, 3)$

17. $(10, -9)$ **19.** No hay solución **21.** No hay solución

23. $\left(x, \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ **25.** $\left(x, 3 - \frac{3}{2}x\right)$ **27.** $(-3, -7)$
29. $\left(x, 5 - \frac{5}{6}x\right)$ **31.** $(5, 10)$ **33.** No hay solución
35. $(3.87, 2.74)$ **37.** $(61.00, 20.00)$
39. $\left(-\dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}\right)$ **41.** $\left(\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{a+b}\right)$ **43.** 22, 12
45. 5 de 10 centavos, 9 de 25 centavos
47. La velocidad del avión es de 120 millas/h, la velocidad del viento es de 30 millas/h
49. Corre a 5 millas/h, va en bicicleta a 20 millas/h
51. 200 g de A, 40 g de B **53.** 25%, 10%
55. \$16 000 al 10%, \$32 000 al 6% **57.** 25

Sección 9.3 ■ página 657

1. Lineal **3.** No lineal **5.** $(1, 3, 2)$
7. $(4, 0, 3)$ **9.** $\left(5, 2, -\frac{1}{2}\right)$
11. $\begin{cases} x - 2y - z = 4 \\ -y - 4z = 4 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 4 \\ 3y + 7z = 14 \end{cases}$
15. $(1, 2, 1)$ **17.** $(5, 0, 1)$ **19.** $(0, 1, 2)$
21. $(1 - 3t, 2t, t)$ **23.** No hay solución
25. No hay solución **27.** $(3 - t, -3 + 2t, t)$
29. $\left(2 - 2t, -\frac{2}{3} + \frac{4}{3}t, t\right)$ **31.** $(1, -1, 1, 2)$
33. 30 000 dólares en bonos de corto plazo, 30 000 dólares en bonos de plazo intermedio, 40 000 dólares en bonos de largo plazo
35. Imposible
37. 250 acres de maíz, 500 acres con trigo, 450 acres con soya

Sección 9.4 ■ página 673

1. 3×2 **3.** 2×1 **5.** 1×3
7. a) Sí **b)** Sí **c)** $\begin{cases} x = -3 \\ y = 5 \end{cases}$
9. a) Sí **b)** No **c)** $\begin{cases} x + 2y + 8z = 0 \\ y + 3z = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$
11. a) No **b)** No **c)** $\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y + 5z = 1 \end{cases}$
13. a) Sí **b)** Sí **c)** $\begin{cases} x + 3y - w = 0 \\ z + 2w = 0 \\ 0 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$
15. $(1, 1, 2)$ **17.** $(1, 0, 1)$ **19.** $(-1, 0, 1)$ **21.** $(-1, 5, 0)$
23. $(10, 3, -2)$ **25.** No hay solución **27.** $(2 - 3t, 3 - 5t, t)$
29. No hay solución **31.** $(-2t + 5, t - 2, t)$
33. $x = -\frac{1}{2}s + t + 6, y = s, z = t$ **35.** $(-2, 1, 3)$
37. $(-9, 2, 0)$ **39.** $(0, -3, 0, -3)$ **41.** $(-1, 0, 0, 1)$
43. $\left(\frac{7}{4} - \frac{7}{4}t, -\frac{7}{4} + \frac{3}{4}t, \frac{9}{4} + \frac{3}{4}t, t\right)$
45. $x = \frac{1}{3}s - \frac{2}{3}t, y = \frac{1}{3}s + \frac{1}{3}t, z = s, w = t$
47. 2 VitaMax, 1 Vitron, 2 VitaPlus
49. Correr 5 millas, nadar 2 millas, 30 millas en bicicleta
51. Imposible

Sección 9.5 ■ página 684

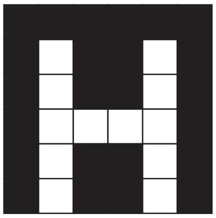
1. No **3.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ **5.** $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 12 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ **7.** Imposible
9. $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 7 & 10 & -7 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
13. No hay solución **15.** $\begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -25 & -20 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$
17. $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & -6 \end{bmatrix}$
21. $\begin{bmatrix} 13 & -\frac{7}{2} & 15 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ **23.** $\begin{bmatrix} -14 & -8 & -30 \\ -6 & 10 & -24 \end{bmatrix}$
25. Imposible **27.** $\begin{bmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ **29.** $\begin{bmatrix} 28 & 21 & 28 \end{bmatrix}$
31. $\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$ **33.** $\begin{bmatrix} 8 & -335 \\ 0 & 343 \end{bmatrix}$ **35.** Imposible
37. Imposible **39.** $x = 2, y = -1$
41. $x = 1, y = -2$ **43.** $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$
45. $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$
47. Sólo ACB está definido. $ACB = \begin{bmatrix} -3 & -21 & 27 & -6 \\ -2 & -14 & 18 & -4 \end{bmatrix}$
49. a) $\begin{bmatrix} 4690 & 1690 & 13\,210 \end{bmatrix}$ **b)** La ganancia total en Santa Mónica, Long Beach y Anaheim, respectivamente.
51. a) $\begin{bmatrix} 105\,000 & 58\,000 \end{bmatrix}$ **b)** El primer elemento es la cantidad total, en onzas, de la salsa de jitomate producida, y el segundo elemento es la cantidad total, en onzas, de pasta de jitomate producida.

53.
a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$



e) La letra E

Sección 9.6 ■ página 697

5. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$ **7.** $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$

11. No hay inversa **13.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} -4 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix}$ **17.** No hay inversa

19. $\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$ **21.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

23. $x = 8, y = -12$ **25.** $x = 126, y = -50$
27. $x = -38, y = 9, z = 47$ **29.** $x = -20, y = 10, z = 16$
31. $x = 3, y = 2, z = 1$ **33.** $x = 3, y = -2, z = 2$
35. $x = 8, y = 1, z = 0, w = 3$

37. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 10 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ **39.** $\frac{1}{2a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

41. $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ -\frac{1}{x} & \frac{2}{x^2} \end{bmatrix}$; no existe inversa para $x = 0$

43. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & e^{-x} & 0 \\ e^{-x} & -e^{-2x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; existe la inversa para toda x

45. $\begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$; existe la inversa para toda x

47. a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ **b)** 1 oz A, 1 oz B, 2 oz C
c) 2 oz A, 0 oz B, 1 oz C **d)** No

49. a) $\begin{cases} x + y + 2z = 675 \\ 2x + y + z = 600 \\ x + 2y + z = 625 \end{cases}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 675 \\ 600 \\ 625 \end{bmatrix}$

c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Gana 125 dólares en una enciclopedia estándar, 150 dólares en una de lujo y 200 dólares por una enciclopedia con pasta de piel.

Sección 9.7 ■ página 713

1. 6 **3.** -4 **5.** No existe **7.** $\frac{1}{8}$ **9.** 20, 20 **11.** -12, 12
13. 0, 0 **15.** 4, tiene inversa **17.** -6, tiene inversa
19. 5000, tiene inversa **21.** -4, tiene inversa **23.** -18
25. 120 **27. a)** -2 **b)** -2 **c)** Sí **29.** $(-2, 5)$
31. $(0.6, -0.4)$ **33.** $(4, -1)$ **35.** $(4, 2, -1)$ **37.** $(1, 3, 2)$
39. $(0, -1, 1)$ **41.** $\left(\frac{189}{29}, -\frac{108}{29}, \frac{88}{29}\right)$ **43.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -1\right)$
45. $abcde$ **47.** 0, 1, 2 **49.** 1, -1 **51.** 21 **53.** $\frac{63}{2}$

57. a) $\begin{cases} 100a + 10b + c = 25 \\ 225a + 15b + c = 33\frac{3}{4} \\ 1600a + 40b + c = 40 \end{cases}$

b) $y = -0.05x^2 + 3x$

Sección 9.8 ■ página 720

1. $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$ **3.** $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+4}$

5. $\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ **7.** $\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$

9. $\frac{A}{x} + \frac{B}{2x-5} + \frac{C}{(2x-5)^2} + \frac{D}{(2x-5)^3} + \frac{Ex+F}{x^2+2x+5} + \frac{Gx+H}{(x^2+2x+5)^2}$

11. $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$ **13.** $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+4}$

15. $\frac{2}{x-3} - \frac{2}{x+3}$ **17.** $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$

19. $\frac{3}{x-4} - \frac{2}{x+2}$ **21.** $\frac{-\frac{1}{2}}{2x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{4x-3}$

23. $\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{2x-1}$ **25.** $\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

27. $\frac{1}{2x+3} - \frac{3}{(2x+3)^2}$ **29.** $\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x+2}$

31. $\dfrac{4}{x+2} - \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{(x-1)^2} + \dfrac{1}{(x-1)^3}$

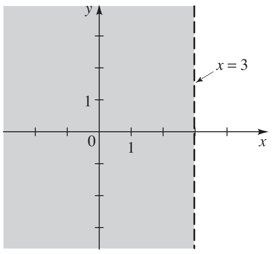
33. $\dfrac{3}{x+2} - \dfrac{1}{(x+2)^2} - \dfrac{1}{(x+3)^2}$ **35.** $\dfrac{x+1}{x^2+3} - \dfrac{1}{x}$

37. $\dfrac{2x-5}{x^2+x+2} + \dfrac{5}{x^2+1}$ **39.** $\dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{x+2}{(x^2+1)^2} + \dfrac{1}{x}$

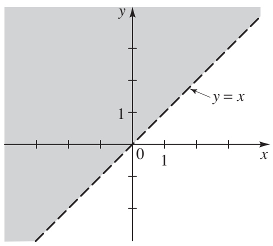
41. $x^2 + \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{x+1}{x^2+1}$ **43.** $A = \dfrac{a+b}{2}, B = \dfrac{a-b}{2}$

Sección 9.9 ■ página 726

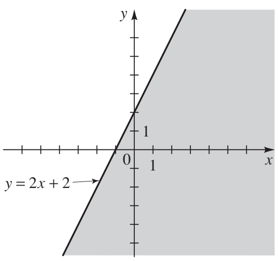
1.



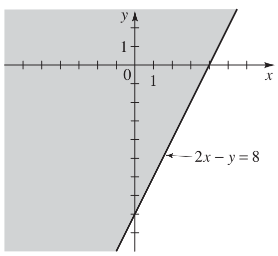
3.



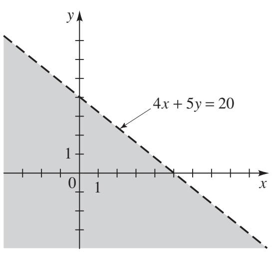
5.



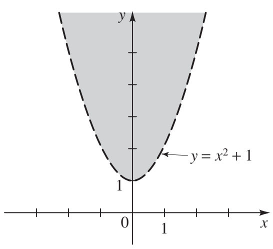
7.



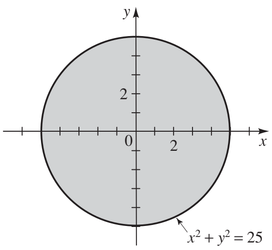
9.



11.

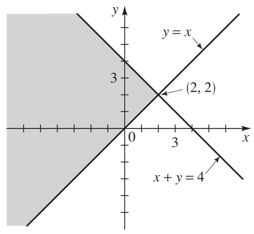


13.



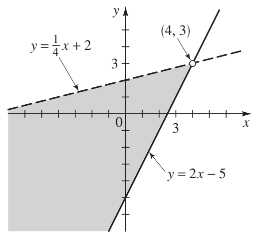
15. $y \le \frac{1}{2}x - 1$
17. $x^2 + y^2 > 4$

19.



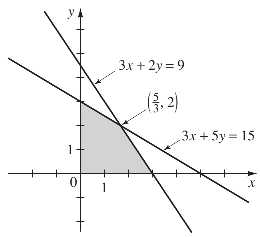
no acotada

21.



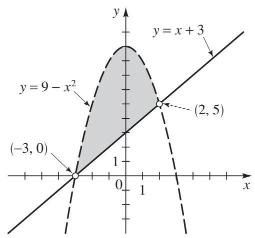
no acotada

23.



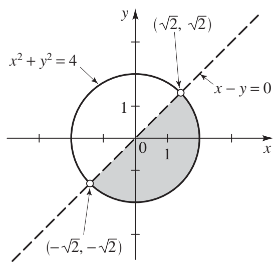
acotada

25.



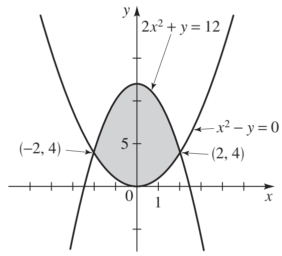
acotada

27.



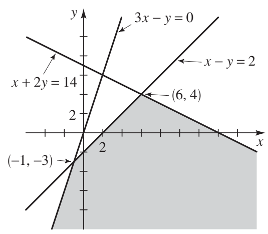
acotada

29.



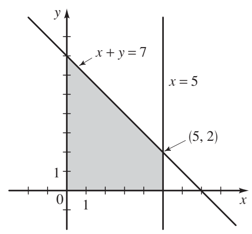
acotada

31.



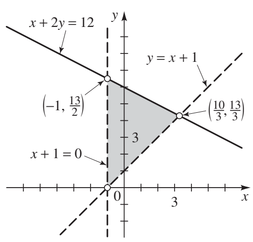
no acotada

33.



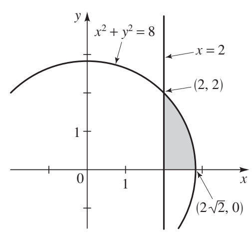
acotada

35.



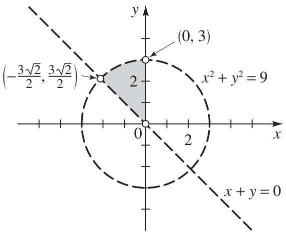
acotada

37.



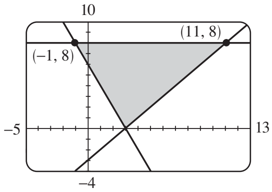
acotada

39.

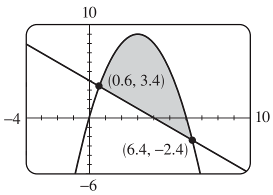


acotada

41.

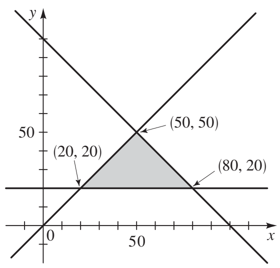


43.



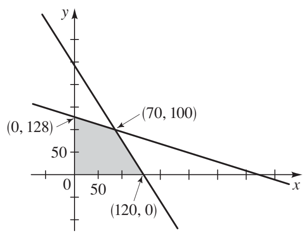
45. x = libros de ficción
y = libros de no ficción

$$\begin{cases} x + y \le 100 \\ 20 \le y, x \ge y \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$



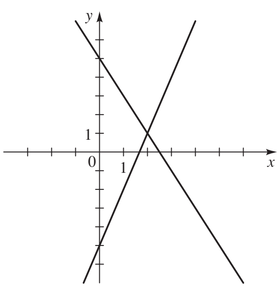
47. x = número de paquetes estándar
y = número de paquetes de lujo

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}y \le 80 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}y \le 90 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

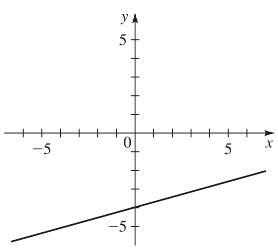


Capítulo 9 Repaso ■ página 728

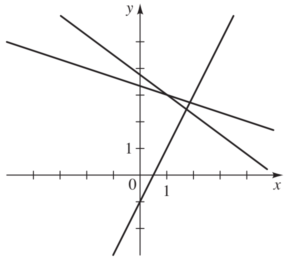
1. $(2, 1)$ **3.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right), (2, -2)$
5. $(2, 1)$



7. x = cualquier número
$y = \frac{2}{7}x - 4$



9. No hay solución



11. $(-3, 3), (2, 8)$ **13.** $\left(\frac{16}{7}, -\frac{14}{3}\right)$
15. $(21.41, -15.93)$ **17.** $(11.94, -1.39), (12.07, 1.44)$
19. a) 2×3 **b)** Sí **c)** No

d) $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ \quad\;\; y = \;\;\, 3 \end{cases}$

21. a) 3×4 **b)** Sí **c)** Sí

d) $\begin{cases} x \quad + 8z = \;\;\, 0 \\ \quad y + 5z = -1 \\ \qquad\quad\;\; 0 = \;\;\, 0 \end{cases}$

23. a) 3×4 **b)** No **c)** No

d) $\begin{cases} \qquad y - 3z = 4 \\ x + \;\; y \qquad = 7 \\ x + 2y + \;\; z = 2 \end{cases}$

25. $(1, 1, 2)$ **27.** No hay solución **29.** $(-8, -7, 10)$
31. No hay solución **33.** $(1, 0, 1, -2)$
35. $x = -4t + 1, y = -t - 1, z = t$
37. $x = 6 - 5t, y = \frac{1}{2}(7 - 3t), z = t$
39. $\left(-\frac{4}{3}t + \frac{4}{3}, \frac{5}{3}t - \frac{2}{3}, t\right)$ **41.** $(s + 1, 2s - t + 1, s, t)$
43. No hay solución
45. $(1, t + 1, t, 0)$
47. 3000 dólares al 6%, 6000 dólares al 7%
49. 11 250 dólares en el banco A, 22 500 dólares en el banco B, 26 250 dólares en el banco C
51. Imposible

53. $\begin{bmatrix} 4 & 18 \\ 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

55. $\begin{bmatrix} 10 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ **57.** $\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 10 \\ 1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$

59. $\begin{bmatrix} 30 & 22 & 2 \\ -9 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

61. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} \\ \frac{15}{4} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

65. $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ **67.** $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -2 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

69. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 \\ -4 & 5 & -9 \end{bmatrix}$

71. $1, \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **73.** 0, no hay inversa

75. $-1, \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -8 & -6 & 9 \end{bmatrix}$

77. $24, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

79. $(65, 154)$ **81.** $\left(-\frac{1}{12}, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right)$

83. $\left(\frac{1}{5}, \frac{9}{5}\right)$ **85.** $\left(-\frac{87}{26}, \frac{21}{26}, \frac{3}{2}\right)$

87. 11

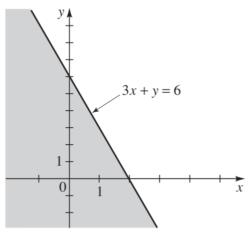
89. $\dfrac{2}{x-5} + \dfrac{1}{x+3}$

91. $\dfrac{-4}{x} + \dfrac{4}{x-1} + \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

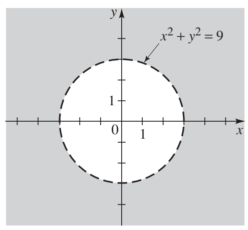
93. $\dfrac{-1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2+1}$

95. $x + y^2 \leq 4$

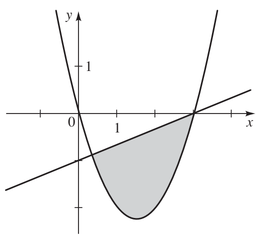
97.



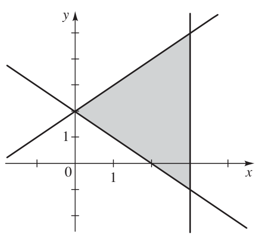
99.



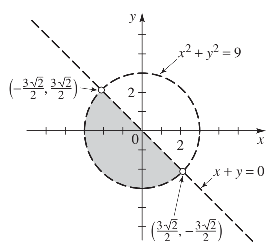
101.



103.

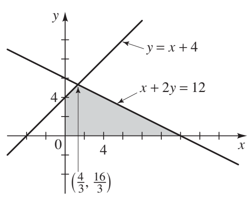


105.



acotada

107.



acotada

109. $x = \dfrac{b+c}{2}, y = \dfrac{a+c}{2}, z = \dfrac{a+b}{2}$

111. 2, 3

Capítulo 9 Evaluación ■ página 733

1. a) Lineal **b)** $(-2, 3)$

3. $(-0.55, -0.78), (0.43, -0.29), (2.12, 0.56)$

5. a) Forma escalonada **b)** Forma escalonada reducida **c)** Ninguna de las dos

7. $\left(-\frac{3}{5} + \frac{2}{5}t, \frac{1}{5} + \frac{1}{5}t, t\right)$

9. a) Dimensiones incompatibles **b)** Dimensiones incompatibles

c) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 3 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix} 36 & 58 \\ 0 & -3 \\ 18 & 28 \end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

f) B no es cuadrada **g)** B no es cuadrada **h)** -3

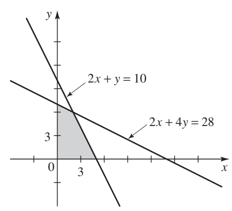
11. $|A| = 0, |B| = 2, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$

13. a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x+2}$ **b)** $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2+3}$

Enfoque en el modelado ■ página 739

1. 198, 195

3.



máximo 161
mínimo 135

5. 3 mesas, 34 sillas **7.** 30 huacales de toronjas, 30 huacales de naranjas **9.** 15 de Pasadena a Santa Mónica, 3 de Pasadena a El Toro, 0 Long Beach a Santa Mónica, 16 de Long Beach a El Toro **11.** 90 estándar, 40 de lujo **13**. 7500 dólares en bonos municipales, 2500 dólares en certificados bancarios, 2000 dólares en bonos de alto riesgo **15.** 4 juegos, 32 educativos, 0 de servicio

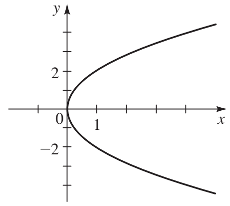
Capítulo 10

Sección 10.1 ■ página 751

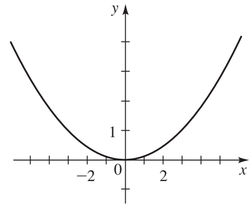
1. III **3.** II **5.** VI

Orden de las respuestas: foco; directriz, diámetro focal

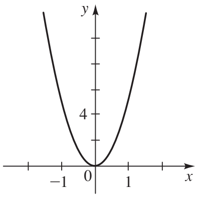
7. $F(1, 0); x = -1; 4$



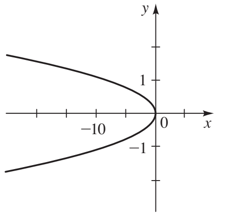
9. $F\left(0, \frac{9}{4}\right); y = -\frac{9}{4}; 9$



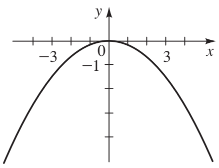
11. $F(0, \frac{1}{20})$; $y = -\frac{1}{20}$; $\frac{1}{5}$



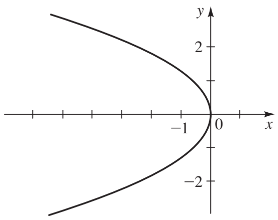
13. $F(-\frac{1}{32}, 0)$; $x = \frac{1}{32}$; $\frac{1}{8}$



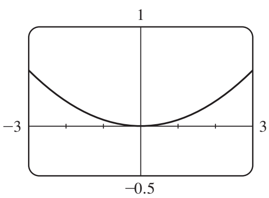
15. $F(0, -\frac{3}{2})$; $y = \frac{3}{2}$; 6



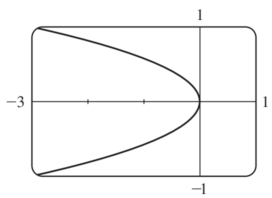
17. $F(-\frac{5}{12}, 0)$; $x = \frac{5}{12}$; $\frac{5}{3}$



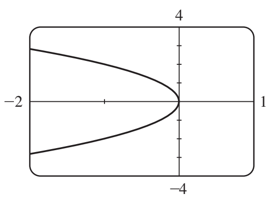
19.



21.



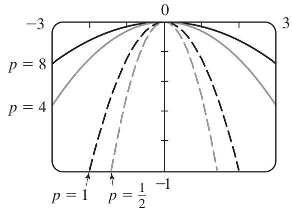
23.



25. $x^2 = 8y$ **27.** $y^2 = -32x$ **29.** $y^2 = -8x$ **31.** $x^2 = 40y$
33. $y^2 = 4x$ **35.** $x^2 = 20y$ **37.** $x^2 = 8y$ **39.** $y^2 = -16x$
41. $y^2 = -3x$ **43.** $x = y^2$ **45.** $x^2 = -4\sqrt{2}y$

47. a) $x^2 = -4py$, $p = \frac{1}{2}$, 1, 4, y 8

b) Entre más cerca está la directriz del vértice, es más cerrada la parábola



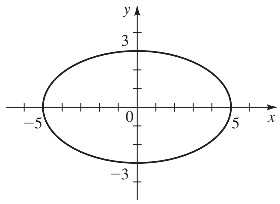
49. a) $y^2 = 12x$ **b)** $8\sqrt{15} \approx 31$ cm
51. $x^2 = 600y$

Sección 10.2 ■ página 759

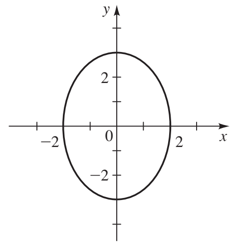
1. II **3.** I

Orden de las respuestas: vértices; focos; excentricidad; eje mayor y eje menor

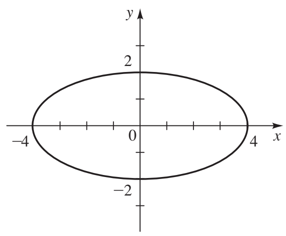
5. $V(\pm 5, 0)$; $F(\pm 4, 0)$; $\frac{4}{5}$; 10, 6



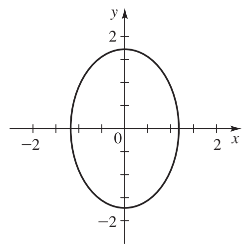
7. $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{5})$; $\sqrt{5}/3$; 6, 4



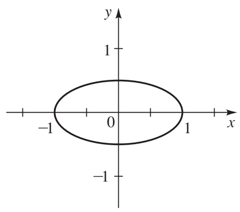
9. $V(\pm 4, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{3}, 0)$; $\sqrt{3}/2$; 8, 4



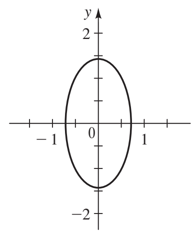
11. $V(0, \pm\sqrt{3})$; $F(0, \pm\sqrt{3/2})$; $1/\sqrt{2}$; $2\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$



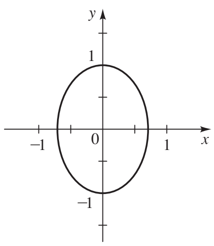
13. $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{3}/2, 0)$; $\sqrt{3}/2$; 2, 1



15. $V(0, \pm\sqrt{2})$; $F(0, \pm\sqrt{3/2})$; $\sqrt{3}/2$; $2\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$



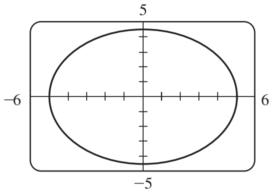
17. $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm 1/\sqrt{2})$; $1/\sqrt{2}$; 2, $\sqrt{2}$



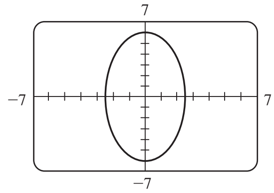
19. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

21. $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{8} = 1$ **23.** $\dfrac{x^2}{256} + \dfrac{y^2}{48} = 1$

25.



27.

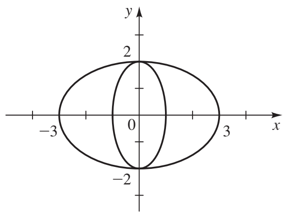


29. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ **31.** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$

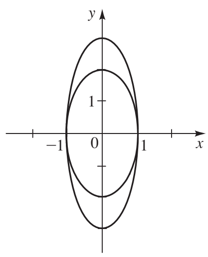
33. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{13} = 1$ **35.** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{91} = 1$

37. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ **39.** $\dfrac{64x^2}{225} + \dfrac{64y^2}{81} = 1$

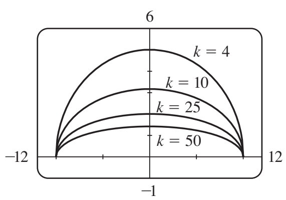
41. $(0, \pm 2)$



43. $(\pm 1, 0)$



45. a)



b) Eje mayor y vértices comunes; la excentricidad se incrementa a medida que k aumenta.

47. $\dfrac{x^2}{2.2500 \times 10^{16}} + \dfrac{y^2}{2.2491 \times 10^{16}} = 1$

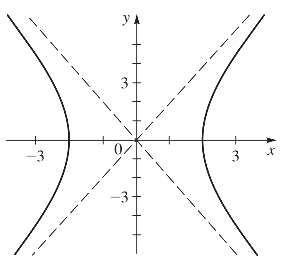
49. $\dfrac{x^2}{1{,}455{,}642} + \dfrac{y^2}{1{,}451{,}610} = 1$ **51.** $5\sqrt{39}/2 \approx 15.6$ pulg

Sección 10.3 ■ página 768

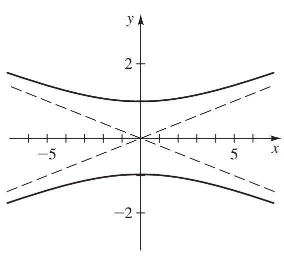
1. III **3.** II

Orden de las respuestas: vértices; focos; asíntotas

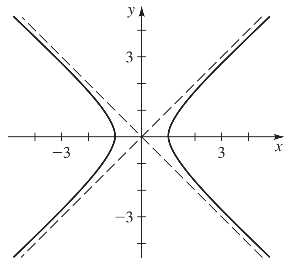
5. $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm 2\sqrt{5}, 0)$; $y = \pm 2x$



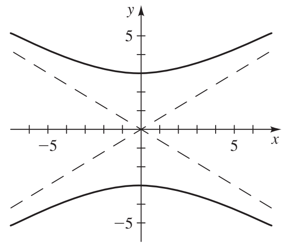
7. $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm\sqrt{26})$; $y = \pm \frac{1}{5}x$



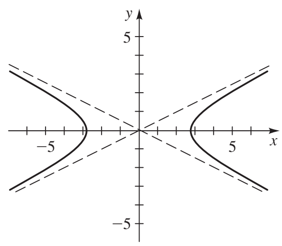
9. $V(\pm 1, 0)$; $F(\pm\sqrt{2}, 0)$; $y = \pm x$



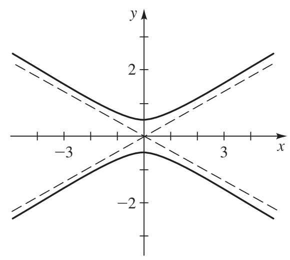
11. $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm\sqrt{34})$; $y = \pm \frac{3}{5}x$



13. $V(\pm 2\sqrt{2}, 0)$; $F(\pm\sqrt{10}, 0)$; $y = \pm \frac{1}{2}x$

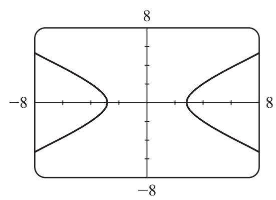


15. $V(0, \pm \frac{1}{2})$; $F(0, \pm\sqrt{5}/2)$; $y = \pm \frac{1}{2}x$

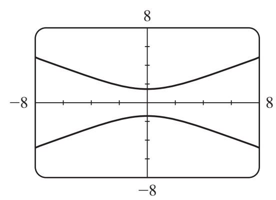


17. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$ **19.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ **21.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{4y^2}{9} = 1$

23.



25.

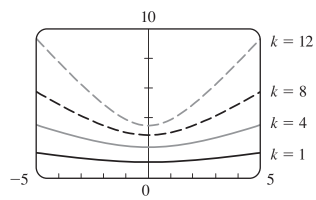


27. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **29.** $y^2 - \dfrac{x^2}{3} = 1$ **31.** $x^2 - \dfrac{y^2}{25} = 1$

33. $\dfrac{5y^2}{64} - \dfrac{5x^2}{256} = 1$ **35.** $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ **37.** $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

39. b) $x^2 - y^2 = c^2/2$

43. b)

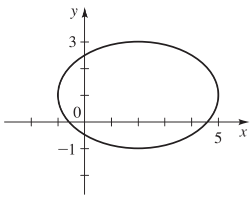


Cuando k aumenta, las asíntotas se vuelven más inclinadas

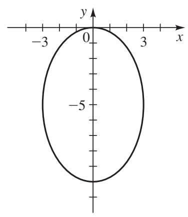
45. $x^2 - y^2 = 2.3 \times 10^{19}$

Sección 10.4 ■ página 781

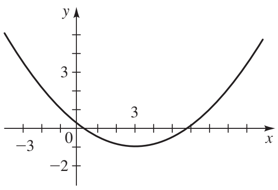
1. Centro $C(2, 1)$; foco $F(2 \pm \sqrt{5}, 1)$; vértices $V_1(-1, 1)$, $V_2(5, 1)$; eje mayor 6, eje menor 4



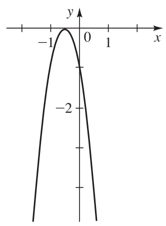
3. Centro $C(0, -5)$; foco $F_1(0, -1)$, $F_2(0, -9)$; vértices $V_1(0, 0)$, $V_2(0, -10)$; eje mayor 10, eje menor 6



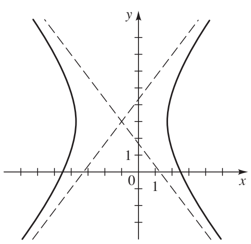
5. Vértice $V(3, -1)$; foco $F(3, 1)$; directriz $y = -3$



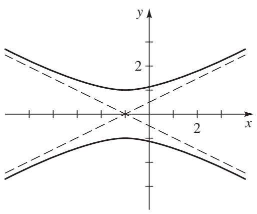
7. Vértice $V\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$; foco $F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{16}\right)$; directriz $y = \frac{1}{16}$



9. Centro $C(-1, 3)$; foco $F_1(-6, 3)$, $F_2(4, 3)$; vértices $V_1(-4, 3)$, $V_2(2, 3)$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}(x + 1) + 3$



11. Centro $C(-1, 0)$; foco $F(-1, \pm\sqrt{5})$; vértices $V(-1, \pm 1)$; asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}(x + 1)$

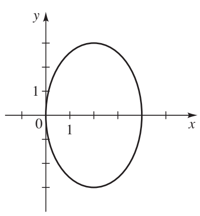


13. $x^2 = -\frac{1}{4}(y - 4)$

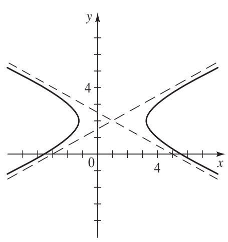
15. $\dfrac{(x - 5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

17. $(y - 1)^2 - x^2 = 1$

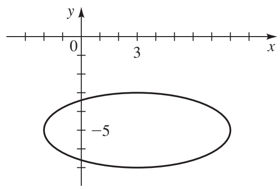
19. Elipse; $C(2, 0)$; $F(2, \pm\sqrt{5})$; $V(2, \pm 3)$; eje mayor 6, eje menor 4



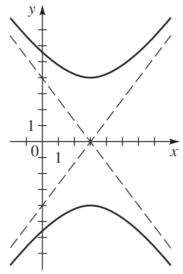
21. Hipérbola; $C(1, 2)$; $F_1\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, $F_2\left(\frac{7}{2}, 2\right)$; $V(1 \pm \sqrt{5}, 2)$; asíntotas $y = \pm\frac{1}{2}(x - 1) + 2$



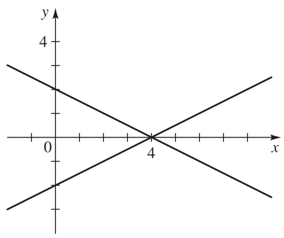
23. Elipse; $C(3, -5)$; $F(3 \pm \sqrt{21}, -5)$; $V_1(-2, -5)$, $V_1(8, -5)$; eje mayor 10, eje menor 4



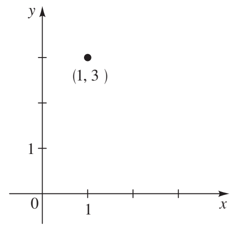
25. Hipérbola; $C(3, 0)$; $F(3, \pm 5)$; $V(3, \pm 4)$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}(x - 3)$



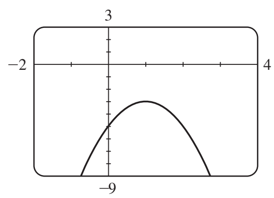
27. Cónica degenerada (par de rectas), $y = \pm\frac{1}{2}(x - 4)$



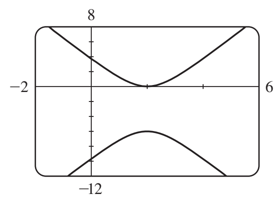
29. Punto $(1, 3)$



31.

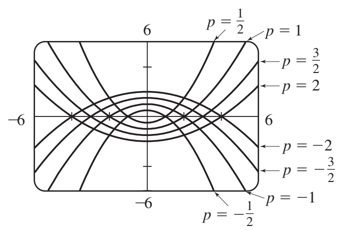


33.



35. a) $F < 17$ **b)** $F = 17$ **c)** $F > 17$

37. a)



c) Las parábolas se cierran

39. $\dfrac{(x + 150)^2}{18\,062\,500} + \dfrac{y^2}{18\,040\,000} = 1$

Sección 10.5 ■ página 790

1. $(\sqrt{2}, 0)$ **3.** $(0, -2\sqrt{3})$ **5.** $(1.6383, 1.1472)$

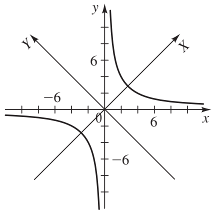
7. $X^2 + \sqrt{3}XY + 2 = 0$

9. $7Y^2 - 48XY - 7X^2 - 40X - 30Y = 0$

11. $X^2 - Y^2 = 2$

13. a) Hipérbola **b)** $X^2 - Y^2 = 16$

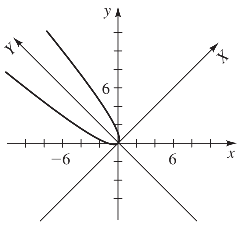
c) $\phi = 45°$



15. a) Parábola

b) $Y = \sqrt{2}X^2$

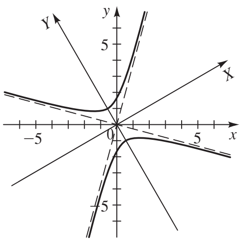
c) $\phi = 45°$



17. a) Hipérbola

b) $Y^2 - X^2 = 1$

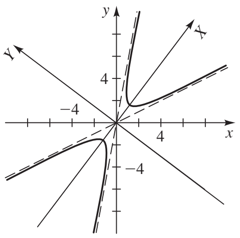
c) $\phi = 30°$



19. a) Hipérbola

b) $\dfrac{X^2}{4} - Y^2 = 1$

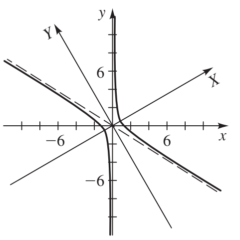
c) $\phi \approx 53°$



21. a) Hipérbola

b) $3X^2 - Y^2 = 2\sqrt{3}$

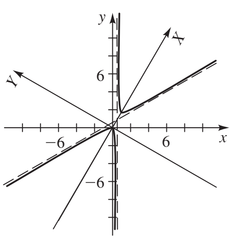
c) $\phi = 30°$



23. a) Hipérbola

b) $(X - 1)^2 - 3Y^2 = 1$

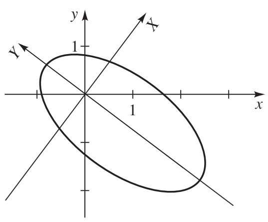
c) $\phi = 60°$



25. a) Elipse

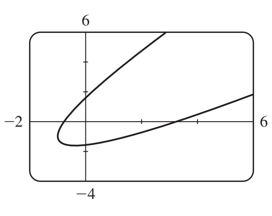
b) $X^2 + \dfrac{(Y + 1)^2}{4} = 1$

c) $\phi \approx 53°$



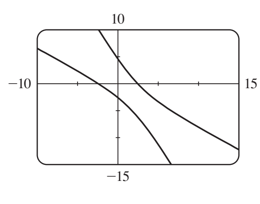
27. a) Parábola

b)



29. a) Hipérbola

b)



31. a) $(X - 5)^2 - Y^2 = 1$

b) Coordenadas XY:
$C(5, 0)$; $V_1(6, 0)$, $V_2(4, 0)$; $F(5 \pm \sqrt{2}, 0)$;
coordenadas xy:
$C(4, 3)$; $V_1(\frac{24}{5}, \frac{18}{5})$, $V_2(\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$; $F_1(4 + \frac{4}{5}\sqrt{2}, 3 + \frac{3}{5}\sqrt{2})$,
$F_2(4 - \frac{4}{5}\sqrt{2}, 3 - \frac{3}{5}\sqrt{2})$

c) $Y = \pm(X - 5)$; $7x - y - 25 = 0$, $x + 7y - 25 = 0$

33. $X = x \cos\phi + y \operatorname{sen}\phi$; $Y = -x \operatorname{sen}\phi + y \cos\phi$

Sección 10.6 ■ página 799

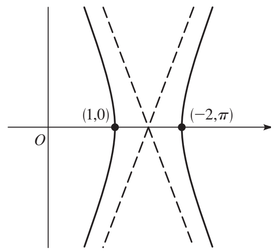
1. $r = 6/(3 + 2\cos\theta)$ **3.** $r = 2/(1 + \operatorname{sen}\theta)$

5. $r = 20/(1 + 4\cos\theta)$ **7.** $r = 10/(1 + \operatorname{sen}\theta)$

9. II **11.** VI **13.** IV

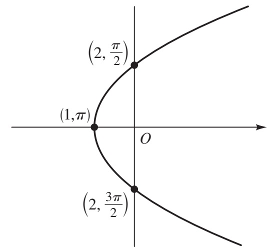
15. a) 3, hipérbola

b)



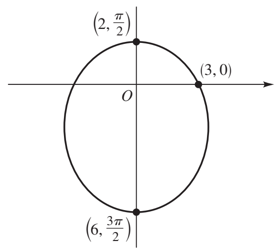
17. a) 1, parábola

b)



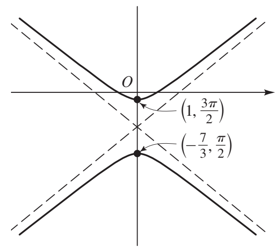
19. a) $\frac{1}{2}$, elipse

b)



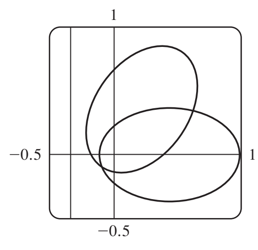
21. a) $\frac{5}{2}$, hipérbola

b)

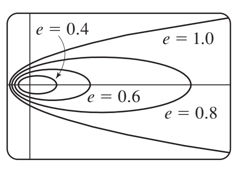


23. a) $e = \frac{3}{4}$, directriz $x = -\frac{1}{3}$

b) $r = \dfrac{1}{4 - 3\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)}$



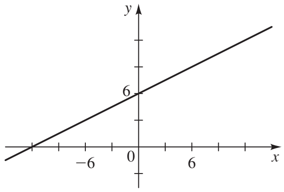
25. La elipse es casi una circunferencia cuando e se acerca a 0 y se vuelve más alargada cuando $e \to 1^-$. En $e = 1$, la curva se transforma en una parábola.



27. b) $r = (1.49 \times 10^8)/(1 - 0.017\cos\theta)$ **29.** 0.25

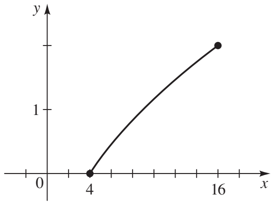
Sección 10.7 ■ página 807

1. a)



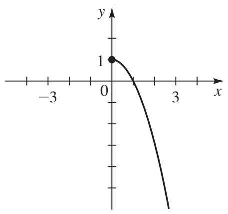
b) $x - 2y + 12 = 0$

3. a)



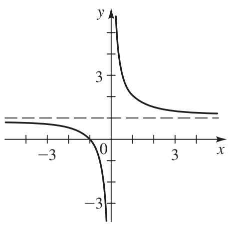
b) $x = (y + 2)^2$

5. a)



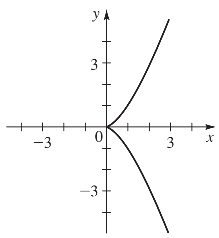
b) $x = \sqrt{1 - y}$

7. a)



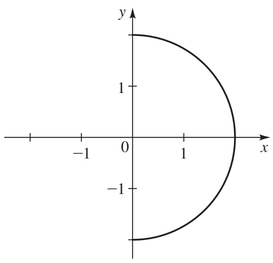
b) $y = \dfrac{1}{x} + 1$

9. a)



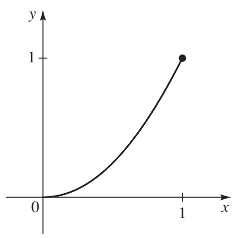
b) $x^3 = y^2$

11. a)



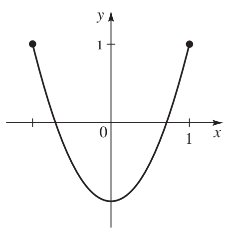
b) $x^2 + y^2 = 4, x \geq 0$

13. a)



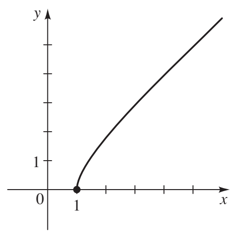
b) $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$

15. a)



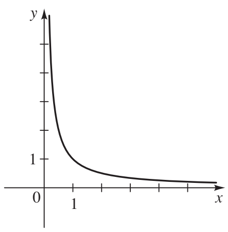
b) $y = 2x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1$

17. a)



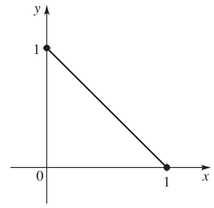
b) $x^2 - y^2 = 1, x \geq 1, y \geq 0$

19. a)



b) $x^2 - y^2 = 1, x \geq 1, y \geq 0$

21. a)



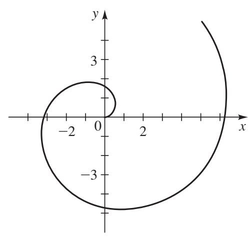
b) $x + y = 1, 0 \leq x \leq 1$

23. $x = 4 + t, y = -1 + \frac{1}{2}t$

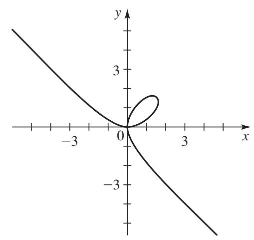
25. $x = 6 + t, y = 7 + t$

27. $x = a \cos t, y = a \text{ sen } t$

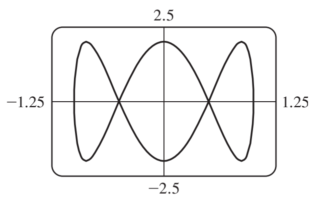
31.



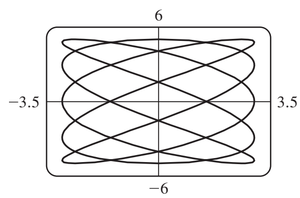
33.



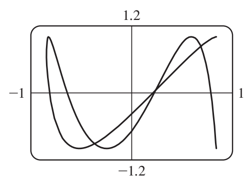
37.



39.

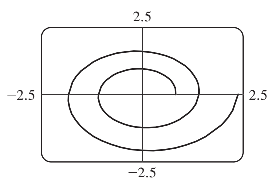


41.



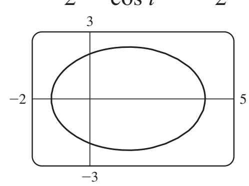
43. a) $x = 2^{t/12} \cos t, y = 2^{t/12} \text{ sen } t$

b)



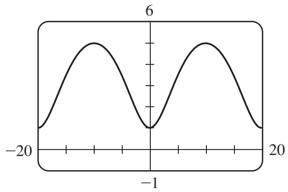
45. a) $x = \dfrac{4 \cos t}{2 - \cos t}, y = \dfrac{4 \text{ sen } t}{2 - \cos t}$

b)

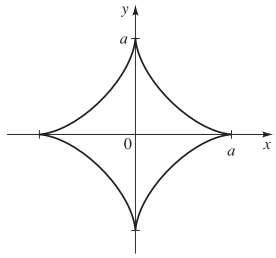


47. III **49.** II

51.



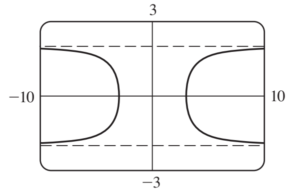
53. b) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$



55. $x = a(\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \cot\theta)$, $y = a(1 + \operatorname{sen}^2\theta)$

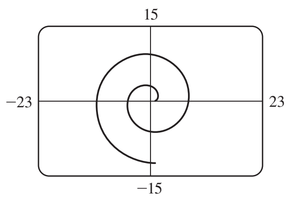
57. a) $x = a\sec\theta$, $y = b\operatorname{sen}\theta$

b)



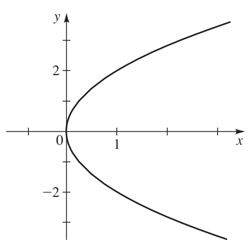
59. $y = a - a\cos\left(\dfrac{x + \sqrt{2ay - y^2}}{a}\right)$

61. b)

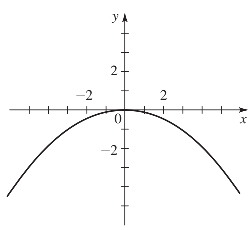


Capítulo 10 Repaso ■ página 810

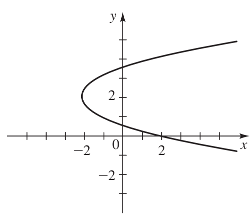
1. $V(0, 0)$; $F(1, 0)$; $x = -1$



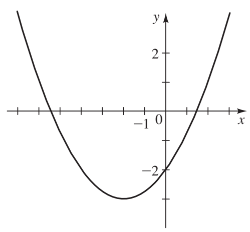
3. $V(0, 0)$; $F(0, -2)$; $y = 2$



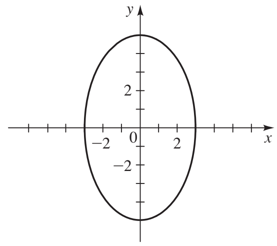
5. $V(-2, 2)$; $F\left(-\frac{7}{4}, 2\right)$; $x = -\frac{9}{4}$



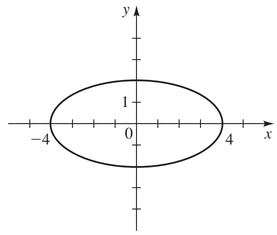
7. $V(-2, -3)$; $F(-2, -2)$; $y = -4$



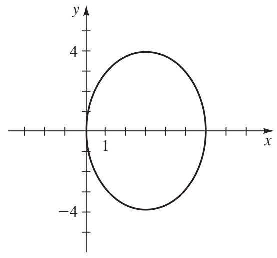
9. $C(0, 0)$; $V(0, \pm 5)$; $F(0, \pm 4)$; eje 10, 6



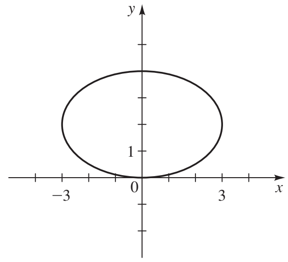
11. $C(0, 0)$; $V(\pm 4, 0)$; $F\left(\pm 2\sqrt{3}, 0\right)$; eje 8, 4



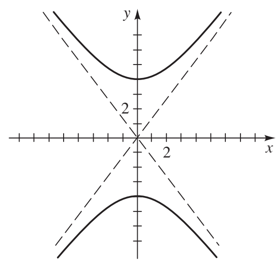
13. $C(3, 0)$; $V(3, \pm 4)$; $F\left(3, \pm\sqrt{7}\right)$; eje 8, 6



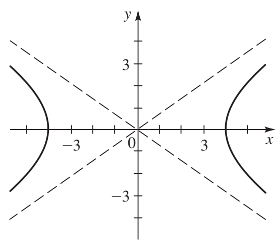
15. $C(0, 2)$; $V(\pm 3, 2)$; $F\left(\pm\sqrt{5}, 2\right)$; eje 6, 4



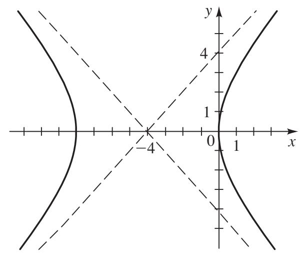
17. $C(0, 0)$; $V(0, \pm 4)$; $F(0, \pm 5)$; asíntotas $y = \pm\frac{4}{3}x$



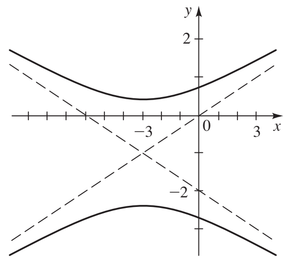
19. $C(0, 0)$; $V(\pm 4, 0)$; $F\left(\pm 2\sqrt{6}, 0\right)$; asíntotas $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$



21. $C(-4, 0)$; $V_1(-8, 0)$, $V_2(0, 0)$; $F\left(-4 \pm 4\sqrt{2}, 0\right)$; asíntotas $y = \pm(x + 4)$



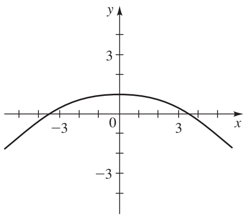
23. $C(-3, -1)$; $V\left(-3, -1 \pm \sqrt{2}\right)$; $F\left(-3, -1 \pm 2\sqrt{5}\right)$; asíntotas $y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x - 2$



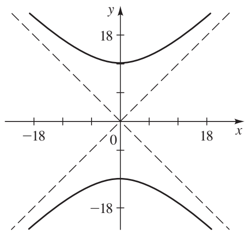
25. $y^2 = 8x$ **27.** $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

29. $\dfrac{(x-4)^2}{16} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

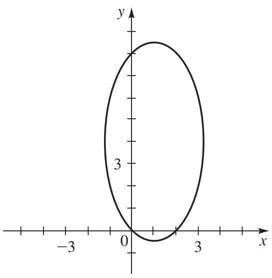
31. Parábola; $F(0, -2)$; $V(0, 1)$



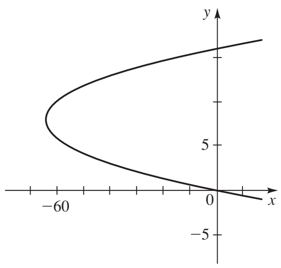
33. Hipérbola; $F(0, \pm 12\sqrt{2})$; $V(0, \pm 12)$



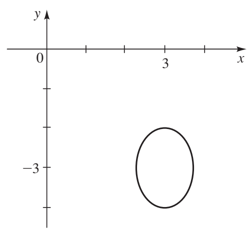
35. Elipse; $F(1, 4 \pm \sqrt{15})$; $V(1, 4 \pm 2\sqrt{5})$



37. Parábola; $F\left(-\frac{255}{4}, 8\right)$; $V(-64, 8)$



39. Elipse; $F(3, -3 \pm 1/\sqrt{2})$; $V_1(3, -4)$, $V_2(3, -2)$



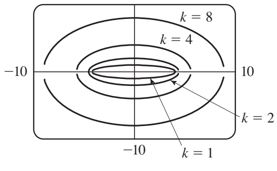
41. No tiene gráfica **43.** $x^2 = 4y$ **45.** $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{16} = 1$

47. $\dfrac{(x-1)^2}{3} + \dfrac{(y-2)^2}{4} = 1$

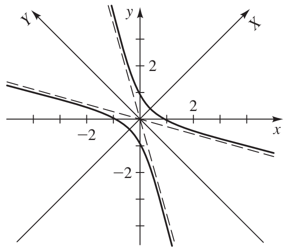
49. $\dfrac{4(x-7)^2}{225} + \dfrac{(y-2)^2}{100} = 1$

51. a) 91 419 000 millas **b)** 94 581 000 millas

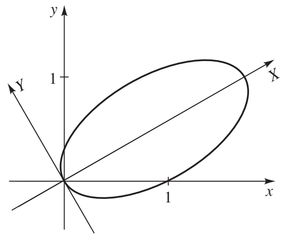
53. a)



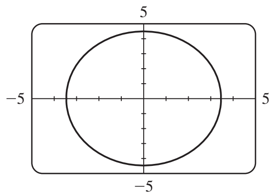
55. a) Hipérbola
b) $3X^2 - Y^2 = 1$
c) $\phi = 45°$



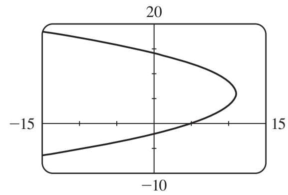
57. a) Elipse
b) $(X-1)^2 + 4Y^2 = 1$
c) $\phi = 30°$



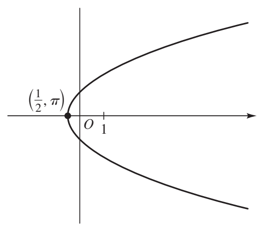
59. Elipse



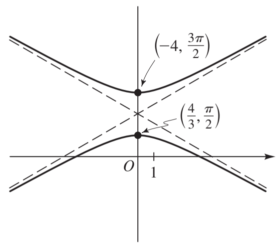
61. Parábola



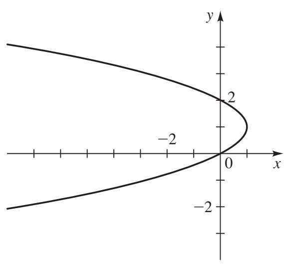
63. a) $e = 1$, parábola
b)



65. a) $e = 2$, hipérbola

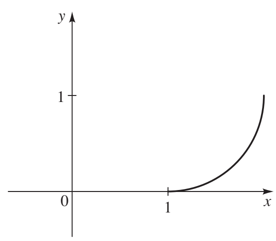


67. a)



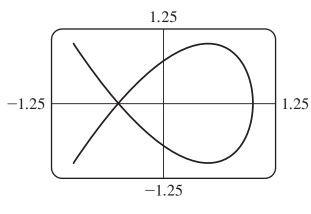
b) $x = 2y - y^2$

69. a)



b) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $1 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$

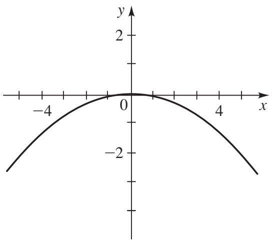
71.



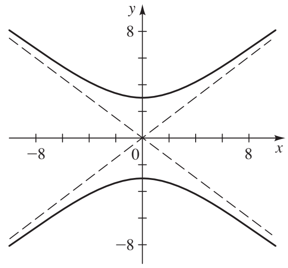
73. $x = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$, $y = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta + \tan\theta)$

Capítulo 10 Evaluación ■ página 814

1. $F(0, -3),\ y = 3$

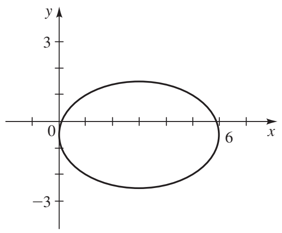


3. $V(0, \pm 3);\ F(0, \pm 5);\ y = \pm \frac{3}{4}x$

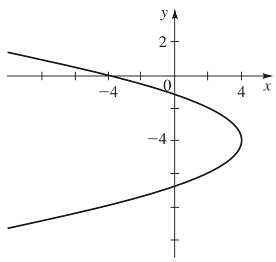


5. $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

7. $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{(y+\frac{1}{2})^2}{4} = 1$



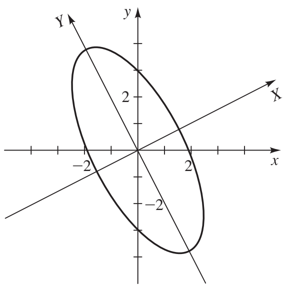
9. $(y + 4)^2 = -2(x - 4)$



11. $x^2 - 4x - 8y + 20 = 0$

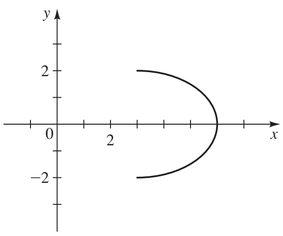
13. a) Elipse **b)** $\dfrac{X^2}{3} + \dfrac{Y^2}{18} = 1$

c) $\phi \approx 27°$



d) $\left(-3\sqrt{2/5}, 6\sqrt{2/5}\right), \left(3\sqrt{2/5}, -6\sqrt{2/5}\right)$

15. a)



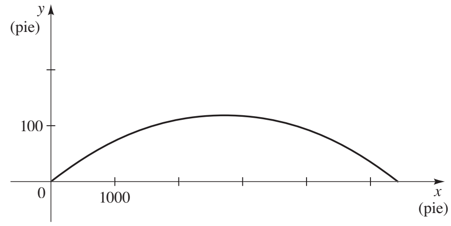
b) $\dfrac{(x-3)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1,\ x \geq 3$

Enfoque en el modelado ■ página 818

1. $y = -\left(\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)x^2 + (\tan\theta)x$

3. a) 5.45 s **b)** 118.7 pies **c)** 5426.5 pies

d)



5. $\dfrac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$ **7.** No, $\theta \approx 23°$

Capítulo 11

Sección 11.1 ■ página 830

1. 2, 3, 4, 5; 101 **3.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}; \frac{1}{101}$

5. $-1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{16}; \frac{1}{10000}$

7. 0, 2, 0, 2; 2

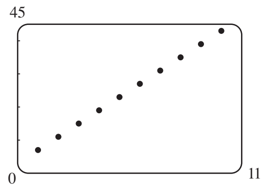
9. 1, 4, 27, 256; 100^{100}

11. 3, 2, 0, −4, −12

13. 1, 3, 7, 15, 31 **15.** 1, 2, 3, 5, 8

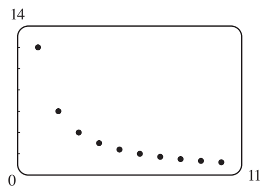
17. a) 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43

b)



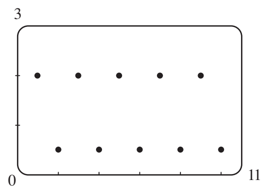
19. a) $12, 6, 4, 3, \frac{12}{5}, 2, \frac{12}{7}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}$

b)



21. a) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$

b)



23. 2^n **25.** $3n - 2$ **27.** $(2n-1)/n^2$

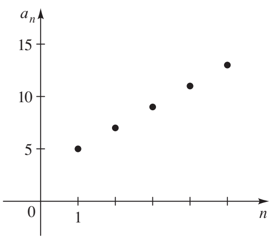
29. $1 + (-1)^n$ **31.** 1, 4, 9, 16, 25, 36

33. $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{13}{27}, \frac{40}{81}, \frac{121}{243}, \frac{364}{729}$ **35.** $\frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{26}{27}, \frac{80}{81}; S_n = 1 - \dfrac{1}{3^n}$

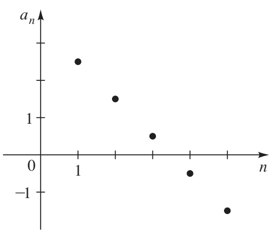
37. $1 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{3}, -1, 1 - \sqrt{5}; S_n = 1 - \sqrt{n+1}$
39. 10 **41.** $\frac{11}{6}$ **43.** 8 **45.** 31 **47.** 385 **49.** 46 438
51. 22 **53.** $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5}$
55. $\sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7} + \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{10}$
57. $x^3 + x^4 + \cdots + x^{100}$ **59.** $\sum_{k=1}^{100} k$ **61.** $\sum_{k=1}^{10} k^2$
63. $\sum_{k=1}^{999} \frac{1}{k(k+1)}$ **65.** $\sum_{k=0}^{100} x^k$ **67.** $2^{(2^n-1)/2^n}$
69. a) 2004.00, 2008.01, 2012.02, 2016.05, 2020.08, 2024.12
b) \$2149.16
71. a) 35 700, 36 414, 37 142, 37 885, 38 643 **b)** 42 665
73. b) 6898 **75. a)** $S_n = S_{n-1} + 2000$ **b)** \$38 000

Sección 11.2 ■ página 837

1. a) 5, 7, 9, 11, 13 **b)** 2
c)



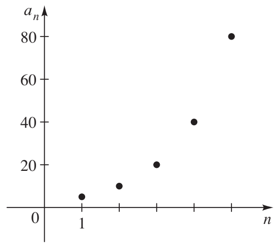
3. a) $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ **b)** -1
c)



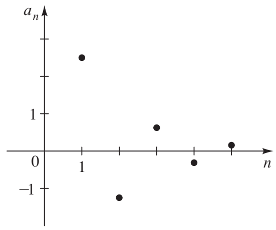
5. $a_n = 3 + 5(n-1), a_{10} = 48$
7. $a_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(n-1), a_{10} = -2$
9. Aritmética, 3 **11.** No es aritmética
13. Aritmética, $-\frac{3}{2}$ **15.** Aritmética, 1.7
17. 11, 18, 25, 32, 39; 7; $a_n = 11 + 7(n-1)$
19. $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}$; no es aritmética
21. -4, 2, 8, 14, 20; 6; $a_n = -4 + 6(n-1)$
23. 3, $a_5 = 14, a_n = 2 + 3(n-1), a_{100} = 299$
25. 5, $a_5 = 24, a_n = 4 + 5(n-1), a_{100} = 499$
27. 4, $a_5 = 4, a_n = -12 + 4(n-1), a_{100} = 384$
29. 1.5, $a_5 = 31, a_n = 25 + 1.5(n-1), a_{100} = 173.5$
31. $s, a_5 = 2 + 4s, a_n = 2 + (n-1)s, a_{100} = 2 + 99s$
33. $\frac{1}{2}$ **35.** $-100, -98, -96$ **37.** 30o. **39.** 100 **41.** 460
43. 1090 **45.** 20 301 **47.** 832.3 **49.** 46.75 **53.** Sí
55. 50 **57.** \$1250 **59.** \$403 500 **61.** 20 **63.** 78

Sección 11.3 ■ página 844

1. a) 5, 10, 20, 40, 80 **b)** 2
c)



3. a) $\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{5}{8}, -\frac{5}{16}, \frac{5}{32}$ **b)** $-\frac{1}{2}$
c)



5. $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}, a_4 = 375$ **7.** $a_n = \frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, a_4 = -\frac{5}{16}$
9. Geométrica, 2 **11.** Geométrica, $\frac{1}{2}$ **13.** No es geométrica
15. Geométrica, 1.1 **17.** 6, 18, 54, 162, 486; geométrica, razón común 3; $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$
19. $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \frac{1}{1024}$; geométrica, razón común $\frac{1}{4}$; $a_n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
21. 0, ln 5, 2 ln 5, 3 ln 5, 4 ln 5; no es geométrica
23. 3, $a_5 = 162, a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
25. $-0.3, a_5 = 0.00243, a_n = (0.3)(-0.3)^{n-1}$
27. $-\frac{1}{12}, a_5 = \frac{1}{144}, a_n = 144\left(-\frac{1}{12}\right)^{n-1}$
29. $3^{2/3}, a_5 = 3^{11/3}, a_n = 3^{(2n+1)/3}$
31. $s^{2/7}, a_5 = s^{8/7}, a_n = s^{2(n-1)/7}$
33. $\frac{1}{2}$ **35.** $\frac{25}{4}$ **37.** 11o. **39.** 315 **41.** 441 **43.** 3280
45. $\frac{6141}{1024}$ **47.** $\frac{3}{2}$ **49.** $\frac{3}{4}$ **51.** $\frac{1}{648}$ **53.** $-\frac{1000}{117}$ **55.** $\frac{7}{9}$
57. $\frac{1}{33}$ **59.** $\frac{112}{999}$ **61.** 10, 20, 40
63. a) $V_n = 160\,000(0.80)^{n-1}$ **b)** Cuarto año
65. 19 pies, $80\left(\frac{3}{4}\right)^n$ **67.** $\frac{64}{25}, \frac{1024}{625}, 5\left(\frac{4}{5}\right)^n$
69. a) $17\frac{8}{9}$ pies **b)** $18 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$ **71.** 2801 **73.** 3 m
75. a) 2 **b)** $8 + 4\sqrt{2}$ **77.** 1

Sección 11.4 ■ página 853

1. \$13 180.79 **3.** \$360 262.21 **5.** \$5591.79 **7.** \$245.66
9. \$2601.59 **11.** \$307.24 **13.** \$733.76, \$264 153.60
15. a) \$859.15 **b)** \$309 294.00 **c)** \$1 841 519.29
17. \$341.24 **19.** 18.16% **21.** 11.68%

Sección 11.5 ■ página 859

1. Sea $P(n)$ la proposición $2 + 4 + \cdots + 2n = n(n+1)$.
Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $2 = 1(1+1)$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$2 + 4 + \cdots + 2k + 2(k+1)$$
$$= k(k+1) + 2(k+1) \quad \text{Hipótesis de introducción}$$
$$= (k+1)(k+2)$$

Por lo que $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

3. Sea $P(n)$ la proposición
$5 + 8 + \cdots + (3n+2) = \dfrac{n(3n+7)}{2}$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $5 = \dfrac{1(3 \cdot 1 + 7)}{2}$

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$5 + 8 + \cdots + (3k+2) + [3(k+1)+2]$$
$$= \frac{k(3k+7)}{2} + (3k+5) \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= \frac{3k^2 + 13k + 10}{2}$$
$$= \frac{(k+1)[3(k+1)+7]}{2}$$

Por lo que $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

5. Sea $P(n)$ la proposición
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $1 \cdot 2 = \dfrac{1 \cdot (1+1) \cdot (1+2)}{3}$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)(k+2)$$
$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

Por lo que $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

7. Sea $P(n)$ la proposición
$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $1^3 = \dfrac{1^2 \cdot (1+1)^2}{4}$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3$$
$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$$
$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

Por lo que $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

9. Sea $P(n)$ la proposición
$2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $2^3 = 2 \cdot 1^2(1+1)^2$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$2^3 + 4^3 + \cdots + (2k)^3 + [2(k+1)]^3$$
$$= 2k^2(k+1)^2 + [2(k+1)]^3 \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= (k+1)^2(2k^2 + 8k + 8)$$
$$= 2(k+1)^2(k+2)^2$$

Por lo que $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

11. Sea $P(n)$ la proposición
$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^n = 2[1 + (n-1)2^n]$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $1 \cdot 2 = 2[1 + 0]$.

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + \cdots + k \cdot 2^k + (k+1) \cdot 2^{k+1}$$
$$= 2[1 + (k-1)2^k] + (k+1) \cdot 2^{k+1} \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= 2 + (k-1)2^{k+1} + (k+1) \cdot 2^{k+1}$$
$$= 2 + 2k2^{k+1} = 2(1 + k2^{k+1})$$

Por lo que $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

13. Sea $P(n)$ la proposición $n^2 + n$ es divisible entre 2.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $1^2 + 1$ es divisible entre 2.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$(k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1$$
$$= (k^2 + k) + 2(k+1)$$

Pero $k^2 + k$ es divisible, según la hipótesis de inducción, y $2(k+1)$ es evidentemente divisible entre 2, de modo que $(k+1)^2 + (k+1)$ es divisible entre 2. Entonces $P(k+1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

15. Sea $P(n)$ la proposición $n^2 - n + 41$ es impar.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $1^2 - 1 + 41$ es impar.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Ahora bien

$$(k + 1)^2 - (k + 1) + 41 = (k^2 - k + 41) + 2k$$

Pero $k^2 - k + 41$ es impar, por la hipótesis de inducción, y $2k$ es evidentemente par, de modo que su suma es impar. De modo que $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

17. Sea $P(n)$ la proposición $8^n - 3^n$ es divisible entre 5.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $8^1 - 3^1$ es divisible entre 5.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} 8^{k+1} - 3^{k+1} &= 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k \\ &= 8 \cdot 8^k - (8 - 5) \cdot 3^k = 8 \cdot (8^k - 3^k) + 5 \cdot 3^k \end{aligned}$$

la cual es divisible entre 5 porque $8^k - 3^k$ es divisible entre 5, según la hipótesis de inducción, y $5 \cdot 3^k$ es claramente divisible entre 5. Entonces, $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

19. Sea $P(n)$ la proposición $n < 2^n$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $1 < 2^1$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} k + 1 &< 2^k + 1 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &< 2^k + 2^k && \text{Porque } 1 < 2^k \\ &= 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \end{aligned}$$

De modo que $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

21. Sea $P(n)$ la proposición $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para $x > -1$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} (1 + x)^{k+1} &= (1 + x)(1 + x)^k \\ &\geq (1 + x)(1 + kx) && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 1 + (k + 1)x + kx^2 \\ &\geq 1 + (k + 1)x \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

23. Sea $P(n)$ la proposición $a_n = 5 \cdot 3^{n-1}$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $a_1 = 5 \cdot 3^0 = 5$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 3 \cdot a_k && \text{Definición de } a_{k+1} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 3^{k-1} && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= 5 \cdot 3^k \end{aligned}$$

De tal modo $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

25. Sea $P(n)$ la proposición $x - y$ es un factor de $x^n - y^n$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $x - y$ es un factor de $x^1 - y^1$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Ahora

$$\begin{aligned} x^{k+1} - y^{k+1} &= x^{k+1} - x^k y + x^k y - y^{k+1} \\ &= x^k(x - y) + (x^k - y^k)y \end{aligned}$$

Pero $x^k(x - y)$ es claramente divisible entre $x - y$ y $(x^k - y^k)y$ es divisible entre $x - y$ de acuerdo con la hipótesis de inducción, de modo que la suma es divisible entre $x - y$. De tal modo $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

27. Sea $P(n)$ la proposición F_{3n} es par.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $F_{3 \cdot 1} = 2$, la cual es par.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Ahora bien, según la definición de la sucesión de Fibonacci

$$\begin{aligned} F_{3(k+1)} &= F_{3k+3} = F_{3k+2} + F_{3k+1} \\ &= F_{3k+1} + F_{3k} + F_{3k+1} \\ &= F_{3k} + 2 \cdot F_{3k+1} \end{aligned}$$

Pero F_{3k} es par, de acuerdo con la hipótesis de inducción y $2 \cdot F_{3k+1}$ es evidentemente par, de modo que $F_{3(k+1)}$ es par. Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

29. Sea $P(n)$ la proposición $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera ya que $F_1^2 = F_1 \cdot F_2$ (porque $F_1 = F_2 = 1$).
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces

$$\begin{aligned} &F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_k^2 + F_{k+1}^2 \\ &= F_k \cdot F_{k+1} + F_{k+1}^2 && \text{Hipótesis de inducción} \\ &= F_{k+1}(F_k + F_{k+1}) && \text{Definición de la sucesión de Fibonacci} \\ &= F_{k+1} \cdot F_{k+2} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

31. Sea $P(n)$ la proposición $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$.

Paso 1 $P(2)$ es verdadera ya que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 & F_2 \\ F_2 & F_1 \end{bmatrix}.$$

Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} && \text{Hipótesis de inducción} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix} \qquad \text{Definición de la sucesión de Fibonacci}$$

Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda $n \geq 2$.

33. Sea $P(n)$ la proposición $F_n \geq n$.

Paso 1 $P(5)$ es verdadera ya que $F_5 \geq 5$ (porque $F_5 = 5$).
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces,

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= F_k + F_{k-1} && \text{Definición de la sucesión de Fibonacci} \\ &\geq k + F_{k-1} && \text{Hipótesis de inducción} \\ &\geq k + 1 && \text{Porque } F_{k-1} \geq 1 \end{aligned}$$

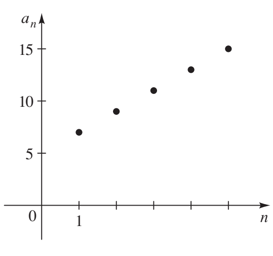
Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda $n \geq 5$.

Sección 11.6 ■ página 868

1. $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$
3. $x^4 + 4x^2 + 6 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$
5. $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$
7. $x^{10}y^5 - 5x^8y^4 + 10x^6y^3 - 10x^4y^2 + 5x^2y - 1$
9. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$
11. $\dfrac{1}{x^5} - \dfrac{5}{x^{7/2}} + \dfrac{10}{x^2} + \dfrac{10}{x^{1/2}} + 5x - x^{5/2}$
13. 15 **15.** 4950 **17.** 18 **19.** 32
21. $x^4 + 8x^3y + 24x^2y^2 + 32xy^3 + 16y^4$
23. $1 + \dfrac{6}{x} + \dfrac{15}{x^2} + \dfrac{20}{x^3} + \dfrac{15}{x^4} + \dfrac{6}{x^5} + \dfrac{1}{x^6}$
25. $x^{20} + 40x^{19}y + 760x^{18}y^2$ **27.** $25a^{26/3} + a^{25/3}$
29. $48{,}620x^{18}$ **31.** $300a^2b^{23}$ **33.** $100y^{99}$
35. $13\,440x^4y^6$ **37.** $495a^8b^8$ **39.** $(x + y)^4$
41. $(2a + b)^3$ **43.** $3x^2 + 3xh + h^2$

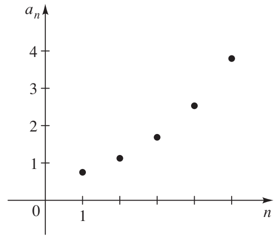
Capítulo 11 Repaso ■ página 870

1. $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}; \frac{100}{11}$ **3.** $0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{32}; \frac{1}{500}$
5. 1, 3, 15, 105; 654 729 075 **7.** 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49
9. 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85
11. a) 7, 9, 11, 13, 15
b)



c) Aritmética, diferencia común 2

13. a) $\frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}, \frac{243}{64}$
b)



c) Geométrica, razón común $\frac{3}{2}$

15. Aritmética, 7 **17.** Aritmética $5\sqrt{2}$ **19.** Aritmética, $t + 1$
21. Geométrica, $\frac{4}{27}$ **23.** $2i$ **25.** 5 **27.** $\frac{81}{4}$
29. a) $A_n = 32\,000(1.05)^{n-1}$
b) \$32 000, \$33 600, \$35 280, \$37 044, \$38 896.20, \$40 841.01, \$42 883.06, \$45 027.21
31. 12 288 **35. a)** 9 **b)** $\pm 6\sqrt{2}$
37. 126 **39.** 384
41. $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$
43. $\dfrac{3}{2^2} + \dfrac{3^2}{2^3} + \dfrac{3^3}{2^4} + \cdots + \dfrac{3^{50}}{2^{51}}$
45. $\displaystyle\sum_{k=1}^{33} 3k$ **47.** $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} k2^{k+2}$
49. Geométrica; 4.68559
51. Aritmética, $5050\sqrt{5}$
53. Geométrica, 9831
55. 13 **57.** 65 534 **59.** \$2390.27
61. $\frac{5}{7}$
63. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$
65. Sea $P(n)$ el enunciado
$1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2) = \dfrac{n(3n - 1)}{2}$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadero porque $1 = \dfrac{1(3 \cdot 1 - 1)}{2}$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces,

$$\begin{aligned} &1 + 4 + 7 + \cdots + (3k - 2) + [3(k + 1) - 2] \\ &= \frac{k(3k - 1)}{2} + [3k + 1] \qquad \text{Hipótesis de inducción} \\ &= \frac{3k^2 - k + 6k + 2}{2} \\ &= \frac{(k + 1)(3k + 2)}{2} \\ &= \frac{(k + 1)[3(k + 1) - 1]}{2} \end{aligned}$$

Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

67. Sea $P(n)$ el enunciado
$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}\right) = n + 1$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadera yo que $\left(1 + \frac{1}{1}\right) = 1 + 1$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces,

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= (k+1)\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= (k+1)+1$$

Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

69. Sea $P(n)$ el enunciado $a_n = 2 \cdot 3^n - 2$.

Paso 1 $P(1)$ es verdadero ya que $a_1 = 2 \cdot 3^1 - 2 = 4$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadero. Entonces,

$$a_{k+1} = 3a_k + 4$$
$$= 3(2 \cdot 3^k - 2) + 4 \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$= 2 \cdot 3^{k+1} - 2$$

De modo que $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, según el Principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda n.

71. Sea $P(n)$ la proposición $n! > 2^n$ para $n \geq 4$.

Paso 1 $P(4)$ es verdadera ya que $4! > 2^4$.
Paso 2 Suponga que $P(k)$ es verdadera. Entonces,

$$(k+1)! = k!(k+1)$$
$$> 2^k(k+1) \quad \text{Hipótesis de inducción}$$
$$> 2^{k+1} \quad \text{Porque } k+1>2$$

Entonces $P(k + 1)$ se infiere de $P(k)$. Por lo tanto, de acuerdo con el principio de la inducción matemática, $P(n)$ se cumple para toda $n \geq 4$.

73. 255 **75.** 12 870
77. $16x^4 + 32x^3y + 24x^2y^2 + 8xy^3 + y^4$
79. $b^{-40/3} + 20b^{-37/3} + 190b^{-34/3}$

Capítulo 11 Evaluación ■ Página 873

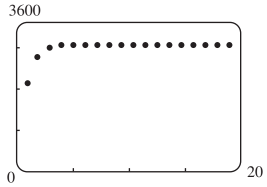
1. 0, 3, 8, 15; 99 **3. a)** 3
b) $a_n = 2 + (n - 1)3$ **c)** 104
5. a) $\frac{1}{5}, \frac{1}{25}$ **b)** $\dfrac{5^8 - 1}{12\,500}$
9. a) $\frac{58\,025}{59\,049}$ **b)** $2 + \sqrt{2}$
11. $32x^5 + 80x^4y^2 + 80x^3y^4 + 40x^2y^6 + 10xy^8 + y^{10}$
13. a) $a_n = (0.85)(1.24)^n$ **b)** 3.09 lb **c)** Geométrica

Enfoque en el modelado ■ página 877

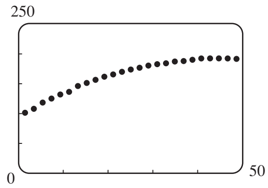
1. a) $A_n = 1.0001A_{n-1}$, $A_0 = 275\,000$ **b)** $A_0 = 275\,000$, $A_1 = 275\,027.50$, $A_2 = 275\,055.00$, $A_3 = 275\,082.51$, $A_4 = 275\,110.02$, $A_5 = 275\,137.53$, $A_6 = 275\,165.04$, $A_7 = 275\,192.56$ **c)** $A_n = 1.0001^n(275\,000)$

3. a) $A_n = 1.0025A_{n-1} + 100$, $A_0 = 100$ **b)** $A_0 = 100$, $A_1 = 200.25$, $A_2 = 300.75$, $A_3 = 401.50$, $A_4 = 502.51$
c) $A_n = 100[(1.0025^{n+1} - 1)/0.0025]$ **d)** \$603.76
5. b) $A_0 = 2400$, $A_1 = 3120$, $A_2 = 3336$, $A_3 = 3400.8$, $A_4 = 3420.2$ **c)** $A_n = 3428.6(1 - 0.3^{n+1})$
d) 3427.8 toneladas, 3428.6 toneladas

e)



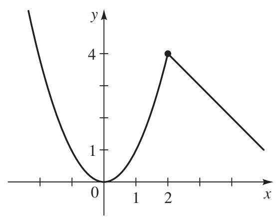
7. b) En el trigésimo quinto año
9. a) $R_1 = 104$, $R_2 = 108$, $R_3 = 112$, $R_4 = 116$, $R_5 = 120$, $R_6 = 124$, $R_7 = 127$ **b)** Se aproxima a 200.



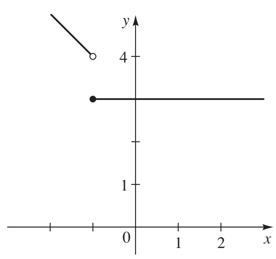
Capítulo 12

Sección 12.1 ■ página 889

1. $\frac{1}{4}$ **3.** $\frac{1}{3}$ **5.** 1 **7.** -1 **9.** 0.51 **11.** $\frac{1}{2}$
13. a) 2 **b)** 3 **c)** No existe **d)** 4 **e)** No está definido
15. a) -1 **b)** -2 **c)** No existe **d)** 2 **e)** 0
f) No existe **g)** 1 **h)** 3 **17.** -8
19. No existe **21.** No existe
23. a) 4 **b)** 4 **c)** 4



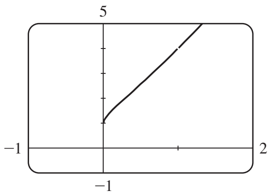
25. a) 4 **b)** 3 **c)** No existe



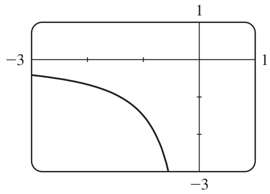
Sección 12.2 ■ página 897

1. a) 5 **b)** 9 **c)** 2 **d)** $-\frac{1}{3}$ **e)** $-\frac{3}{8}$ **f)** 0 **g)** No existe **h)** $-\frac{6}{11}$ **3.** 75 **5.** $\frac{1}{2}$ **7.** -3 **9.** 5 **11.** 2 **13.** $\frac{6}{5}$ **15.** 12 **17.** $\frac{1}{6}$ **19.** $-\frac{1}{16}$

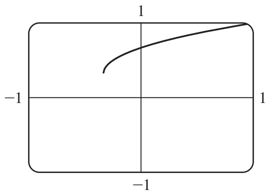
21. 4



23. $-\frac{3}{2}$



25. a) 0.667



b) 0.667

x	$f(x)$
0.1	0.71339
0.01	0.67163
0.001	0.66717
0.0001	0.66672

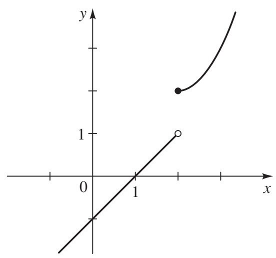
x	$f(x)$
-0.1	0.61222
-0.01	0.66163
-0.001	0.66617
-0.0001	0.66662

c) $\frac{2}{3}$

27. 0 **29.** No existe **31.** No existe

33. a) 1, 2 **b)** No existe

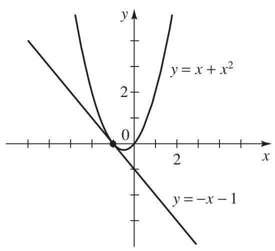
c)



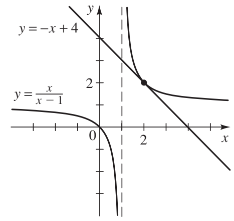
Sección 12.3 ■ página 906

1. 3 **3.** -11 **5.** 24

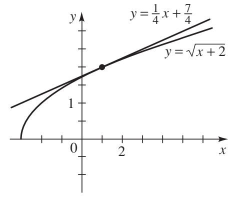
7. $y = -x - 1$



9. $y = -x + 4$



11. $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{4}$



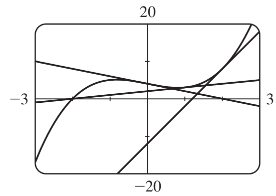
13. $f'(2) = -12$ **15.** $g'(1) = 4$ **17.** $F'(4) = -\frac{1}{16}$

19. $f'(a) = 2a + 2$ **21.** $f'(a) = \dfrac{1}{(a+1)^2}$

23. a) $f'(a) = 3a^2 - 2$

b) $y = -2x + 4$, $y = x + 2$, $y = 10x - 12$

c)



25. -24 pies/s **27.** $12a^2 + 6$ m/s, 18 m/s, 54 m/s, 114 m/s

29. 0.75°/min **31. a)** -38.3 galones/min, -27.8 galones/min **b)** -33.3 galones/min

Sección 12.4 ■ página 915

1. a) -1, 2 **b)** $y = -1$, $y = 2$ **3.** 0 **5.** $\frac{2}{5}$ **7.** $\frac{4}{3}$ **9.** 2

11. No existe **13.** 7

15. $-\frac{1}{4}$ **17.** 0 **19.** 0

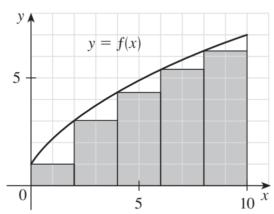
21. Divergente **23.** 0 **25.** Divergente

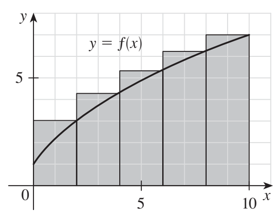
27. $\frac{3}{2}$ **29.** 8

31. b) 30 g/L

Sección 12.5 ■ página 924

1. a) 40, 52

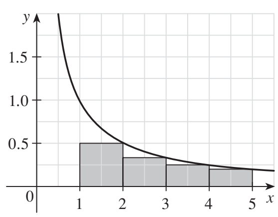




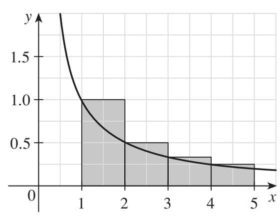
b) 43.2, 49.2

3. 5.25 **5.** $\frac{223}{35}$

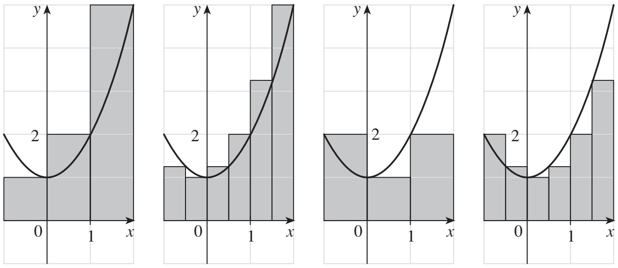
7. a) $\frac{77}{60}$, subestimación



b) $\frac{25}{12}$, sobreestimación



9. a) 8, 6.875 **b)** 5, 5.375



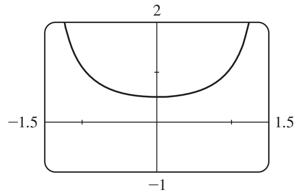
11. 37.5 **13.** 8 **15.** 166.25 **17.** 133.5

Capítulo 12 Repaso ■ página 925

1. 1 **3.** 0.69 **5.** No existe
7. a) No existe **b)** 2.4 **c)** 2.4 **d)** 2.4 **e)** 0.5 **f)** 1 **g)** 2 **h)** 0 **9.** -3 **11.** 7 **13.** 2 **15.** -1 **17.** 2
19. No existe **21.** $f'(4) = 3$ **23.** $f'(16) = \frac{1}{8}$
25. a) $f'(a) = -2$ **b)** $-2, -2$
27. a) $f'(a) = 1/(2\sqrt{a+6})$ **b)** $1/(4\sqrt{2}), 1/4$
29. $y = 2x + 1$ **31.** $y = 2x$ **33.** $y = -\frac{1}{4}x + 1$
35. a) -64 pies/s **b)** $-32a$ pies/s **c)** $\sqrt{40} \approx 6.32$ s **d)** -202.4 pies/s **37.** $\frac{1}{5}$ **39.** $\frac{1}{2}$ **41.** Divergente
43. 3.83 **45.** 10 **47.** $\frac{5}{6}$

Capítulo 12 Evaluación ■ página 928

1. a) $\frac{1}{2}$ **b)**



3. a) 6 **b)** -2 **c)** No existe **d)** No existe **e)** $\frac{1}{4}$ **f)** 2
5. $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ **7. a)** $\frac{89}{25}$ **b)** $\frac{11}{3}$

Enfoque en el modelado ■ página 931

1. $57\,333\frac{1}{3}$ pies-lb **3. b)** Área bajo la gráfica de $p(x) = 375x$ entre $x = 0$ y $x = 4$ **c)** 3000 lb **d)** 1500 lb
5. a) 1625.28 grados de calentamiento hora **b)** 70°F
c) 1488 grados de calentamiento horas **d)** 75°F
e) El día en el inciso a)

Índice

Créditos fotográficos

Esta es una extensión de la página legal. Nos esforzamos por investigar la propiedad de cada imagen y de obtener la autorización de cada propietario. Si existiera alguna aclaración de cualquier material, con gusto la haremos en próximas reimpresiones. Agradecemos a los siguientes autores, editores y agentes por su autorización para utilizar el material indicado.

Capítulo 1

xxx © Bob Krist/Corbis
38 Cortesía de NASA
49 Dominio público
75 The British Museum
100 Cortesía de NASA
103 National Portrait Gallery
112 Dominio público
138 Stanford University News Service
141 © Bettmann/Corbis

Capítulo 2

146 © Galen Rowell/Corbis
165 Stanford University News Service
188 The Granger Collection
241(arriba) © Alexandr Satinsky/AFP/Getty Images
241 (abajo) © Eric & David Hosking/Corbis
245 © Ed Kashi/Corbis
246 © Phil Schermeister/Corbis

Capítulo 3

248 © J. L. Amos/SuperStock
256 Cortesía de Ford Motor Co.
273 Dominio público
288 Dominio público
294 © Corbis
321 © Ted Wood/The Image Bank/Getty Images

Capítulo 4

326 © Theo Allofs/The Image Bank/Getty Images
331 Gary McMichael/Photo Researchers, Inc.
344 (izq.) © Bettmann/Corbis
344 (der.) © Hulton-Deutsch Collection/Corbis
346 Dominio público
374 © Joel W. Rogers/Corbis
378 © Roger Ressmeyer/Corbis
387 © Chabruken/The Image Bank/Getty Images

Capítulo 5

398 © Robin Smith/Stone/Getty Images
432 © Jeffrey Lepore/Photo Researchers, Inc.
465 © SOHO/ESA/NASA/Photo Researchers, Inc.

Capítulo 6

466 Gregory D. Dimijian, M.D.
504 © Alan Oddie/PhotoEdit
525 British Library

Capítulo 7

526 © Tony Friedkin/Sony Pictures Classico/ZUMA/Corbis
562 © Getty Images

Capítulo 8

580 Cortesía de NASA
605 (izq.) Cortesía de David Dewey
605 (der.) © Stephen Gerard/Photo Researchers, Inc.
609 © Bill Ross/Corbis
626 © J. L. Amos/SuperStock

Capítulo 9

634 © Art Wolfe/Stone/Getty Images
656 Cortesía de NASA
672 Cortesía de Caltech
678 The Archives of the National Academy of Sciences
683 © E. O. Hoppé/Corbis
688 © Art Wolfe/Stone/Getty Images
692 © The Granger Collection
696 © Volvox/Index Stock
705 © Baldwin H. Ward and Kathryn C. Ward/Corbis
707 © The Granger Collection

Capítulo 10

742 © PhotoDisc/Getty Images
746 © Roger Ressmeyer/Corbis
771 (izq. arr.) © Nik Wheeler/Corbis
771 (arr. mitad) © Architect of the Capitol
771 (der. arr.) © Walter Schmid/Stone/Getty Images
771 (izq. ab.) © Richard T. Nowitz/Corbis
771 (ab. mitad) © Cortesía de Chamber of Commerce, St. Louis, MO
771 (der. ab.) © O. Alamany and E. Vicens/Corbis
774 www. skyscrapers.com
775 © Bob Krist/Corbis
802 © Bettmann/Corbis
817 © The Granger Collection

Capítulo 11

820 © Susan Van Etten/PhotoEdit
826 © The Granger Collection
829 © Royalty-free/Corbis
840 © Michael Ng
858 © Archivo Iconográfico, S.A./Corbis

Capítulo 12

880 © Karl Ronstrom/Reuters/Landov
894 © Bill Sanderson/SPL/Photo Researchers, Inc.

SERIES Y SUCESIONES

Aritméticas

$a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, \ldots$

$a_n = a + (n - 1)d$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = n\left(\frac{a + a_n}{2}\right)$

Geométricas

$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \ldots$

$a_n = ar^{n-1}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a\frac{1 - r^n}{1 - r}$

Si $|r| < 1$, entonces la suma de una serie geométrica infinita es

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

TEOREMA DEL BINOMIO

$$(a + b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

FINANZAS

Interés compuesto

$$A = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde A es el monto después de t años, P es el principal y r es la tasa de interés, y el interés es compuesto n veces por año.

Monto de una anualidad

$$A_f = R\,\frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

donde A_f es el monto final, i es la tasa de interés por periodo y existen n pagos de valor.

Valor presente de una anualidad

$$A_p = R\,\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

donde A_p es el valor presente, i es la tasa de interés por periodo y existen n pagos de valor.

Compras a plazos

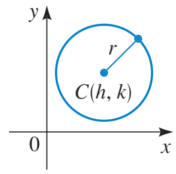
$$R = \frac{iA_p}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

donde R es el tamaño de cada pago, i es la tasa de interés por periodo, A_p es el monto del préstamo, y n es el número de pagos.

SECCIONES CÓNICAS

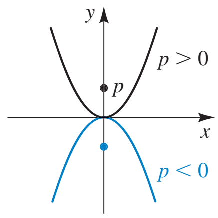
Círculos

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$



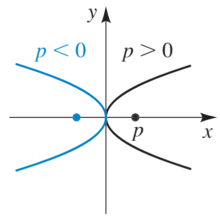
Parábolas

$x^2 = 4py$

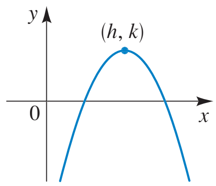


Focos $(0, p)$, directriz $y = -p$

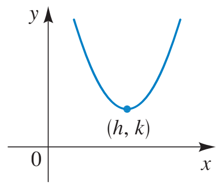
$y^2 = 4px$



Focos $(p, 0)$, directriz $x = -p$



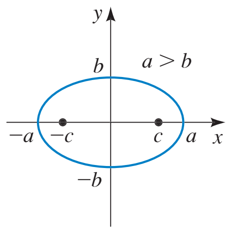
$y = a(x - h)^2 + k,$
$a < 0, \quad h > 0, \quad k > 0$



$y = a(x - h)^2 + k,$
$a > 0, \quad h > 0, \quad k > 0$

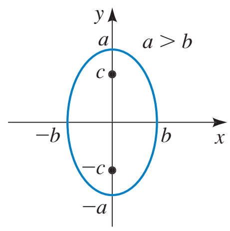
Elipses

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$

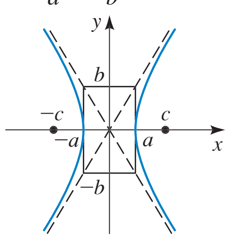
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 - b^2$

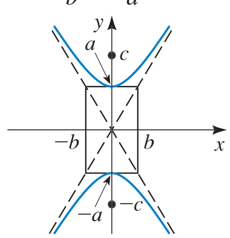
Hipérbolas

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Focos $(\pm c, 0)$, $c^2 = a^2 + b^2$

$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$



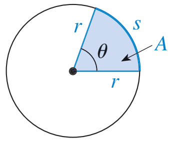
Focos $(0, \pm c)$, $c^2 = a^2 + b^2$

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

π radianes $= 180°$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianes $\qquad$ 1 radián $= \dfrac{180°}{\pi}$

$s = r\theta \qquad A = \frac{1}{2}r^2\theta \quad (\theta$ en radianes$)$



Para convertir de grados a radianes, multiplique por $\dfrac{\pi}{180}$.

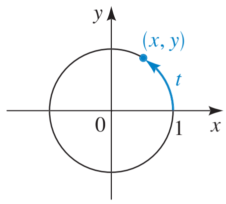
Para convertir de radianes a grados, multiplique por $\dfrac{180}{\pi}$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS NÚMEROS REALES

$\operatorname{sen} t = y \qquad \csc t = \dfrac{1}{y}$

$\cos t = x \qquad \sec t = \dfrac{1}{x}$

$\tan t = \dfrac{y}{x} \qquad \cot t = \dfrac{x}{y}$

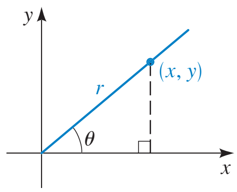


FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{y}{r} \qquad \csc \theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos \theta = \dfrac{x}{r} \qquad \sec \theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan \theta = \dfrac{y}{x} \qquad \cot \theta = \dfrac{x}{y}$

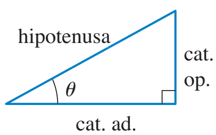


TRIGONOMETRÍA DEL ÁNGULO RECTO

$\operatorname{sen} \theta = \dfrac{\text{Cat. op.}}{\text{hipotenusa}} \qquad \csc \theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{Cat. op.}}$

$\cos \theta = \dfrac{\text{Cat. ad.}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec \theta = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{Cat. ad.}}$

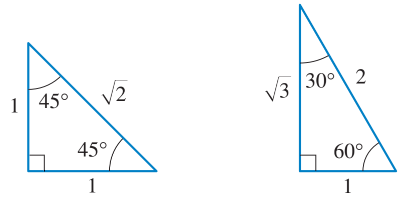
$\tan \theta = \dfrac{\text{Cat. op.}}{\text{Cat. ad.}} \qquad \cot \theta = \dfrac{\text{Cat. ad.}}{\text{Cat. op.}}$



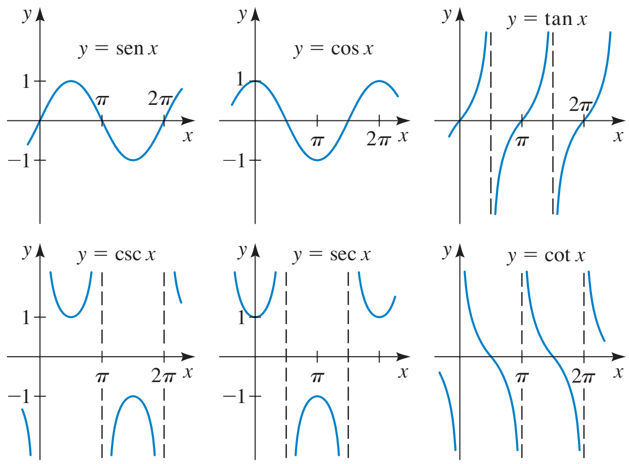
VALORES ESPECIALES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

θ	radianes	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90°	$\pi/2$	1	0	—
180°	π	0	-1	0
270°	$3\pi/2$	-1	0	—

TRIÁNGULOS ESPECIALES

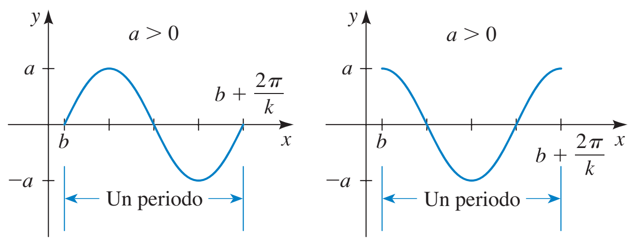


GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



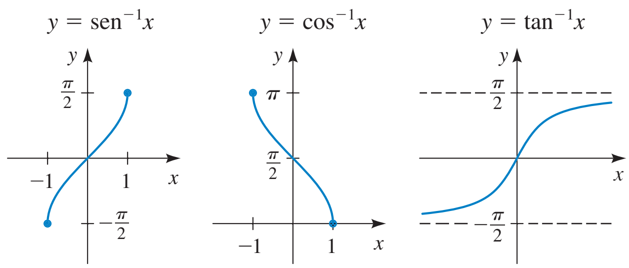
CURVAS SENO Y COSENO

$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \quad (k > 0) \qquad y = a \cos k(x - b) \quad (k > 0)$



amplitud: $|a|$ $\qquad$ periodo: $2\pi/k$ $\qquad$ corrimiento de fase: b

GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS



IDENTIDADES FUNDAMENTALES

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ $\qquad \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $\qquad \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \qquad \cos(-x) = \cos x \qquad \tan(-x) = -\tan x$

IDENTIDADES DE COFUNCIONES

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\qquad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\qquad \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$

$\sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$ $\qquad \csc\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$

IDENTIDADES DE REDUCCIONES

$\operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

$\cos(x + \pi) = -\cos x$ $\qquad \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$

$\tan(x + \pi) = \tan x$ $\qquad \tan\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\cot x$

FÓRMULAS DE SUMA Y RESTA DE ÁNGULOS

$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

$\tan(x + y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$ $\qquad \tan(x - y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

FÓRMULAS DE ÁNGULO DOBLE

$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
$\quad = 2\cos^2 x - 1$
$\quad = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

$\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$

FÓRMULAS DE ÁNGULO MITAD

$\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$

FÓRMULAS PARA REDUCIR POTENCIAS

$\operatorname{sen} \dfrac{u}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos u}{2}}$ $\qquad \cos \dfrac{u}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos u}{2}}$

$\tan \dfrac{u}{2} = \dfrac{1 - \cos u}{\operatorname{sen} u} = \dfrac{\operatorname{sen} u}{1 + \cos u}$

IDENTIDADES PRODUCTO A SUMA Y SUMA A PRODUCTO

$\operatorname{sen} u \cos v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) + \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(u + v) - \operatorname{sen}(u - v)]$

$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u + v) + \cos(u - v)]$

$\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$

$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$

$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x - y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cos \dfrac{x - y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen} \dfrac{x + y}{2} \operatorname{sen} \dfrac{x - y}{2}$

LEYES DE LOS SENOS Y DE LOS COSENOS

Ley de los senos

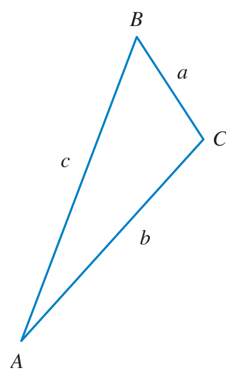
$\dfrac{\operatorname{sen} A}{a} = \dfrac{\operatorname{sen} B}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} C}{c}$

Ley de los cosenos

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



EXPONENTES Y RADICALES

$x^m x^n = x^{m+n}$

$(x^m)^n = x^{mn}$

$(xy)^n = x^n y^n$

$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

$\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$

$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$

$\sqrt[n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

PRODUCTOS ESPECIALES

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

FÓRMULAS DE FACTORIZACIÓN

$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

DESIGUALDADES Y VALOR ABSOLUTO

Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.

Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ca < cb$.

Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ca > cb$.

Si $a > 0$, entonces

$|x| = a$ significa que $x = a$ o $x = -a$.

$|x| < a$ significa que $-a < x < a$.

$|x| > a$ significa que $x > a$ o $x < -a$.

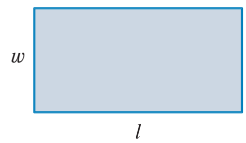
FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Fórmulas del área A, perímetro P, circunferencia C, y volumen V:

Rectángulo

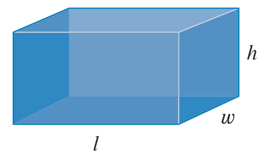
$A = lw$

$P = 2l + 2w$



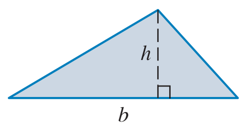
Paralelepípedo

$V = lwh$



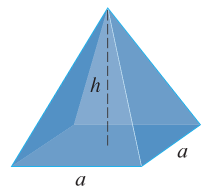
Triángulo

$A = \frac{1}{2}bh$



Pirámide

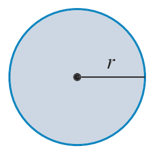
$V = \frac{1}{3}ha^2$



Círculo

$A = \pi r^2$

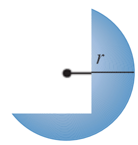
$C = 2\pi r$



Esfera

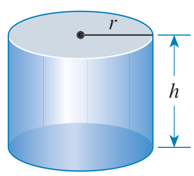
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



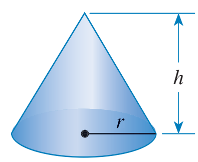
Cilindro

$V = \pi r^2 h$



Cono

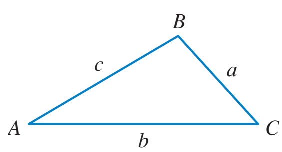
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



FÓRMULA DE HERÓN

$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

donde $s = \dfrac{a + b + c}{2}$



FÓRMULAS DE LA DISTANCIA Y DEL PUNTO MEDIO

Distancia de $P_1(x_1, y_1)$ a $P_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Punto medio de $\overline{P_1P_2}$: $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

RECTAS

Pendiente de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ $\qquad m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Forma punto-pendiente de la ecuación de la recta que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ cuya pendiente es m $\qquad y - y_1 = m(x - x_1)$

Forma simplificada de la ecuación de la recta cuya pendiente es m y cuya ordenada al origen es b $\qquad y = mx + b$

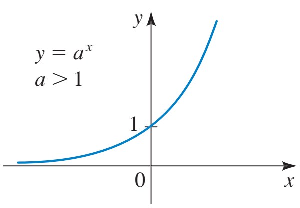
Ecuación simétrica de la recta con intersección $x = a$ e intersección $y = b$ $\qquad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

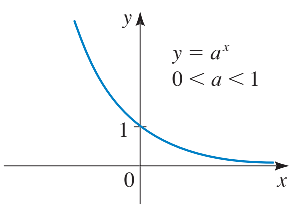
LOGARITMOS

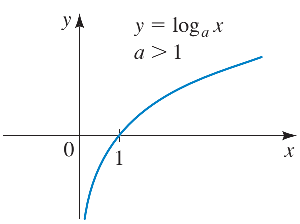
$y = \log_a x \quad$ significa que $\quad a^y = x$

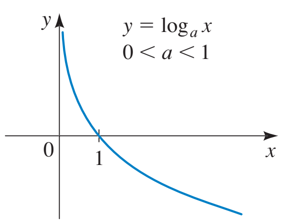
$\log_a a^x = x$	$a^{\log_a x} = x$
$\log_a 1 = 0$	$\log_a a = 1$
$\log x = \log_{10} x$	$\ln x = \log_e x$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	$\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
$\log_a x^b = b \log_a x$	$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



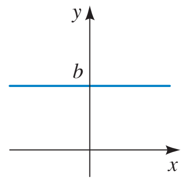




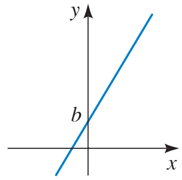


GRÁFICAS DE FUNCIONES

Funciones lineales: $f(x) = mx + b$

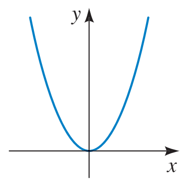


$f(x) = b$

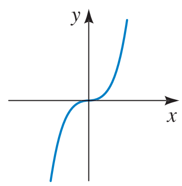


$f(x) = mx + b$

Funciones de potencias: $f(x) = x^n$

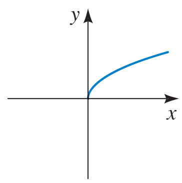


$f(x) = x^2$

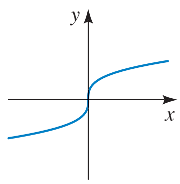


$f(x) = x^3$

Funciones de raíz: $f(x) = \sqrt[n]{x}$

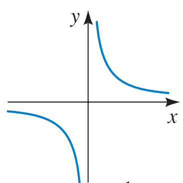


$f(x) = \sqrt{x}$

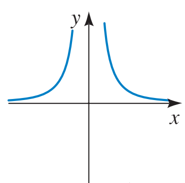


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Funciones recíprocas: $f(x) = 1/x^n$

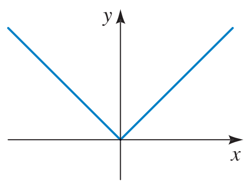


$f(x) = \dfrac{1}{x}$



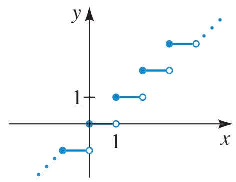
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función de valor absoluto



$f(x) = |x|$

Función del máximo entero



$f(x) = [\![x]\!]$

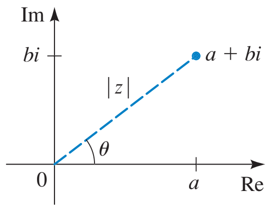
NÚMEROS COMPLEJOS

Para el número complejo $z = a + bi$

el **conjugado** es $\bar{z} = a - bi$

el **módulo** es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

el **argumento** es θ, donde $\tan \theta = b/a$



Forma polar de un número complejo

Para $z = a + bi$, la **forma polar** es

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

donde $r = |z|$ es el módulo de z y θ es el argumento de z

Teorema de DeMoivre

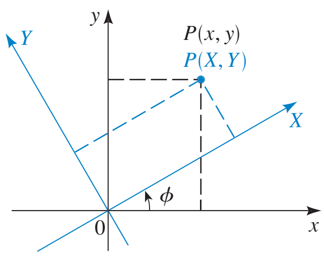
$$z^n = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

$$\sqrt[n]{z} = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{1/n}$$

$$= r^{1/n}\left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$

ROTACIÓN DE EJES



Fórmula de rotación de los ejes

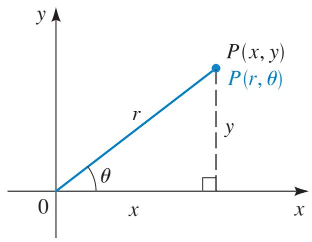
$$x = X \cos \phi - Y \operatorname{sen} \phi$$

$$y = X \operatorname{sen} \phi + Y \cos \phi$$

Fórmula del ángulo de rotación para secciones cónicas

$$\cot 2\phi = \frac{A - C}{B}$$

COORDENADAS POLARES



$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

SUMAS DE POTENCIAS DE ENTEROS

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

DERIVADA

La **tasa de cambio promedio** de f entre a y b es

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La **derivada** de f en a es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

ÁREA BAJO LA GRÁFICA DE f

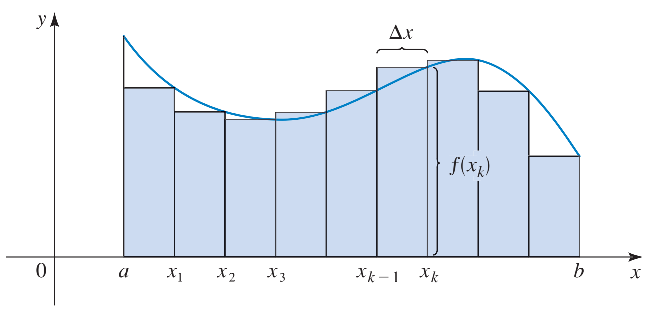
El **área bajo la gráfica de f** en el intervalo $[a, b]$ es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$$

donde

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$x_k = a + k\,\Delta x$$



¿Qué se necesita saber antes de estudiar cálculo? ¿Con qué herramientas deben contar los maestros para ayudar a sus alumnos a prepararse para el cálculo? Estas dos preguntas motivaron a James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson a escribir este libro. Además de la habilidad técnica –opinan–, también hay que entender con claridad los conceptos. Un estudiante también necesita poder apreciar la fuerza y la utilidad de la matemática para modelar el mundo real; por tanto, aquí encontrarán un gran acervo de aplicaciones del mundo real y ejemplos de ingeniería, física, química, negocios, biología, estudios ambientales y de otros campos.

Características

- Más de 20% de los ejercicios es nuevo en esta edición, así como los ejercicios de aplicación.
- El capítulo 1 termina con la sección *Enfoque en la resolución de problemas*, la cual esboza los pasos generales del proceso para solucionarlos. Dichos pasos y principios son adaptaciones de *How To Solve It* de George Polya.
- En esta edición, cada conjunto de ejercicios incluye un grupo de ejercicios de aplicación.
- Edición a color.

ISBN-13: 978-607481406-4
ISBN-10: 607481406-6

CENGAGE Learning™

http://latinoamerica.cengage.com

9 786074 814064